

Allgemeine Kissoiden

Pascal Praß und Adrian De Lon

Seminar über höhere Kurven
bei Prof. Dr. Duco van Straten
Wintersemester 2016/17

Klassische Konstruktionen

Wir wollen zunächst die Würfelverdoppelung und die Winkeldreiteilung vorstellen, zwei klassische Probleme der Antike, zu deren Lösung man die später folgenden Kurven nutzen kann.

Diese beiden Probleme lassen sich nicht mit Zirkel und Lineal lösen. Um das zu beweisen, übersetzen wir die klassischen Konstruktionen in die Sprache der Algebra.

Um die Bilder der Konstruktionen übersichtlich zu halten, setzen wir voraus, dass wir Längen übertragen können und senkrechte sowie parallele Geraden direkt konstruieren können. Konstruktionen dieser Art sind äquivalent zu solchen mit Lineal und instabilen Zirkel und ersparen uns mehrere Hilfskonstruktionen.

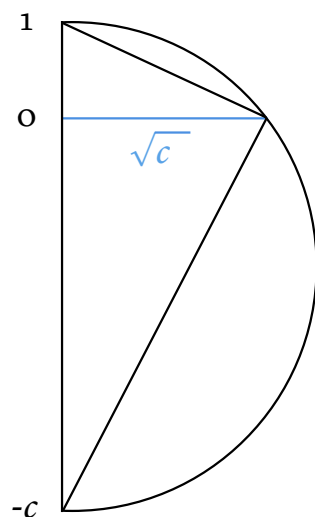
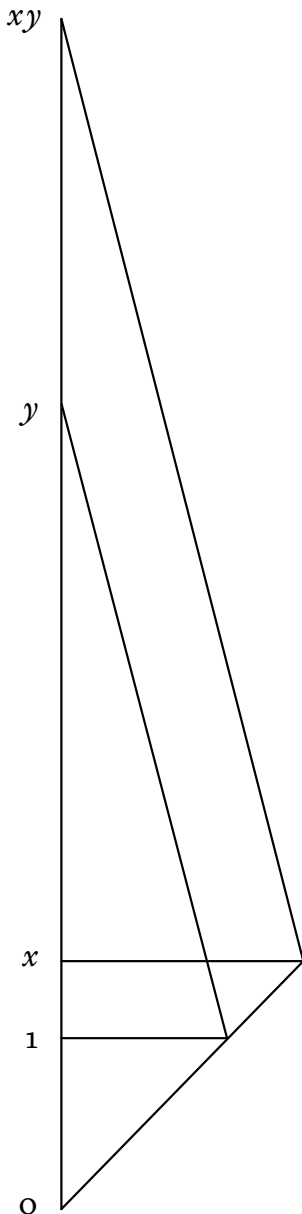
Für zwei gegebene Punkte können wir die Gerade durch diese Punkte ziehen, oder einen Kreis durch einen Punkt mit dem anderen als Mittelpunkt konstruieren. Durch schneiden von Geraden und Kreisen miteinander erhalten wir neue Punkte in der Ebene. Wir starten mit zwei Punkten $(0,0)$ und $(1,0)$ in der Ebene.

Eine nicht-negative Zahl a heißt konstruierbar, wenn wir den Punkt $(a,0)$ in der Ebene auf diese Weise konstruieren können.

Punkte der Form $(z,0)$ mit ganzzahligen z lassen sich konstruieren, in dem wir iterierte Kreise mit Radius $r = 1$ ziehen. Die erste Abbildung am Seitenrand zeigt eine Konstruktion um das Produkt zweier Zahlen zu erhalten. Die selbe Konstruktion kann für Division genutzt werden in dem wir substituieren

$$x \rightsquigarrow a \quad xy \rightsquigarrow b \quad y \rightsquigarrow \frac{b}{a}.$$

Auf diese Weise können wir also alle rationalen Punkte nur durch Geraden konstruieren. Die zweite Abbildung zeigt eine Konstruktion für die Quadratwurzel einer Zahl. Da die rationalen Zahlen unter Wurzelziehung nicht abgeschlossen sind, müssen wir den Körper \mathbb{Q} erweitern.



Körpererweiterungen

Ist c eine positive rationale Zahl, aber \sqrt{c} ist irrational, so bezeichnen wir mit $Q[\sqrt{c}]$ den Körper $\{p + q\sqrt{c} \mid p, q \in Q\}$. Wir nennen $Q[\sqrt{c}]$ eine quadratische Erweiterung von Q . Sind

$$\begin{aligned} F_0 &= Q \\ F_1 &= F_0[\sqrt{c_1}] \\ F_2 &= F_1[\sqrt{c_2}] \\ &\vdots \\ F_k &= F_{k-1}[\sqrt{c_k}] \end{aligned}$$

so nennen wir F_0, F_1, \dots, F_k eine iterierte quadratische Körpererweiterung von Q .

Die Vereinigung aller solchen Erweiterungen bezeichnen wir mit E . Mit unserer bisherigen Konstruktion können wir alle Punkte in E^2 konstruieren.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wir wollen zeigen, dass E genau allen konstruierbaren Zahlen entspricht. Dazu zeigen wir zuerst mehrere kurze Lemmata. Im folgenden bezeichnen wir einen beliebigen Körper mit F .

Lemma. Die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte in F^2 hat Koeffizienten in F .

Beweis. Seien (a, b) und (u, v) zwei solche Punkte. Da $(v - b)x - (u - a)y + (ub - av) = 0$ die Gleichung der Gerade durch diese Punkte ist und F ein Körper ist, folgt die Behauptung.

Lemma. Falls der Mittelpunkt eines Kreises und ein beliebiger Punkt auf dem Kreis Koordinaten in F haben, so hat die Gleichung des Kreises Koeffizienten in F .

Beweis. Sei (p, q) der Mittelpunkt und (a, b) ein Punkt auf dem Kreis. Die Gleichung eines solchen Kreises ist

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - (a - p)^2 - (b - q)^2 = 0$$

und nach ausmultiplizieren

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + a(2p - a) + b(2q - b) = 0$$

mit Koeffizienten in F .

Lemma. Der Schnittpunkt zweier Geraden zu einer Polynomgleichung mit Koeffizienten in F hat Koordinaten in F .

Beweis. Es seien zwei nicht parallele Geraden gegeben durch

$$\begin{aligned}ax + by + c &= 0 \\ux + vy + w &= 0.\end{aligned}$$

Wir erhalten die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$x_0 = \frac{bw - cv}{av - bu} \quad y_0 = \frac{cu - aw}{av - bu}$$

indem wir in den Gleichungen jeweils y oder x isolieren. Da die Geraden nicht parallel sind ist $av - bu \neq 0$. Da alle Koeffizienten in F liegen, sind auch x_0 und y_0 in F .

Lemma. Die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises zu Polynomgleichungen mit Koeffizienten in F haben Koordinaten in einer quadratischen Erweiterung von F .

Beweis. Die Gerade sei gegeben durch $ax + by + c = 0$ und der Kreis durch $x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0$. Mit

$$d = (ub - ag)^2 + 4c(au + gb - c) - 4w(a^2 + b^2)$$

wobei $d \geq 0$, da sich sonst die Gerade und der Kreis nicht schneiden, lauten die Koordinaten der Schnittpunkte

$$\begin{aligned}x_{0,1} &= \frac{abv - 2ac - b^2u \pm b\sqrt{d}}{2(a^2 + b^2)} \\y_{0,1} &= \frac{abu - 2bc - a^2v \pm a\sqrt{d}}{2(a^2 + b^2)}.\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) liegen somit in der quadratischen Körpererweiterung $F[\sqrt{d}]$. Falls es ein e in F gibt mit $e^2 = d$, liegen sie sogar in F selbst.

Lemma. Die Schnittpunkte zweier Kreise mit Koeffizienten in F haben Koordinaten in F .

Beweis. Das Gleichungssystem der beiden Kreise

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\x^2 + y^2 + ux + vy + w &= 0\end{aligned}$$

lässt sich umformen in das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(a - u)x + (b - v)y + (c - w) &= 0 \\x^2 + y^2 + ux + vy + w &= 0\end{aligned}$$

indem wir die zweite Gleichung von der ersten subtrahieren. Die erste Gleichung beschreibt nun eine Gerade als Polynomgleichung mit Koeffizienten in F und der Beweis folgt sofort aus dem vorherigen Lemma.

Theorem. Die konstruierbaren Punkte entsprechen E^2 .

Beweis. Wir hatten schon gezeigt, dass alle Punkte in E^2 konstruierbar sind. Um die Umkehrung zu zeigen, nutzen wir die vier Lemmata.

Da wir mit den Punkten $(0, 0)$ und $(0, 1)$ in $F^2 = Q^2$ starten und in den Lemmata gezeigt haben, dass wir nur neue Punkte im Körper selbst oder in quadratischen Körpererweiterungen konstruieren können, folgt direkt, dass alle konstruierbaren Punkte Koordinaten in E besitzen.

Somit entsprechen die konstruierbaren Zahlen genau den nicht-negativen Zahlen in E .

Nullstellen in quadratischen Erweiterungen

Lemma. Sei $F[\sqrt{c}]$ eine quadratische Körpererweiterung von F und q ein Polynom dritten Grades mit Koeffizienten in F . Besitzt q eine Nullstelle in $F[\sqrt{c}]$, so hat q ebenfalls eine Nullstelle in F .

Beweis. Sei $a \in F[\sqrt{c}]$ mit $q(a) = 0$. Falls $a \in F$ so ist nichts zu zeigen. Andernfalls definiere die Konjugation $*$ in $F[\sqrt{c}]$ durch

$$(x + y\sqrt{c})^* = x - y\sqrt{c}.$$

Da $a \notin F$, gilt $a \neq a^*$ und deshalb ist a^* eine weitere Nullstelle von f .

$$q(a^*) = q(a)^* = 0^* = 0$$

Da $(x - a)$ und $(x - a^*)$ Teiler von q sind, lässt sich q faktorisieren als $q(x) = (x - a)(x - a^*)(x - b)$, wobei $b \in F[\sqrt{c}]$. Die Nullstelle b muss sogar in F liegen, denn sonst wäre b^* eine weitere, von a , a^* und b verschiedene Nullstelle. Dies ist nicht möglich, da q als Polynom dritten Grades nur drei Nullstellen besitzen kann. Somit ist dieses b die gesuchte Nullstelle.

Konstruierbarkeit der Nullstellen eines rationalen kubischen Polynoms

Theorem. Sei q ein kubisches Polynom mit rationalen Koeffizienten, aber ohne rationale Nullstellen. Dann sind die Nullstellen von q nicht konstruierbar.

Beweis. Angenommen es gibt eine konstruierbare Nullstelle a von q , dann existiert eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen

$$Q = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_k$$

derart, dass $a \in F_k$. Da die Koeffizienten in $Q = F_0 \subseteq F_{k-1}$ liegen, folgt aus dem vorherigen Lemma, dass q ebenfalls eine Nullstelle in F_{k-1} hat. Somit hat q nach wiederholtem Anwenden des Lemmas eine Nullstelle in $F_0 = Q$. Dies ist ein Widerspruch, denn q besitzt keine rationale Nullstelle. Es folgt, dass es kein solches a gibt.

Würfelverdoppelung

Die Aufgabe der Würfelverdoppelung ist eines der klassischen Probleme der Antike. Für eine gegebene Länge a soll eine Länge x gefunden werden, so dass $x^3 = 2a^3$. Ein Würfel mit Seitenlänge x hat also das doppelte Volumen im Vergleich zu einem mit Seitenlänge a .

Einer Legende nach wurden die Bewohner der Insel Delos von ihrem Orakel aufgefordert, das Volumen des würfelförmigen Altar im Tempel des *Appóllon* zu verdoppeln. Deswegen wird die Würfelverdoppelung auch als Delisches Problem und der gesuchte Skalierungsfaktor $2^{1/3}$ als Delische Konstante bezeichnet.

Die Mathematiker der Antike versuchten diese Aufgabe nur mit klassischen Konstruktionen, das heißt mit Zirkel und Lineal, zu lösen. Erst zweitausend Jahre später wurde von Pierre Wantzel gezeigt, dass dies nicht möglich ist.

Wir benutzen für den Beweis der Unmöglichkeit das Ergebnis über die Konstruierbarkeit der Nullstellen von rationalen kubischen Polynomen aus dem letzten Abschnitt.

Die delische Konstante $2^{1/3}$ ist eine Nullstelle des Polynoms dritten Grades mit rationalen Koeffizienten $p(x) = x^3 - 2$. Falls wir zeigen können, dass p keine rationale Nullstellen besitzt, folgt dass $2^{1/3}$ nicht konstruierbar ist. Wir nehmen also an, es gibt teilerfremde und ganzzahlige a, b mit $p(a/b) = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}0 &= \frac{a^3}{b^3} - 2 \\0 &= a^3 - 2b^3 \\2b^3 &= a^3.\end{aligned}$$

Da a ein Teiler von $2b^3$ ist, aber teilerfremd zu b ist, muss a ein Teiler von 2 sein. Andererseits ist b ein Teiler von a^3 , woraus folgt dass $b = \pm 1$. Es gilt also entweder $a/b = \pm 1$ oder $a/b = \pm 2$. Direktes Einsetzen dieser Möglichkeiten in p zeigt, dass es keine Nullstellen sind. Unsere Annahme war falsch und es gibt keine solchen a und b . Das Polynom p besitzt also keine rationale Nullstellen. Somit ist $2^{1/3}$ nicht konstruierbar.

Dreiteilung eines Winkels

Falls sich ein beliebiger Winkel dreiteilen lässt, so auch der Winkel $\pi/3$. Das bedeutet, dass die Zahl $\cos(\pi/9)$ konstruierbar ist.

Aus den trigonometrischen Formeln

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

lassen sich die Formeln

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 = 2(\cos \theta)^2 - 1$$

$$\sin(3\theta) = (\sin \theta)(4(\cos \theta)^2 - 1)$$

$$\cos(3\theta) = 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta$$

herleiten. Setzen wir $\theta = \frac{\pi}{9}$ in der letzten Gleichung erhalten wir

$$4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} \right) \right)^3 - 3 \cos \left(\frac{\pi}{9} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Setzen wir nun $x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{9} \right)$, subtrahieren $\frac{1}{2}$ von beiden Seiten und multiplizieren mit 2, erhalten wir ein Polynom dritten Grades

$$p(x) = x^3 - 3x - 1$$

mit $2 \cos \left(\frac{\pi}{9} \right)$ als Nullstelle. Um das Theorem über die Konstruierbarkeit der Nullstellen eines kubischen Polynoms nutzen zu können, müssen wir zeigen, dass p keine rationalen Nullstellen besitzt. Wir nehmen also an, es gibt ganzzahlige und teilerfremde a, b mit $p \left(\frac{a}{b} \right) = 0$. Wir setzen ein und erhalten nach kurzem Umformen die Gleichungen

$$a(a^2 - 3b^2) = b^3$$

$$b^2(3a + b) = a^3$$

Daraus folgt, dass $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ und somit $\frac{a}{b} = \pm 1$. Es gilt aber

$$p(1) = 1 - 3 - 1 = -3 \neq 0$$

$$p(-1) = -1 + 3 - 1 = 1 \neq 0.$$

Das Polynom p besitzt also keine rationale Nullstellen. Das heißt $2 \cos \left(\frac{\pi}{9} \right)$ ist nicht konstruierbar und somit $\cos \left(\frac{\pi}{9} \right)$ ebenfalls nicht. Wir haben einen Winkel $\frac{\pi}{3}$ gefunden, der sich nicht dreiteilen lässt.

Allgemeine Kissoiden

Betrachte zwei Kurven f und g , sowie einen Punkt P . Für eine Gerade durch P , die f und g schneidet, sei C der Punkt auf der Geraden mit

$$PC = PG - PF = FG.$$

Die Ortskurve aller solcher Punkte C wird als (verallgemeinerte) Kissoide k von f und g bezüglich P bezeichnet.

Falls die Kurven f und g als Polargleichungen gegeben sind, dann lässt sich die Kissoide bezüglich dem Ursprung schreiben als

$$r_k = r_g - r_f$$

Wir erkennen, dass die Kissoide von g und f die am Punkt P gespiegelte Kissoide von f und g ist.

Falls die Kurven f und g in Parameterform gegeben sind

$$x = f(t), y = t x \quad \text{und} \quad x = g(t), y = t x$$

dann ist die Kissoide von f und g bezüglich dem Ursprung gegeben durch

$$x = f(t) - g(t), y = t x$$

Für alle folgenden Kurven wählen wir stets den Ursprung als Pol der allgemeinen Kissoiden.

Gerade

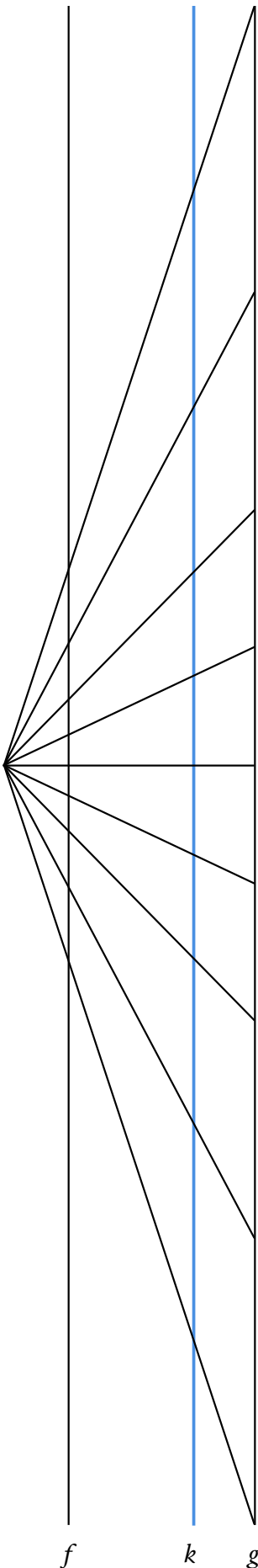
Als erstes Beispiel betrachten wir die Kissoide zweier parallelen Geraden $f(x, y) = x - 1$ und $g(x, y) = x - 5$. Die Polargleichung der Geraden erhalten wir durch Einsetzen von $x = r \cos \theta$

$$r_f = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{sowie} \quad r_g = \frac{5}{\cos \theta}.$$

Somit lautet die Polargleichung der Kissoiden von f und g

$$r_k = \frac{5 - 1}{\cos \theta} = \frac{4}{\cos \theta}$$

Die Kissoide ist also die Gerade $k(x, y) = x - 4 = 0$. Falls wir die Geraden f und g vertauschen erhalten wir die Gerade $x + 4 = 0$, die Punktspiegelung von k am Ursprung.

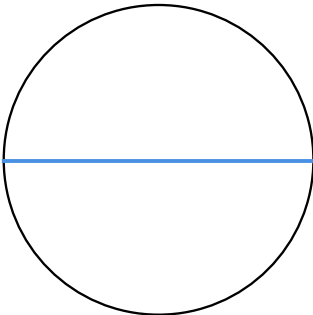


Kissoide des Diokles

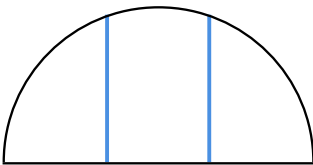
Diokles erfand die Kissoide vor etwa 2200 Jahren, um das Problem der Würfelverdoppelung geometrisch zu lösen. Der Name stammt von dem griechischen Wort *κισσός*, das Efeu bedeutet.

Wir betrachten zunächst eine historische Konstruktion und werden dann später sehen, dass es sich bei dieser Kurve auch tatsächlich um eine Kissoide im allgemeinen Sinn handelt.

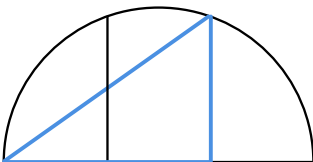
Wir starten mit einem Kreis und markieren seinen Durchmesser. Dann konstruieren wir zwei zu dem Durchmesser senkrechte Geraden, die den gleichen Abstand zum Kreismittelpunkt haben.



Schließlich ziehen wir eine Gerade von einem Schnittpunkt des Durchmessers mit dem Kreis zu dem Schnittpunkt einer der senkrechten Geraden mit dem Kreis. Der Schnittpunkt dieser neuen Geraden mit der anderen senkrechten Gerade liegen auf der gesuchten Kurve.



Um die Polynomgleichung der Kissoiden herzuleiten führen wir Koordinaten ein. Wir setzen den Ursprung unseres Koordinatensystems am linken Schnittpunkt zwischen Durchmesser und Kreis und machen den Durchmesser zur horizontalen Achse. Damit wird die Kreistangente am Ursprung zur vertikalen Achse. Wir bezeichnen den Durchmesser nun mit $2a$ und den Abstand der näher am Ursprung liegenden vertikalen Gerade als x .

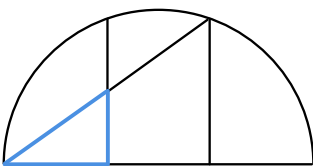


Nach dem Höhensatz von Euklid ist Höhe des großen blauen Dreiecks

$$h = \sqrt{x(2a - x)}$$

und nach dem Strahlensatz gilt für die Höhe y des kleineren Dreiecks

$$y : h = x : (2a - x) \quad \text{und somit} \quad y : x = h : (2a - x).$$

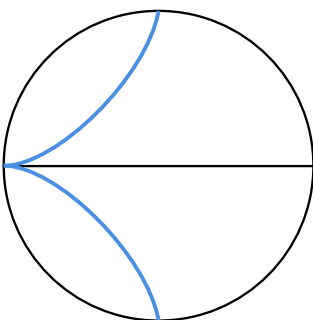


Kombinieren wir die beiden Gleichungen erhalten wir

$$y = \frac{x}{2a - x} \sqrt{x(2a - x)}$$

Die Punkte (x, y) und $(x, -y)$ liegen auf der Kissoide. Somit ist die Kissoide die Nullstellenmenge des Polynoms

$$d(x, y) = x^3 - y^2(2a - x) = x^3 + xy^2 - 2ay^2.$$



Als allgemeine Kissoide

Wir betrachten nun die Kissoide des Diokles als allgemeine Kissoide der Geraden $g(x, y) = x - 2a = 0$ und des Kreises

$$c(x, y) = (x - a)^2 + y^2 - a^2 = x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Die Polargleichung der Geraden lautet

$$r = 2a \sec \theta$$

und mit $r^2 - 2ar \cos \theta = 0$ erhalten wir die Polargleichung des Kreises

$$r = 2a \cos \theta.$$

Die Polargleichung des rechten Zweiges der Kissoide des Diokles ist nun die Differenz dieser Ausdrücke

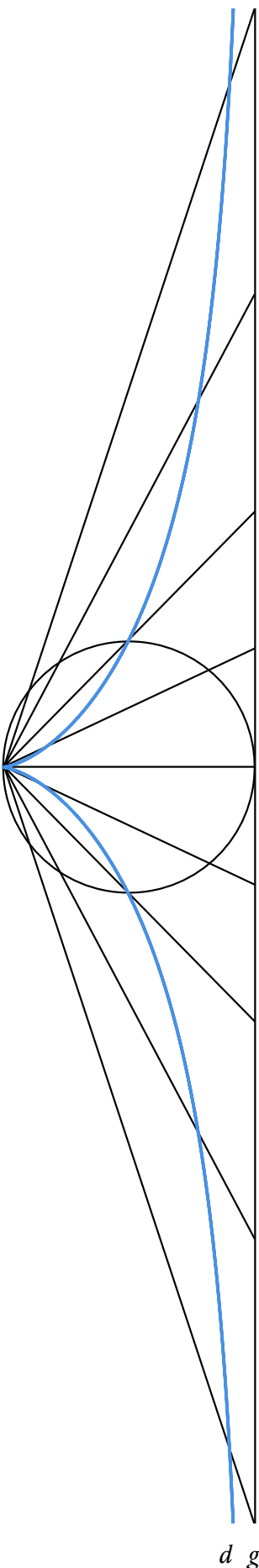
$$r = 2a (\sec \theta - \cos \theta) = 2a \sin \theta \tan \theta.$$

Eine längere Rechnung liefert die Polynomgleichung für $d(x, y)$, die wir schon mit Hilfe der klassischen Konstruktion bestimmt hatten

$$\begin{aligned} 0 &= 2a \sin \theta \tan \theta - r \\ &= 2a (\sin \theta)^2 - r \cos \theta \\ &= 2a (\sin \theta)^2 - r \cos \theta ((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \\ &= (2a - r \cos \theta) (\sin \theta)^2 - r (\cos \theta)^3 \\ &= r^2 (2a - r \cos \theta) (\sin \theta)^2 - r^3 (\cos \theta)^3 \\ &= y^2 (2a - x) - x^3 \\ &= x^3 + xy^2 - 2ay^2 = d(x, y). \end{aligned}$$

Um schließlich die Parametergleichung zu bestimmen, substituieren wir $y = xt$ in der Polynomgleichung und erhalten damit

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2} \quad \text{sowie} \quad y = tx = \frac{2at^3}{1+t^2}.$$



d g

Alternative Konstruktion der Kissoide

Die Kissoide des Diokles lässt sich auch mit einer doppelten Projektion konstruieren. Dies ist besonders nützlich für einen Apparat, der eine Kissoide des Diokles mechanisch zeichnen soll.

Sei P der Ursprung und $x = 2a$ eine Gerade. Parametrisiere einen Punkt G auf dieser Geraden mit $G = (2a, 2at)$. Die Projektion von G auf die Gerade h durch P , die parallel zu g liegt, ist $H = (0, 2at)$. Die Gerade durch P und G ist $y = tx$. Die Gerade durch H die senkrecht auf dieser Geraden steht ist

$$t(y - 2at) + x = 0$$

Durch Einsetzen von $y = tx$ finden wir den Schnittpunkt $D = (x, y)$

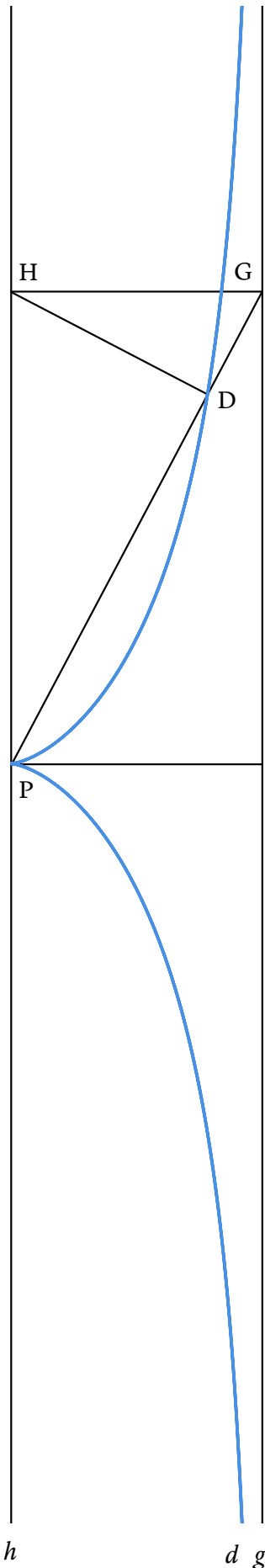
$$0 = t(tx - 2at) + x$$

$$2at^2 = x(t^2 + 1)$$

$$x = \frac{2at^2}{t^2 + 1}$$

$$y = tx = \frac{2at^3}{t^2 + 1}$$

Dieser Punkt ist die Projektion von H auf die Gerade durch P und G . Die Parametergleichung ist die der Kissoide des Diokles, der Punkt D liegt also auf der Kissoiden.



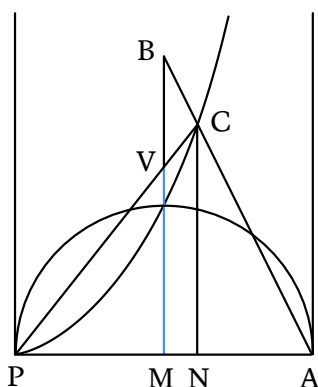
Würfelverdoppelung mit der Kissoiden

Nun wollen wir die Kissoide des Diokles nutzen, um das Würfelverdoppelungsproblem zu lösen. Das Problem ist äquivalent zu der Suche nach einer doppelten Proportion zwischen a und $2a$

$$a : v = v : w = w : 2a$$

Falls wir ein solches v konstruieren können, ist das Problem der Würfelverdoppelung gelöst, denn v ist die gesuchte Seitenlänge mit

$$v^3 = a^3(v : a)^3 = a^3(v : a)(w : v)(2a : w) = a^3(2a : a) = 2a^3.$$



Wir beginnen mit der Kissoiden $x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$ und setzen

$$\begin{aligned} P &= (0, 0) & M &= (a, 0) \\ A &= (2a, 0) & B &= (a, 2a). \end{aligned}$$

Die Gerade durch A und B schneidet die Kissoide in dem Punkt C mit den Koordinaten (x, y) . Die Projektion dieses Punktes auf PA bezeichnen wir als N und den Schnittpunkt von PC mit MB als V.

Da $C = (x, y)$ auf der Kissoiden liegt, ist die Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

erfüllt. Somit gilt für die Abstände der bisher definierten Punkte

$$|NC|^2 = |PN|^3 : |PA - PN| = |PN|^3 : |NA|$$

und nach Teilen durch $|PN|^3$ Multiplikation mit $|NC|$

$$|NC^3| : |PN|^3 = |NC| : |NA|.$$

Da die die folgenden Dreiecke jeweils ähnlich sind

$$PCN \sim PVM \quad BMA \sim CNA$$

folgt sofort, dass auch das folgende Verhältnis besteht

$$|MV|^3 : |PM|^3 = |MB| : |MA|.$$

Setzen wir $|MV| = v$ so gilt also

$$\frac{v^3}{a^3} = \frac{2a}{a}$$

und schließlich sehen wir, dass v die gesuchte Größe ist mit

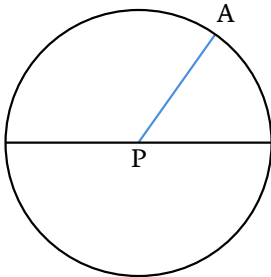
$$v^3 = 2a^3.$$

Strophoide

Sei g eine Kurve und P sowie A zwei Punkte. Auf einer Geraden durch P , die g in G schneidet, gibt es zwei Punkte V und W mit

$$|VG| = |WG| = |AG|$$

Die Strophoide s von g bezüglich dem Pol P und dem fixierten Punkt A ist die Ortskurve aller solcher Punkte V und W . Der Name stammt von dem griechischen Wort *stróphos* für Band oder Seil.

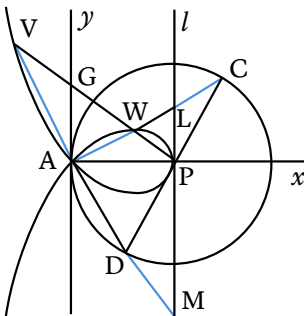


Als Beispiel betrachten wir eine Gerade die durch den Pol P geht. Dann schneiden all anderen Geraden durch P diese Gerade in P selbst. Die Strophoide von g ist also die Ortskurve aller Punkte, deren Distanz zu P die selbe ist wie die von P zu A . Sie ist ein Kreis.

Gerade Strophoide

Wir betrachten einen Kreises mit Radius b um den Pol $P = (b, 0)$ und den fixierten Punkt A im Ursprung $(0, 0)$. Außerdem sei l die zur x -Achse senkrechte Gerade durch P . Ein beliebiger Strahl durch A schneide die Gerade l im Punkt L und den Kreis in C . Der Punkt W des Strahls ist Punkt einer geraden Strophoide, wenn gilt

$$|AW| = |LC|$$



Die Gerade CP schneidet den Kreis ein weiteres Mal in D . Wir verbinden A mit D und verlängern die Gerade auf der einen Seite bis zum Schnitt mit l in M und auf der anderen Seite bis sie die Verlängerung von PW in V schneidet.

Behauptung: V ist nun ebenfalls Punkt der geraden Strophoide.

Beweis: Aus dem Satz von Thales folgt die Kongruenz von $\triangle APL$ und $\triangle WPC$. Damit ist $\sphericalangle WPC = \frac{\pi}{2}$, also auch $\sphericalangle DPV$. Aus $\sphericalangle APM = \frac{\pi}{2}$ folgt nun:

$$\sphericalangle APV = \sphericalangle MPD$$

Aus der Gleichschenkligkeit von $\triangle DPA$ (A und D liegen auf einem Kreisbogen um P) folgt weiter:

$$\begin{aligned} |AP| &= |DP| \\ \sphericalangle PAV &= \sphericalangle MDP \\ \Rightarrow \triangle VAP &\cong \triangle DMP \\ \Rightarrow |AV| &= |MD| \end{aligned}$$

Behauptung: Die gerade Strophoide ist eine allgemeine Strophoide bezüglich einer Geraden g durch den fixierten Punkt A senkrecht zu AP .

Beweis: Sei g eine Gerade entlang der y -Achse und der Schnittpunkt mit PV heiße G . Da $|VP| = |PM|$ ist nach dem Strahlensatz $|VG| = |GA|$. Aus der Kongruenz von ΔAPL und ΔWPC folgt $|PW| = |PL|$ und aus der Ähnlichkeit von ΔGAW und ΔWPL $|GA| = |GW|$. Zusammen ergibt sich

$$|VG| = |WG| = |GA|$$

Behauptung: Die gerade Strophoide ist eine allgemeine Kissoide bezüglich der Geraden $l(x, y) = x - b = 0$ und des Kreises $c(x, y) = (x - b)^2 + y^2 - b^2 = 0$.

Beweis 1: Aus dem Verhältnis $(PL : AP) = (x : y)$ (Koordinaten des Strophoidenpunktes W) folgt $PL = \frac{yb}{x}$. Weiterhin sind wegen $|AW| = |LC|$ die Koordinaten von C : $x_C = b + x$ und $y_C = b\frac{y}{x} + y$. Eingesetzt in die Gleichung des Kreises folgt:

$$\begin{aligned} (b + x - b)^2 + \left(b\frac{y}{x} + y\right)^2 &= b^2 \\ \Rightarrow y^2 &= x^2 \frac{b^2 - x^2}{(b + x)^2} = x^2 \frac{b - x}{b + x} \\ \Rightarrow y &= x \sqrt{\frac{b - x}{b + x}} \end{aligned}$$

Wechselt man nun mit $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$ in Polarkoordinaten, erhält man:

$$\begin{aligned} r^2 \sin^2 \theta &= r^2 \cos^2 \theta \frac{b - r \cos \theta}{b + r \cos \theta} \\ b \sin^2 \theta + r \sin^2 \theta \cos \theta &= b \cos^2 \theta - r \cos^3 \theta \\ b(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) &= -r \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ -b \cos 2\theta &= -r \cos \theta \\ r &= b \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Diese Polargleichung lässt sich auch schreiben als:

$$r_s = b \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = b \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos \theta} = b (2 \cos \theta - \sec \theta) = r_c - \eta$$

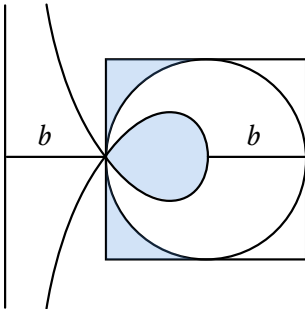
Somit ist die gerade Strophoide die allgemeine Kissoide der Geraden $\eta = b \sec \theta$ und des Kreises $r_c = 2 b \cos \theta$.

Beweis 2: Die Konstruktionsbedingung $|AW| = |LC|$ ist die Bedingung fur eine allgemeine Kissoide mit Punkt W , wobei L der Schnittpunkt mit der Geraden l , C der Schnittpunkt mit dem Kreis c und A der feste Punkt ist.

Quadratur der Strophoide

Zunächst berechnen wir das allgemeine Integral der Strophoide mit der Polargleichung $r = b \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2 \theta}$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int r^2 d\theta = \frac{b^2}{2} \int \frac{\cos^2 2\theta}{(\cos \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{b^2}{2} \int \frac{(2 \cos^2 \theta - 1)^2}{(\cos \theta)^2} d\theta = \frac{b^2}{2} \int \frac{4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1}{(\cos \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{b^2}{2} \int \left(4 \cos^2 \theta - 4 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta = \frac{b^2}{2} [\sin 2\theta + \tan \theta - 2\theta] \end{aligned}$$



Die obere Hälfte der Schleife ist parametrisiert mit $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Somit erhalten wir für die Schleifenfläche S:

$$S = 2 \cdot \frac{b^2}{2} [\sin 2\theta + \tan \theta - 2\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = b^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

Um die Fläche zwischen Asymptote und Kurve zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Bereich $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Die Fläche J_1 beginnt unterhalb der Geraden mit $\theta = \frac{\pi}{4}$ und wird von der Asymptote ($x = -b$ bzw. $r = \frac{-b}{\cos \theta}$) und der y-Achse begrenzt. Von ihr subtrahieren wir J_2 , die Fläche zwischen dem unteren Zweig der Kurve und der y-Achse.

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{b^2}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{(\cos \theta)^2} d\theta = \frac{b^2}{2} [\tan \theta]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \\ J_2 &= \frac{b^2}{2} [\sin 2\theta + \tan \theta - 2\theta]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \\ J &= J_1 - J_2 = \frac{b^2}{2} [2\theta - \sin 2\theta]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right] \end{aligned}$$

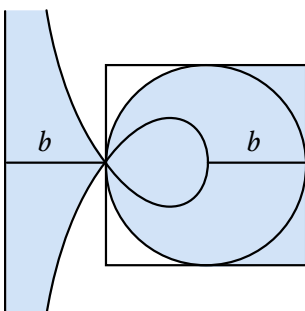
Somit erhalten wir, durchs Addieren der fehlenden Fläche $\frac{b^2}{2}$ zwischen der Geraden, der Asymptoten und der x-Achse, die untere Hälfte der gesuchten Fläche:

$$\frac{F}{2} = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right] + \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right)$$

Die Gesamtfläche eingeschlossen zwischen der Asymptoten und der Kurve ist demnach

$$F = b^2 \left(2 + \frac{\pi}{2} \right)$$

Addiert zu der Schleifenfläche S erhalten wir $4b^2$, die Fläche eines Quadrates mit Seitenlänge $2b$. Außerdem fällt auf, dass die Differenz πb^2 der beiden Flächen dem Inhalt des Kreises mit Durchmesser $2b$ entspricht, an welchem die Kurve konstruiert wurde.



Trisektrix von Maclaurin

Die Trisektrix ist beschrieben über den Schnittpunkt P zweier Strahlen, welche sich um die Punkte S und O mit Abstand $2a$ drehen. Dabei dreht sich der Strahl um O dreimal so schnell wie der um S . Wir definieren $SP = \rho$ mit $\angle PSX = \psi$ und $OP = r$ mit $\angle POX = \phi = 3\psi$.

Aus den definierten Winkeln folgt $\angle OPS = 2\psi$ und damit ergibt sich nach dem Sinussatz:

$$\frac{r}{2a} = \frac{\sin \psi}{\sin 2\psi} = \frac{\sin \psi}{2 \sin \psi \cos \psi} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos \psi} = \frac{a}{\cos \frac{\phi}{3}}$$

Dies ist die Polargleichung für den Pol in O . Da sich P auch über ρ ausdrücken lässt, ergibt sich $\rho \sin \psi = r \sin 3\psi$. Wenden wir die gerade bestimmte Polargleichung und eine Relation für $\sin 3\psi$ an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \rho \sin \psi &= \frac{a}{\cos \psi} (3 \sin \psi - 4 \sin^3 \psi) \\ \rho &= \frac{a}{\cos \psi} (3 - 4 \sin^2 \psi) \\ &= \frac{a}{\cos \psi} (4 \cos^2 \psi - 1) \\ &= 4a \cos \psi - \frac{a}{\cos \psi} \end{aligned}$$

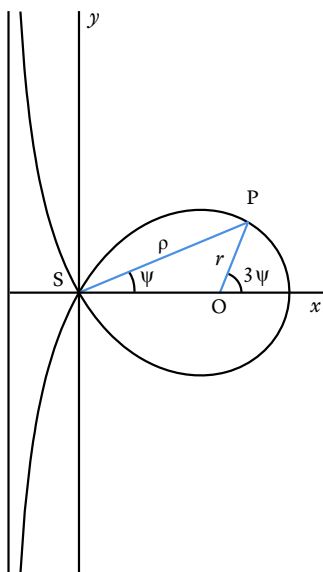
Dies ist die Polargleichung für den Pol S . In ihr erkennen wir die allgemeine Kissoide aus dem Kreis $c(x, y) = (x - 2a)^2 + y^2 - (2a)^2 = 0$ und der Geraden $g(x, y) = x - a = 0$.

In kartesischen Koordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{4ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \\ x^3 + xy^2 &= 4ax^2 - ax^2 - ay^2 \\ \Rightarrow y &= \sqrt{\frac{3a - x}{a + x}} \end{aligned}$$

Dreiteilung des Winkels

Um mit Hilfe der Trisektrix einen Winkel zu dritteln, trägt man diesen zunächst in $O = (2a, 0)$ gegen die x -Achse auf. Der Schnittpunkt mit der Trisektrix sei P . Nun erhält man sofort das Drittel des Winkels gegen die x -Achse beim Auftragen des Strahls vom Ursprung durch P .



Kartesisches Blatt

Das kartesische Blatt (folium cartesii) wurde nach René Descartes benannt und lässt sich aus der geraden Strophoide oder der Trisektrix von Maclaurin erzeugen.

Erzeugung aus der geraden Strophoide

Wir betrachten eine gerade Strophoide mit Scheitelpunkt O und Doppelpunkt S. Es sei $SO = b$. Wir definieren nun $\rho = SP'$ für einen Punkt P' der Strophoide und benennen den Winkel $\sphericalangle P'SX = \theta$. Somit gilt

$$\rho = b \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$$

Der Schnittpunkt der Verlängerung von SP' mit der senkrechten Geraden durch O sei A. Nun wählen wir eine Punkt P auf SP' , sodass SP' in P und A harmonisch geteilt wird. Dafür muss gelten:

$$(SP : PP' = SA : AP')$$

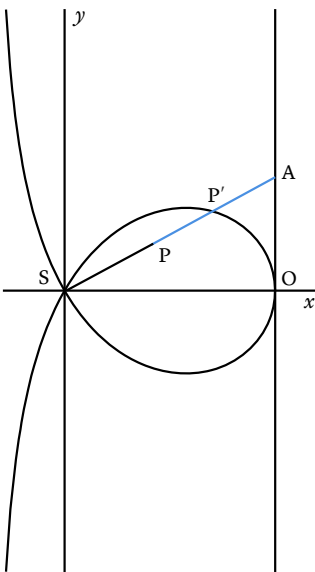
Definieren wir noch $SP = r$ so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\rho - r} &= \frac{\frac{b}{\cos \theta}}{\frac{b}{\cos \theta} - \rho} = \frac{b}{b - \rho \cos \theta} \\ \Rightarrow \frac{\rho}{r} - 1 &= \frac{b - b \cos 2\theta}{b} \\ \Rightarrow \frac{b}{r} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} &= 2 - \cos 2\theta \\ \Rightarrow r &= b \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta (2 - \cos 2\theta)} \end{aligned}$$

Dies ist die erste Polargleichung des kartesischen Blattes. Nun kommt die Umwandlung in rechtwinklige Koordinaten:

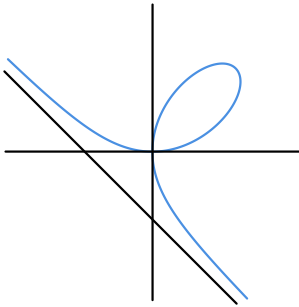
$$\begin{aligned} r &= b \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta (2 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= b \frac{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x(2(x^2 + y^2) - x^2 + y^2)} \\ x(x^2 + 3y^2) &= b(x^2 - y^2) \\ (3x + b)y^2 &= x^2(b - x) \\ \Rightarrow y &= x \sqrt{\frac{b - x}{b + 3x}} \end{aligned}$$

Die Gleichung des kartesischen Blattes wird für gewöhnlich auf ein Koordinatensystem bezogen, welches zu unserem um $-\frac{\pi}{4}$ gedreht ist. Dies erreichen wir indem wir die erste Polargleichung mit $r = \rho$ und



$\theta = \psi - \frac{\pi}{4}$ transformieren:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{b \sin 2\psi}{\cos(\psi - \frac{\pi}{4})(2 - \sin 2\psi)} \\ &= \frac{2b \sin \psi \cos \psi}{(\cos \psi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sin \psi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})(2 - \sin 2\psi)} \\ &= \frac{2b \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{2}(\cos \psi + \sin \psi)(1 - \sin \psi \cos \psi)} \\ &= b\sqrt{2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\cos^3 \psi + \sin^3 \psi} \end{aligned}$$



Durch die Substitution $b\sqrt{2} = 3c$ erhalten wir die zweite Polargleichung:

$$\rho = \frac{3c \sin \psi \cos \psi}{\cos^3 \psi + \sin^3 \psi}$$

In kartesischen Koordinaten kommt man für dieses Koordinatensystem auf die folgende Polynomgleichung:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \frac{3cxy}{x^3 + y^3} \Rightarrow x^3 + y^3 - 3cxy = 0$$

Erzeugung aus der Trisektrix von Maclaurin

Durch einer affinen Abbildung der Trisektrix erhält man ebenfalls das kartesische Blatt. Hierbei ist die x-Achse die Affinitätsachse und K der Kontraktionsfaktor. Es folgt:

$$y = K \cdot x \sqrt{\frac{3a - x}{a + x}}$$

Die Tangenten im Doppelpunkt der Trisektrix stehen zur x-Achse in einem Winkel von 60° , beim kartesischen Blatt sind es allerdings nur 45° , wie man an der ersten Polargleichung sehen kann. Hieraus folgt die Bedingung $\lim_{x,y=0} \frac{x}{y} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ an K.

$$\lim_{x=0} \frac{x}{y} = K \sqrt{\frac{3a}{a}} = K \sqrt{3} \Rightarrow K \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Wir erhalten

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3a - x}{a + x}} = x \sqrt{\frac{3a - x}{3a + 3x}} = x \sqrt{\frac{b - x}{b + 3x}}$$

Dies ist die Gleichung des kartesischen Blattes mit Schleifendurchmesser $b = 3a$.

Fußpunktkurven

Sei g eine beliebige Kurve und P ein Punkt (Pol). Für jeden Punkt G auf g gibt es einen Fußpunkt F auf der Tangenten der Kurve bei G , so dass PF senkrecht auf der Tangenten steht. Die Ortskurve aller solcher Fußpunkte wird als Fußpunktkurve von g bezüglich dem Pol P bezeichnet.

Die Fußpunktkurve einer Geraden g bezüglich P ist nur ein einzelner Punkt, die orthogonale Projektion des Punktes P auf g , da an allen Punkten die Tangente von g die Gerade selbst ist.

Die Fußpunkt eines Kreises c mit P als Mittelpunkt ist c selbst.

Kissoide als Fußpunktkurve

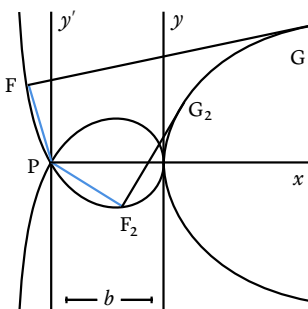
Sei g eine Parabel, beschrieben über die Gleichung $y^2 = 2px$, und P ihr Scheitelpunkt. Die Fußpunkte F beschreiben auf der linken Seite der y -Achse eine Kissoide mit der Breite $2a = \frac{p}{2}$.

Beweis: Nach der Tangentengleichung $t: y = \frac{p}{y_G}(x + x_G)$ schneidet die Parallele zu PF im Parabelpunkt G die x -Achse in A , sodass $x_A = x_G + p$. Folglich lässt sich $y_G = -p \cdot \tan \theta$ mit $\sphericalangle GAX = \theta$ ausdrücken. Da der Fußpunkt F nun durch $r = -x_G \cos \theta$ beschrieben wird, folgt:

$$\begin{aligned} r &= -x_G \cos \theta = -\frac{y_G^2}{2p} \cos \theta \\ &= -\frac{p^2 \tan^2 \theta}{2p} \cos \theta = -\frac{p}{2} \sin \theta \tan \theta \end{aligned}$$

Eine an der Tangente gespiegelte Parabel hat ihren Scheitel bei $R = 2r = -p \sin \theta \tan \theta$. Somit beschreibt dieser beim Rollen der Bildparabel über die Urparabel eine Kissoide mit der Breite des Halbparameters p .

Strophoide als Fußpunktkurve



Sei g eine Parabel, beschrieben über die Gleichung $y^2 = 2px$, und P der Schnittpunkt der Leitlinie y' ($x = -\frac{p}{2}$) mit der x -Achse. Die Fußpunkte F beschreiben eine Strophoide mit dem Schleifendurchmesser $b = \frac{p}{2}$.

Beweis: Aus der Parabelgleichung folgt $x_G = \frac{y_G^2}{2p}$ und demnach aus der Tangentengleichung $t: yy_G = px + \frac{y_G^2}{2}$. Über die Gleichung des Lotes $PF: y = -\frac{y_G}{p}(x + \frac{p}{2})$ erhält man weiterhin den Ausdruck $y_G = \frac{-2py}{2x+p}$.

Eingesetzt in die Tangentengleichung folgt:

$$\begin{aligned}\frac{-2py^2}{2x+p} &= px + \frac{2p^2y^2}{(2x+p)^2} \\ -4pxy^2 - 2p^2y^2 &= 4px^3 + 4p^2x^2 + p^3x + 2p^2y^2 \\ (4p+4x)y^2 &= -x(4x^2+4px+p^2)\end{aligned}$$

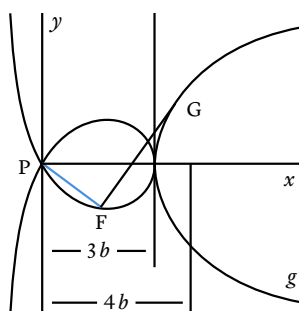
Ein Wechsel der Ordinatenachse zur Leitlinie führt zur Transformation $x = x' - b$ ($b = \frac{p}{2}$) und $y = y'$:

$$\begin{aligned}(b+x')y'^2 &= -(x'-b)((x'-b)^2+2b(x'-b)+b^2) \\ &= (b-x')((x'-b)+b)^2 \\ &= (b-x')x'^2\end{aligned}$$

Es ergibt sich der Ausdruck für eine Strophoide:

$$y' = x' \sqrt{\frac{b-x'}{b+x'}}$$

Trisektrix als Fußpunktkurve



Sei g eine Parabel, beschrieben über die Gleichung $y^2 = 2p(x - \frac{3p}{2})$, und P der Ursprung. Die Fußpunkte F beschreiben eine Trisektrix mit dem Schleifendurchmesser $3b = \frac{3p}{2}$.

Beweis: Die Gleichung des Lotes PF ist $y = -\frac{y_G}{p}$. Hieraus folgt der Ausdruck $y_G = -\frac{py}{x}$ und zusammen mit der Parabelgleichung $x_G = \frac{py^2+3px^2}{2x^2}$. Eingesetzt in die Tangentengleichung $t: yy_G = p(x+x_G-3p)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}-2py^2y &= 2px^3 + p^2y^2 + 3p^2x^2 - 6p^2x^2 \\ y^2(p+2x) &= x^2(3p-2x) \\ y &= x \sqrt{\frac{3p-2x}{p+2x}}\end{aligned}$$

Dies entspricht der Gleichung einer Trisektrix mit $b = \frac{p}{2}$:

$$y = \sqrt{\frac{3b-x}{b+x}}$$

Allgemeine Fußpunktkurve der Parabel

Die drei obigen Kurven lassen sich alle als Fußpunktkurve einer Parabel konstruieren und unterscheiden sich nur im Abstand d zwischen P und dem Scheitelpunkt. Folglich lässt sich eine allgemeine Kurve konstruieren.

$$\text{Gleichung der Parabel: } y^2 = 2p(x - d)$$

$$\text{Gleichung der Tangente in G: } yy_G = p(x + x_G - 2d)$$

$$\text{Gleichung des Lotes PF: } y = -\frac{y_G}{p}x$$

Aus der Lotgleichung folgt $y_G = -\frac{py}{x}$ und zusammen mit der Parabelgleichung $x_G = \frac{py^2}{2x^2} + d$. Dies setzen wir wie zuvor in die Tangentengleichung ein:

$$\begin{aligned}\frac{-py^2}{x} &= px + \frac{p^2y^2}{2x^2} + pd - 2pd \\ \left(\frac{p^2}{2x^2} + \frac{p}{x}\right) y^2 &= pd - px \\ (p + 2x) y^2 &= 2dx^2 - 2x^3 \\ y^2 &= \frac{2dx^2 - 2x^3}{2x + p} \\ y &= x \sqrt{\frac{d-x}{\frac{p}{2} + x}}\end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung der allgemeinen Kurve mit Schleifendurchmesser d . Mit der folgenden Parameterwahl erhalten wir die von uns untersuchten Kurven:

$$\text{Kissoide: } d = 0$$

$$\text{Strophoide: } d = \frac{p}{2}$$

$$\text{Trisektrix: } d = \frac{3p}{2}$$

Literatur

P. L. Wantzel

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie
peut se résoudre avec la règle et le compas

Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1837

Seiten 366–372

H. Wieleitner

Spezielle Ebene Kurven

Götschen'sche Verlagshandlung 1908

Seiten 1–12 / 35–45 / 50f

H. Hilton

Plane Algebraic Curves

Oxford University Press 1920

Seiten 1–17 / 164–167 / 175–177

R. C. Yates

Handbook on Curves and their Properties

National Council of Teachers of Mathematics 1947

Seiten 26–30 / 98f / 217–220

H. Schmidt

Ausgewählte höhere Kurven

Kesselringsche Verlagsbuchhandlung 1949

Seiten 7–59

E. H. Lockwood

Book of Curves

Cambridge University Press 1961

Seiten 90–97 / 130–137 / 153–159 / 176–181

J. D. Lawrence

Catalog of Special Plane Curves

Dover Publications 1972

Seiten 51–56 / 46–49 / 94–109

G. E. Martin

Geometric Constructions

Springer 1998

Seiten 29–44