

AUS DEM SEMINAR AUSGEWÄHLTE HÖHERE
KURVEN- WS 2016/17

Die Archimedische und logarithmische Spirale

Estefani Rodriguez Diaz

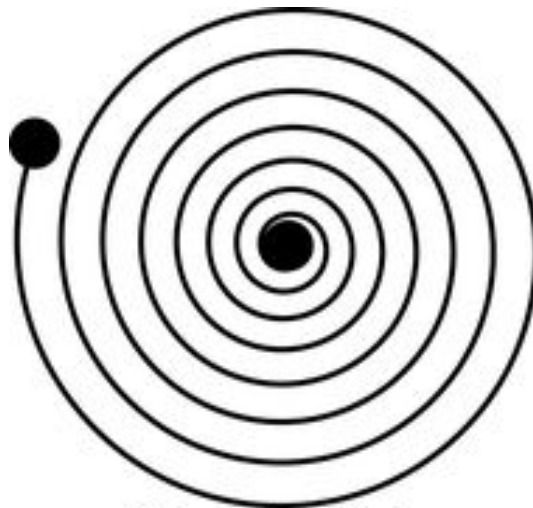
Bei Prof. Dr. Duco van Straten

Contents

1	Definition	2
2	Polarkoordinaten	3
3	Geschichte	4
4	Die Archimedische Spirale	7
4.1	Eigenschaften der Archimedischen Spirale	8
4.2	Konstruktion der Tangente	9
4.3	Winkeldreiteilung mit Hilfe der archimedischen Spirale	10
5	Die logarithmische Spirale	12
5.1	Eigenschaften der logarithmischen Spirale	13
5.2	Punktweise Konstruktion der Kurve	14
5.3	Konstruktion der Tangente	15
6	Fazit	16

1 Definition

Eine Spirale ist eine ebene Kurve, die aus unendlich vielen Windungen um einen festen Punkt besteht und aus höchstens zwei Ästen zusammengesetzt ist, bei denen der Abstand vom Mittelpunkt streng monoton vom Drehwinkel abhängt.



© Can Stock Photo

Figure 1: Spirale

2 Polarkoordinaten

Am einfachsten lassen sich die Kurven in Polarkoordinaten angeben. Es ist eine äußerst effektive Methode, Kurven der mathematischen Untersuchung zugänglich zu machen.

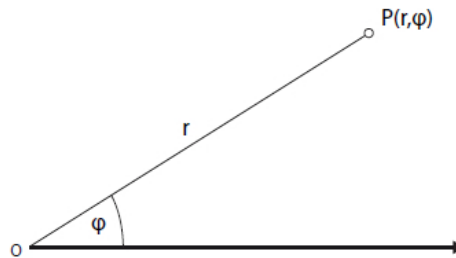


Figure 2: Polarachse

Bei der Darstellung von Spiralen in Polarkoordinaten, dienen ein fester Punkt, der Pol und einem in dem festen Punkt beginnende Halbgerade (Polarachse), als Bezugssystem (Figur 2). Die Koordinatenpaare (r, ϕ) bezeichnen die Lage der Punkte in der Ebene. r ist der Abstand zwischen dem Pol und dem Punkt. ϕ ist der Winkel zwischen der Verbindungsstrecke des Pols und der Polarachse. (Figur 3)

Die Polarkoordinaten lassen sich mit Hilfe der trigonometrischer Funktionen in kartesische Koordinaten umrechnen.

Es gilt: $x = r \cdot \cos(\phi)$ $y = r \cdot \sin(\phi)$

Bei gegebenen r und ϕ sind die kartesischen Koordinaten x und y eindeutig definiert, Es gilt: $\phi = \arctan \frac{y}{x}$
Beide Größen können sowohl positive als auch negative Werte annehmen. ϕ wird als positiv angegeben wenn er gegen den Uhrzeigersinn gemessen wurde. Der Radius r ist positiv wenn der Punkt auf der gleichen Seite des Pols liegt wie die um ϕ gedrehte Polarachse.

3 Geschichte

In der Mathematikgeschichte treten Spiralen schon sehr früh auf. Viele berühmte Mathematiker beschäftigten sich mit den Spiralen. Ein paar von Ihnen die für die Archimedische und logarithmische Spirale wichtig sind führe ich hier auf.

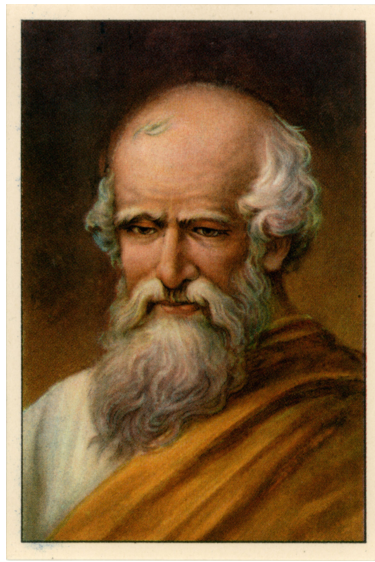


Figure 3: Archimedes von Syrakus

Archimedes von Syrakus beschäftigte sich mit den Spiralen. Einer der neun erhaltenen mathematischen Abhandlung trägt den Titel "Über Spirale." Archimedes war ein griechischer Physiker (Figur 5), Ingenieur und Mathematiker, der auf Syrakus lebte (um 287 v. Chr. bis vermutlich 212 v. Chr.). Zur Zeit von Archimedes war Mathematik eine hoch entwickelte Wissenschaft. Man kann nicht sagen was Archimedes zur Beschäftigung mit Spiralen bewogen hat. Ihm war aber die Formgebung aus der täglichen Erfahrung vertraut wie zum Beispiel Schneckenhäuser, aufgewickelte Schiffstau und Kopfstücke ionischer Säulen.



Figure 4: Rene Descartes

Der französische Philosoph und Mathematiker Rene Descartes(1596-1650), lehrt in seiner Geometrie die Bezeichnung von unbekanntem Größen durch Buchstaben, das Aufstellen von Gleichungen, die deren Beziehung untereinander beschreiben und das Rückwärts auflösen zum Finden der Unbekannten. Durch die neuen formalen Möglichkeiten, konnte Descartes 1638 die Eigenschaften der logarithmischen Spirale in einem Brief an Mersenne erläutern.



Figure 5: Jakob Bernoulli

Der Mathematiker Jakob Bernoulli (1654-1705) widmete sich mit größter Interesse den Spiralen. Er untersuchte die logarithmische Spirale, als auch die Archimedische Spirale. Jakob Bernoulli war so fasziniert von der logarithmischen Spirale, dass er sich die wunderbare Spirale auf seinem Grabstein wünschte. Auf seinem Grabstein findet man eine Spirale, aber nicht die von ihm gewünschte logarithmische Spirale sondern die Archimedische Spirale.

4 Die Archimedische Spirale

Eine der einfachsten unter den Spiralen ist die Archimedische Spirale. Die Archimedische Spirale kann beschrieben werden durch, einen Punkt, der sich auf einem Lichtstrahl vom Ursprung mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, während sich der Leitstrahl mit konstanter Geschwindigkeit w um den Pol dreht. Die Gleichung für die archimedische Spirale lautet: $r=a \cdot \phi$, $a \neq 0$,

charakterisiert durch alle Punkte $P(r,\phi)$. Der Radius der Kurve wächst mit dem Drehwinkel linear.

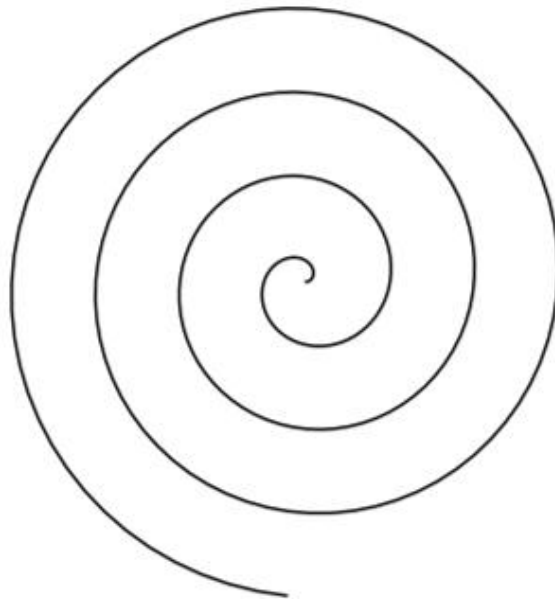


Figure 6: Archimedische Spirale

4.1 Eigenschaften der Archimedischen Spirale

Gleichung: $r = a \phi, a \neq 0$

Definitionsbereich: \mathbb{R}

Tangentialwinkel: $\gamma = \arctan \phi$

Flächenelement: $dA = \frac{a^2}{2} \cdot \phi^2 d\phi$

Bogenelement: $ds = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} dr$

Krümmungsradius: $\rho = \frac{r^2 + a^2}{r^2 + 2a^2}^{\frac{3}{2}}$

Besonderheiten:

- Achsensymmetrie zur vertikalen Polargerade
- Konstanz des Windungsabstand $a \cdot 2\pi$

4.2 Konstruktion der Tangente

Die Tangente konstruierte Archimedes mit folgendem Satz: "Wenn eine Gerade die Spirale erster Umdrehung im Schnittpunkt mit der Leitlinie berührt und im festen Endpunkt des rotierenden Halbstrahls das Lot auf der Leitlinie errichtet wird, so weit, bis dieses die Tangente schneidet, so behaupte ich, dass dieses Lot gleich ist der Peripherie des Kreises."

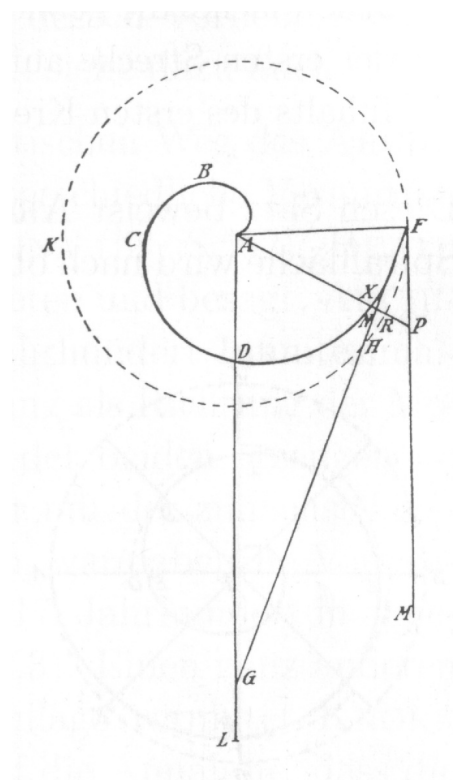


Figure 7: Konstruktion der Tangente

Wir wollen die Tangente am Punkt F konstruieren, dafür fällt man im Punkt A das Lot zur Strecke AF. Diese Strecke entspricht dem Radius des gedachten Kreises. Auf das Lot wird die Länge der Strecke abgetragen, die Länge entspricht dem Umfang des gedachten Kreises, also $2\pi AF$, da AF dem Radius entspricht. Durch die Berechnung des Umfang entsteht eine neue Strecke AG die genau $2\pi AF$ lang ist. Nun können wir die Tangente am Punkt F konstruieren, indem wir eine Gerade durch die Punkte F und G ziehen. Bei dieser Konstruktion der Tangente, kann die Tangente nicht nur mit Lineal und Zirkel ermittelt werden, da der Punkt G erst rechnerisch ermittelt werden muss. Bei dieser Art der Ermittlung wird vorausgesetzt dass die Lage der

Tangente bekannt ist .

4.3 Winkeldreiteilung mit Hilfe der archimedischen Spirale

Eine der Probleme der Geometrie ist die Dreiteilung des Winkels. Darunter versteht man, die Teilung eines beliebigen Winkel mit Hilfe von Zirkel und Lineal, konstruktiv und präzise in drei gleich große Winkel zu unterteilen. Archimedes gelang es mit Hilfe der archimedischen Spirale das Problem der Winkeldreiteilung zu lösen (siehe Figur 8)

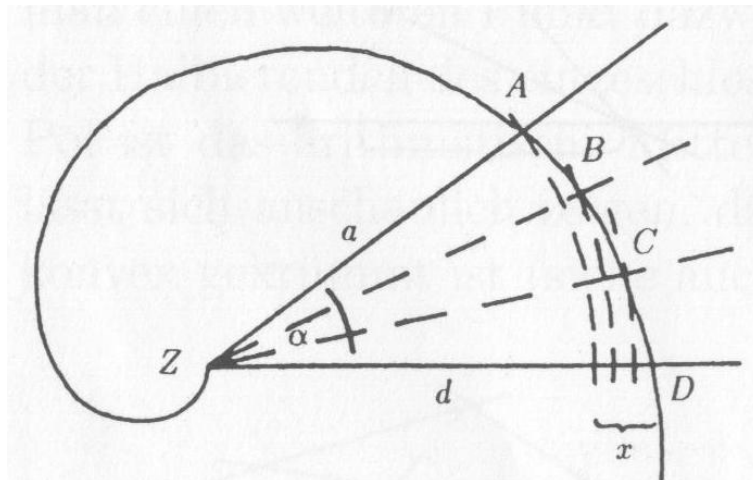


Figure 8: Winkeldreiteilung mit Hilfe der archimedischen Spirale

- (1) Als erstes lege man den Pol der Spirale auf den Scheitel Z (siehe Figur 8) des Winkels
- (2) Nun erhalten wir die Schnittpunkte der Spirale mit den Schenkeln des Winkels, und benennen sie, hier A und D (Siehe Figur 8)

- (3) Als nächstes trägt man mit dem Zirkel die Strecke $a=ZA$ auf $d=ZD$ ab und erhält die Differenz $x=d-a$
- (4) Jetzt können wir die Strecke x mit dem Zirkel in drei gleich grosse Teile teilen.
- (5) Man schlage um den Scheitelpunkt Z Kreise mit den jeweiligen Radien $b=a+\frac{1}{3}x$ und $c = a + \frac{2}{3}x$, dann erhält man die Schnittpunkte B und C mit der Archimedischen Spirale
- (6) Jetzt kann man die Verbindungsgeraden von den Schnittpunkten B und C mit dem Scheitelpunkt Z zeichnen.

Der Winkel ist nach korrekter Ausführung, der Punkte (1)-(6), in drei gleich grosse Teile geteilt.

5 Die logarithmische Spirale

Die Spirale dessen Gleichung $r = e^{a\phi}$, $a \neq 0$, bezeichnet man als die logarithmische Spirale. Bei dieser Spirale hängt der Radius exponentiell vom Winkel ab. Die logarithmische Spirale hat unendlich viele Windungen um den Pol, der auch asymptotischer Punkt heißt.

Setzt man $\phi=0$ und $r=1$, wächst ϕ von 0 bis $+\infty$.

Nimmt ϕ von 0 bis $-\infty$ ab, so bleibt r positiv und nimmt von 1 bis 0 ab.

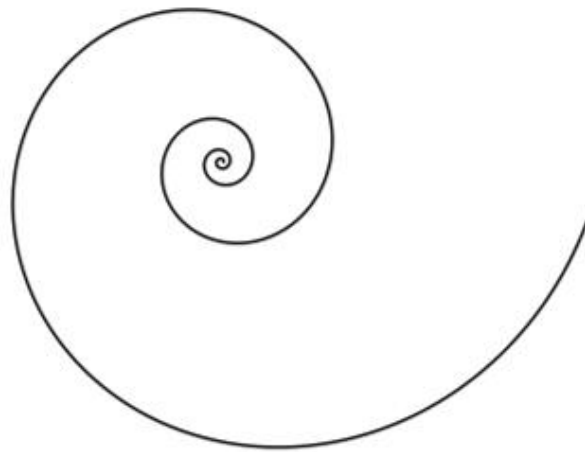


Figure 9: Logarithmische Spirale

5.1 Eigenschaften der logarithmischen Spirale

Gleichung: $r = e^{a\phi}, a \neq 0$

Definitionsbereich: \mathbb{R}

Tangentialwinkel: $\gamma = \arctan \frac{1}{a}$

Flächenelement: $dA = \frac{1}{2} \cdot e^{2a\phi} d\phi$

Bogenelement: $ds = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}$

Krümmungsradius: $\rho = r \cdot \sqrt{1 + a^2}$

Besonderheiten:

- Pol asymptotischer Punkt
- Konstanz des Tangentialwinkels
- Endlichkeit der Bogenlänge
- Selbstähnlichkeit, Übereinstimmung mit allen abgeleiteten Kurven

5.2 Punktweise Konstruktion der Kurve

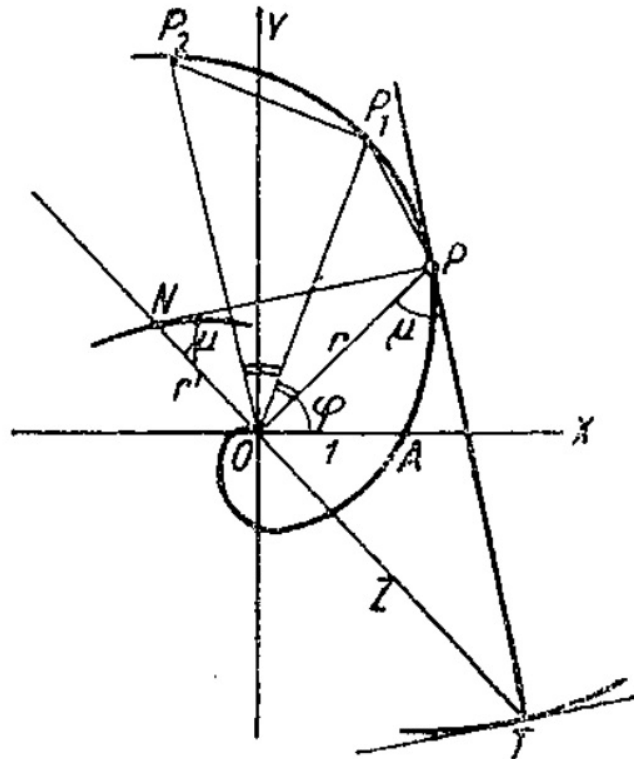


Abb. 208

Figure 10: Logarithmische Spirale

Liegen zwei Punkte der Spirale P und P_1 fest, so lässt sich ein dritter Punkt P_2 konstruieren.

Seien P, P_1, P_2 drei aufeinander folgenden Punkte der Spirale und ϕ, ϕ_2, ϕ_3 die dazugehörigen Winkel (Figur 10). Gilt des weiteren $\phi_1 - \phi = \phi_2 - \phi_1$, dann gilt:

$$OP = e^{a\phi}, \quad OP_1 = e^{a\phi_1}, \quad OP_2 = e^{a\phi_2}$$

es gilt weiter: $\frac{OP_1}{OP} = e^{a(\phi_1 - \phi)}$ und

$$\begin{aligned} \frac{OP_2}{OP_1} &= e^{a(\phi_2 - \phi_1)} \\ \Rightarrow \frac{OP_1}{OP} &= \frac{OP_2}{OP_1} \end{aligned}$$

5.3 Konstruktion der Tangente

Zur Konstruktion der Kurventangente benötigt man nur den konstanten Winkel zwischen Fahrstrahl und Tangente in (Figur 10) wäre es der Winkel μ . Es ist $\tan \mu = \frac{rd\phi}{dr} = r \cdot \frac{1}{ar} = \frac{1}{a}$ Soll die Tangente von einem beliebigen Punkt, der nicht auf

der Spirale liegt gezeichnet werden, in der Abbildung ist dies der Punkt P, dann geht es über die Strecke OP den Kreis zu beschreiben, der den Winkel μ als Peripheriewinkel fasst. Dieser schneidet die Kurve in dem Berührungspunkt.

6 Fazit

Die archimedische und logarithmische Spiralen sind sehr interessante Kurven, die überall im Alltag zu finden sind. Sie sind überaus wichtig für die Technik, Natur und Mythos. So sind sie zum Beispiel in der Struktur von Blumen, Schneckenhäuser, Kunst usw. zu finden. Einige ihrer besonderen Eigenschaften wurden hier genannt, es gibt aber weit aus mehr was die Spirale so besonders macht.

Quellen zu meinem Seminar: Archimedische und logarithmische Spirale

Meine Hauptquellen für die Ausarbeitung meines Seminar waren die Bücher:

” Ausgewählte höhere Kurven ” von Hermann Schmidt

“Spiralen: ein Kapitel phänomenaler Mathematik“ von Johanna Heitzer

weitere Quellen die ich benutzte waren:

https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_spiral

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/archimedesspirale.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/archinhalt.html>

https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Spirale

<http://www.scinexx.de/dossier-detail-152-15.html>

http://www.math-tech.at/Beispiele/upload/ro_Spiralen_Faszination.pdf

<http://www.gallin.ch/LogSpiraleBulletinUmbr.pdf>