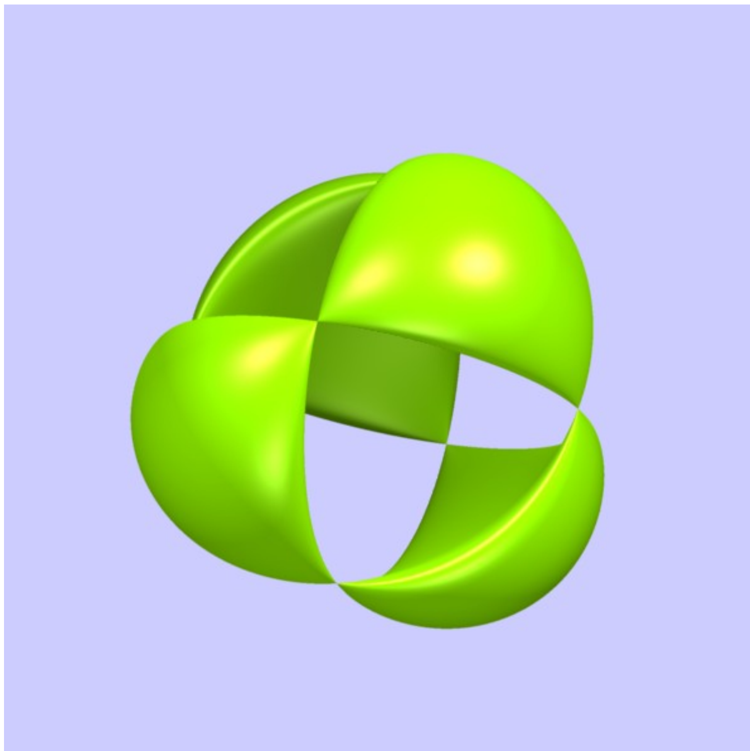
Vorlesungsverzeichnis

Mathematik



Mainz

Sommersemester 2020

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Sommersemester 2020 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Januar 2020

Eine algebraische Fläche

Die auf der Vorderseite abgebildete Fläche wird durch die Polynomgleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = xyz$$

beschrieben. Die sechs Punkte

$$(\pm 1, 0, 0), \quad (0 : \pm 1 : 0), \quad (0 : 0 : \pm 1)$$

sind Knotenpunkte der Fläche und bilden die Eckpunkte eines Oktaeders. In vier der acht Oktanten ist $xyz > 0$, und jede Ursprungshalbgerade in solch einem Oktant hat mit der Fläche zwei reelle Schnittpunkte, welche zusammenlaufen, wenn die Halbgerade in einer der drei Koordinatenebenen liegt. Auf diese Weise ist die Gestalt der Fläche mit seiner Tetraedersymmetrie und den sechs Knotenpunkte leicht zu verstehen.

Die projektive Vervollständigung der Fläche hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^2 - xyzt = 0$$

und besitzt sechs weitere komplexe Knotenpunkte im Unendlichen, insgesamt also hat die Fläche 12 Knotenpunkte als Singularitäten.
Gleichungen für Flächen von Grad vier besitzen 35 Koeffizienten, auf welche die 16-dimensionale Gruppe der linearen Transformationen der vier homogenen Variablen x, y, z, t wirkt. Somit hängen Quartiken von 19 wesentlichen Parametern ab. Die Flächen mit 12 Knotenpunten hängen von 7 Parametern ab und unsere Fläche ist eine davon. Eine Quartik kann maximal 16 Knotenpunkte besitzen; solche Flächen werden Kummer-Flächen genannt.

Übersichtsplan

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10	Topologie II (Hog-Angeloni)	Computeralgebra (de Jong)	Codierungstheorie (Leinen)	Codierungstheorie (Leinen) Computeralgebra (de Jong) Topologie II (Hog-Angeloni)	
10-12	Algebra II (Zuo) Stochastik III (Höpfner)	Stochastik (Hartung) Algebraische Geometrie II (Blickle) Harmonische Analysis (Tolksdorf)	Algebra II (Zuo) Stochastik III (Höpfner) Statistische Mechanik von Gittersystemen (Birkner)	Stochastik (Hartung) Differentialgeometrie (Kraus) Harmonische Analysis (Tolksdorf) Algebraische Geometrie II (Blickle)	Ergänzungen zur Stochastik III (Höpfner) Statistische Mechanik von Gittersystemen (Birkner)
12-14		Einf. in die Funktionalanalysis (Kostrykin) Komplexe Geometrie I (Zuo) Analytische Zahlentheorie (Mohajer)	Praktikum zu Grundlagen der Numerik (A. Bachmayr) Differentialgeometrie (Kraus)	Einf. in die Funktionalanalysis (Kostrykin) Komplexe Geometrie I (Zuo) Differentialtopologie II (Kraus)	
14-16	Modellierungspraktikum (Hanke-Bourgeois)	Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen (Graf) Datenassimilation (M. Bachmayr) Praktikum zu Grundlagen der Numerik (A. Bachmayr)		Modellierungspraktikum (Hanke-Bourgeois) PDE II (Kostrykin) Differentialgleichungen im Komplexen (van Straten) Anwendungen der Spektralsequenz von Serre (Klaus) – nicht wöchentlich	Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen (Graf)
16-18	Differentialtopologie II (Kraus)	Programmierpraktikum zu Datenassimilation (M. Bachmayr) PDE II (Kostrykin)			

Algebra II

Dozent: Prof. Dr. Kang Zuo

Termine: Mo und Di 8-10 Uhr

Gegenstand dieser Vorlesung ist die Theorie kommutativer Ringe und ihrer Ideale beziehungsweise allgemeiner der Moduln über ihnen. Dabei werden noethersche Moduln und Basissatz, Primspektrum, Hilbertschen Nullstellensatz und Zariski-Topologie, Dimensionstheorie, Tensorprodukte und Kettenkomplexe sowie Ext und Tor Funktoren eingeführt. Vorkenntnisse: Algebra I

$$\begin{tikzcd}
& ker(f_1) \arrow[r] \arrow[d] & ker(f_2) \arrow[r] \arrow[d] & ker(f_3) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
& M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_3 \arrow[d] & \\
& coker(f_1) \arrow[r] & coker(f_2) \arrow[r] & coker(f_3) &
\end{tikzcd}$$

Literatur:

Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, 2016. ix+128 pp. ISBN: 978-0-8133-5018-9.

Fulton, William. *Algebraic curves.* An introduction to algebraic geometry. Notes written with the collaboration of Richard Weiss. Mathematics Lecture Notes Series. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. xiii+226 pp.

Rotman, Joseph J. *An introduction to homological algebra.* Second edition. Universitext. Springer, New York, 2009. xiv+709 pp. ISBN: 978-0-387-24527-0.

Algebraic Geometry 2

Dozent: Prof. Dr. Blickle

Termine: Di und Do 10-12

The very idea of scheme is of infantile simplicity – so simple, so humble, that no one before me thought of stooping so low. So childish, in short, that for years, despite all the evidence, for many of my erudite colleagues, it was really "not serious"!
— A. Grothendieck

Whereas in the more elementary course Algebraic Geometry 1 we focussed on affine and projective varieties over an algebraically closed field, Algebraic Geometry 2 will be a systematic introduction to schemes as conceived by Grothendieck in the 60ies. This schematic viewpoint was a revolution as it allows to effectively deal with geometry over non-algebraically closed fields (which leads to arithmetic geometry, and ultimately applications to number theory) and also one can handle infinitesimal constructions in a purely algebraic way.
The course will start from scratch by defining schemes and their morphisms and developing their basic properties. The ambitious goal of the instructor is to end with basic properties and first simple applications of the cohomology of quasicoherent sheaves on a schemes.
Who is this course for: Participants of Algebraic Geometry 1. Anyone with a strong background in algebra or motivation to acquire such background should attend this course. Even though we start from the beginning, the learning curve is steep. The course will be continued with a course "Topics in Algebraic Geometry" next Fall (hence you may take Algebraic Geomerty 2 as the first part of a Vertiefungszyklus).
The lectures will be accompanied by occasional exercises. For anyone interested (or required), there will be a final exam at the end of the course.

Literatur:

R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, (1977).

The Stacks Project, *https://stacks.math.columbia.edu/*

R. Vakil, *Foundations of Algebraic Geometry*, available online

U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry 1*, Viehweg-Teubner.

Mumford *Red Book of Varieties and Schemes*, Springer.

Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen

Dozent: Dr. Patrick Graf

Termine: Di und Fr 14-16

Die Theorie der Riemannsche Flächen ist eine nätürliche Erweiterung der Funktionentheorie. Ein Besuch dieser ist dann auch Voraussetzung für die Teilnahme an dieser Vorlesung. Vorkenntnisse aus der Topologie über Flächen sind nützlich aber nicht unbedingt notwendig, da dies in der Vorlesung thematisiert wird. Behandelt werden weiter die Riemannschen Flächen einer algebraischen Funktion, die Überlagerungstheorie und der Riemannsche Existenzsatz. Weiter entwicklen wir die Theorie der holomorphen Differentialformen auf Riemannsche Flächen und beweisen den Satz von Riemann-Roch und die Serre Dualität. Die Vorlesung schliesst ab mit der Konstruktion von meromorphen Funktionen zu vorgegebenen Divisoren und Anwendungen.

Literatur:

S. K. Donaldson, *Riemann, Surfaces*, Lecture notes, 2004.

O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher 184, Springer, 1977.

D. van Straten, *Riemannsche Fächen und algebraische Kurven*, Vorlesungsskript, Mainz, 2012.

H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Flächen*, Springer Fachmedien, 1997.

Harmonische Analysis

Dozent: Prof. Dr. Patrick Tolksdorf

Termine: Di und Do 10-12

In der Vorlesung "Harmonische Analysis" werden sogenannte singuläre Integraloperatoren untersucht. Ein prominentes Beispiel hierfür ist die Hilbert Transformation, welche durch

$$[Hf](x) = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} \, \mathrm{d}y$$

gegeben ist. Das p.v. steht hierbei für *principle value* und zeigt, dass sich in der Definition des Integrals ein weiterer Grenzprozess verbirgt.
Ist f z.B. stetig mit $f(x) \neq 0$ so ist der Integrand nicht integrierbar im Sinne von Lebesgue. Um dem Ausdruck einen Sinn zu verleihen, werden in diesem Grenzprozess Oszillationen ausgenutzt (die Abbildung $y \mapsto (x-y)^{-1}$ ist ungerade um $y = x$) und führen für fast jedes $x \in \mathbb{R}$ zu einem wohldefinierten Ausdruck. Solche singulären Integraloperatoren werden gemeinhin als Calderón-Zygmund-Operatoren bezeichnet und treten in der Analyse partieller Differentialgleichungen auf. Die Untersuchung solcher Operatoren wird Calderón-Zygmund-Theorie genannt und bildet den Hauptgegenstand der Vorlesung. Das ultimative Ziel wird es sein, Aussagen über die L^p-Beschränktheit solcher Operatoren zu beweisen.

$$T1 \in \mathrm{BMO} \qquad (\mathrm{H}^1)' = \mathrm{BMO}$$

$$[Mf](x) = \sup_{r>0} \tfrac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

$$T^*1 \in \mathrm{BMO} \qquad \sup_{r>0} \tfrac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\times(0,r)} \mathrm{d}\mu < \infty$$

$$[Hf](x) = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} \, \mathrm{d}y$$

$$\alpha |\{x \in \mathbb{R}^d : [Mf](x) > \alpha\}| \leq 5^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

Literatur:

J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society (2001).

L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer (2014).

L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Springer (2014).

E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press (1993).

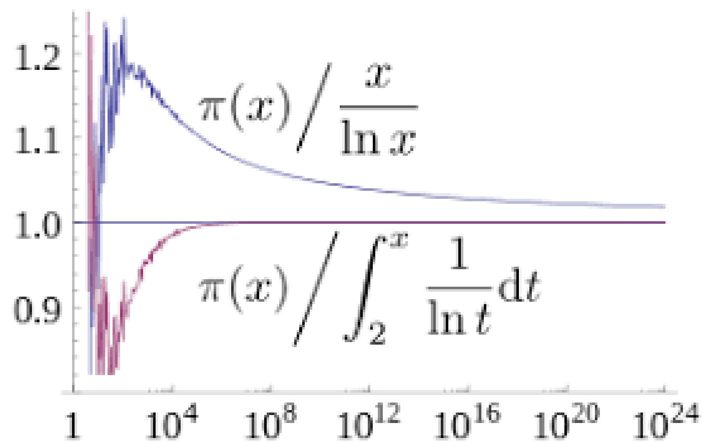
E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press (1970).

Analytische Zahlentheorie

Dozent: Dr. Abolfazl Mohajer

Termine: Di 12-14

Ziel der Vorlesung ist das Studium der Zahlen Anhand von Methoden der Analysis und der Funktionentheorie. Hierbei werden zunächst arithmetische Funktionen und Dirichlet Multiplikation eingeführt und danach werden die Beziehungen zwischen arithmetischen Funktionen sowie deren Ableitung und die Selberg Identität untersucht. Im Bereich *multiplikative Zahlentheorie* werden wir den
Primzahlsatz beweisen. Dieser Satz erlaubt eine Abschätzung der Verteilung der Primzahlen mittels Logarithmen.



Eine interessante Verallgemeinierung des Primzahlsatzes ist *der Dirichletscher Primzahlsatz* der besagt, dass jede arithmetische Progression $dn + a$, wobei $(d, a) = 1$, unendlich viele Primzahlen enthält. Dieser Satz wird auch in der Vorlesung bewiesen. Dirichlet-Reihen, Riemannsche ζ-Funktionen und L-Reihen werden in nächsten Kapitel studiert.

Die vorausgesetzte Vorkenntnisse für diese Vorlesung sind Funktionentheorie und Zahlentheorie. Die Grundbegriffe aus diesen Bereichen werden jedoch in der Vorlesung nachgeholt.

Literatur:

Tom Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976, 5. Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, (1998).

Jörg Brüdern, *Einführung in die analytische Zahlentheorie*, Springer, Berlin u. a. (1995).

Dietrich Burde, *Analytische Zahlentheorie*, Vorlesungsskript (2005).

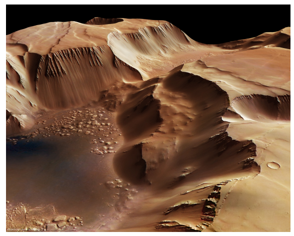
Codierungstheorie

Dozent: **apl. Prof. Dr. Felix Leinen**

Termine: **Mi und Do jeweils 08 – 10 Uhr**
Alle 2 Wochen soll einer der Termine als Übungsstunde genutzt werden.

Homepage: `www.staff.uni-mainz.de/leinen/CTH.html`

Hörerkreis: Studierende mit Ziel Master of Education oder Bachelor of Science



`https://www.esa.int/spaceinimages/Images/2007/11/Noctis_Labyrinthus_perspective_view`

Wie kann es sein, daß wir die Daten für solch klare Bilder von der Mars-Oberfläche empfangen können, obwohl die Funksignale der Sonden ca. 14 Minuten bis zur Erde benötigen und währenddessen durch unkontrollierbare elektromagnetische Störungen verfälscht werden? Wie kann es sein, daß eine Musik-CD in Echtzeit sauber abgespielt werden kann, obwohl die Kratzer auf ihrer Oberfläche sie an vielen Stellen unlesbar machen?

Diese Fragen löst die Codierungstheorie, indem die zu übertragenden Informationen mit zusätzlichen Sicherheitsmerkmalen angereichert werden. Die Kunst besteht nun darin, durch geschickte Nutzung algebraischer und geometrischer Strukturen besonders effiziente Verfahren zu entwickeln.

Vorkenntnisse:
LAG 1, GAZ und LALA.
Alternativ: LAG 2 anstelle LALA; Algebra 1 oder Computeralgebra anstelle GAZ.

Literatur:
Ihre selbst angefertigte Vorlesungsmitschrift.
S. Ling – C. Xing: *Coding Theory*, Cambridge Univ. Press 2004.
R. J. MacEliece: *The Theory of Information and Coding*,
Cambridge Univ. Press 2002.
O. Manz: *Fehlerkorrigierende Codes*, Springer Vieweg 2017.
`https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-14652-8`
V. S. Pless: *Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes*,
Wiley 1998.
J. H. van Lint: *Introduction to Coding Theory*, Springer 1999.
W. Willems: *Codierungstheorie*, de Gruyter 1999.
`https://www.degruyter.com/viewbooktoc/product/5272`

Computeralgebra

Dozent: Prof. Dr. Theo de Jong

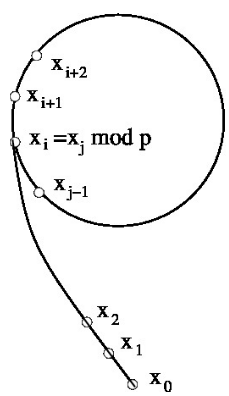
Termine: Di und Do 8-10

In der Vorlesung werden wir einige Probleme aus der algorithmischen Mathematik behandeln, wie zum Beispiel:

(1) Primzahlbestimmung und Faktorisierung von natürlichen Zahlen (z.B. Miller-Rabin, Pollard rho und die $p-1$ Methode).
(2) Das Lösen von polynomialen Gleichungssystemen. In der linearen Algebra haben Sie gelernt lineare Gleichungssysteme zu lösen. Wir werden Gleichungen höheren Grades betrachten und sehen, wie man feststellen kann, ob das Gleichungssystem eine Lösung hat und gegebenfalls die Lösungen numerisch berechnen.
(3) Faktorisierung von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Wie schafft es ein Computerprogramm zum Beispiel das Polynom
$$f = x^7 - 9x^6 + 9x^5 + 22x^4 - 65x^3 + 52x^2 + 20x - 62$$
zu faktorisieren? (Lösung: $f = (x^3 - 2x^2 + 2) \cdot (x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 10x - 31)$)

Die benutzten Methoden liefern eine gute Vorbereitung auf abstraktere algebraische Vorlesungen.

Zur Vorlesung gehört ein integrierter Übungs- und Praktikumsbetrieb. Programmierkenntnisse werden NICHT vorausgesetzt, es ist jedoch ratsam, sich schon etwas von der Sprache Python anzueignen. Pythonkurse werden in den Semesterferien angeboten, aber auch auf youtube sind elementare Einführungen zu finden. Wir werden das Computeralgebrasystem `SAGE` einsetzen, welches Sie kostenlos unter `http://www.sagemath.org/` downloaden können. Sie können auch online hiermit arbeiten: `https://sagecell.sagemath.org/`



Literatur:

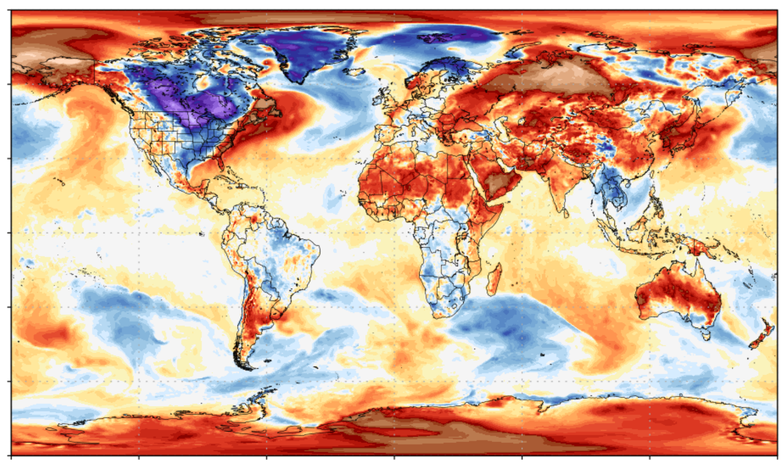
T. de Jong: *Lineare Algebra, 2. Auflage, Kapitel 9 und 10*, erscheint demächst
ISBN: 978-3-86894379-5.
D. Bressoud: *Factorization and Primality Testing*, Springer Verlag (1989).
G. Von zur Gathen, *Modern Computer Algebra*, Cambridge University Press (2013).
D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Verlag (2015).

Datenassimilation

Dozent/in: Prof. Dr. Markus Bachmayr

Termine: Di 14-16, optionales begleitendes Programmierpraktikum 16-18

In vielen Anwendungsfeldern stehen Modelle für zeitliche Abläufe in Form von dynamischen Systemen zur Verfügung, deren Parameter aber nicht alle bekannt sind und in deren Evolution signifikante Unsicherheiten vorliegen. Klassische Beispiele sind Wettervorhersagen, Klimaforschung sowie Modelle für Vielteilchensysteme. Zusätzlich stehen Messdaten aus verschiedenen Quellen (etwa Wetterstationen oder Satelliten) zur Verfügung, die in der Regel aber den Zustand des Systems zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht vollständig beschreiben und Störungen durch Messfehler enthalten. Diese Veranstaltung behandelt numerische Methoden, mit denen Modelle und Daten zu einer Schätzung des Zustandes des Systems und Prognosen für seine zukünftige Entwicklung kombiniert werden können, beispielsweise Varianten des klassischen Kalman-Filter, variationelle Methoden und Partikelfilter.



Vorausgesetzt werden die Veranstaltungen *Grundlagen der Numerik*, *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*, sowie Grundkenntnisse in Stochastik. Die Veranstaltung richtet sich gleichermaßen an Studierende im B.Sc., M.Sc. und M.Ed. Mathematik, sowie M.Sc. Computational Sciences, und kann (ebenso wie das optionale Programmierpraktikum) als Ergänzung eingebracht werden.

Literatur:

K. Law, A. Stuart, K. Zygalakis, *Data Assimilation*, Springer (2015).

S. Reich, C. Cotter, *Probabilistic Forecasting and Bayesian Data Assimilation*, Cambridge University Press (2015).

Differentialgleichungen im Komplexen

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten

Termine: Do 14-16

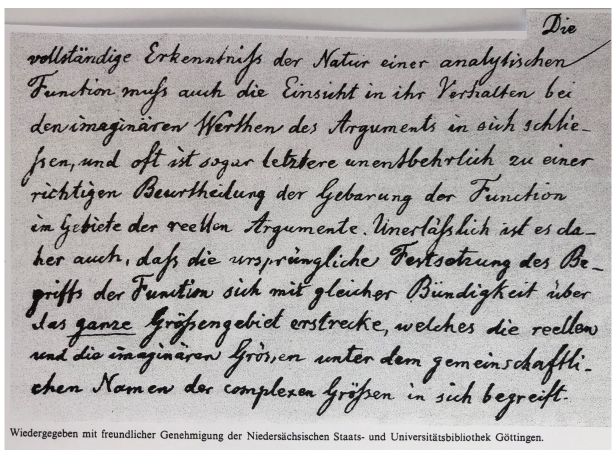
In vielen Teilgebieten der Mathematik spielen Differentialgleichungen eine große Rolle. In dieser Vorlesung werden wir uns mit der wichtigen Klasse der *linearen Differentialgleichungen mit polynomialen Koeffizienten* beschäftigen. Ein Beispiel ist die von EULER eingehend untersuchte *hypergeometrische Differentialgleichung*

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dy^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0,$$

welche durch die *hypergeometrische Reihe*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}z^2 + \dots$$

gelöst wird und viele bekannte spezielle Funktionen als Sonderfall einschließt. Es war GAUSS, der erkannte, dass für ein tieferes Verständniss einer Funktion das Verhalten in der komplexen Ebene entscheidend ist.



Die vollständige Erkenntniß der Natur einer analytischen Function muß auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werthen des Arguments in sich schließen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurtheilung der Gebarung der Function im Gebiete der reellen Argumente. Unerläßlich ist es daher auch, daß die ursprüngliche Festsetzung des Begriffs der Function sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Größengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Grössen unter dem gemeinschaftlichen Namen der complexen Größen in sich begreift.

RIEMANN erkannte die grosse Bedeutung der analytischen Fortsetzung von Lösungen entlang des Wegs, was zum Begriff der *Monodromie-Gruppe* einer Differentialgleichung führt.
In der Vorlesung behandeln wir die klassische Theorie von linearen Diffentialgleichungen im Komplexen. Das Hauptaugenmerk liegt auf der Theorie der Gleichungen vom FUCHS-schen Typ, der lokalen Lösungstheorie nach FROBENIUS, und der globalen Monodromie-Darstellung. Die moderne Theorie der rigiden lokalen Systeme und das *Riemann-Hilbert Problem* werden behandelt. **Vorkenntnisse**: Funktionentheorie.

Literatur:

F. Beukers, *Notes on differential equations and hypergeometric functions*
`https://pages.uoregon.edu/njp/beukers.pdf`

J. Gray: *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, 1986.

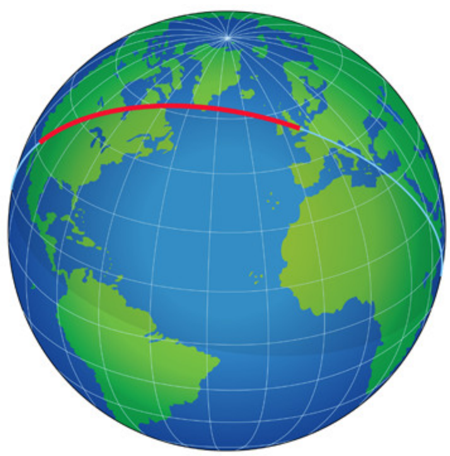
F. Klein: *Vorlesungen über die Hypergeometrische Funktion*, Grundlehren der Mathemaische Wissenschaften **39**, Springer.

Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten

Dozent: PD Dr. Margarita Kraus

Termine: Mi 12-14, Do 10-12

In der Vorlesung werden zunächst die einfachsten Objekte der klassischen Differenzialgeometrie, nämlich Kurven und Flächen im $\mathbf{R}^3$ untersucht. Besonders wichtig hierbei sind verschiedene Krümmungsbegriffe. Eine natürliche Verallgemeinerung der Flächen im $\mathbf{R}^3$ sind *Riemannsche Mannigfaltigkeiten* und je nach Vorkenntnissen und Interessenlage der Zuhörer werden wir uns im weiteren Verlauf der Vorlesung damit beschäftigen. Wichtige Anwendungen der Differentialgeometrie finden sich auch in der Physik.



Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Geodte

Literatur:

C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter (2010).

M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications (1976).

K. Jänich, *Kurven und Flächen*, Springer (2005).

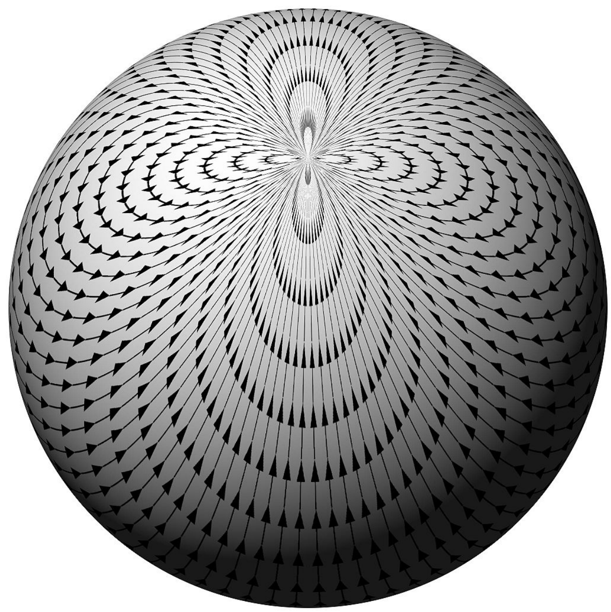
I. Agricola, T. Friedrich, *Vektoranalysis*, Vieweg (2010).

Differentialtoplogie 2

Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus

Termine: Mo 16–18, Do 12-14

Die Differentialtopologie beschäftigt sich mit Mannigfaltigkeiten und Eigenschaften, die unter differenzierbaren Abbildungen erhalten bleiben. Entscheidend beeinflusst wurde dieses Gebiet der Mathematik durch die Entdeckung Milnors, dass es auf der topologischen 7-dimensionalen Sphäre mehrere differenzierbare Strukturen gibt.
Die Vorlesung ist die Fortsetzung der Differentialtopologie 1. Wir werden uns mit Schnittzahlen und Abbildungsgrad, Kobordismus und exotischen differenzierbaren Strukturen beschäftigen.



Literatur:

M. Hirsch; Differential topology, Springer (1976).

T. Bröcker, Jänich, *Differentialtopologie*, Springer (1973).

J. Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, Univ. Press (1965).

V. Guillemin, Pollack,*Differential topology*, Prentice-Hall (1974).

Partielle Differentialgleichungen II

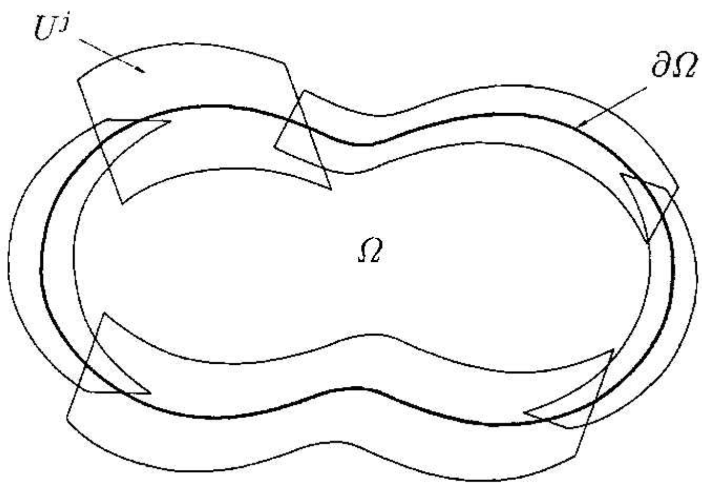
Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Di 16-18, Do 14-16

Die Vorlesung widmet sich der Theorie der Sobolev-Räumen und ihren Anwendungen auf Randwertaufgaben für elliptische partielle Differentialfleichung, z.B. Poissongleichung:

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \qquad \text{und} \qquad u = g \qquad \text{auf } \partial\Omega, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Voraussetzungen: Analysis I – III, lineare Algebra. Kenntnisse aus der Vorlesung Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen sind vom Vorteil, aber keine Voraussetzung, da alle notwendigen Grundlagen (z.B. schwache Ableitung, schwache Lösung etc.) in der Vorlesung erklärt werden.



Literatur:

R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).

R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press (2003).

Einführung in die Funktionalanalysis

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Di 12-14, Do 12-14

Die Funtktionalanalysis ist nichts anderes als Analysis in unendlich vielen unabhängigen Veränderlichen. Funktionen und Folgen werden als Punkte in einem unendlichdimensionalen Vektorraum erfasst. Hauptsächlich widmet sich die Vorlesung den normierten Vektorräumen und den zwischen ihnen wirkenden linearen stetigen Abbildungen. Oft werden wir Parallelen zu den aus Analysis I und II und Linearer Algebra bekannten Eigenschaften feststellen. Uns begegnen aber auch Eigenschaften, die sich jeder endlichdimensionalen Intuition entziehen, wie z.B. dass eine lineare Abbildung nicht unbedingt stetig sein muss. Willkommen im Wunderland!

Literatur:

D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 2011.

H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Berlin, 2006.

N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Wiley-Interscience, 1988.

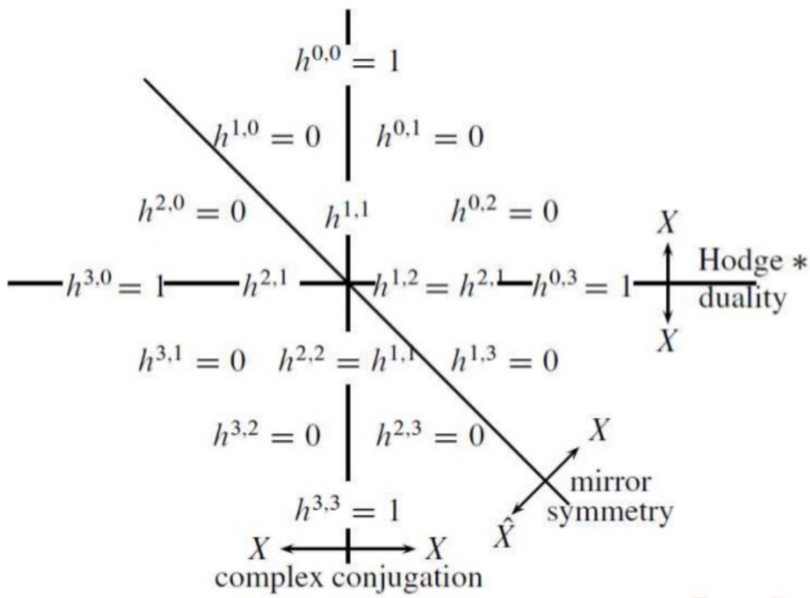
J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart, 2000.

Komplexe Geometrie I

Dozent: Prof. Dr. Kang Zuo

Termine: Di und Do 12-14 Uhr

In der Vorlesung werden die Begriffe Komplexe Mannigfaltigkeit, Garben, Vektor Bündeln mit Zusammenhangen, und verschiedene Versionen von Kohomologie eingeführt. Sätze über De Rham und Dolbeault Isomorphismen und die Darstellung durch harmonische RDifferentialformen werden bewiesen. Als Hauptthema der Vorlesung werden wir die Hodge Struktur auf die sogennante Kählersche Mannigfaltigkeit einführen. Als wichtige Anwandungen der Hodge Theorie werden den Verschwindungssatz von Kodaira und dessen Folgerung Einbettungssatz von Kodaira bewiesen. Vorkenntnisse: Analysis I und II, Lineare Algebra I, Funktiontheorie.



Literatur:

Griffiths-Harris, *Principles of Algebraic Geometry.*

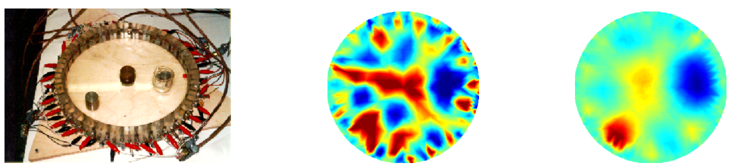
C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry I.*

Modellierungspraktikum Impedanztomographie

Dozent: Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois

Termine: Vorlesung Mo 14-16, Übung Do 14-16

Computertomographie ist aus dem heutigen medizinischen Alltag nicht mehr wegzudenken. Dieser Fortschritt beruht zu einem ganz wesentlichen Anteil auf erfolgreicher mathematischer Grundlagenforschung. Die bekannte Röntgentomographie verwendet beispielsweise eine Inversionsformel des österreichischen Mathematikers Johann Radon aus dem Jahr 1917 für die nach ihm benannte Radon-Transformation. Seit etwa 1980 wird alternativ an tomographischen Verfahren gearbeitet, die die örtlichen Unterschiede der elektrischen Leitfähigkeit im Körper aus Strom-/Spannungsmessungen an der Oberfläche bestimmen. Auf diese Weise hofft man beispielsweise in der Mammographie besser Tumoren erkennen zu können, da diese aufgrund der stärkeren Durchblutung eine signifikant höhere Leitfähigkeit als das restliche Gewebe in der Brust aufweisen. Das zugrundeliegende physikalische Modell (die quasistatische Approximation) führt auf eine skalare elliptische Differentialgleichung für das elektrische Potential, die die vom Ort abhängige Leitfähigkeit als unbekannten Parameter/Funktion enthält. Diese Funktion muss durch eine Optimierung an die gegebenen Strom-/Spannungsmessungen gefittet werden. Das Problem stellt sich als schlecht gestellt heraus, so dass ein "Overfitting" unbedingt vermieden werden muss, um sinnvolle Rekonstruktionen zu erhalten; das Problem muss regularisiert werden.



Versuchsaufbau für reale Daten (links), eine Rekonstruktion mit "Overfitting" (Mitte) und eine regularisierte Rekonstruktion (rechts)

In dem Praktikum werden die benötigten "Zutaten" für eine numerische Rekonstruktion der Leitfähigkeit implementiert und zu einem vollständigen Inversionsalgorithmus verknüpft. Neben einer numerischen Finite-Elemente-Methode für die Lösung der elliptischen Differentialgleichung umfasst dies die sogenannte Adjungiertenmethode und, darauf aufbauend, iterative Optimierungs- bzw. Regularisierungsmethoden.
Das Modellierungspraktikum ist der zweite Teil des Moduls Wissenschaftliches Rechnen, welches wiederum ein Wahlpflichtmodul der mathematischen Masterstudiengänge und ein Pflichtmodul des interdisziplinären Masterstudiengangs Computational Sciences - Rechnergestützte Naturwissenschaften ist. Vorausgesetzt werden grundlegende Kenntnisse der Numerik gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen.

Literatur:

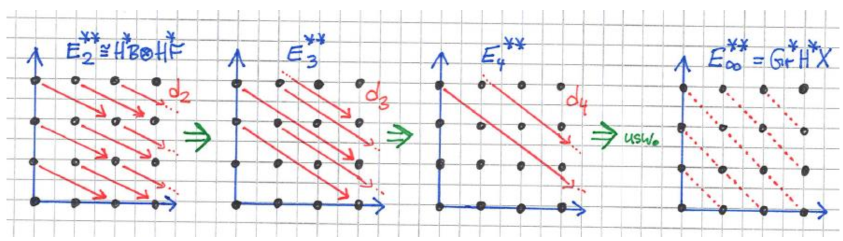
M. Brühl, M. Hanke-Bourgeois, *Kann Mathematik der elektrischen Impedanztomographie zum Durchbruch verhelfen?*, Forschungsmagazin der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz 16 (2000), S. 32-40, `www.mathematik.uni-mainz.de/ModPraktikum20`.

Anwendungen der Spektralsequenz von Serre

Dozent: Apl. Prof. Dr. Stephan Klaus

Termine: Donnerstag, ca. 14-tägig, jeweils 14:05-15:55

Vor 68 Jahren fand eine Revolution in der Topologie statt. Die Serre-Spektralsequenz verbindet die Homologie von Faser, Totalraum und Basis einer Faserung miteinander. Zahlreiche, vorher praktisch unzugängliche Probleme der Topologie konnten mit dieser neuen Methode schlagartig behandelt werden. Jean-Pierre Serre hat dies in seiner Doktorarbeit 1951 ausgeführt und dafür 1954 die Fieldsmedaille erhalten. Wir wollen in der Vorlesung eine überblicksartige Einführung in diese Methoden geben und dabei vor allem die spektakulären Anwendungen in Topologie und Algebra besprechen: Gysin- und Wang-Sequenz, Theoreme von Borel, Chern-Hirzebruch-Serre, Hurewicz und Freudenthal, Kohomologie endlicher Gruppen, Eilenberg-MacLane Räume und Steenrod-Algebra, Berechnung von Homotopie-Gruppen, globale Nichttrivialität, rationale Homotopie. Spektralsequenzen sind technisch anspruchsvoll, man lernt sie am besten über die Anwendung auf konkrete Fälle.



Zielgruppe/Voraussetzungen: Hörer mit soliden Kenntnissen aus "Topologie I", insb. zu CW-Komplexen, Homotopie, Homologie und Mannigfaltigkeiten. Weitere Themen wie z.B. Faserungen und Faserbündel, Kohomologiering, Poincaré-Dualität, Lie-Gruppen und klassifizierende Räume werden jeweils kurz erklärt.

Literatur:

1) Hintergundwissen in Topologie:
A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002). Auf der Webseite des Autors frei verfügbar: http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf
G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, GTM **139** (1993).
R. M. Switzer, *Algebraic Topology - Homotopy and Homology* , (2002).
2) Spektralsequenzen: (siehe auch Switzer §15)
M. C. Mosher, R. E. Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory*, Harper-Row/Dover (1968).
J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences*, Cambridge University Press (2000), CSAM **58** .
3) Kohomologie von endlichen Gruppen:
A. Adem, R. J. Milgram, *Cohomology of Finite Groups*, Springer (2004), GdmW **309**.

Statistische Mechanik von Gittersystemen

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

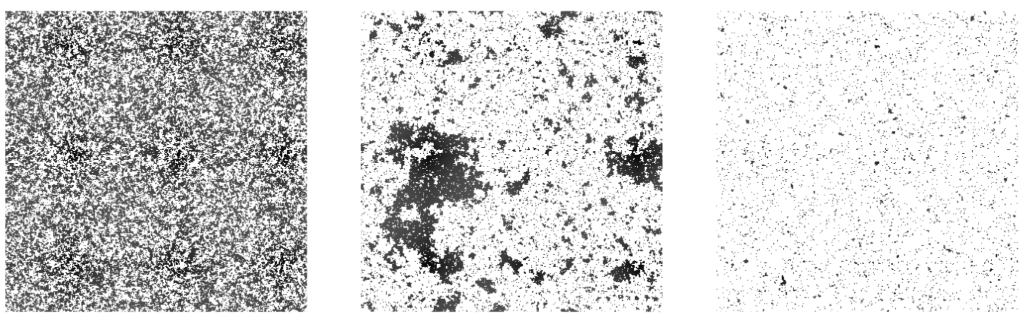
Termine: Mi, Fr 10-12

Statistische Mechanik zielt darauf, das Verhalten makroskopischer Objekte ausgehend von einer mikroskopischen Beschreibung zu erklären. Es soll in dieser Vorlesung, hauptsächlich dem Buch von S. Friedli und Y. Velenik folgend, um eine mathematische Einführung in die klassische Theorie von Gleichgewichtsystemen anhand des (technisch einfacheren Falls) von Gittermodellen gehen.

Ein prominentes Beispiel ist das *Ising-Modell*, das E. Ising 1925 als ein Modell für Ferromagnetismus vorgeschlagen hat: An den Knoten z eines Ausschnitts $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ sitzen Atome, deren magnetisches Moment zwei mögliche Ausrichtungen $+1$ und -1 haben kann; dann hat eine mikroskopische Konfiguration $\sigma = (\sigma_z)_{z\in\Lambda} \in \{\pm 1\}^\Lambda$ bei inverser Temperatur $\beta > 0$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_\beta} \exp\Big(-\beta \times \sum_{z,z'\in\Lambda \text{ benachbart}} \sigma_z \sigma_{z'} \Big)$$

Simulationen für $\Lambda = \{1, \dots, 400\}^2$ (mit periodischem Rand):



$\beta = 0.3$ $\quad$ $\beta = \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ $\quad$ $\beta = 0.5$

Die Vorlesung richtet sich an fortgeschrittene B.Sc.-Studenten sowie M.Sc.- und M.Ed.-Studenten (insbesondere solche, die Physik als 2. Fach haben). Kenntnisse aus der *Einführung in die Stochastik* und eine gewisse mathematische Reife werden vorausgesetzt, Wissen aus *Stochastik I* (und *Stochastik II*) ist hilfreich, aber nicht zwingend erforderlich.

Literatur:

Sacha Friedli und Yvan Velenik, *Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction*, Cambridge University Press (2017).
`https://www.unige.ch/math/folks/velenik/smbook/`

Hans-Otto Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, 2. Aufl., de Gruyter (2011).

Firas Rassoul-Agha und Timo Seppäläinen, *A Course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs measures*, American Mathematical Society (2015).

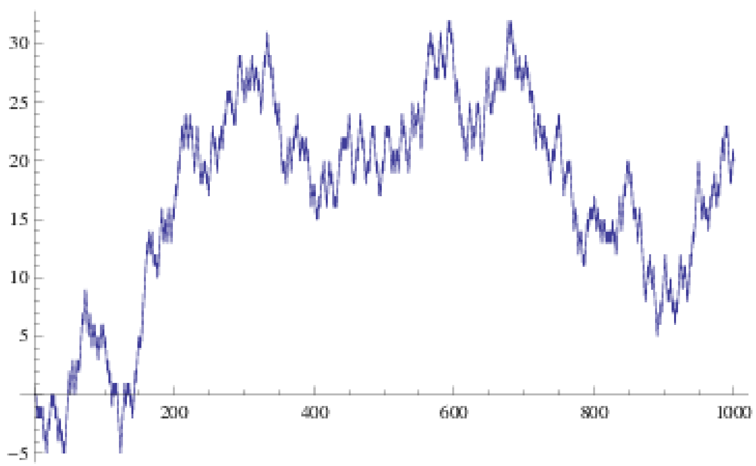
Stochastik 1

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Di und Do 10.15-12.00

In der Vorlesung Stochstik 1 werden wir uns zunächst mit der Maßtheorie und der Konstruktion allgemeiner Wahrscheinlichkeitsmaße beschäftigen und dabei wichtige Beweisverfahren wie die maßtheoretische Induktion kennenlernen. Danach lernen wir verschiedene Konvergenzbegriffe kennen wie zum Beispiel die fast sichere Konvergenz. Dies ist ein wesentlich stärkerer Konvergenzbegriff als die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, welche aus der letzten Vorlesung bekannt ist. Dannach werden wir mit Hilfe des wunderschönen und sehr nützlichen Satzes von Borel-Cantelli, das starke Gesetz der großen Zahlen beweisen. Auch werden wir das Gesetz der großen Zahlen unter geringen Annahmen zeigen und sehen, dass die Konvergenz gegen eine Normalverteilung ein relativ allgemeines Phänomen ist.

Die Vorlesung orientiert sich an dem unten genannten Skript. Weitere Literaturhinweise werden vor Semesterbeginn bekannt gegeben.



Realisierung einer symmetrischen Irrfahrt.

Prüfung: Die Prüfung findet mündlich statt.

Literatur:

A. Bovier, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* , `https://www.dropbox.com/s/wllhl2v4ccv2x7f/wt-new.pdf?dl=0`, Skript(2019).

Stochastik III (Stochastische Analysis)

Dozent: Prof. Dr. Reinhard Höpfner

Termine: Mo und Mi 10-12 h, Raum 04-522

Die Vorlesung schliesst inhaltlich an die 'Stochastik II' des Wintersemesters 2019/20 an. Hauptziel der Vorlesung ist die Theorie der Martingale in stetiger Zeit und eine allgemeine Definition des stochastischen Integrals (vorhersehbare Prozesse als Integranden, lokal quadratintegrable Martingale als Integratoren): dabei werden nicht nur Prozesse mit stetigen Pfaden, sondern auch solche mit Sprüngen behandelt. Stochastische Integrale sind als Martingale definiert. Auf dieser Grundlage werden danach neben anderen Anwendungen stochastische Differentialgleichungen und ihre Lösungen behandelt.
Der Themenbereich der Vorlesung wird durch die folgenden Stichworte genauer umschrieben: Stopzeiten, Vorhersehbarkeit, cadlag Prozesse, Punktprozesse, Martingale in stetiger Zeit, stochastische Integration, stetige Semimartingale, Ito-Formel, Exponentiale, Satz von Girsanov, stochastische Differentialgleichungen, schwache und starke Lösungen, Eindeutigkeitsbegriffe.
Die Vorlesung ist zweiter Teil des Vertiefungsmoduls Stochastik im Master of Science Mathematik.
Ich weise ausdrücklich darauf hin, dass die Vorlesung intensives Nacharbeiten erfordert. Parallel zu der vierstündigen 'Stochastik III' werden zweistündige 'Ergänzungen zur Stochastik III' angeboten, um die in der Vorlesung im Vordergrund stehende Entwicklung der Theorie durch Beispiele, Illustrationen und Anwendungen zu begleiten und die Inhalte 'anschaulich' zu machen.

nötige Vorkenntnisse: im Umfang der Vorlesungen Stochastik I+II

Literatur: in der Vorlesung, vorab seien stellvertretend genannt:

M. Métivier, *Semimartingales*, deGruyter 1982.

P. Brémaud, *Point processes and Queues*, Springer 1981.

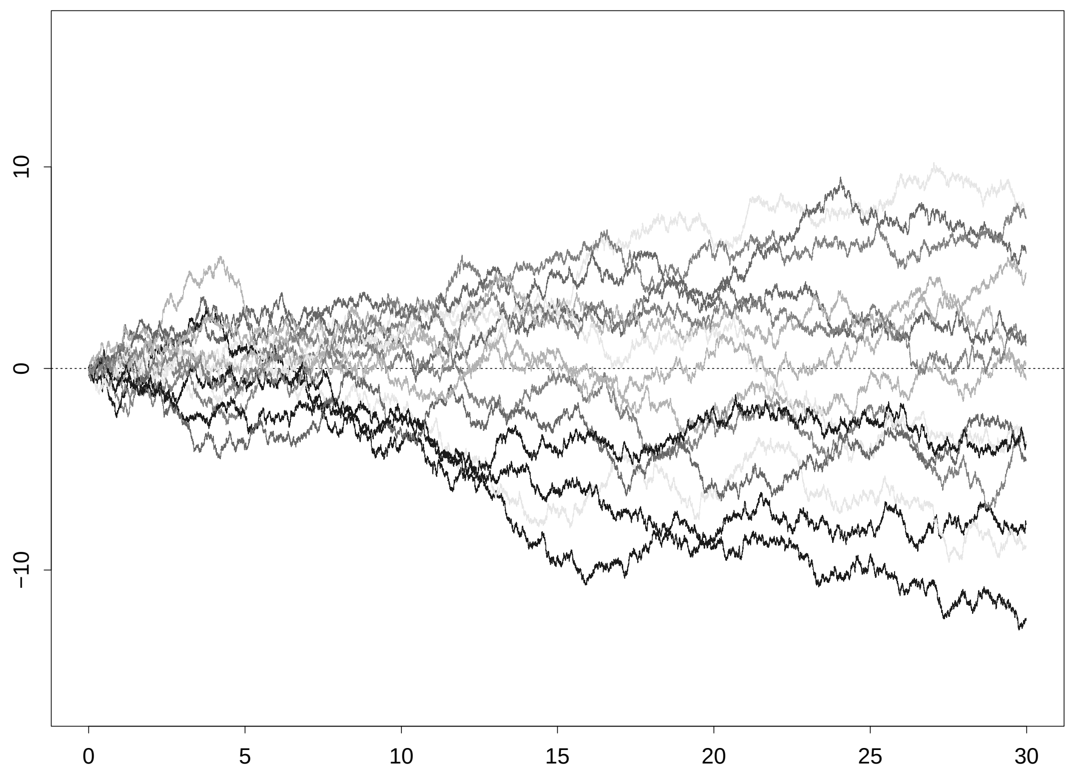
Ergänzungen zur Stochastik III

Dozent: Prof. Dr. Reinhard Höpfner

Termine: Fr 10-12 h, Raum 04-522

Ziel dieser 2-std. Ergänzungsvorlesung ist es, mit Beispielen, Anwendungen und Kommentaren die Begriffe und Konstruktionen zu illustrieren, die in der vierstündigen Vorlesung 'Stochastik III (Stochastische Analysis)' entwickelt werden, und für die wegen des kurzen Sommersemesters die nötige Zeit in der Vorlesung selbst fehlen würde.
Wegen der engen stofflichen Verknüpfung kann die Ergänzungsvorlesung sinnvoll nur parallel zur 'Stochastik III (Stochastische Analysis)' des SoSe20 gehört werden. Sie wird den Hörerinnen und Hörern der 'Stochastik III' dringend empfohlen.

Literatur: wird in der Ergänzungsvorlesung angegeben werden



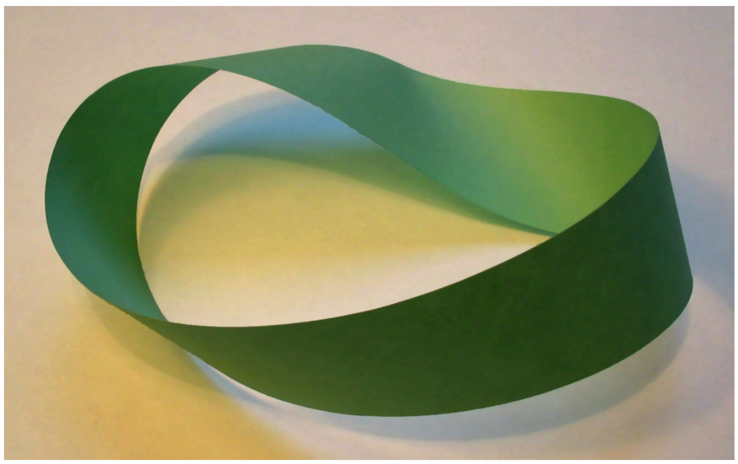
15 verschiedene Pfade der Brownschen Bewegung

Topologie II

Dozent: Prof. Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Termine: Mo und Do 8-10

Die Vorlesung setzt die Aufbauvorlesung ***Topologie*** fort und die Inhalte dieser Vorlesung werden vorausgesetzt. Der Wunsch, geometrische Zyklen auf Mannigfaltigkeiten und allgemeinere topologische Räume miteinander zu schneiden, führt zu einer wesentlichen Erweiterung der Homologie-Theorie: die Einführung der Cohomologie mit Schnittprodukt und die Poincaré-Dualität für Mannigfaltigkeiten. Eingeführt werden außerdem gewisse Cohomologieklassen von Vektorraumbündeln, sogenannte *charakteristische Klassen*, welche deren Komplexität messen und viele interessante Anwendungen haben.



Literatur:

R. Stöcker-H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, Teubner, 1988.

A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

W. Massey: *Algebraic Topology, an introduction*, Springer, 1967.

J. Milnor-J. Stasheff: *Characteristic Classes*, Princeton University Press, 1966.