Messung der Virtuellen Comptonstreuuung an MAMI zur Bestimmung Generalisierter Polarisierbarkeiten des Protons

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades „Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

vorgelegt von

Jan Michael Friedrich
geboren in Wiesbaden-Sonnenberg

Institut für Kernphysik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mai 2000

Dekan:	Prof. Dr. Th. Walcher
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Th. Walcher
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Kleinknecht
Tag der mündlichen Prüfung:	23.11.2000

Inhaltsverzeichnis

Anhang

Einleitung

Die Berechnung elektromagnetischer Erscheinungen ist seit etwa 150 Jahren Gegenstand der Physik und verzeichnet Erfolge von der Hochfrequenztechnik (Fernsehen, klassische Elektrodynamik) über das systematische Verständnis der chemischen Eigenschaften der Elemente (Periodensystem, nichtrelativistische Quantenmechnik) bis zur Materieentstehung in hochenergetischen Kollisionen einzelner Teilchen (Paarerzeugung, relativistische Quantenfeldtheorie).

Die *Quantenelektrodynamik*, kurz QED, beschreibt die Wechselwirkung von Elektronen mit dem elektromagnetischen Feld mit so großer Präzision, dass bis heute keine experimentelle Abweichung bekannt ist. Dies hat dazu geführt, dass man das als bekannt vorausgesetzte elektrodynamische Verhalten der Elektronen als Sonde benutzt für die Erforschung des in vielen Zügen noch unverstandenen Gebiets der stark wechselwirkenden Teilchen.

Bremsstrahlung gehört seit ihrer Entdeckung 1896 durch W. Roentgen zu den bekanntesten Erscheinungen des Mikrokosmos, und, insbesondere durch die Arbeiten von Bethe [Bet32], Heitler [BHe34] und weiteren Autoren (Überblick z.B. in [Hei54]), zu den wichtigen Anwendungen und Bewährungsproben der QED.

Bei Durchtritt von hochenergetischen Elektronen durch Materie dominiert die Emission elektromagnetischer Strahlung im Coulombfeld der Kerne, welche auf Vorschlag von A. Sommerfeld „Bremsstrahlung“ genannt wird, den Energieverlust der Elektronen. Entsprechend ist sie bei der Elektronenstreuung der Mittel- und Hochenergiephysik ein charakteristischer Nebeneffekt, der bei der Interpretation von Streudaten als Strahlungskorrektur berücksichtigt werden muss.

Anschaulich kommt Bremsstrahlung durch die Beschleunigung der Ladung bei Streuung zustande, welche bei einer kleinen Masse wie beim Elektron (im Vergleich zu den Kernmassen) besonders groß ist. Entsprechend konzentrieren sich die frühen Arbeiten zunächst ausschließlich auf die Strahlung des Elektrons.

Eine genaue Untersuchung zeigt jedoch, dass auch die Rückstoßkerne aufgrund ihrer Beschleunigung im Streuprozess strahlen. Dieser Anteil der Bremsstrahlung lässt sich als Comptonstreuung verstehen, bei der das bei der Streuung ausgetauschte virtuelle Photon als das reelle Bremsstrahlungs-Photon ausläuft; dieser Prozess wird als *virtuelle Comptonstreuung* bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit wird virtuelle Comptonstreuung am Proton untersucht. Für diese wurde gezeigt [GLT95], dass in einem bestimmten Raumwinkelbereich für die Bremsstrahlungsphotonen der hadronische Beitrag, also derjenige vom Proton, so groß ist, dass die Abweichung durch die *Polarisierbarkeit des hadronischen Stromes* im Wirkungsquerschnitt sichtbar wird. Weil diese Polarisierbarkeit mit virtuellen Photonen bestimmt wird, wird hiermit das Konzept der mit reellen Photonen gemessenen Polarisierbarkeiten auf impulsübertragsabhängige Größen verallgemeinert. Diese *generalisierten Polarisierbarkeiten* [GLT95] spiegeln, ähnlich den Formfaktoren bei elastischer Streuung, die räumliche Verteilung der Polarisierbarkeit wider.

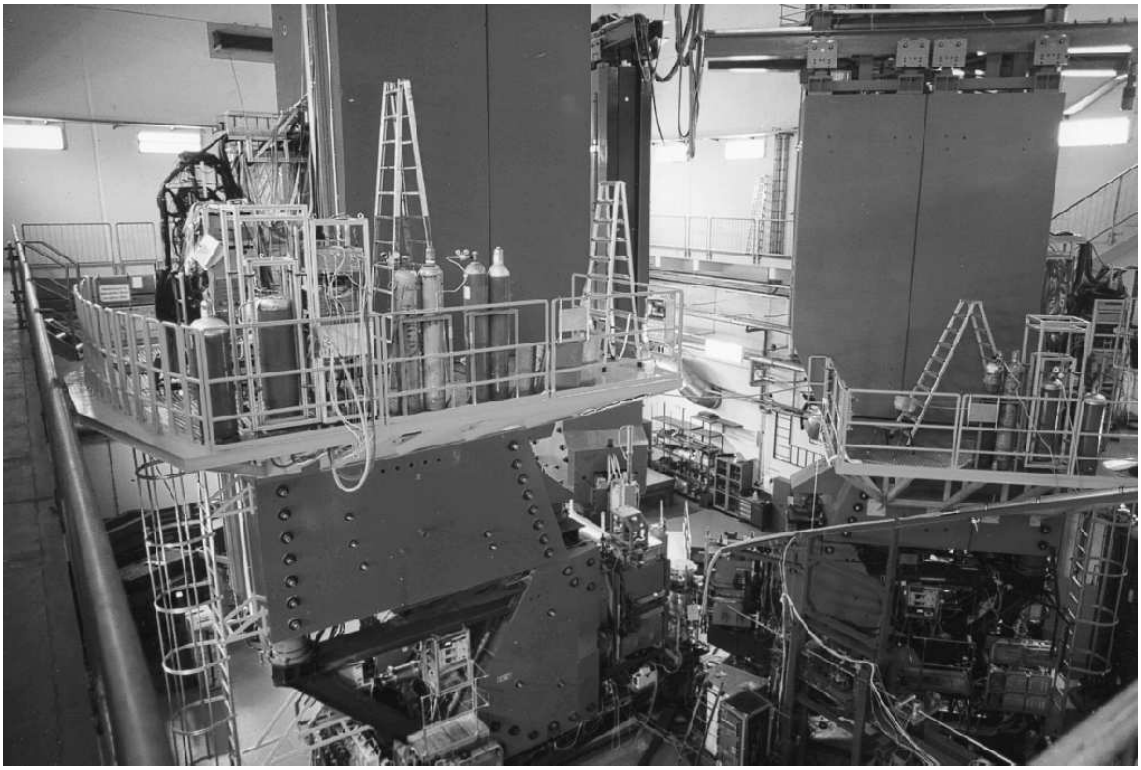


Abb. 1: Drei-Spektrometer-Anlage am Elektronenbeschleuniger MAMI. Links (rot) und rechts (grün) Spektrometer A und C mit Punkt- zu Parallelabbildung (nichtdispersive Koordinate), hinten (blau) das punkt- zu punktabbildende Spektrometer B.

Die A1-Kollaboration am Institut für Kernphysik in Mainz hat am Elektronenbeschleuniger MAMI die Drei-Spektrometer-Anlage aufgebaut und betreibt diese für kernphysikalische Koinzidenzexperimente [Blo98].

An dieser Anlage wurde in zwei sechswöchigen Strahlzeiten 1996 und 1997 das erste dezidierte VCS-Experiment durchgeführt. Der Experimentvorschlag stammt von N. d'Hose (Saclay), die auch das Experiment und die Auswertung geleitet und koordiniert hat. Das Resultat ist bei Physical Review Letters zur Veröffentlichung eingereicht [RFL00].

Zu dem Experiment wurden bereits 2 Dissertationen [Lhu97, Roc98] angefertigt, die sich mit dem Stand der Analyse Mitte des Jahres 1997 bzw. Ende 1998 beschäftigen. In [Lhu97] werden insbesondere die Strahlungskorrekturen zur virtuellen Comptonstreuung diskutiert, in [Roc98] finden sich viele Details zur Spektrometeroptik. In diesen Dissertationen sind die Ergebnisse der VCS-Gruppe zum jeweiligen Zeitpunkt ihrer Fertigstellung bereits eingeflossen. Die vorliegende Arbeit greift die behandelten Themen an einigen Stellen noch einmal auf, beschränkt sich aber im wesentlichen auf Neuerungen gegenüber diesen Arbeiten.

Das Experiment erfordert eine hohe Genauigkeit in der Bestimmung des Wirkungsquerschnitts von etwa 1%. Dazu ist es erforderlich, jedes einzelne Ereignis genauestens zu analysieren, d.h. die mit der Apparatur mögliche hohe Präzision bei der Rekonstruktion der detektierten Teilchenspuren mit hoher bzw. genau bekannter

Nachweiseffizienz voll auszuschöpfen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Spurrekonstruktion mit vertikalen Driftkammern in dieser Hinsicht weiterentwickelt.

Weiterhin wurde im Rahmen dieser Arbeit der bei der Messung auftretende Untergrund detailliert untersucht, welcher wegen Limitierung der Zählrate die Messung und wegen der schwierigen Abtrennung von den echten Ereignissen die Datenanalyse erheblich erschwert hat.

Die virtuelle Comptonstreuung hängt aufs engste mit den Strahlungskorrekturen zusammen. Hierzu wurden in Zusammenarbeit mit M. Vanderhaeghen Untersuchungen durchgeführt, die z. T. bereits zur Publikation eingereicht sind [Vdh00]. In der vorliegenden Arbeit wird speziell die Strahlungskorrektur von Mo und Tsai [MMT69] untersucht und eine sehr übersichtliche Formulierung des Ergebnisses erreicht.

Die gemessenen VCS-Wirkungsquerschnitte werden abschließend kurz zusammengefasst und in einer unabhängigen Auswertung noch einmal die zugänglichen generalisierten Polarisierbarkeiten des Protons extrahiert.

Kapitel 1

Der Beitrag der generalisierten Polarisierbarkeiten zur virtuellen Comptonstreuung

1.1 Klassische Feldgleichungen und Polarisierbarkeit von Materie

Im klassischen Verständnis beruht die elektromagnetische Wechselwirkung auf vier Vektorfeldern, deren Größe nach den Maxwellschen Gleichungen durch die raumzeitliche Anordnung der Ladungen $(\rho, \vec{\jmath})$ gegeben ist

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

und die auf jeden Massenpunkt mit Ladung q Kraft ausüben:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right).$$

$\vec{D}$ und $\vec{H}$ sind makroskopische Felder, in denen die mikroskopische Kraftwirkung auf die Konstituenten der Materie, die von den Feldern durchdrungen wird, berücksichtigt ist. Diese Wirkung äußert sich als eine Polarisierung $\vec{P}$ bzw. Magnetisierung $\vec{M}$ des Materials, und es gilt

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi\vec{M}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Für isotrope Materie ist die Polarisierung kollinear zum äußeren Feld,

$$\vec{P} = \chi\vec{E}, \tag{1.2}$$

und mit Einführung der dielektrischen Konstante

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi \tag{1.3}$$

ist

$$\vec{D} \;=\; \varepsilon \vec{E}; \tag{1.4}$$

allerdings gilt im allgemeinen Fall

$$P_i \;=\; \sum_j a_{ij} E_j \tag{1.5}$$

mit 6 unabhängigen[1] Polarisierbarkeiten a_{ij} [Jac54].

1.2 Generalisierte Polarisierbarkeiten

In relativistischer Formulierung wird eine Ladungs- und Stromverteilung beschrieben durch[2]

$$J^\mu(x) \;=\; (\rho(x), \vec{j}(x)), \tag{1.6}$$

bzw. durch ihre Fouriertransformierte,

$$J^\mu(q) \;=\; \int e^{iqx} \cdot J^\mu(x)\; d^4x. \tag{1.7}$$

Eine Deformation dieser Verteilung $\delta J^\mu(x)$ durch ein äußeres elektromagnetisches Feld A^{ext} kann in allgemeiner Form parametrisiert werden durch den Polarisationstensor $P^{\mu\nu}(x, y)$,

$$\delta J^\mu(x) \;=\; \int P^{\mu\nu}(x, y) A^{ext}_\nu \; d^4y, \tag{1.8}$$

wobei allerdings beachtet werden muss, dass eine mögliche Gesamtverschiebung der Verteilung durch das Feld einen trivialen Anteil darstellt, der unabhängig von der Deformierbarkeit auftritt und keine Polarisierbarkeit darstellt. Bei der Streuung von Elektronen an Protonen stellt das Feld des Elektrons ein solches externes Feld dar, und die Polarisierbarkeit der Protonen äußert sich in einem (kleinen) Beitrag zum Wirkungsquerschnitt der Reaktion

$$e \;+\; p \;\longrightarrow\; e' \;+\; p' \;+\; \gamma\;. \tag{1.9}$$

Die Feynmangraphen der zu diesem Prozess in niedrigster Ordnung beitragenden Amplituden sind in Abbildung 1.1, die im folgenden benutzten kinematischen Größen in Tabelle 1.1 zusammengestellt. Über den Raumwinkelbereich des emittierten reellen Photons integriert, dominiert der wohlbekannte Bethe-Heitler-Anteil, d.h. Strahlung von ein- oder auslaufendem Elektron, mit der Amplitude

$$T^{BH} \;=\; -\frac{e^3}{t} \varepsilon'^{\,*}_\mu L^{\mu\nu} \bar{u}_{p'} \Gamma_\nu u_p\;. \tag{1.10}$$

[1]Beispiele für anisotrope Materie mit $a_{ij} \neq 0$ auch für $i \neq j$ sind Kalzit und Quartz

[2]Einheiten ab hier $\hbar = c = 1$

	4-Impuls	Helizität (Spinprojektion)	3-Impuls im Schwerpunktsystem
e	k	h	k $(\sin\alpha\cos\phi,\ \sin\alpha\sin\phi,\ \cos\alpha)$
e'	k'	$h'\ [\overset{\mathrm{ur}}{=} h]$	k' $(\sin\alpha'\cos\phi,\ \sin\alpha'\sin\phi,\ \cos\alpha')$
γ^*	$q = k - k'$	λ	q $(0, 0, \ \ 1)$
p	p	$h_N(\sigma)$	q $(0, 0, -1)$
γ	q'	λ'	q' $(\ \ \sin\vartheta, 0, \ \ \cos\vartheta)$
p'	p'	$h'_N(\sigma')$	q' $(-\sin\vartheta, 0, -\cos\vartheta)$

Wichtige Invariante:

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= -q^2 \\
t &= (q - q')^2 = (p' - p)^2 \\
s &= (p + q)^2
\end{aligned}
$$

Tab. 1.1: Kinematische Variable der Reaktion (1.9). Im ultrarelativistischen Grenzfall (ur) ist die Helizität des Elektrons erhalten, $h' = h$. Der Winkel zwischen Elektronstreu- und Reaktionsebene φ und der Streuwinkel des Photons ϑ sind in Abb. 1.2 gezeigt (dort $\vartheta_{\gamma\gamma}$ für ϑ). Die Parameter der Elektronkinematik k, α, k', α' ergeben sich aus denjenigen des virtuellen Photons ω, q, und ε (Formeln hierzu s. [Knö97, GuV98])

Dabei ist der leptonische Tensor

$$L^{\mu\nu} = \bar{u}_{k'} \left(\gamma^\mu \frac{(\not{k}' + \not{q}') + m_e}{(k' + q')^2 - m_e^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{(\not{k}' - \not{q}') + m_e}{(k' - q')^2 - m_e^2} \gamma^\mu \right) u_k \tag{1.11}$$

und der Hadronstrom ist wie bei der elastischen Streuung (vgl. Abschnitt 2.1) gegeben durch

$$\Gamma_\mu = F_1\ \gamma_\mu + \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2\ i\sigma_{\mu\nu} q^\nu\ ; \tag{1.12}$$

hier ist M_p die Masse des Protons, dessen innere Struktur beschrieben wird durch

$$
\begin{array}{lll}
\kappa_p = 1.79 & & \text{anomales magnetisches Moment} \\
F_1 = F_1(Q^2) & & \text{Dirac-Formfaktor} \\
F_2 = F_2(Q^2) & & \text{Pauli-Formfaktor}
\end{array} \tag{1.13}
$$

Bei den restlichen Amplituden, zusammengefasst zu

$$T^{Rest} = \frac{e^3}{q^2} \varepsilon'^{\,*}_\mu H^{\mu\nu} \bar{u}_{k'} \gamma_\nu u_k\ , \tag{1.14}$$

koppelt das emittierte Photon an das Proton. Der zugehörige hadronische Tensor kann zerlegt werden in den Anteil der Borngraphen und den darüber hinaus gehenden („Nicht-Born“-) Anteil, der in obigem Sinne den Polarisationsbeitrag darstellt,

$$H^{\mu\nu} = H_B^{\mu\nu} + H_{NB}^{\mu\nu}\ , \tag{1.15}$$

wobei der Bornanteil

$$H_B^{\mu\nu} = \bar{u}_{p'} \left(\Gamma^\mu \frac{(\not{p}' + \not{q}') + m_p}{(p' + q')^2 - m_p^2} \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \frac{(\not{p}' - \not{q}') + m_p}{(p' - q')^2 - m_p^2} \Gamma^\mu \right) u_p \tag{1.16}$$

analog zu (1.11) *definiert* wird mit den Vertizes Γ^μ und Γ^ν gemäß (1.12).

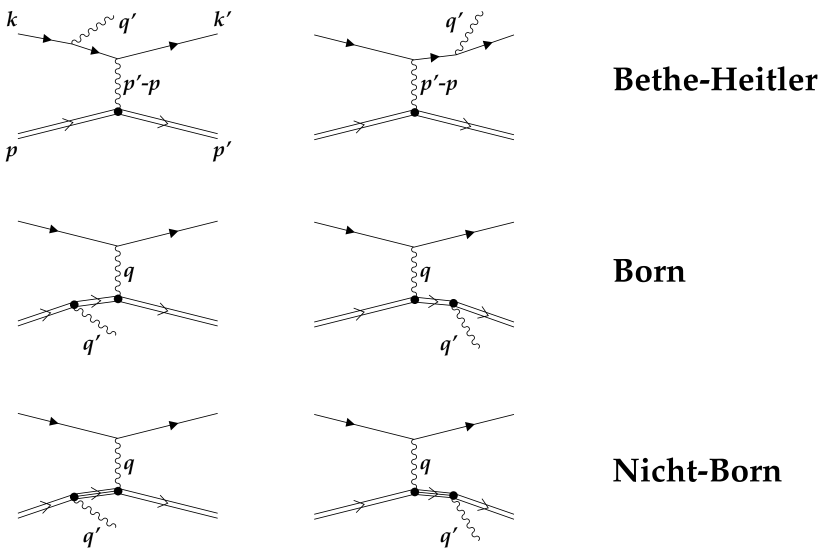


Abb. 1.1: Feynmangraphen zu Elektro-Photonproduktion am Proton

Entwickelt man den Nicht-Born-Anteil nach Potenzen von q',

$$H_{NB}^{\mu\nu} \;=\; a^{\mu\nu} \;+\; b_\alpha^{\mu\nu} q'^\alpha \;+\; \mathcal{O}(q'^2) \tag{1.17}$$

so kann man zeigen, dass $a^{\mu\nu} = 0$ gilt [GLT95] (Niederenergie-Theorem analog zu [Low54]), d.h. dass der Polarisierbarkeitseffekt erst in der Ordnung q' auftritt. Weiterhin lässt sich $H_{NB}^{\mu\nu}$ in der aus den Vektorkugelfuntionen abgeleiteten Basis $W^\mu_{(\Lambda,\hat{q}')}$ (Einzelheiten zu Definition und Eigenschaften in [GuV98]) entwickeln gemäß

$$H_{NB}^{\mu\nu}(\vec{q}\,'\sigma', \vec{q}\sigma) \;=\; 4\pi\mathcal{N} \sum_{\Lambda'\Lambda S} \lambda_{\rho'} W^\mu_{(\Lambda',\hat{q}')} H_{NB}^{(\rho' L',\rho L)S} \lambda_\rho W^{\nu *}_{(\Lambda,\hat{q})} \cdot C_{(\Lambda'\sigma',\Lambda\sigma,S)} \;;$$

hierbei charakterisieren

$$\begin{aligned} \Lambda \;&=\; \rho L M \left\{ \begin{array}{ll} \rho = 0 & \text{Ladungsmultipol} \\ \rho = 1 & \text{magnetisch-transversaler Multipol} \\ \rho = 2 & \text{elektrisch-transversaler Multipol} \\ L & \text{Gesamtdrehimpuls} \\ M & \text{Projektion des Drehimpulses} \end{array} \right. \\ \lambda_\rho \;&=\; g_{\rho\rho} \end{aligned}$$

einlaufendes ($\Lambda; \rho = 0, 1, 2$) und auslaufendes ($\Lambda'; \rho' = 1, 2$) Photon. Die zugehörigen Clebsch-Gordan-Koeffizienten gehen ein in die Definition der Abkürzung

$$C_{(\Lambda'\sigma',\Lambda\sigma,S)} \;=\; (-)^{\frac{1}{2}+\sigma'+L+M} \sum_s \langle \tfrac{1}{2} - \sigma', \tfrac{1}{2}\sigma | Ss \rangle \; \langle L'M', L - M | Ss \rangle$$

wobei der Parameter S zwischen Spinumklappung (S=1) und keiner Spinumklappung (S=0) auf der Nukleonseite unterscheidet.

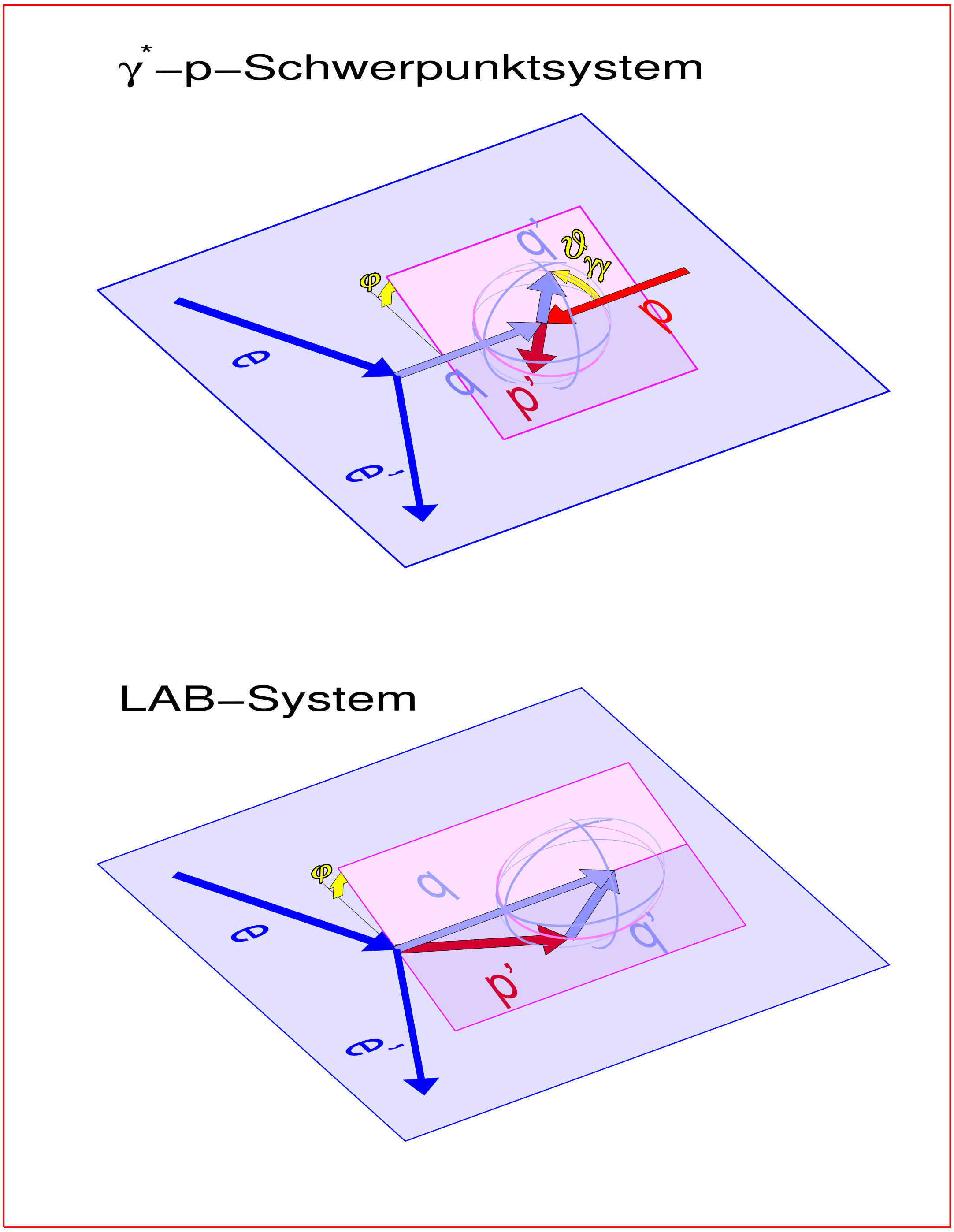


Abb. 1.2: Kinematik der Reaktion $e + p \longrightarrow e' + p' + \gamma$, **oben** im Schwerpunktsystem von Proton und Photon und **unten** im Laborsystem, in dem das Proton vor der Streuung ruht. Das auslaufende Photon (Impuls q') schließt im Schwerpunktsystem mit dem virtuellen Photon (Impuls q) den Winkel $\vartheta_{\gamma\gamma}$ ein und liegt in der Reaktionsebene, die um den Winkel φ gegen die Elektronstreuebene gekippt ist. φ wird, abweichend von dieser Zeichnung, von der die Elektronrichtungen beinhaltenden Halbebene gezählt (Hier ist φ nahe $-180°$ dargestellt).
Für feste Elektronkinematik, also bei Vorgabe von $\vec{q}$ und ω des virtuellen Photons, liegen die erlaubten Impulse von auslaufendem Proton und Photon im Schwerpunktsystem auf einer Kugel, die durch Lorentztransformation ins Laborsystem in ein Ellipsoid übergeht.

			$q^2 \to 0$	Einheit	Resonanzen
χ		$P^{(1100)1}$	0	fm^2	$P_{11,31}$
χ	e	$P^{(1102)1}$	$\frac{2k_\alpha}{3} \cdot (\gamma_2 + \gamma_4)$	fm^4	$P_{33,13}$
χ	e	$P^{(1111)0}$	$2k_\alpha \cdot \beta$	fm^3	$P_{11,13,31,33}$
	e	$P^{(1111)1}$	0	fm^3	$P_{11,13,31,33}$
		$\hat{P}^{(112)1}$	$\neq 0$	fm^4	$P_{13,33}$
	e	$P^{(0101)1}$	0	fm^3	$S_{11,31}, D_{13,33}$
χ	e	$P^{(0101)0}$	$k_\alpha \cdot \alpha$	fm^3	$S_{11,31}, D_{13,33}$
χ	e	$P^{(0112)1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} k_\alpha \cdot \gamma_3$	fm^4	$D_{13,33}$
χ		$\hat{P}^{(011)1}$	$\neq 0$	fm^4	$S_{11,31}, D_{13,33}$
		$\hat{P}^{(011)0}$	$\neq 0$	fm^4	$S_{11,31}, D_{13,33}$

Tab. 1.2: Generalisierte Polarisierbarkeiten. Zu den Markierungen (χ, e) in der ersten Spalte vgl. Abschnitt 1.2.1, die Konstante $k_\alpha = \sqrt{2/3} \cdot 4\pi/e^2$

Die Koeffizienten $H_{NB}^{(\rho' L', \rho L)S}(\mathrm{q}', \mathrm{q})$ drücken die Winkel- und Spinabhängigkeit von $H_{NB}^{\mu\nu}$ aus.

Zum hier interessierenden Verhalten $\mathrm{q}' \to 0$ trägt nur die niedrigste Ordnung $L' = 1$ bei. Mit dem Siegerttheorem, das im Niederenergielimes Ladungs- und elektrisch-transversale Multipole miteinander verbindet, und mit den Auswahlregeln für Drehimpuls- und Paritätserhaltung,

$$|L' - S| \leq L \leq L' + S \qquad (-)^{\rho' + L'} = (-)^{\rho + L}$$

erhält man in niedrigster Ordnung zunächst 10 beitragende Koeffizienten:

$$(\rho' L', \rho L)S \quad = \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (11,00)1 & (11,02)1 & (11,22)1 & (11,11)0 & (11,11)1 \\ (21,01)0 & (21,01)1 & (21,21)0 & (21,21)1 & (21,12)1 \end{array} \right.$$

Unter zusätzlicher Berücksichtigung des Grenzverhaltens für $\mathrm{q}' \to 0$ werden die **Generalisierten Polarisierbarkeiten** definiert:

$$P^{(\rho' L', \rho L)S}(\mathrm{q}) \quad = \quad \lim_{\mathrm{q}' \to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{q}'^{L'} \mathrm{q}^L} H_{NB}^{(\rho' L', \rho L)S}(\mathrm{q}', \mathrm{q}) \right) \tag{1.18}$$

$$\hat{P}^{(\rho' L', L)S}(\mathrm{q}) \quad = \quad \lim_{\mathrm{q}' \to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{q}'^{L'} \mathrm{q}^{L+1}} \hat{H}_{NB}^{(\rho' L', L)S}(\mathrm{q}', \mathrm{q}) \right) \tag{1.19}$$

Dabei sind die *gemischten Multipole* $\hat{H}_{NB}^{(\rho' L', L)S}$ eingeführt [GLT95], um einen definierten Grenzwert $\mathrm{q} \to 0$ zu erhalten. In Tabelle 1.2 sind die 10 Polarisierbarkeiten zusammengestellt.

1.2.1 Ladungs- und Crossingsymmetrie

Neben den benutzten Auswahlregeln für Drehimpuls und Parität, welche bekanntlich auf Rotations- und Spiegelsymmetrie fußen, schränken Ladungs- und Crossingsymmetrie die Anzahl der Freiheitsgrade weiter ein, wie in [MeD96, Dre97, Dre98] gezeigt wurde. Es ergeben sich 4 unabhängige Relationen zwischen den generalisierten Polarisierbarkeiten in Tab. 1.2.

Entsprechend lassen sich die Multipole in niedrigster Ordnung in q' durch nur 6 Polarisierbarkeiten ausdrücken, z. B. durch die in Tabelle 1.2 mit „e“ gekennzeichnten (unter Vermeidung der aus den gemischten Multipolen abgeleiteten $\hat{P}$):

$$
\begin{aligned}
H_{NB}^{(11,00)1}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= \mathrm{q}' \left(\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{q}^2}{\tilde{q}_0}\,P^{(01,01)1}(\mathrm{q}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{q}^2\,P^{(11,02)1}(\mathrm{q})\right)\\
H_{NB}^{(11,02)1}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= \mathrm{q}'\mathrm{q}^2\,P^{(11,02)1}(\mathrm{q})\\
H_{NB}^{(11,11)S}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= \mathrm{q}'\mathrm{q}\,P^{(11,11)S}(\mathrm{q})\\
H_{NB}^{(21,01)S}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= -\sqrt{2}\mathrm{q}'\mathrm{q}\,P^{(01,01)S}(\mathrm{q})\\
H_{NB}^{(21,12)1}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= -\sqrt{2}\mathrm{q}'\mathrm{q}^2\,P^{(01,12)1}(\mathrm{q})\\
H_{NB}^{(11,22)1}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= \mathrm{q}'\mathrm{q}\,P^{(11,11)1}(\mathrm{q})\\
H_{NB}^{(21,21)0}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= -\mathrm{q}'\,P^{(11,11)0}(\mathrm{q})\\
H_{NB}^{(21,21)1}(\mathrm{q}',\mathrm{q}) &= -\mathrm{q}' \left(2\,\frac{\mathrm{q}^2}{\tilde{q}_0}\,P^{(11,11)1}(\mathrm{q}) - \sqrt{2}\,\mathrm{q}^2\,P^{(01,12)1}(\mathrm{q})\right)
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Die mit Tilde versehenen Größen wie $\tilde{q}_0$ sind hier und im folgenden als die im Grenzübergang $\mathrm{q}' \to 0$, also die in der elastischen Kinematik gegebenen definiert.

Die in Tabelle 1.2 mit „χ“ gekennzeichneten Polarisierbarkeiten sind in der chiralen Störungsrechnung [Knö97] führend.

1.2.2 Observable, Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt

Der 5-fach differentielle Wirkungsquerschnitt für virtuelle Comptonstreuung lässt sich schreiben in der Form

$$
\frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}'d\Omega_e)_{lab}(d\Omega_\gamma)_{cm}} = \frac{(2\pi)^{-5}}{64m_p}\frac{\mathrm{k}'_{lab}}{\mathrm{k}_{lab}}\frac{s-m_p^2}{s}\,\mathcal{M}. \tag{1.21}
$$

Die Entwicklung der Größe $\mathcal{M}$ nach der Energie des reellen Photons q',

$$
\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}_{-2}^{BH+Born}}{\mathrm{q}'^2} + \frac{\mathcal{M}_{-1}^{BH+Born}}{\mathrm{q}'} + \mathcal{M}_0 + \mathcal{O}(\mathrm{q}'), \tag{1.22}
$$

zeigt, dass erst das dritte Reihenglied einen Beitrag von den generalisierten Polarisierbarkeiten enthält. Ist $\mathcal{M}_0$ aus gemessenen Wirkungsquerschnitten bestimmt, ergibt sich der Beitrag der generalisierten Polarisierbarkeiten als *Differenz zum bekannten* Bethe-Heitler+Born-Beitrag,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{M}_0 &= \mathcal{M}_0 - \mathcal{M}_0^{BH+Born} \qquad (1.23) \\ &= 2K_2 \left\{ v_1 \left(\varepsilon\, P_{LL}(\mathrm{q}) - P_{TT}(\mathrm{q}) \right) + \left(v_2 - \frac{\tilde{q}_0}{\mathrm{q}} v_3 \right) \sqrt{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\, P_{LT}(\mathrm{q}) \right\}. \end{aligned}$$

Die hier eingeführten Strukturfunktionen sind durch die Polarisierbarkeiten gegeben,

$$\begin{aligned} P_{LL}(\mathrm{q}) &= -2\sqrt{6}\, m_p\, G_E\, P^{(01,01)0}, \qquad (1.24) \\ P_{TT}(\mathrm{q}) &= 3\, G_M\, \mathrm{q}^2 \left(\sqrt{2} P^{(01,12)1} - \frac{1}{\tilde{q}_0} P^{(11,11)1} \right), \qquad (1.25) \\ P_{LT}(\mathrm{q}) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\, m_p\, \frac{q}{\tilde{Q}}\, G_E\, P^{(11,11)0} + \frac{3}{2} \frac{q}{\tilde{q}_0}\, \tilde{Q}\, G_M\, P^{(01,01)1} \qquad (1.26) \end{aligned}$$

mit den kinematischen Faktoren

$$\begin{aligned} K_2 &= e^6 \frac{\mathrm{q}}{\tilde{Q}^2} \frac{2m_p}{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{2\sqrt{m_p^2 + \mathrm{q}^2}}{\sqrt{m_p^2 + \mathrm{q}^2} + m_p}}, \\ v_1 &= \sin\vartheta \left(\omega'' \sin\vartheta - k_T \omega' \cos\vartheta \cos\varphi \right), \\ v_2 &= -\left(\omega'' \sin\vartheta \cos\varphi - k_T \omega' \cos\vartheta \right), \\ v_3 &= -\left(\omega'' \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi - k_T \omega' (1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \right), \\ k_T &= \tilde{Q} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}}, \\ \omega &= \left[-\mathrm{q}' \left(\frac{1}{pq'} + \frac{1}{kq'} \right) \right]_{\mathrm{q}' \to 0}, \\ \omega' &= \left[\mathrm{q}' \left(\frac{1}{k'q'} - \frac{1}{kq'} \right) \right]_{\mathrm{q}' \to 0}, \\ \omega'' &= \omega\, \mathrm{q} - \omega' \sqrt{\tilde{\mathrm{k}}'^2 - k_T^2}. \end{aligned}$$

$\Delta\mathcal{M}_0$ ist also die Observable, die die Information über die Polarisierbarkeit enthält. Eine vollständige Liste der Observablen bei Experimenten mit Nachweis der Polarisation der Teilchen, mit denen die verbleibenden Polarisierbarkeiten experimentell zugänglich sind, finden sich in [GuV98].

In die Strukturfunktionen gehen die *Sachsformfaktoren* G_E und G_M ein, wie sie in elastischer Elektronenstreuung bestimmt werden (vgl. Abschnitt 2.1). Für die Interpretation des hier vorgestellten Experiments werden die Formfaktoren als bekannt vorausgesetzt [MMD96].

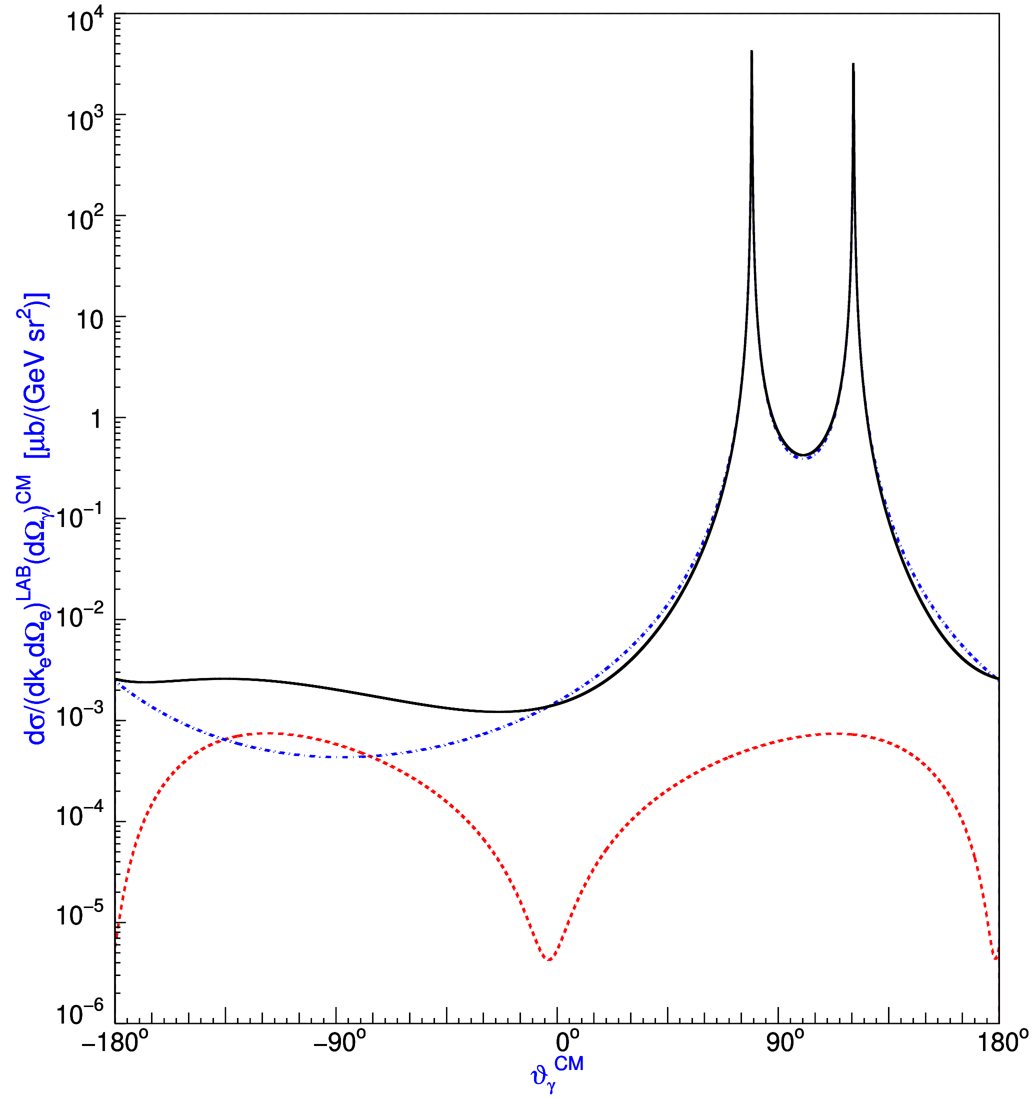


Abb. 1.3: Differenzieller Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $e+p \to e'+p'+\gamma$ in Abhängigkeit vom Schwerpunktswinkel ϑ_γ^{CM} für die Kinematik k_e^{lab}=705.1 MeV, $k_{e'}^{lab}$=580.0 MeV, $\vartheta_{e'}^{lab}$=40.66° bei Berücksichtigung der Bethe-Heitler- und der Born-Amplitude. *Strichpunktiert* ist der Anteil der Bethe-Heitler-Amplituden dargestellt, die *gestrichelte* Kurve ist der Bornanteil (Bremsstrahlung durch das Proton). *Durchgezogen* ist die kohärente Summe dieser Beiträge.

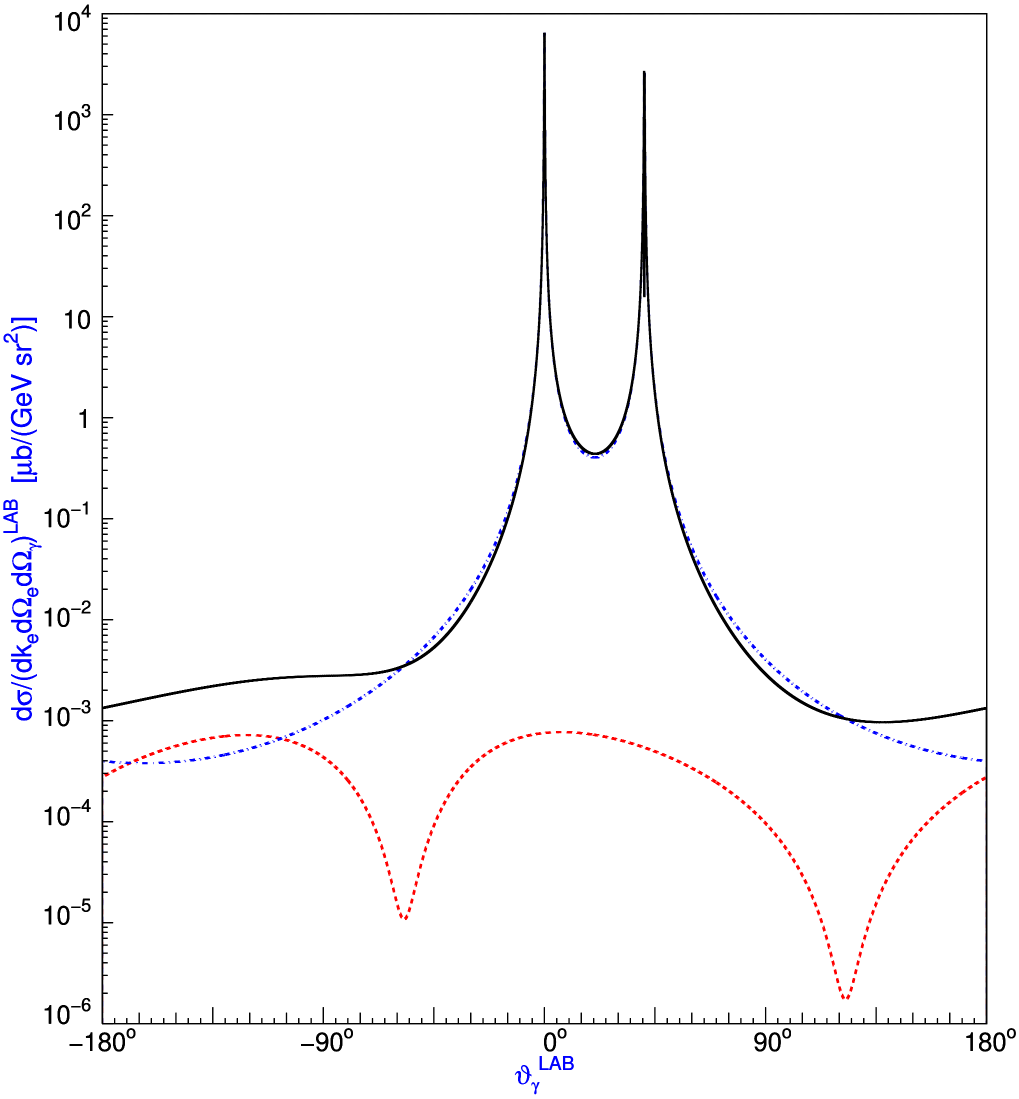


Abb. 1.4: Wie Abbildung 1.3, hier jedoch im Laborsystem. Der Winkel ϑ_γ^{LAB} ist der Winkel des emittierten Photons zur Richtung des einlaufenden Elektronenstrahls. In dieser Darstellung wird deutlich, dass der Wirkungsquerschnitt *in Richtung von* ein- und auslaufendem Elektron um viele Größenordnungen größer ist im Vergleich zum sonstigen Winkelbereich.

1.3 Der bekannte Anteil „Bethe-Heitler+Born“

In Abbildung 1.3 ist der Verlauf eines differentiellen Wirkungsquerschnittes für eine typische MAMI-Kinematik in Abhängigkeit vom Winkel $\vartheta_{\gamma\gamma}$ dargestellt (Zum Winkelbereich vgl. Abb. 1.2 und 1.5 mit Erläuterung am Ende dieses Abschnitts)

Die Bethe-Heitler-Amplitude dominiert den Bereich, in dem das Photon in Richtung von ein- oder auslaufendem Elektron emittiert wird (Details s. Anhang), wie in Abb. 1.4 deutlich wird. Dies ist der Hintergrund der bekannten Piknäherung, die für Strahlungskorrekturen häufig gemacht wird.

In rückwärtiger Richtung überwiegt der Bornanteil des Protons im insgesamt kleinen Wirkungsquerschnitt. Hier ist die Messung am empfindlichsten auf den Polarisierbarkeits-Beitrag des Protons.

Anmerkung zu den benutzten Winkeldefinitionen
Beim betrachteten Experiment wurde „in der Ebene“ gemessen, d.h. bei $\varphi \approx 0°$ in der die Elektronrichtungen beinhaltenden Halbkugel bzw. $\varphi \approx 180°$ in der den Elektronrichtungen gegenüberliegenden Halbkugel (vgl. Abb. 1.2 unter Beachtung der Legende). Der Wertebereich für $\vartheta_{\gamma\gamma}$, $[0°, 180°]$, wird entlang des Äquators zweimal durchlaufen.

Um den gesamten Winkelbereich in der Streuebene durch Angabe *eines* Winkels eindeutig zu erfassen, wird zu modifizierten Winkeln übergegangen, die in Abb. 1.5 erklärt sind (dort ϑ', φ'). Die Polarachse zeigt für die modifizierten Winkel nach oben (d.h. sie steht senkrecht auf der Streuebene) und nicht in Richtung des virtuellen Photons. Der Streuwinkel $\vartheta_{\gamma\gamma} = \vartheta'$ hat nun die Rolle des Azimutwinkels mit dem Wertebereich $[-180°, 180°]$. Im Gegensatz zum normalen sphärischen Koordinatensystem wird der Polarwinkel φ' *am Äquator* als 0 definiert und läuft zu 90° bzw. $-90°$ an den Polen. Damit sind ϑ' und φ' auf dem einen Halbkreis entlang des Äquators mit den Winkeln des alten System identisch, außer, dass die Rollen von Polar- und Azimutwinkel vertauscht sind; auf der anderen Seite ist ϑ' negativ, und φ' ist auch dort 0° (und nicht 180°). Damit kann man beispielsweise den Wirkungsquerschnittsverlauf in der Streuebene wie in den Abb. 1.3 und 1.4 darstellen[3].

In diesen Koordinaten wird auch der an den Daten angebrachte Schnitt definiert ($|\varphi'|<22°$), der überall gerade innerhalb der Spektrometerakzeptanz liegt, sodass durch diesen Schnitt nur wenige Ereignisse verlorengehen. Derselbe Schnitt in den Koordinaten (ϑ, φ) würde ϑ-abhängige φ-Grenzen erfordern.

Andererseits stellt die q-Richtung die physikalische Symmetrieachse dar, auf die die Multipolzerlegung der Polarisierbarkeiten sinnvollerweise bezogen wird. Für zukünftige Experimente, bei denen zum Stdium der φ-Abhängigkeit auch der Bereich aus der Streuebene heraus explizit ausgewertet werden sollte, muss die ϑ-Abhängigkeit des erfassten physikalischen Azimutwinkels detaillierter berücksichtigt werden.

[3] Die hier betrachteten Bereiche mit positiven und negativen ϑ entsprechen den Bereichen der manchmal benutzten Sprechweise „rechts“ und „links von q“. Im Falle von VCS liegt wegen der Bethe-Heilter-Piks, die beide im positiven Winkelbereich liegen, eine extreme Asymmetrie bezüglich „rechts und links von q“ vor.

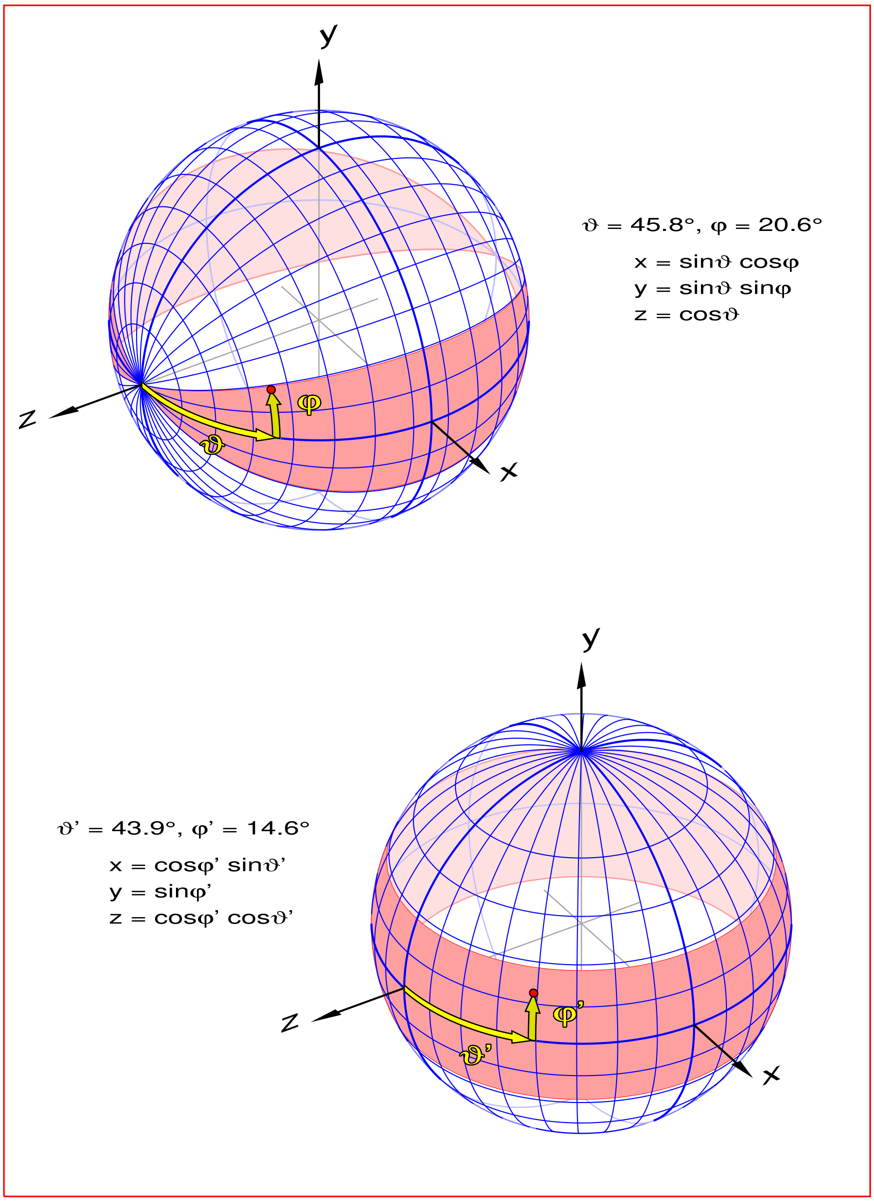


Abb. 1.5: Die in Abbildung 1.2 eingeführten Winkelkoordinaten für das reelle Photon haben ihre Symmetrieachse in Richtung des virtuellen Photons (**oben**). Ein in diesen Koordinaten angebrachter Schnitt ($|\varphi| < 22°$ oder $|\varphi| > 158°$), der mit konstanter φ-Grenze für jedes ϑ in den Spektrometerakzeptanzen liegt, ist grau hinterlegt.
Wie im Text diskutiert, wurde ein anderes Winkelkoordinatensystem gewählt, dessen Polarachse senkrecht auf der Streuebene steht (**unten**). In diesem System führt der Schnitt $|\varphi'| < 22°$ auf Phasenraumelemente $\Delta\varphi'\Delta\vartheta'$, die unabhängig von ϑ sind. Dieses Winkelkoordinatensystem ist der Phasenraumakzeptanz durch die Spektrometerkollimatoren angepasst.

Kapitel 2

Bremsstrahlung und Strahlungskorrektur

"As a matter of fact most real photons of physical interest are, strictly speaking, virtual in the sense that they are emitted at some place and absorbed at some other place."

(J. J. Sakurai [Sak69], p. 256)

Der Forschungs-Schwerpunkt dieser Arbeit liegt bei der Bestimmung der generalisierten Polarisierbarkeiten. Die genaue Untersuchung des zugrundeliegenden Prozesses, nämlich der Entstehung von *Bremsstrahlung*, hat zu Erkenntnissen geführt, die allgemeiner für die bei der Interpretation von Elektronenstreuexperimenten wichtige Strahlungskorrektur relevant sind. Dies wird am Beispiel der elastischen Streuung dargestellt.

Außerdem muss die untersuchte Reaktion der virtuellen Comptonstreuung selbst strahlungskorrigiert werden. Die dazu notwendigen Berechnungen sind in [Vdh00] zu finden.

Dass auch die Strahlungskorrekturen für sich bei weitem kein abschlossenes Thema darstellen, zeigen die aktuellen Arbeiten von Rosenfelder [Ros99] und Maximon und Tjon [MTj00], deren Beiträge im folgenden mit diskutiert werden.

2.1 Elastische ep-Streuung

Die lorentzinvariante Amplitude der elastischen Elektron-Proton-Streuung wird in niedrigster Ordnung, bei der man ein- und auslaufende Teilchen als ebene Wellen und die Wechselwirkung durch den Austausch eines virtuellen Photons beschreibt (1. Bornsche Näherung), berechnet gemäß Feynman-Diagramm (b0) in Abb. 2.1,

$$T \quad = \quad -e^2 \quad \bar{u}_{k'}\gamma^\mu u_k \quad \frac{1}{q^2} \quad \bar{u}_{p'}\Gamma_\mu u_p, \tag{2.1}$$

wobei Γ_μ durch die Gleichungen (1.12) und (1.13) gegeben ist. Der Wirkungsquerschnitt im Laborsystem in dieser Ordnung ergibt sich in der bekannten Weise [BjD65]

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2\frac{\vartheta_{e'}}{2}\right) \tag{2.2}$$

mit den Sachs-Formfaktoren

$$G_E \quad = \quad F_1 - \tau\kappa_p F_2 \tag{2.3}$$

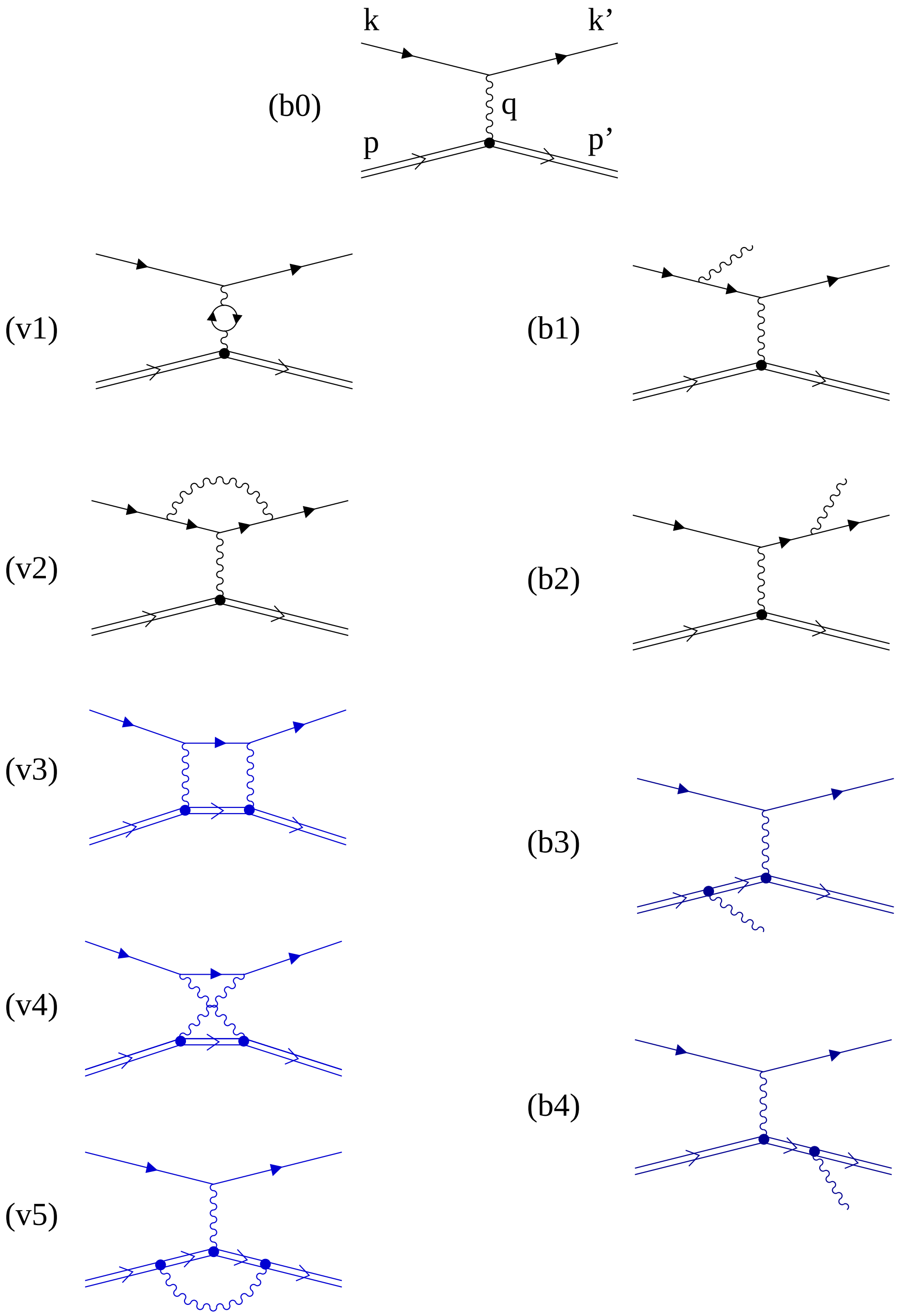


Abb. 2.1: Zusammenstellung aller Feynmangraphen führender und nächster Ordnung zur elastischen Streuung, aus denen sich die Strahlungskorrektur in erster Ordnung berechnet. In der linken Spalte Prozesse ohne äußere Photonlinie der Ordnung e^4, die in Interferenz mit dem Grundprozess (b0) zur Ordnung α^3 beitragen. Rechts die vier Möglichkeiten für Abstrahlung eines reellen Photons.

$$
\begin{aligned}
G_M &= F_1 + \kappa_p F_2 && (2.4)\\
\tau &= \frac{Q^2}{4m_p^2} && (2.5)
\end{aligned}
$$

und dem Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Diracteilchens an einem spinlosen Punktteilchen

$$
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\,\frac{1}{\eta}\,\cos^2\frac{\vartheta}{2} \tag{2.6}
$$

wobei der Rückstoßfaktor η definiert ist als

$$
\eta = \frac{E}{E'}. \tag{2.7}
$$

2.2 Interne Strahlungskorrektur zur elastischen Streuung

Die Graphen nächster Ordnung teilen sich in Prozesse mit zusätzlichem virtuellen (v1-5 in Abb. 2.1) oder reellen Photon (b1-4) auf. Diese Aufteilung ist durch die Störungstheorie vorgegeben, erweist sich aber als problematisch, da sich die beiden Gruppen nicht unabhängig voneinander behandeln lassen. Zusammengenommen führen diese Graphen jedoch zu einem sinnvollen Ergebnis, das als *Strahlungskorrektur* zum führenden Prozess (b0) berücksichtigt werden muss. Da es sich um eine Korrektur des Streuprozesses selbst handelt, spricht man zur Abgrenzung von weiteren (im Target auftretenden) Prozessen mit Energieverlust (*externe* Bremsstrahlung, s. Abschnitt 2.4) von *interner* Korrektur.

Die Änderung des Wirkungsquerschnittes bei Berücksichtigung der Graphen nächster Ordnung wird als Faktor parametrisiert,

$$
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1+\delta_1)\,, \tag{2.8}
$$

wobei durch diese Schreibweise bereits zum Ausdruck gebracht wird, dass es sich um eine *kleine* Änderung handelt. Der Index „1“ deutet an, dass in dieser Korrektur nur die Graphen nächster (und nicht höherer) Ordnung berücksichtigt sind.

Es sei vorweggenommen, dass bei hochenergetischer Elektronenstreuung der Korrekturfaktor $\delta_1 < 0$ ist und für MAMI-Experimente in der Gegend von -20% liegt. Man erwartet also, dass der im Experiment gefundene Wirkungsquerschnitt etwas kleiner als der „nichtradiative“ Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_0$ ist und dieser in erster Ordnung der Störungstheorie bestimmt wird als

$$
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = (1+\delta_1)^{-1}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} \tag{2.9}
$$

2.2.1 „Ultraviolett“-Divergenz und Renormierung

Die Integrale über den internen Viererimpuls l_μ in den Graphen (v1, v2, v5) sind logarithmisch divergent für $|l_\mu| \to \infty$. Diese Schwierigkeit läßt sich durch Renormierung der in der Lagrangefunktion auftretenden Größen (insbesondere Masse und Ladung) verstehen und durch Einführung entsprechender Gegenterme beseitigen, was hier nicht näher betrachtet werden soll (vgl. [Vdh00] und Referenzen darin).

2.2.2 „Infrarot“-Divergenz

Die inelastischen Prozesse, bei denen ein reelles Photon abgestrahlt wird, müssen an dieser Stelle betrachtet werden, obwohl sie für jede von Null verschiedene Photonenergie l eine andere Kinematik haben und daher im Prinzip von der Reaktion (b0) - mit oder ohne die virtuellen Korrekturen - unterscheidbar sind. Die Notwendigkeit hierfür liegt nicht so sehr in der experimentellen Auflösung eines Streuexperiments, welche in diesem Zusammenhang häufig angeführt wird und natürlich eine Grenze darstellt, unter der die Prozesse (b0) und (b1-4) tatsächlich *experimentell* nicht mehr unterschieden werden. Der Grund ist vielmehr das als „Infrarot“-Divergenz bekannte Verhalten des Wirkungsquerschnittes: $\sigma \sim l^{-1}$ im Grenzfall $l \to 0$. Das führt dazu, dass man im *theoretischen* Ansatz sowohl für den virtuellen Prozess (v2) als auch für die reellen Prozesse (r1, r2) getrennt kein sinnvolles, weil divergentes Resultat erhält.

Diese Schwierigkeit löst sich dadurch, dass sich die auftretenden Divergenzen bei Integration über einen Phasenraum[1] $l < \Delta E$ in der *Summe der Wirkungsquerschnitte* (elastisch+inelastisch) gegeneinander wegheben[2] und sich damit die endliche Korrektur ergibt. Der Ansatz (2.8) ist nur sinnvoll für kleine ΔE, da sich mit größeren l die Kinematik durch die Emission des reellen Photons in nicht vernachlässigbarer Weise ändert. Darauf wird in Abschnitt 2.3.3 eingegangen.

2.2.3 Auswertung der Graphen

Die **Vakuumpolarisation** durch eine Elektronschleife (v1) wird berücksichtigt durch (Herleitung s. [Vdh00])

$$\delta_1^{vac} = \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{2}{3}\left\{\left(3 - v_e^2\right)\frac{v_e}{2}\ln x_e + \left(v_e^2 - \frac{8}{3}\right)\right\} \tag{2.10}$$

$$\xrightarrow{Q^2 \gg m_e^2} \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{2}{3}\left\{\ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) - \frac{5}{3}\right\}, \tag{2.11}$$

wobei

$$v_e^2 = 1 + \frac{4m_e^2}{Q^2}, \qquad x_e = \frac{v_e + 1}{v_e - 1} \tag{2.12}$$

[1] Genaue Definition des Abschneideparameters ΔE vgl. Text zu (2.14)

[2] Dieses gilt als für alle Ordnungen nachgewiesen [BlN37, JaR54], vgl. jedoch auch 2.2.4

bedeuten. Die Vakuumpolarisation führt bei den betrachteten Impulsüberträgen $Q^2 \approx 0.4$ GeV^2 zu einer Korrektur von etwa 2%. Die für den ultrarelativistischen Grenzfall angegebene Formel stimmt mit dem bei Mo und Tsai [MMT69] zu findenden Ergebnis überein. Will man auch die Vakuumpolarisation durch Myonschleifen korrigieren, so findet Gl. (2.10) unter Ersetzung der Elektronenmasse in (2.12) durch die Myonenmasse Anwendung[3].

Die **Elektronbeiträge** (v2), (b1), (b2) ergeben in der Summe im ultrarelativistischen Grenzfall

$$\delta_1^e = \frac{\alpha}{\pi} \; \{ \; \ell_k \cdot \ell_e \; + \; u_e \; \} \, , \tag{2.13}$$

wobei

$$\ell_k \;=\; \ln\left(\frac{\mathit{\Delta} E_s{}^2}{E_e E_{e'}^{el}}\right) \quad \text{mit} \quad \mathit{\Delta} E_s = \eta(E_{e'}^{el} - E_{e'}) = \eta \mathit{\Delta} E_{e'}, \tag{2.14}$$

$$\ell_e \;=\; \ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) - 1, \tag{2.15}$$

$$u_e \;=\; \frac{3}{2}\ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) - 2 + \mathrm{Li}_2\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2\eta. \tag{2.16}$$

$\mathit{\Delta} E_{e'}$ ist die Differenz zwischen der Abschneideenergie des gestreuten Elektrons und der Energie bei rein elastischer Kinematik und demselben festgelegten Streuwinkel $\vartheta_{e'}$. Die Berechnung der Strahlungskorrektur erfolgt in dem in Kapitel 1 benutzten Schwerpunktsystem von einlaufendem Proton und virtuellem Photon, in dem sich diese Differenz zu $\mathit{\Delta} E_s$ transformiert (Index s für engl. *soft* photon cut).

In [Vdh00] (wie auch in [MTj00]) wurde gezeigt, dass dieses Resultat exakt ist abgesehen von der im Ansatz (2.8) implizierten Näherung kleiner Photon-Energie, welche in Absatz 2.3.3 näher untersucht wird. In Anhang C wird der Zusammenhang mit dem Resultat von Mo und Tsai [MMT69] diskutiert. Dort ist auch die Funktion $\mathrm{Li}_2(x)$ definiert (Gl. B.2).

Die Berücksichtigung der restlichen Graphen (v3), (v4), (v5), (b3), (b4) setzt eine Kenntnis der inneren elektrodynamischen Struktur des Protons voraus bzw. erfordert zumindest eine Abschätzung, inwieweit diese innere Struktur für die Strahlungskorrektur eine Rolle spielt. Behandelt man die Abstrahlung des reellen Photons vom Proton wie diejenige von einem Diracteilchen mit Protonmasse, vernachlässigt also die innere Struktur, so findet man

$$\delta_1^p \;=\; \frac{\alpha}{\pi} \; \Big\{ \; 2Z \cdot (\ell_k \cdot \ln\eta + u_Z) \; + \; Z^2 \cdot (\ell_k \cdot \ell_p + u_{Z^2}) \; \Big\} \, . \tag{2.17}$$

Hierbei ist ℓ_k wie in (2.14) gegeben und[4]

$$\ell_p \;=\; \frac{v_p^2 + 1}{2 v_p} \; \ln x_p \; - \; 1, \tag{2.18}$$

$$u_Z \;=\; \mathrm{Li}_2(1 - \varepsilon/\eta) \; - \; \mathrm{Li}_2(1-\varepsilon) \; + \; \frac{\mathrm{Li}_2(1 - 2\gamma_p\eta) - \mathrm{Li}_2(1 - 2\gamma_p/\eta)}{2} \tag{2.19}$$

[3]Die in [Wal94] angegebene Formel, dort (A5), ist nicht korrekt

[4]Der Beitrag u_{Z^2} wird hier nicht näher diskutiert.

mit den Größen

$$v_p^2 = 1 + \frac{4M_p^2}{Q^2}, \qquad x_p = \frac{v_p + 1}{v_p - 1}, \tag{2.20}$$

$$\varepsilon = \frac{2E_e}{M_p}, \tag{2.21}$$

$$\gamma_p = \frac{E_{p'}}{M_p}. \tag{2.22}$$

Gl. (2.18) wird in [Vdh00] in dieser Form angegeben, Tsais Ausdruck erhält man durch Umschreibung mittels

$$\beta_p = \frac{2v_p}{v_p^2 + 1}. \tag{2.23}$$

Ersetzt man in (2.18) (bzw. in (2.20)) M_p durch die Elektronmasse m_e, so erhält man im ultrarelativistischen Grenzfall $Q^2 \gg m_e^2$ den entsprechenden Ausdruck für die Strahlung von der Elektronseite (2.15), worin sich die Behandlung des Protons als „schweres Elektron“ widerspiegelt.

Der von der Abschneideenergie unabhängige Term (2.19) ist der von Tsai berechnete, der sich von Tsais monströser Form (mit 20 Dilogarithmus- und Logarithmusfunktionen!) auf die angegebene Formel umschreiben lässt, wie im Anhang C.1.2 hergeleitet ist.

Tsai hat in seiner Berechnung den von den 2-Photon-Austauschgraphen v3 und v4 stammenden Beitrag vernachlässigt, abgesehen von dem für die Beseitigung der Infrarot-Divergenz benötigten Term. In [Tsa61] (insbes. Fußnote 22 auf S. 1905 und Referenzen darin) gibt er folgenden zusätzlichen Term an, welcher wegen seiner Interpretation als Nachbeschleunigung des Elektrons im Coulombfeld des Streuzentrums „Coulombkorrektur“ genannt wird:

$$\delta_c = Z\alpha\pi \frac{\sin(\vartheta_{e'}/2) - \sin^2(\vartheta_{e'}/2)}{\cos^2(\vartheta_{e'}/2)}. \tag{2.24}$$

Dieser hängt nur vom Streuwinkel des Elektrons $\vartheta_{e'}$ ab und beträgt etwa 0.5% bis 1.1%.

Rosenfelder [Ros99] geht davon aus, dass bei [Sim80] die Strahlungskorrektur an den Daten der elastischen Elektronenstreuung am Proton bei kleinem Impulsübertrag keine Coulombkorrektur berücksichtigt[5]. Er findet durch nachträgliche Berücksichtigung mittels einer Phasenanalyse, die mit Formel (2.24) verträgliche Resutate liefert[6], dass der extrahierte Ladungsradius des Protons $r_E^p = (0.880 \pm 0.015)$ fm beträgt, während der ursprünglich in [Sim80] angegebene Wert $r_E^p = (0.862 \pm 0.012)$ fm

[5] In [Sim80] findet man den Hinweis darauf, dass Strahlungskorrekturen nach [MMT69, Tsa71] angebracht wurden, aber keine Korrekturfaktoren oder -formeln. Somit ist etwas offen –obwohl plausibel–, ob tatsächlich diese Korrektur, die außerhalb des angegebenen Fehlers liegt, vernachlässigt wurde.

[6] Die in [Ros99] angegebenen Werte für diese Korrektur wurden mit dem Phasenanalyse-Programm DREPHA nachvollzogen und die Rechnung für den in Abb. 2.2 dargestellten Bereich ausgeweitet [Fri00]

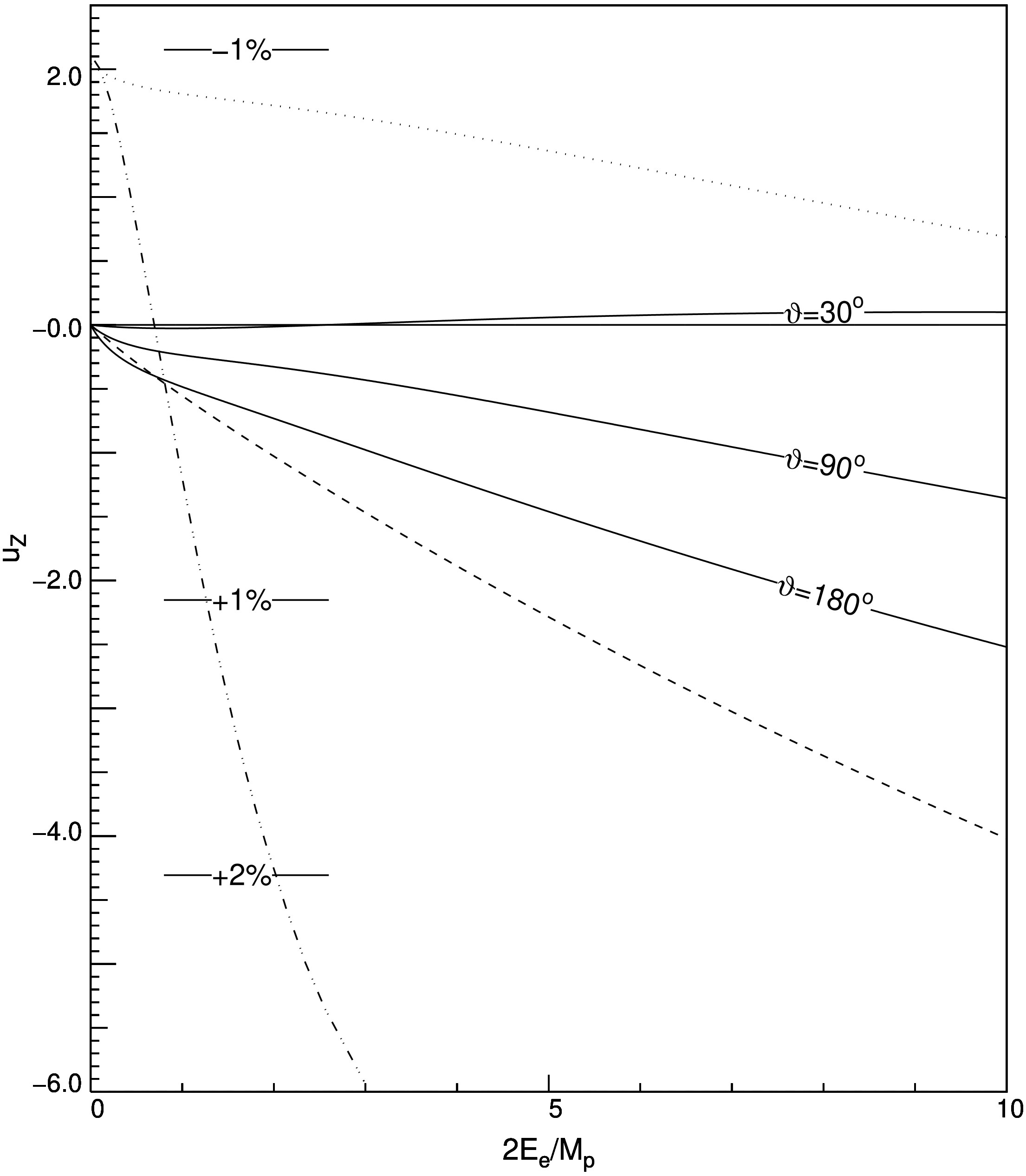


Abb. 2.2: Der von ΔE unabhängige Interferenz-Korrekturterm u_Z welcher die Beiträge des 2-Photon-Austauschs (Graphen v3 und v4) beinhaltet. *Durchgezogen* die Rechnung von Tsai [Tsa61] für die Elektronstreuwinkel 30°, 90° und 180°.
Die weiteren Kurven beziehen sich auf $\vartheta_{e'} = 90°$. *Gepunktet* die Rechnung von Tsai mit Coulombkorrektur, wie in [Tsa61] vorgeschlagen (vgl. Text und Gl. (2.24)). Für sehr kleine Einschussenergien stimmt diese mit der Phasenanalyse-Rechnung (*strich-doppelpunktiert*, [Ros99, Fri00]) überein. Die neue Rechung von Maximon und Tjon [MTj00] (*gestrichelt*) zeigt aber einen anderen Verlauf.
Zur Orientierung ist der prozentuale Effekt des Korrekturterms u_Z auf den Wirkungsquerschnitt bei gegebenem Messergebnis als horizontale Linien angedeutet. Wegen (2.9) bedeutet ein größerer Korrekturfaktor einen kleineren extrahierten Wirkungsquerschnitt. Bei den sehr kleinen Einschussenergien, die zur Bestimmung des Proton-Ladungsradius benutzt wurden, werden die Wirkungsquerschnitte z.B. unter 90° etwa 1% *kleiner*, wenn man die Coulombkorrektur gemäß [Ros99, Fri00] berücksichtigt, während [MTj00] diesen Einfluss nicht bestätigen.

ist. Unabhängig von der Richtigkeit seiner Argumentation (s. Legende zu Abb. 2.2) zeigt dies Ergebnis, dass es bezüglich der wichtigen Größe des Protonradius ein Interpretationsproblem gibt.

Maximon und Tjon geben in ihrer kürzlich ins Netz gestellten Rechnung [MTj00] an, dass die genaue Berechnung der 2-Photon-Austauschgraphen, die also auch die Coulombkorrektur bis zu dieser Ordnung beinhaltet, zu folgendem Term führt:

$$u_Z^{MTj} \;=\; \mathrm{Li}_2(1-\eta/x_p) \;-\; \mathrm{Li}_2(1-1/\eta x_p) \;-\; \ln\eta\cdot\ln(x_p(\eta-1)/\varepsilon). \quad (2.25)$$

In Abb. 2.2 wird dieses Resultat mit Tsai, sowie dieses gemäß Rosenfelders Vorschlag um die Coulombkorrektur Gl. (2.24) erweitert, für Streuung unter 90° verglichen. Offensichtlich liegt eine Diskrepanz vor, die einer Aufklärung bedarf.

Maximon und Tjon geben noch zusätzliche Terme an, mit denen die Abhängigkeit der Strahlungskorrektur vom Formfaktorverlauf beschrieben wird. Diese bringen jedoch erst bei sehr hohen Energien (E_e >15 GeV) einen merklichen Beitrag.

Fasst man die verschiedenen Beiträge zusammen, so ergibt sich der Korrekturfaktor gemäß Gl. (2.8) in erster Ordnung (unter Auslassung der Coulombkorrektur) zu

$$1+\delta_1 \;=\; 1+\delta_1^{vac}+\delta_1^{e}+\delta_1^{p}. \quad (2.26)$$

2.2.4 Der Grenzfall kleiner Photon-Energie

"Each higher order above n=1 is reduced by a factor α, and so in accordance with the usual spirit of perturbation theory, we shall ignore terms with n>1 in spite of our complete ignorance of their convergence properties."

(Yennie, Frautschi, Suura [YFS61], p. 399)

Wählt man in den Formeln für δ_1^e (2.13) und δ_1^p (2.17) eine sehr kleine Abschneideenergie ΔE, so erkennt man das unphysikalische Verhalten $\delta_1 \to -\infty$ für $\Delta E \to 0$. Während man also zunächst wegen der Näherung, dass die emittierten reellen Photonen verglichen mit den Energien der anderen Teilchen eine kleine Energie haben, ein möglichst kleines ΔE bevorzugen würde, stößt offensichtlich der Korrekturansatz (2.8) bei *extrem* kleinen Energien (in der Gegend von einigen eV für die hier betrachteten Kinematiken) an eine weitere Genauigkeitsgrenze. Für Photonen mit diesen kleinen Energien wird der Wirkungsquerschnitt genauso groß wie der nichtradiative, d.h. die Emissionswahrscheinlichkeit wird 1. Für noch kleinere Energien darf der höhere Wirkungsquerschnitt nicht als noch höhere Emissionswahrscheinlichkeit (fehl)interpretiert werden, das zu dem oben erwähnten Verhalten $\delta_1 \to -\infty$ führt. Vielmehr werden im langwelligen Frequenzbereich bei jedem Streuprozess viele Photonen emittiert, sodass für eine exakte Behandlung alle Graphen mit beliebig vielen auslaufenden Photonen berechnet werden müssten. Durch ein iteratives Verfahren kann man hierfür zeigen [JaR54], dass sich die entstehenden Divergenzen Ordnung für Ordnung wegheben, wie oben für die Prozesse erster Ordnung erläutert. Für die verbleibenden endlichen Beiträge, aus denen sich die Strahlungskorrektur zusammensetzt, kann man ein Verhalten des Korrekturfaktors wie

$$e^{\delta} \;=\; 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2} + ... \tag{2.27}$$

vermuten („exponenzieren“, [Sch49]). Wenn die höheren Ordnungen nicht berechnet wurden, kann man $\delta = \delta_1$ setzen und hat nun das sinnvollere Verhalten $e^{\delta_1} \to 0$ für $\Delta E \to 0$. Damit werden beispielsweise die endlichen Beiträge zweiter Ordnung mit $\delta_2 = \delta_1^2/2 \approx 2\%$ abgeschätzt. Dieses sollte allerdings eher als Maß für den bei Bestimmung der Strahlungskorrektur gemachten Fehler angesehen werden, und nicht als näherungsweise Berücksichtigung höherer Ordnungen.

2.2.5 Durchführung der Strahlungskorrektur

Die auf Luminosität normierte Ereigniszahl kann man direkt mit dem gemäß (2.8) berechneten Korrekturfaktor (zu einer experimentell festgelegten Abschneideenergie $\Delta E_{e'}$) multiplizieren, um den strahlungsfreien Wirkungsquerschnitt zu erhalten.

Es ist jedoch sinnvoll, die Struktur der Strahlungskorrektur genauer zu betrachten, und zwar aus folgenden Gründen:

Die Strahlungskorrektur besteht aus zwei Beiträgen; nämlich einem von der Abschneideenergie unabhängigen Term, der ausschließlich über die theoretische Berechnung zugänglich ist, und einem von der Abschneideenergie abhängigen Term, welcher, wie in Abschnitt 2.3 näher untersucht wird, die *Form* des Strahlenschwanzes beinhaltet. Da diese in den hochauflösenden Experimenten, wie sie an der Drei-Spektrometer-Anlage durchgeführt werden, sehr detailliert zugänglich ist, kann dieser Anteil der Strahlungskorrektur experimentell überprüft werden.

Hierbei ist zu beachten, dass noch weitere Effekte, die in Abschnitt 2.4 genauer ausgeführt werden, ebenfalls zum Energieverlust der Elektronen beitragen. Für eine exakte Berücksichtigung müssen diese Beiträge mit dem Bremsstrahlungsspektrum gefaltet werden. Die Faltung wurde durch Monte-Carlo-Rechnungen für die Auswertung der Experimente numerisch durchgeführt. Der Wirkungsquerschnitt wird durch Vergleich der simulierten Spektren mit der Messung bestimmt. Da damit der ΔE-abhängige Teil der Strahlungskorrektur bereits berücksichtigt wird, muss nur noch der ΔE-unabhängige Teil als Faktor am Wirkungsquerschnitt angebracht werden. Das Beispiel einer elastischen Kinematik wird am Ende von Abschnitt 2.4 dargestellt.

2.3 Strahlenschwanz bei elastischer Streuung

Die Faktorisierung der Strahlungskorrektur in Gl. (2.8) geht von der Näherung aus, dass die Energie der emittierten Strahlung so klein ist, dass die mit der Emission der Photonen verbundene Änderung der Teilchenkinematik des Hauptprozesses vernachlässigt werden kann, man also den Wirkungsquerschnitt über den kinematischen Bereich, der durch die Strahlungsprozesse überdeckt wird, als konstant annehmen kann. In dieser Näherung lässt sich das Integral über die Photonwinkel und die Photon-Energie bis zur Abschneideenergie ΔE_s *ohne weitere Näherungen* analytisch lösen und als geschlossener Ausdruck angeben; dies ist Gl. (2.13).

Bei höherem Energieverlust macht sich jedoch bemerkbar, dass durch die veränderte Kinematik ein geänderter Wirkungsquerschnitt als nur der des strahlungsfreien Prozesses zur Strahlungskorrektur beiträgt. Zum quantitativen Verständnis dieses Effektes wurde im Rahmen dieser Arbeit die Integration des Ein-Photonen-Spektrums numerisch unter Berücksichtigung des exakten Wirkungsquerschnitts (in Bornscher Näherung) durchgeführt (Abschnitt 2.3.3). Zuvor soll jedoch der Zusammenhang mit der Strahlungskorrektur erläutert werden.

2.3.1 Zusammenhang mit der Strahlungskorrektur

Hält man die Elektronkinematik (k, k') fest bei einem Streuwinkel $\vartheta_{e'}$ und einer Energie des gestreuten Elektrons $E_{e'}$ $(< E_{e'}^{el})$, dann lässt sich der 5-fach differentielle Wirkungsquerschnitt (1.21) durch Integration über das Winkelspektrum des Photons auf den 3-fach differentiellen sogenannten *Strahlenschwanz* reduzieren:

$$\frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}' d\Omega_e)_{lab}} = \int_{\Omega_\gamma} \frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}' d\Omega_e)_{lab} (d\Omega_\gamma)_{cm}} \, d\Omega_\gamma . \tag{2.28}$$

Dieser hängt (in der Näherung kleiner Photon-Energie) unmittelbar mit der Strahlungskorrektur zusammen, er ergibt sich aus dieser durch Ableiten nach dem Abschneideparameter in der Elektronenergie:

$$\frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}' d\Omega_e)_{lab}} \doteq \frac{\partial}{\partial \Delta E_{e'}} \left[\, d\sigma_0 \cdot (1 + \delta_1(\Delta E_{e'})) \, \right] \tag{2.29}$$

mit

$$d\sigma_0 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_e} \right)_0 . \tag{2.30}$$

Berücksichtigt man nur die Elektronbeiträge $\delta_1 = \delta_1^e$, so ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}' d\Omega_e)_{lab}} \doteq \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{\Delta E_{e'}} \, d\sigma_0 \; \ell_e , \tag{2.31}$$

nimmt man die kohärente Summe von Elektron- und Protonbeiträgen, so findet man (vgl. (2.17))

$$\frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}' d\Omega_e)_{lab}} \doteq \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{\Delta E_{e'}} \, d\sigma_0 \; (\ell_e + \ln \eta + \ell_p) . \tag{2.32}$$

2.3.2 Piknäherung

Für größere $\Delta E_{e'}$ spielt nicht nur der Wirkungsquerschnitt des strahlungsfreien Prozesses $d\sigma_0$ eine Rolle, sondern auch der Verlauf des Wirkungsquerschnittes zu kleineren Impulsüberträgen hin. Da die Strahlung dominant von ein- bzw. auslaufendem Elektron in die jeweilige Bewegungsrichtung emittiert wird, kann man näherungsweise ansetzen, dass die Strahlung ausschließlich in diese beiden Richtungen emittiert wird. Man spricht dann von einer *Piknäherung*.

Aus Gl. (2.31) (bzw. entsprechend auch für (2.32)) kann man zunächst eine einfache „Halbe-halbe"-Piknäherung ableiten:

$$\frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}' d\Omega_e)_{lab}} \doteq \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{\Delta E_{e'}} \left(0.5 \; d\sigma_0^{b1} + 0.5 \; d\sigma_0^{b2}\right) \ell_e. \tag{2.33}$$

Dabei wird die Hälfte der durch (2.31) gegebenen Intensität dem *gestreuten* Elektron zugerechnet, welches zunächst mit der gesamten einlaufenden Energie gestreut ist und dann ein Photon der Energie $\Delta E_{e'}$ in Bewegungsrichtung abgegeben hat, also dem Graphen (b2) entspricht und deshalb mit $d\sigma_0^{b2} = d\sigma_0$ gewichtet wird. Die andere Hälfte wird der Emission eines Photons *vor* der Streuung zugerechnet, welches, wie aus der Kinematik folgt, die Energie $\eta^2 \Delta E_{e'}$ hat. Dieser Prozess wird dann anstelle von $d\sigma_0$ mit $d\sigma_0^{b1}$ gewichtet, welches der Wirkungsquerschnitt für den Basisprozess zu einer Energie des einlaufenden Elektrons von $E_e - \eta^2 \Delta E_{e'}$ ist.

Mo und Tsai geben bei einer genaueren Behandlung an

$$\frac{d\sigma}{(d\mathrm{k}' d\Omega_e)_{lab}} \doteq \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{\Delta E_{e'}} \left(0.5 \; d\sigma_0^{b1} \; \ell_e^{b1} + 0.5 \; d\sigma_0^{b2} \; \ell_e^{b2}\right), \tag{2.34}$$

wobei ℓ_e^{b1} und ℓ_e^{b2} Funktionen sind, die nicht (wie ℓ_e) nur von der elastischen Kinematik, sondern auch von $\Delta E_{e'}$ abhängen und in [MMT69] näher erläutert sind. Den Effekt der verschiedenen Piknäherungen und die gute Übereinstimmung von (2.34) mit dem numerisch erzielten Resultat kann man Abb. (2.4) entnehmen.

2.3.3 Numerische Integration des Strahlenschwanzes

Die besondere Herausforderung der numerischen Integration über den Raumwinkel des Photons liegt in dem sich über mehrere Größenordnungen und mit extrem großen Krümmungen ändernden Integranden (siehe Abb. 2.3). In Kapitel 1 wurde die Form des Photonenspektrums in der Streuebene bereits diskutiert (Abb. 1.3 und 1.4); im Anhang C ist der Wirkungsquerschnitt zweidimensional dargestellt (Abb. C.1, mit Vergrößerung des Piks in Richtung des einlaufenden Elektrons, C.2). Im Bereich der starken Krümmungen muss zur numerischen Integration ein sehr enges Stützstellen-Netz gewählt werden. In Abbildung 2.3 ist die geringste Schrittweite dargestellt, welche sich an einer maximalen Änderung des Wirkungsquerschnittes von 10% zwischen zwei Stützstellen orientiert.

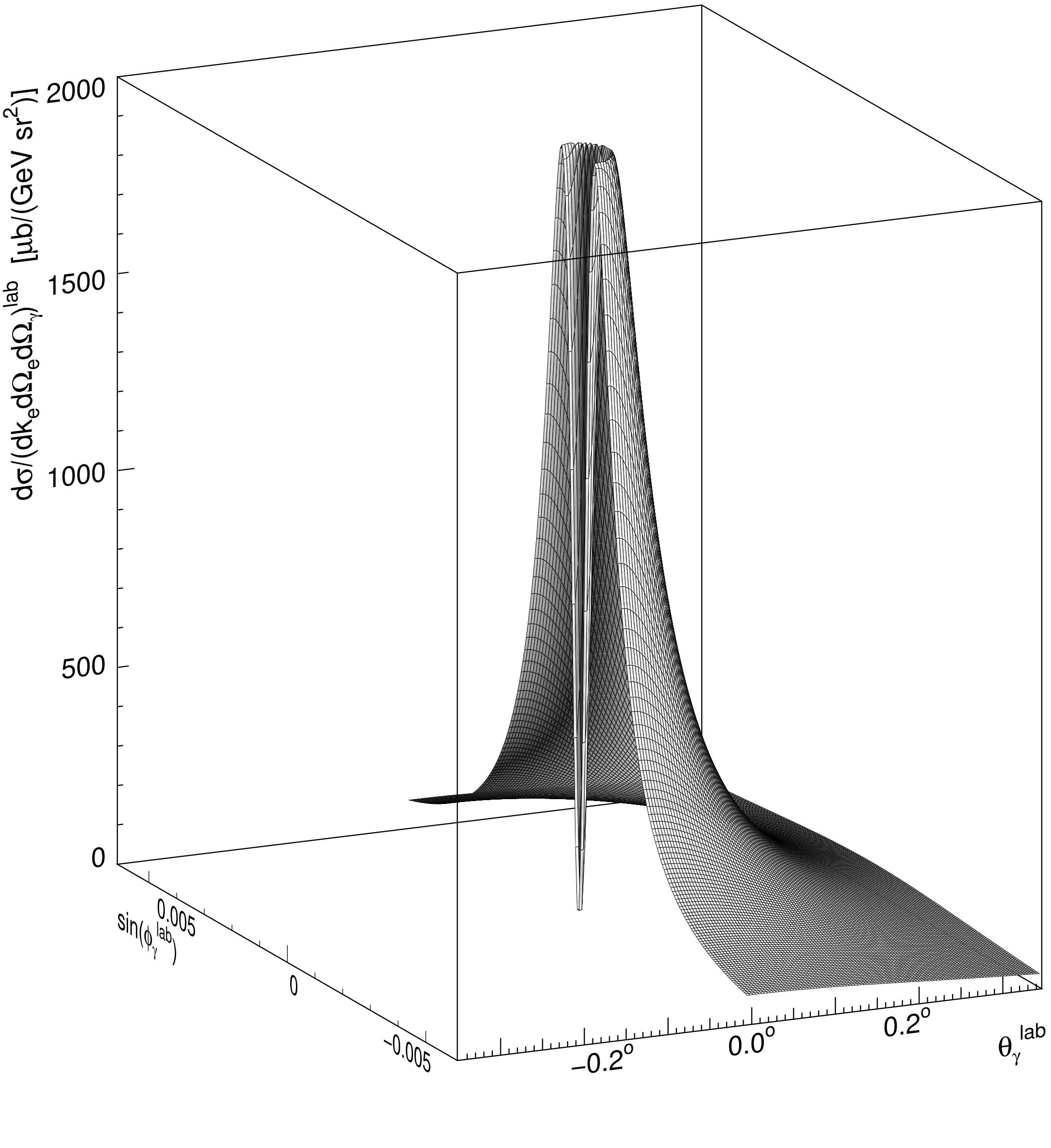


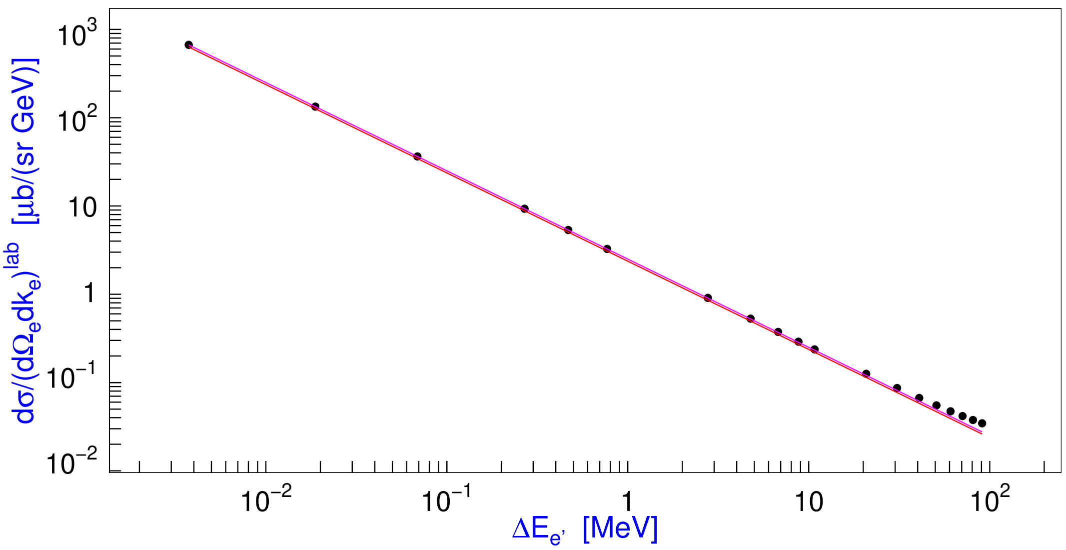
Abb. 2.3: Differenzieller Wirkungsquerschnitt für die Emission eines Photons durch das Elektron als Funktion des Winkels zwischen Elektron und Photon. Die Darstellung beschränkt sich auf positive ϑ_γ. Ein besonderes Charakteristikum ist der Abfall des Wirkungsquerschnitts auf praktisch 0 für ϑ_γ=0 über einen Winkelbereich von etwa 0.02°.

Insgesamt sind zur Überdeckung des Photon-Raumwinkels etwa 225000, im Bereich der Piks stark dichter liegende Stützstellen nötig, um das Integral mit einer Genauigkeit von 10^{-4} zu bestimmen. In Abbildung 2.4 ist das Resultat der numerischen Integration für eine typische Kinematik mit den Näherungsformeln (2.31) und (2.32) verglichen, wobei bei der exakten Rechnung einmal nur die Elektronbeiträge und dann die kohärente Summe von allen Beiträgen gerechnet wurden. Folgende Beobachtungen ergeben sich:

- Nimmt man die Strahlungsbeiträge vom Proton hinzu (Übergang von den offenen Quadraten zu den ausgefüllten Punkten in Abb. 2.4), so hebt dies (hauptsächlich über den Interferenzterm mit der Strahlung vom Elektron, $\ln \eta$) den Strahlenschwanz um etwa 5% an.
- Die Übereinstimmung zwischen der numerischen Rechnung und dem analytischen Resultat Gln. (2.31) bzw. (2.32) ist für $\Delta E < 1\,\mathrm{MeV}$ besser als 0.1%, bis $\Delta E < 10\,\mathrm{MeV}$ besser als 2%.
- Für $\Delta E > 10\,\mathrm{MeV}$ erkennt man deutlich, dass der numerisch bestimmte Strahlenschwanz größer ist als das $1/\Delta E$-Verhalten von (2.31) und (2.32), wie man durch den mit kleinerem Impulsübertrag (durch Abstrahlung eines Photons) größer werdenden Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung erwartet. Dieses Verhalten wird durch die Piknäherung nach Tsai (2.34) sehr gut beschrieben.

Winkelspektrum der Bremsstrahlung

In Zusammenarbeit mit H. Merkel wurde im Rahmen dieser Arbeit auch die Berücksichtigung des Winkelspektrums der Bremsstrahlung in die Monte-Carlo-Simulation integriert. Dabei wird zunächst mit einer analytischen (und integrierbaren) Formel das Winkelspektrum näherungsweise generiert und dann mit dem exakten Wirkungsquerschnitt gewichtet. Dadurch erhält man die in Abb. 2.5 und 2.6 dargestellten Spektren. Insbesondere für Koinzidenzmessungen muss der Verlauf in dieser Form berücksichtigt werden, um die Auswirkung der Strahlungsbeiträge in der komplizierten Phasenraumakzeptanz richtig zu erfassen.



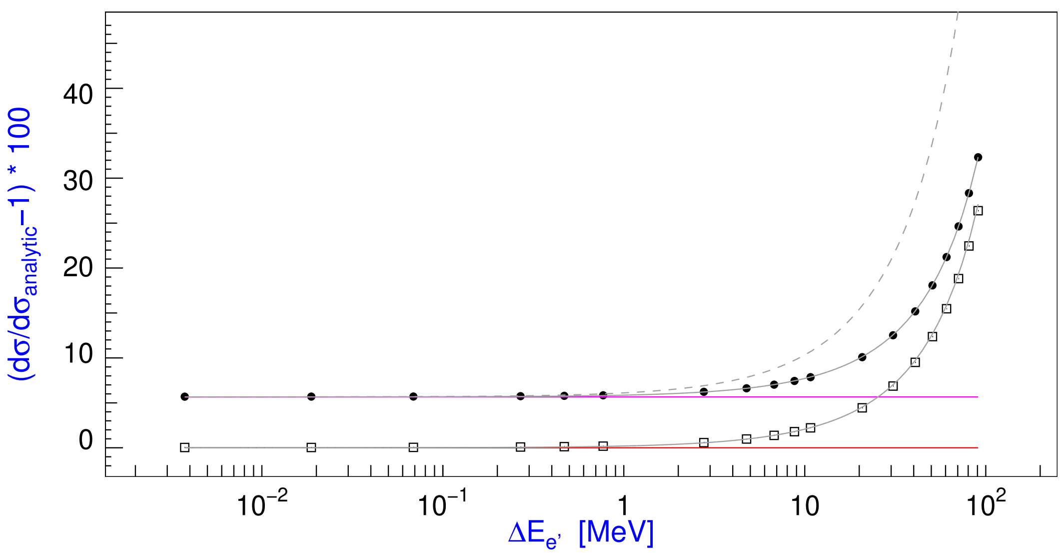


Abb. 2.4: Vergleich der numerischen Integration des Bremsstrahlungsspektrums mit Näherungsformeln.
Oben: Absoluter 3-fach differenzieller Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von $\Delta E_{e'}$ (für $E_e = 855.0$ MeV, $\vartheta_{e'} = 52.18°$, $E_{e'}^{el} = 632.17$ MeV). Die Punkte stellen das numerisch erhaltene Integral über das Bremsstrahlungs-Winkelspektrum in Abhängigkeit von $\Delta E_{e'}$ dar. Die durchgezogene Linie entspricht dem Verlauf nach Formel (2.31), der in diesem Maßstab nicht von denjenigem nach (2.32)) unterscheidbar ist; sie zeigt das erwartete ΔE^{-1}-Verhalten.
Unten: Prozentuale Abweichung bezogen auf den Verlauf nach (2.31). Die numerische Rechnung unter ausschließlicher Berücksichtigung der Graphen (b1) und (b2) (Strahlung vom Elektron) ist mit *offenen Quadraten* dargestellt, diejenige für sämtliche Bremsstrahlungsgraphen (b1), (b2), (b3) und (b4) mit *ausgefüllten* Punkten. Die *durchgezogenene* Kurve ist die Piknäherung nach Tsai (2.34), die *gestrichelte* Kurve nach dem „Halbe-halbe“-Ansatz (2.33). Die horizontalen Linien unterstreichen die Abweichung der genauen Rechnung von Gl. (2.31) bzw. (2.32).
Um die in dieser Abbildung dargestellte Genauigkeit von $\Delta E_{e'} = E_{e'}^{el} - E_{e'}$ zu erreichen, müssen die in Anhang A angegebenen Formeln zur Berechnung von $E_{e'}^{el}$ aus E_e und $\vartheta_{e'}$ verwendet werden.

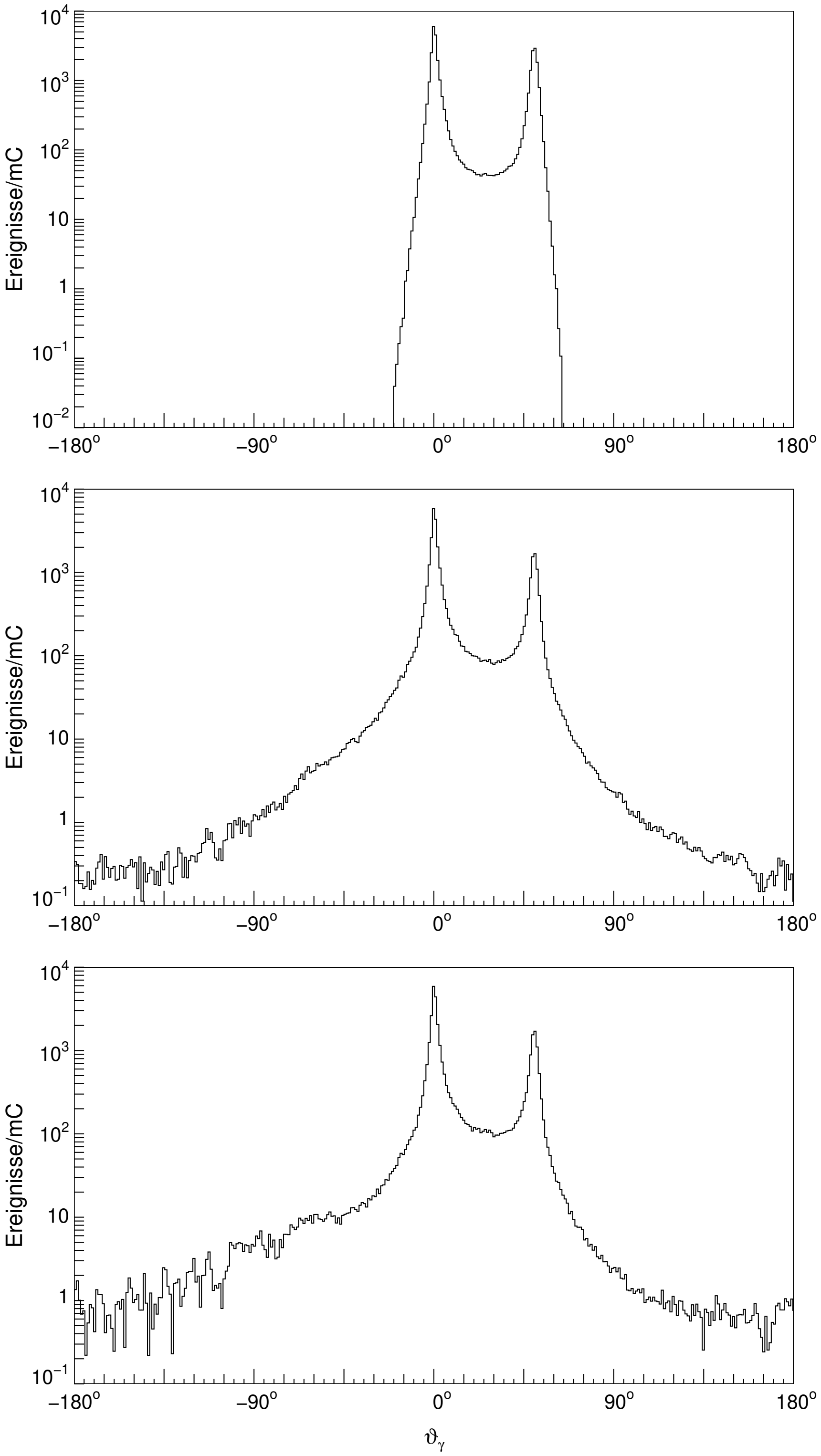


Abb. 2.5: Winkelspektrum des Photons in der Monte-Carlo-Simulation Simul++ von elastischer Elektron-Proton-Streuung (Kinematik E_e=705.11 MeV, $E_{e'}$=515.0 MeV, $\theta_{e'}$=55.9°) mit Bremsstrahlungsemission. *Ganz oben* in Piknäherung, d.h. die emittierten Photonen gehen in Richtung von ein- und auslaufendem Elektron. Der Winkelbereich zwischen diesen beiden Richtungen (in diesem Spektrum bei 0° bzw. 55.9°) wird durch Ereignisse aufgefüllt, bei denen sowohl einlaufendes als auch auslaufendes Elektron bremsstrahlen. In der *Mitte* ist das Winkelspektrum der Photonen berücksichtigt mit den Graphen, bei denen das Photon von ein- oder auslaufendem Elektron emittiert wird (Graphen b1, b2 in Abb. (2.1)). *Unten* Berücksichtigung aller Bremsstrahlungsgraphen b1 bis b4.

Zum Vergleich mit dem Experiment müssen noch weitere Aufstreuugseffekte berücksichtigt werden, die sich mit diesem Spektrum überlagern, die hier aber der Klarheit wegen weggelassen sind.

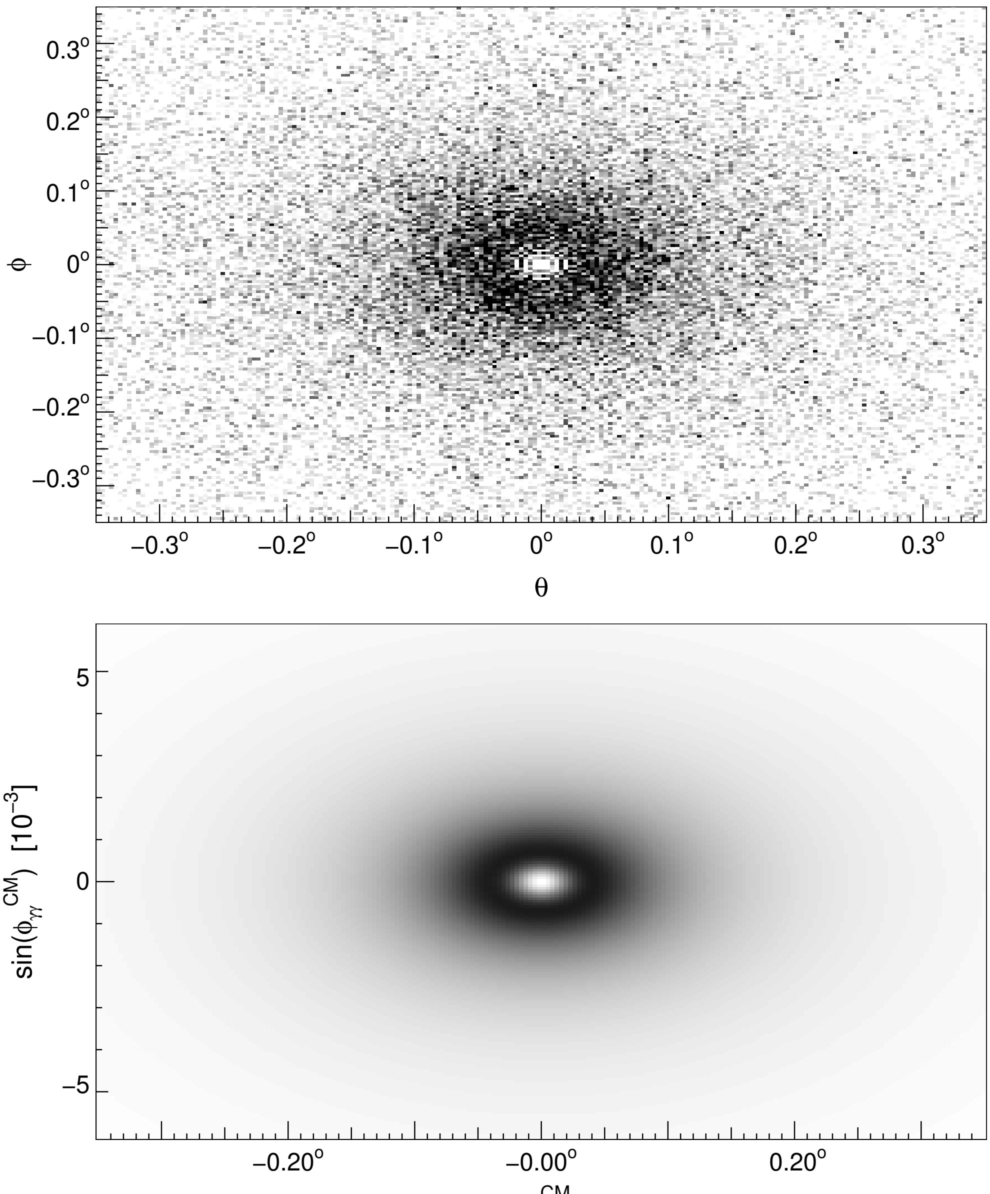


Abb. 2.6: Photonwinkelspektrum um Richtung des einlaufenden Elektrons. *Oben* das rekonstruierte Spektrum in der Monte-Carlo-Simulation, zum Vergleich *unten* die exakte Rechnung. Es ist gut erkennbar, dass die Form in der Simuation richtig wiedergegeben wird, insbesondere liegen (fast) keine Ereignisse *exakt* in der Richtung des einlaufenden Elektrons, welche in der Piknäherung praktisch ausschließlich angenommen wird.

2.4 Externe Bremsstrahlung

"Thus, the radiation length X_0 may be simply defined as that thickness of the medium which reduces the mean energy of a beam of electrons by a factor e."

(D. Perkins [Per87])

"This parameter is defined as the distance over which the electron energy is reduced by a factor 1/e due to radiation loss only."

(W. R. Leo [Leo87])

"Let us define the unit radiation length, denoted by X_0, of a material by

$$X_0^{-1} = \alpha\, r_0^2\, \frac{N}{A}\, \left\{ Z^2[\phi_1(0) - \frac{4}{3}\ln Z - 4f] + Z[\psi_1(0) - \frac{8}{3}\ln Z] \right\}\text{"} \qquad (2.35)$$

(Y. S. Tsai [Tsa74])

[Kommentar zu diesen Zitaten s. Ende von Abschnitt 2.4]

Ein monoenergetischer Elektronenstrahl weist nach dem Durchtritt durch eine Materieschicht eine charakteristische Energie- und Winkelverteilung auf. Die Winkelaufweitung ist bei dünnen Schichten sehr gering und wird zunächst vernachlässigt. Der Energieverlust dagegen, welcher hauptsächlich durch das Abgeben von Bremsstrahlung bei (Kleinwinkel-)Streuung an den Atomkernen zustande kommt, ist bereits bei sehr dünnen Schichten in ähnlicher Weise wie beim Streuprozess selbst zu berücksichtigen; man spricht hier von *externer* Bremsstrahlung.

Da in einem einzelnen Streuprozess fast die gesamte kinetische Energie E eines Elektrons in ein Bremsstrahlungsphoton übergehen kann, ergibt sich für die Energie der austretenden Elektronen E' eine *Häufigkeitsverteilung*, die sich von 0 bis E erstreckt,

$$h(u, bt), \qquad (2.36)$$

welche man zweckmäßigerweise als Funktion schreibt von

$$u = \frac{E - E'}{E} \qquad (0 \leq u \leq 1) \qquad (2.37)$$

und vom Paramter bt, welcher von Dicke und Beschaffenheit des durchquerten Materials abhängt. Beschreibt t die Targetdicke in Einheiten der Strahlungslänge, so hat b einen Wert von etwa 1.4 (Näheres s. unten). Die bei Elektronenstreuexperimenten an MAMI benutzten dünnen Targets haben eine Dicke von höchstens einigen Prozent der Strahlungslänge. h soll ausschließlich den Effekt der Bremsstrahlung beschreiben, hierbei aber die Möglichkeit der Emission von mehreren Photonen (am gleichen oder an verschiedenen Kernen) berücksichtigen. Da bei diesem Prozess die Gesamtzahl der Elektronen konstant bleibt, fordert man, dass die Verteilung auf 1 normiert ist,

$$I(1, bt) \;=\; 1, \qquad (2.38)$$

wobei das Integral I definiert ist als

$$I(u, bt) \;=\; \int_0^u h(u', bt) du'. \tag{2.39}$$

Ist die Häufigkeitsverteilung h bekannt, so kann der Effekt der externen Bremsstrahlung bei der Analyse von Elektronenstreuexperimenten in den heute üblichen Monte-Carlo-Verfahren korrekt berücksichtigt werden.

Die Bestimmung von h ist Aufgabe der theoretischen Physik. Ein erstes Resultat stammt von Bethe und Heitler [BHe34] (s. auch [Hei54] S. 378). Dies stellt allerdings einfach eine "rough but convenient" Annahme[7] dar, die auf zwei zu erläuternden Begründungen fußt:

$$h_H(u, bt)\; du \;=\; \frac{1}{\Gamma(bt)} \left(-\ln[1-u]\right)^{bt-1}\; du \tag{2.40}$$

$$\;=\; \frac{1}{\Gamma(bt)}\; e^{-y}\; y^{bt-1}\; dy \tag{2.41}$$

mit

$$y \;=\; -\ln[1-u]. \tag{2.42}$$

Für $bt \to 0$ geht (2.40) über in eine „Basisverteilung“, die in der späteren Literatur häufig zu finden (z.B. Bergstrom in [MIT67]) und für die weitere Diskussion hilfreich ist:

$$h_B(u, bt)\; du \;=\; bt \cdot u^{bt-1}\; du. \tag{2.43}$$

Als erste Begründung für die Plausibilität von Gl. (2.40) erkennt man, dass im Grenzfall sehr dünner Schichten $bt \to 0$ der Photonenwirkungsquerschnitt $\sim u^{-1}$ angenähert wird.

Die zweite Begründung ist, dass der Ansatz (2.40) die Faltungsbedingung erfüllt: Für größere Schichtdicken muss die Annahme *unabhängiger* Mehrfach-Streuprozesse gelten, d.h. bei Zerlegung der Dicke in zwei Teile $bt = bt_1 + bt_2$ muss für $h(u, bt)$ gelten

$$h(u, bt) \;=\; \int_0^u h(u', bt_1) \cdot h\left([u-u']/[1-u'], bt_2\right) du'. \tag{2.44}$$

Diese Bedingung wird in der Tat von (2.40) erfüllt, sie ist aber aus zwei Gründen problematisch:

- Mit dem Durchmesser eines einzelnen Atoms des Schichtmaterials ist offensichtlich eine untere Grenze für eine sinnvolle Schichtdicke gegeben. Bei dieser minimalen Schichtdicke wird der Energieverlust des Elektrons durch die Abgabe

[7] Hierbei ist interessant, dass von Referenz [BHe34] zu [Hei54] offensichtlich die Argumentation und Formeln übernommen wurden, die ursprüngliche vorsichtigere Formulierung "we *assume* for the probability ... a rough but convenient formula" sich allerdings zu "we *represent* the intensity distribution...by a rough but convenient formula" entwickelt hat.

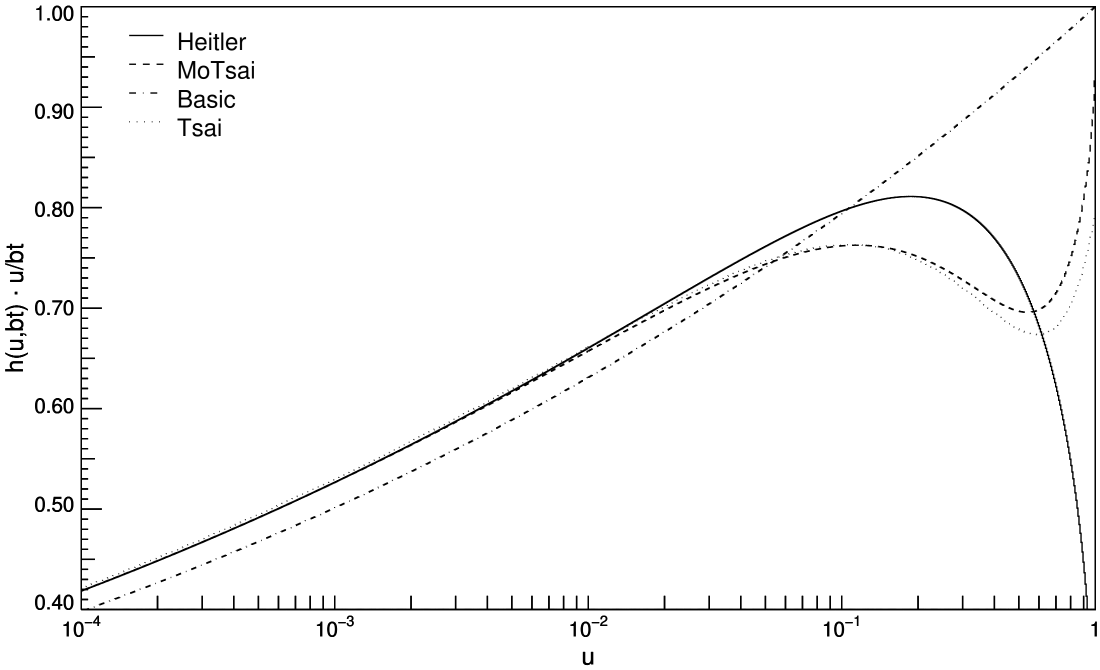


Abb. 2.7: Die Häufigkeitsverteilung für externe Bremsstrahlung nach den Formeln von Bethe und Heitler(2.40), Mo und Tsai (2.46), die Basisverteilung (2.43) und von Tsai (2.48) für ein Target der Schichtdicke $bt = 0.1$. Im Anhang befindet sich die Abbildung noch einmal mit linearer u-Achse (E.2)

von (mehreren) Photonen bei Streuung am *gleichen* Kern verursacht. Diese Intensität muss im Rahmen der QED richtig bestimmt werden, was in höheren Ordnungen schwer zu bestimmende Korrekturen erfordert. Insbesondere kann ihre Richtigkeit nicht einfach an der Erfüllung der Faltungsbedingung gemessen werden.

- Auch bei der Emission von Photonen an verschiedenen Kernen kann nicht a priori von unabhängigen Prozessen ausgegangen werden. Ein prägnantes Beispiel hierfür ist die *kohärente Bremsstrahlung*, die an Kritallgittern auftritt.

Deshalb kann die Begründung von (2.40) nur als halbempirisch gelten. Diese Verteilung hat dann aber die angenehme Eigenschaft, dass das Integral (2.39) in geschlossener Form angegeben werden kann,

$$I_H(u, bt) = \frac{(bt - 1, -\ln[1-u])!}{\Gamma(bt)}, \tag{2.45}$$

wobei $(x, y)!$ die unvollständige Gammafunktion (vgl. z.B. [NuR88], S. 216) bezeichnet.

Mo und Tsai [MMT69] schreiben in Anlehnung an Heitler

$$h_{MT}(u, bt) = n_{MT} \cdot \frac{bt}{u} \left(1 - u + 0.75u^2\right) \left(-\ln[1-u]\right)^{bt}, \tag{2.46}$$

wobei der zusätzliche Term $(1 - u + 0.75u^2)$ eine bessere Beschreibung des Photonenwirkungsquerschnittes bei höheren Photonenergien bewirken soll.

Die Normierungskonstante n_{MT} ist nicht gleich 1, wie man aufgrund der Ausführungen in [MMT69] vermuten könnte, sie lässt sich auch nicht geschlossen angeben. Im Rahmen dieser Arbeit wurde durch numerische Integration der Verteilungen (s. Anhang E) die Abhängigkeit dieser Normierungskonstanten von der Targetdicke bt bestimmt. Für kleine bt ergibt sich

$$n_{MT} \approx \frac{1}{1 - 0.625 \cdot bt + 1.35 \cdot bt^2} \, . \tag{2.47}$$

Dieses bedeutet für ein Target mit $bt = 0.02$ eine Korrektur von 1.2%, bei $bt = 0.2$ bereits 7.6%. Hier ist anzumerken, dass n_{MT} nicht durch $\Gamma(bt)$ (vgl. [Ear73]) gegeben ist[8], obwohl dies eine bessere Näherung wäre als $n_{MT} = 1$. Da das Integral (2.39) über (2.46) nicht geschlossen angegeben werden kann, muss z.B. für eine Monte-Carlo-Simulation ein numerisches Verfahren benutzt werden. Hierbei entsteht ein Fehler von der Größe dieser Korrektur, wenn man $n_{MT} = 1$ annimmt.

Weiterhin wird durch die Verteilung von Mo und Tsai (2.46) die Faltungsbedingung (2.44) nicht mehr erfüllt, welche das (ohnehin nicht einwandfreie) Argument für den Ansatz (2.40) war.

Da also kein zwingender Grund für diesen Term besteht, spricht nichts gegen einen anderen Ansatz von Tsai [Tsa71] für h, der in [Pie89] näher untersucht wurde:

$$h_T(u, bt) = n_T \left(1 - u + 0.75u^2\right) u^{bt-1}, \tag{2.48}$$

wobei die Normierungskonstante zu

$$n_T = \left(\frac{1}{bt} - \frac{1}{bt+1} + \frac{0.75}{bt+2}\right)^{-1} \xrightarrow{bt \to 0} \frac{bt}{1 + 0.625 \cdot bt} \tag{2.49}$$

gegeben ist. Diese Verteilung läßt sich leicht integrieren,

$$I_T(u, bt) = n_T \left(\frac{1}{bt} - \frac{u}{bt+1} + \frac{0.75u^2}{bt+2}\right) u^{bt} \tag{2.50}$$

und ist damit sehr gut geeignet für ein Monte-Carlo-Verfahren zur Simulation des externen Strahlungsschwanzes.

Ein wichtiges Charakteristikum der Verteilung h ist die *mittlere Energie* $\bar{E}$ der Elektronen nach Durchqueren einer Schichtdicke bt. Mit den Gleichungen (2.43), (2.40) und (2.48) ergibt sich (in dieser Reihenfolge)

$$\bar{E}_B(bt) = E \cdot \frac{1}{bt+1} \tag{2.51}$$

$$\bar{E}_H(bt) = E \cdot e^{-bt \cdot \ln 2} \tag{2.52}$$

$$\bar{E}_T(bt) = E \cdot n_T \left(\frac{1}{bt+1} - \frac{1}{bt+2} + \frac{0.75}{bt+3}\right) \tag{2.53}$$

bt	$\bar{E}_B/E$	$\bar{E}_H/E$	$\bar{E}_T/E$	$(\bar{E}_H - \bar{E}_T)/\bar{E}_H$
0.01	0.990	0.993	0.993	0.06%
0.10	0.909	0.933	0.929	0.48%
1.00	0.500	0.500	0.528	-5.56%
2.00	0.333	0.250	0.341	-36.47%

Tab. 2.1: Mittlere Elektronenenergie nach den verschiedenen Ansätzen der externen Bremsstrahlung

In Tabelle 2.1 sind Zahlenwerte für die verschiedenen Ansätze angegeben.

Die Häufigkeitsverteilung h_H führt zu einer exponentiellen Abnahme der mittleren Energie mit der Schichtdicke (dies ist eine Folge der Faltungsbedingung (2.44)). Geht man von dieser Häufigkeitsverteilung aus, so kann man die *Strahlungslänge* X_0 als diejenige Schichtdicke definieren[9], in der die mittlere Energie hochenergetischer Elektronen durch Emission von Bremsstrahlung auf e^{-1} ihres Anfangswertes reduziert wird. Bei dem bisher verwendeten Schichtdicken-Parameter ist dies der Fall bei $bt = 1/\ln 2$.

Diese Definition lässt sich nicht einfach auf die anderen Verteilungen „portieren“, weil diese gar nicht mehr einer exponentiellen Abnahme der mittleren Energie entsprechen. Deshalb hat Tsai [Tsa74] vorgeschlagen, X_0 über eine Formel zu definieren, die, zusammen mit dem noch zu behandelnden Parameter b in die Verteilungsfunktion h_T eingesetzt, eine möglichst gute Beschreibung des tatsächlich auftretenden Bremsstrahlungs-Spektrums darstellt. Dies ist die Grundlage für Tsais in Gl. (2.35) gegebene Definition von X_0.

Bethe und Heitler haben in ihrer Herleitung von h_H den Parameter b eingeführt, um mit der Setzung

$$t = \frac{X}{X_0} \tag{2.54}$$

die richtige Verteilung zu erhalten; sie finden wegen ihrer Definition von X_0 und dem daraus folgenden Zusammenhang $bt = 1/\ln 2$ bei $t = 1$

$$b = (\ln 2)^{-1} \approx 1.44. \tag{2.55}$$

Tsai gibt, passend zu seinem X_0 an:

$$b = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{Z^2 + Z}{(Z^2\ L_{rad} + Z\ L'_{rad})}\right) \approx 1.34. \tag{2.56}$$

In [Tsa74] sind die Größen L_{rad} und L'_{rad} tabelliert, mit denen man auch die Definitionsgleichung für X_0, Gl. (2.35), ausdrücken kann.

[8] In Anlehnung an die Normierung von Heitlers Ansatz (2.40), vgl. z.B. [Ear73]

[9] Dies liegt den diesem Absatz vorweggeschickten Zitaten [Per87, Leo87] zugrunde

Kommentar

Die Diskussion in diesem Abschnitt macht deutlich, dass es für das im Experiment auftretende externe Bremsstrahlungsspektrum keine zwingende theoretische Beschreibung gibt, was durch Redeweisen wie "may be simply defined" verdeckt wird. Eine experimentelle Überprüfung des externen Bremsstrahlungsspektrums für die bei einem Streuexperiment verwendeten Materialien erscheint somit dringend erforderlich, insbesondere wenn eine Präzision im Bereich $\leq 1\%$ angestrebt wird.

Will man diese Theorie der Bremsstrahlung durch Vergleich mit dem Experiment überprüfen oder will man Bremsstrahlungseffekte bei Messung einer anderen Reaktion (wie VCS) berücksichtigen, dann müssen weitere Effekte mitbetrachtet werden.

In Abb. 2.8 ist das Ergebnis der Strahlenschwanzrechnung durch Monte-Carlo-Simulation am Beispiel einer elastischen Kinematik, aufgeschlüsselt nach den verschiedenen Effekten, gezeigt. Zur Bremsstrahlung kommt insbesondere der Energieverlust durch Streuung der Elektronen an Hüllenelektronen, der durch die Landauverteilung beschrieben wird, hinzu. Diese Beiträge werden durch Faltung mit dem Bremsstrahlungsspektrum berücksichtigt, was in der Simulation (mit Einteilung der Schicht in ausreichend dünne Teile) numerisch geschieht.

In Abb. 2.9 ist der Vergleich mit dem experimentellen Spektrum gezeigt, sowie der extrahierte Wirkungsquerschnitt als Funktion vom Abschneideparameter $\Delta E_{e'}$. Obwohl die Variation mit der Abschneideenergie recht klein ist, entspricht sie einem im Experiment gegenüber der Simulation im gesamten Bereich 20% höheren Strahlenschwanz. Die Ursache hierfür konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr geklärt werden.

Weiterhin ist, insbesondere für Messungen, bei denen zum Elektron koinzident das Proton nachgewiesen wird, die Berücksichtigung der *Winkelverteilung* der Bremsstrahlung wichtig, da dies zu einem modifizierten Phasenraum der nachgewiesenen Teilchen führt. Dies ist möglich mit der in Abschnitt 2.3.3 erläuterten Methode, so dass in Zukunft ein präziseres Verständnis des experimentell auftretenden Strahlenschwanzes erreicht werden kann.

2.5 Strahlungskorrekturen zur virtuellen Comptonstreuung

In den vorliegenden Messungen der virtuellen Comptonstreuung wird ein „hartes" Photon mit einer Energie q' zwischen 33 und 111 MeV über die Massenbilanz von gestreutem Elektron und rückstoßendem Proton identifiziert. In erster Bornscher Näherung ergibt sich die Streuamplitude dafür aus der kohärenten Summe der Graphen (b1), (b2), (b3) und (b4) (vgl. Abb. 2.1). Zur internen Strahlungkorrektur für diesen Prozess müssen, analog zur elastischen Streuung, alle Graphen nächster Ordnung berechnet werden, also Vakuumpolarisation, Vertexkorrektur und Bremsstrah-

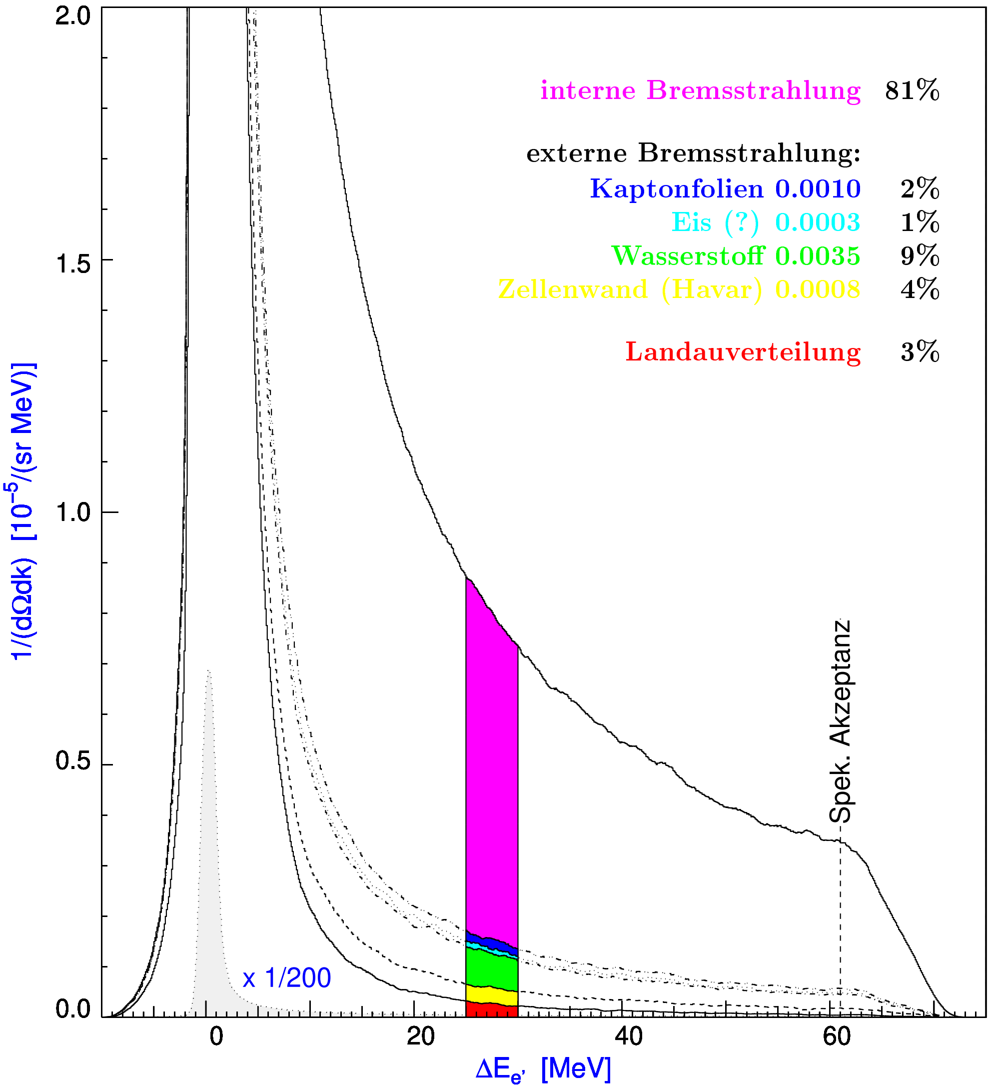


Abb. 2.8: Berechnung des Strahlenschwanzes bei elastischer Streuung mit der Methode der Monte-Carlo-Simulation für ein Einarmexperiment $p(e,e')p'$ mit dem Elektronspektrometer B und dem verwendeten Flüssig-Wasserstoff-Target (Kinematik wie in Abb. 2.9). Die verschiedenen Beiträge zum Strahlenschwanz bei einer Abschneideenergie $\Delta E_{e'}$=27.5 MeV sind (durch Simulation unter sukzessiver Hinzunahme der verschiedenen Beiträge) aufgeschlüsselt; die Reihenfolge in der Liste entspricht der Schichtung in der Graphik. Zu den externen Beiträgen sind jeweils die verwendeten Strahlungslängen der durchlaufenen Materialien angegeben. Für dieses Experiment mit einem relativ dünnen Target (0.35% Strahlungslängen) dominiert die interne Bremsstrahlung mit 81% den Strahlenschwanz.

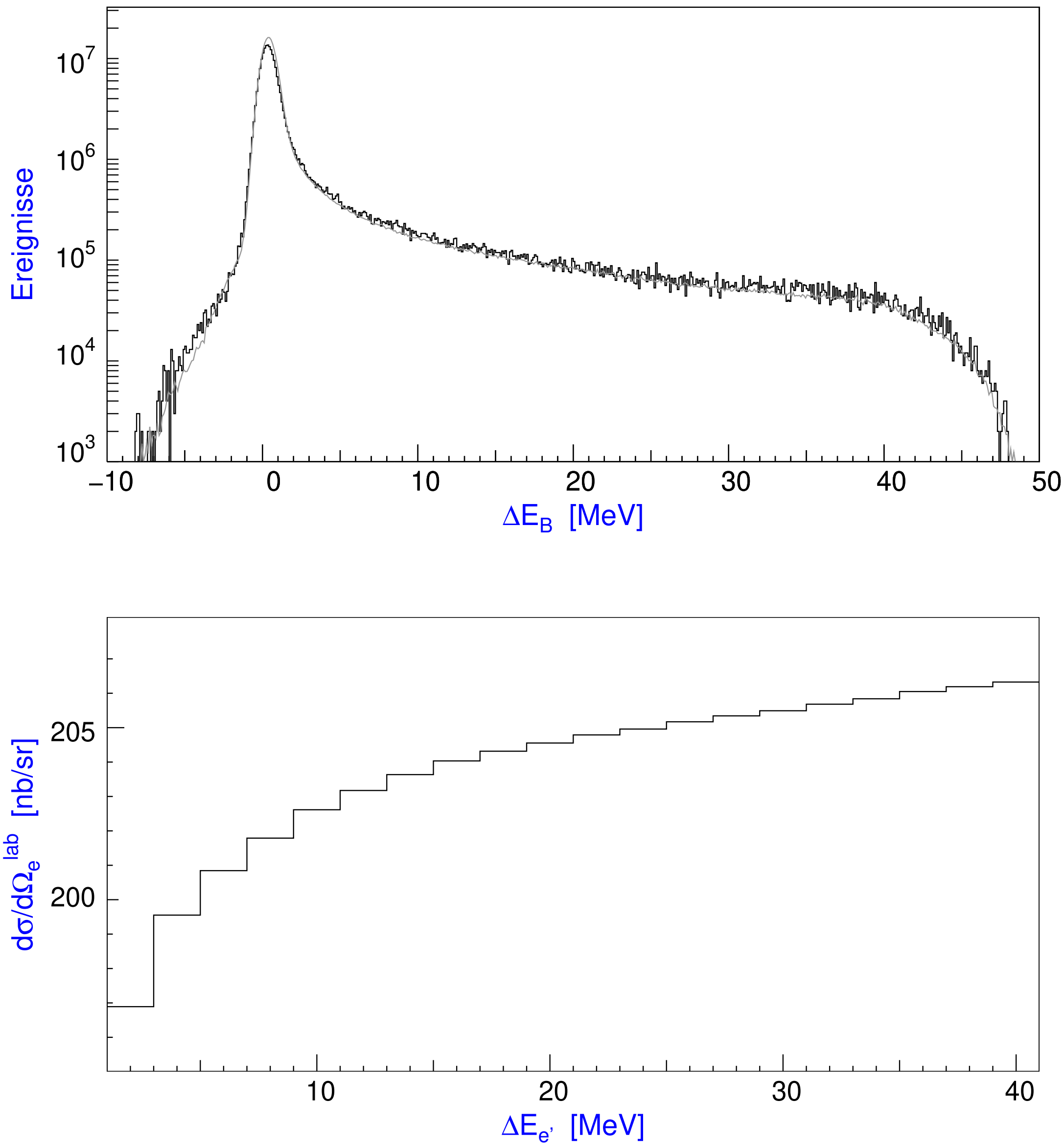


Abb. 2.9: *Oben* mit der Monte-Carlo-Methode berechneter Strahlenschwanz (graue Linie, wie in Abb. 2.8) im Vergleich zum experimentellen Spektrum, in Piknäherung *ohne* Berücksichtigung des Wirkungsquerschnitts-Verlaufs. *Unten* extrahierter Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von der Abschneideenergie $\Delta E_{e'}$. Bis auf eine kleine Verschiebung, mit der die Piklage in Simulation und Experiment in Übereinstimmung gebracht wird, sind ΔE_B (die Abweichung des gemessenen Elektronimpulses von der elastischen Kinematik) und $\Delta E_{e'}$ gleich. Der Ausläufer von Ereignissen mit Elektronenergien, die *größer* sind als bei elastischer Streuung ($\Delta E_B < 0$), werden durch Fehler bei der Koordinatenbestimmung verursacht und in der Simulation über entsprechende Fehlerverteilungen mit berücksichtigt.
In [Vdh00] befindet sich eine ähnliche Abbildung *mit* Berücksichtigung des Wirkungsquerschnitts-Verlaufs („Halbe-halbe"-Ansatz (2.33)).

lung eines weiteren (weichen) Photons; letzteres führt zu einem Strahlenschwanz in der Massenbilanz des Prozesses.

In [Vdh00] sind diese Rechnungen durchgeführt für alle Graphen, bei denen das weiche Photon vom Elektron emittiert wird, und für die entsprechenden Graphen zur Vertexkorrektur. Hierbei ergibt sich eine ähnliche Korrektur wie bei der elastischen Streuung von etwa 20%.

Die analogen Korrekturen auf der Protonseite wurden zunächst vernachlässigt unter der Annahme, dass diese wie bei der elastischen Streuung wegen des Massenverhältnisses von Proton und Elektron unterdrückt sind. Nachdem allerdings die neue Rechnung von Maximon und Tjon [MTj00] für elastische Elektron-Proton-Streuung bekannt war, wurde dieses Ergebnis mit der Annahme auf die virtuelle Comptonstreuung übertragen, dass durch die „kinematische Nähe“ zur elastischen Streuung die Korrektur ähnlich sein müsste. Für die hier vorgestellten Kinematiken wurde eine zusätzliche Korrekur von etwa 1.2% ermittelt. Dies ist allerdings durch eine genauere Rechnung zu überprüfen.

Die Behandlung der externen Korrekturen ist, insbesondere bei den benutzten numerischen Monte-Carlo-Verfahren, von der speziellen Reaktion unabhängig und wurde wie in 2.4 beschrieben durchgeführt.

Kapitel 3

Datenanalyse und experimentelle Spektren

Dieses Kapitel behandelt spezielle Aspekte der Bestimmung absoluter Koinzidenzwirkungsquerschnitte bei einer angestrebten Genauigkeit von einem Prozent.

3.1 Das Projekt Cola++/Simul++

Zur Analyse der an der Drei-Spektrometer-Anlage aufgenommenen Daten steht ein im Intitut für Kernphysik entwickeltes Programmpaket zur Verfügung, das im Zuge der apparativen Erweiterungen und Veränderungen und durch die Erkenntnisse bei der Datenanalyse ständig weiterentwickelt und verfeinert wird.

Am Ausgangspunkt der Entwicklung steht der Compiler Cindy++ für die Messdaten-Struktur, der in der Programmiersprache C++ entwickelt wurde [Dis95], um die Vorzüge dieses modernen *objektorientierten*, auf die Bewältigung sehr komplexer Aufgabenstellungen abzielenden Programmierstils zu nutzen. Zunächst zählten dazu Bibliotheken für

- die Auswertung der Driftkammerinformation. Auf die Weiterentwicklung im Rahmen dieser Arbeit wird in Abschnitt 3.2 und Anhang D eingegangen.
- die Rückrechnung der Targetkoordinaten aus den Detektorkoordinaten, die "Tracemachine" [Kra95]. Diese wurde im Rahmen dieser Arbeit durch einen neuen, etwas schnelleren Algorithmus ersetzt, s. Anhang F.
- das Rechnen mit Vierervektoren. Diese wurde im weiteren um eine Spinor-Bibliothek ergänzt (H. Merkel) und schließlich für die vorliegende Arbeit auf eine QED-Bibliothek zur Berechnung von Feynmangraphen ausgeweitet, mit der auch die numerischen Berechnungen in Kapitel 2.3.3 durchgeführt wurden.
- die Berücksichtigung von Energieverlusten und weiteren physikalischen Prozessen, die bei der Experimentauswertung eine Rolle spielen.

Anfänglich gab es nur recht einfache Filter- und Histogrammierfunktionen, die weitere Datenverarbeitung und graphische Darstellung wurde mit dem CERN-Paket paw bewerkstelligt. Seit 1996 ist jedoch das eigene leistungsfähige Programmpaket Cola++ zur Graphikerstellung und Oberflächensteuerung entstanden. Dieses wurde insbesondere zum Einsatz im Experimentierbetrieb benötigt, um "online" den einlaufenden Datenstrom analysieren und darstellen zu können (**C**indy **onl**ine **a**nalysis).

Zur Berechnung des Akzeptanzvolumens und zur Berücksichtigung von Aufstreu- und Energieverlusteffekten ist eine Monte-Carlo-Simulation wegen der hohen heutzutage zur Verfügung stehenden Rechenleistung die genaueste und komfortabelste Methode. Für die Daten, die mit Cola++ analysiert werden, steht das Programmpaket Simul++ zur Verfügung, welches viele der Bibliotheksfunktionen von Cola++ ebenfalls nutzt und insbesondere die *gleichen* Histogrammierfunktionen hat. Dies ist von großem praktischen Nutzen, da Histogrammgrenzen oder die Binierung nur *einmal* in eine Datei eingegeben werden müssen, auf die gleichermaßen von Cola++ und Simul++ zugegriffen wird.

Die Auswertung des VCS-Experiments, mit dem sich die vorliegende Arbeit beschäftigt, ist ein Sonderfall. Zunächst wurde das 1996 in Mainz für die Datenanalyse des Pion-Schwellenproduktions-Experiments [Dis96] entwickelte Programmpaket, also Cindy++ mit den oben angeführten Bibliotheken, auf den SUN-Rechnern in Saclay installiert, wo im Rahmen von [Lhu97, Roc98] ebenfalls an der Auswertung gearbeitet wurde. Die Mainzer Weiterentwicklung im Rahmen von Cola++/Simul++ wurde dann aber dort nicht mehr übernommen, obwohl mehrfach aktuelle Versionen in Saclay installiert wurden. Somit entstanden zwei parallele Analysen, die „Saclay-Analyse“, welche auch die im 4. Kapitel diskutierten Resultate geliefert hat, und die Analyse mit Cola++. Erkenntnisse im Rahmen der einen Analyse wurden im wesentlichen in der anderen übernommen. Obgleich es dabei häufig mehrfache Arbeit gab, bedeutete dies letztlich eine doppelte Prüfung auf Fehlerhaftigkeit, was der erforderlichen Genauigkeit bei diesem Experiment zugute kam.

Ein entscheidender Unterschied liegt in den Monte-Carlo-Rechnungen zur Experimentsimulation. Für die Saclay-Analyse wurde diese im Rahmen der VCS-Kollaboration von der Gent-Gruppe beigetragen und in Form von paw-Histogrammen auf die Daten angewendet. Dieses Vorgehen war mit dem Cola++/Simul++-Konzept nicht kompatibel.

Damit aber die Erkenntnisse der Analysen *aller* Experimente an der Drei-Spektrometer-Anlage den folgenden Experimenten zugute kommen, wurden im Rahmen dieser Arbeit die Besonderheiten der Gent-Simulation weitestgehend in Simul++ integriert.

3.2 Spurrekonstruktion mit vertikalen Driftkammern

Die Magnetspektrometer sind zur Spurrekonstruktion mit einem Doppelpacket von vertikalen Driftkammern (vertical drift chambers, VDCs) ausgestattet, das die Durchstoßpunkte der nachgewiesenen Teilchen durch zwei 240 mm voneinander entfernte Ebenen bestimmt. Die erste Ebene ist nahe der Fokalfläche gewählt, sodass sich der Impuls des Teilchens bis auf Korrekturen höherer Ordnungen bereits aus einer der vier Koordinaten (Durchstoßpunkt (x,y), Durchstoßwinkel (ϑ, ϕ)) ergibt, naämlich aus x.

Ein Vorteil von VDCs ist die hohe Redundanz der Rohdaten, die sich aus dem schrägen Teilchendurchtritt und dem damit verbundenen Ansprechen mehrerer Driftzellen ergibt. Insbesondere liefert die lineare Regression eine Aussage über den ("intrinsischen") Fehler an den ermittelten Koordinaten.

Wie im Anhang D näher ausgeführt, liefert bereits die Verteilung dieser Fehler einen Hinweis darauf, dass bei der Auswertung der Kammerinformation besondere Vorsicht geboten ist. Denn ein Anteil von 3 bis 7 Prozent der Rohdaten weist Koordinatenfehler auf, die ungewöhnlich groß[1] sind; dies sind sehr viel mehr, als man aufgrund von Aufstreueffekten, also von tatsächlich auftretenden Abweichungen von einer Durchtrittsgeraden, erwarten würde. Im Anhang D ist dargestellt, dass diese großen Fehler auf zusätzlich auftretende „korrupte“ Signale zurückzuführen sind, die zur optimalen Nutzung der Driftkammerinformation als solche identifiziert und besonders behandelt, d. h. aussortiert werden müssen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der bestehende Spur-Algorithmus in diesem Sinne weiter verfeinert, was insbesondere das Auftreten dieser extrem großen Koordinatenfehler zugunsten einer besseren Spurrekonstruktion reduziert. Dabei werden die Signale, die bei einem Ereignis registriert wurden, daraufhin gepüft, ob die *Differenz* der Driftzeiten benachbarter Drähte mit einer durch die Akzeptanz des Spektrometers zulässigen Spur verträglich ist. Alle erlaubten Spuren treten nämlich in einem eng begrenzten Winkelintervall durch das Kammerpacket (für Spektrometer A z.B. zwischen 35° und 55°), und nur die durch diese Winkel gegebenen Driftzeit-Differenzen sollten in den Ereignissen auftreten. Daraus kann man das Driftzeit-Differenz-Kriterium ableiten, das in D.3 erläutert wird. Durch dieses Kriterium lässt

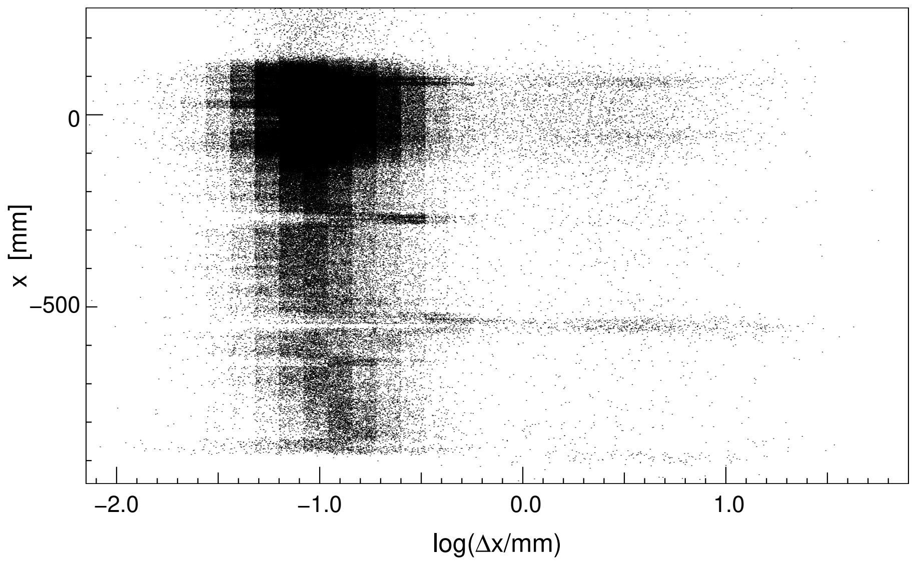


Abb. 3.1: Der Fehler Δx an der dispersiven Koordinate x in Abhängigkeit vom Ort x auf der Fokalebene für einen Run in elastischer Kinematik, Spektrometer B. Der Fehler ist logarithmisch zur Basis 10 aufgetragen, d.h. zwischen den beiden häufig auftretenden Fehlern Δx=0.1 mm ($\log(\Delta x/\mathrm{mm}) = -1$) und Δx=3 mm ($\log(\Delta x/\mathrm{mm}) = 0.5$) liegt ein Faktor 30. Es ist erkennbar, dass die großen Fehler recht lokal auftreten.

[1] Als solche werden Fehler bezeichnet, die mehr als etwa einen Faktor 10 größer sind als der am häufigsten auftretende Fehler.

sich etwa die Hälfte der extrem großen Fehler vermeiden.

In der Saclay-Analyse wurde das Driftzeit-Differenzkriterium nicht angewendet, sondern ein im Rahmen dieser Arbeit früher vorgeschlagenes und ausgearbeitetes Verfahren in die Simulation implementiert. Dabei werden aus den bekannten Fehlerverteilungen der Fokalebenenkoordinaten über die Spektrometeroptik Fehlerverteilungen für die Targetkoordinaten berechnet, die dann bei der Ereignisgenerierung benutzt werden. Wegen der Korrelationen zwischen den einzelnen Fehlern geschieht dies durch eine vierdimensionale Fehlermatrix. Diese hat, da auch die sehr großen Fehler mit berücksichtigt werden sollen, einen beträchtlichen Umfang und benötigt einen Speicherplatz von etwa 2 MB. Der Effekt auf den extrahierten Wirkungsquerschnitt, der durch die angewendeten Schnitte zustande kommt, liegt bei etwa 5%.

Allerdings setzt eine solche Behandlung voraus, dass die problematischen Ereignisse gleichmäßig über die Fokalebene verteilt sind, was, wie man Abb. 3.2 entnehmen kann, nicht der Fall ist[2]. Wenn man also die großen Fehler nicht vollständig durch Verbesserung des Auswertungsalgorithmus vermeiden kann, muss die Abhängigkeit der Fehlerverteilung vom Durchtrittsort durch den Detektor berücksichtigt werden. Die ohnehin recht großen Fehlermatrizen noch zusätzlich vom vierdimensionalen Akzeptanzvolumen abhängig zu beschreiben, erscheint trotz der immer größer werdenden Rechenkapazitäten nicht praktikabel. Hier stellt sich außerdem das prinzipielle Problem, dass die Fehlerverteilungen selbstkonsistent aus den Daten gewonnen werden, und gerade bei den Ereignissen mit großen Koordinatenfehlern fraglich ist, wo diese Ereignisse tatsächlich aufgetreten sind und welchem Akzeptanzvolumen man sie zuordnen soll.

Mit der Verfeinerung des Spur-Algorithmus konnte gezeigt werden, dass etwa die Hälfte der großen Fehler vermieden werden kann. Dies führt bei den angewendeten Schnitten zu etwa 2% größeren[3] extrahierten Wirkungsquerschnitten. Dies stimmt mit dem in der Simulation erhaltenen Wert überein. Es wird daher davon ausgegangen, dass die Effizienzkorrektur der Driftkammern in der Saclay-Analyse insgesamt korrekt durchgeführt wurde.

„Zufälligen-Trigger“

Eigens für das VCS-Experiment wurde der Ereignistrigger so modifiziert, dass neben den tatsächlich auftretenden Ereignissen auch zu einem zufälligen Zeitpunkt die Detektoren so ausgelesen werden können, als läge ein Ereignis vor. Hintergrund dafür war die Überlegung, dass die Ereignisse, bei denen die Spurrekonstruktion in den Driftkammern nicht gelingt, durch *zufällige* Koinzidenz mit dem „Kammerrauschen“ verursacht werden. Durch nachträgliches Überlagern aller Ereignisse mit der zufällig aufgezeichneten Information müsste sich dieser Effekt herauspräparieren und auf

[2] Der besonders hervorstechende Bereich um $x = -500$ mm war durch durchhängende Drähte verursacht; er ist inzwischen repariert

[3] Da es sich bei dem Algorithmus im wesentlichen um das geschickte Fortlassen von vermutlich falscher Information in den Ereignissen handelt, ist a priori keineswegs klar, dass man Ereignisse im akzeptierten Bereich gewinnt.

„rauschfreie" Kammern extrapolieren lassen. Im Rahmen dieser Arbeit dann wurde jedoch gezeigt, dass die aufgezeichnete Zufälligen-Information

- sich genau mit der in den Spektrometern vorliegenden Teilchenrate (im Protonspektrometer 140 kHz) erklären lässt und
- die Spurrekonstruktion durch diesen Effekt nur in einem vernachlässigbar kleinen Umfang beeinträchtigt wird, d.h. die daraus gefolgerte Korrektur nicht die beobachteten Schwierigkeiten der Spurrekonstruktion beschreibt.

Der Grund hierfür ist, dass die zusätzlichen Drähte *korreliert* mit den Ereignissen ansprechen und nicht zufällig, da sie z.B. durch Spuren der mit dem Teilchendurchtritt im Detektor entstehenden Sekundärteilchen (δ-Elektron, Photon) oder durch elektronische Effekte (Schwingen, Übersprechen von Nachbarkanälen) verursacht werden. Dieses Phänomen kann offensichtlich nicht mit unkorrelierter Zufallsbeobachtung gelöst werden.

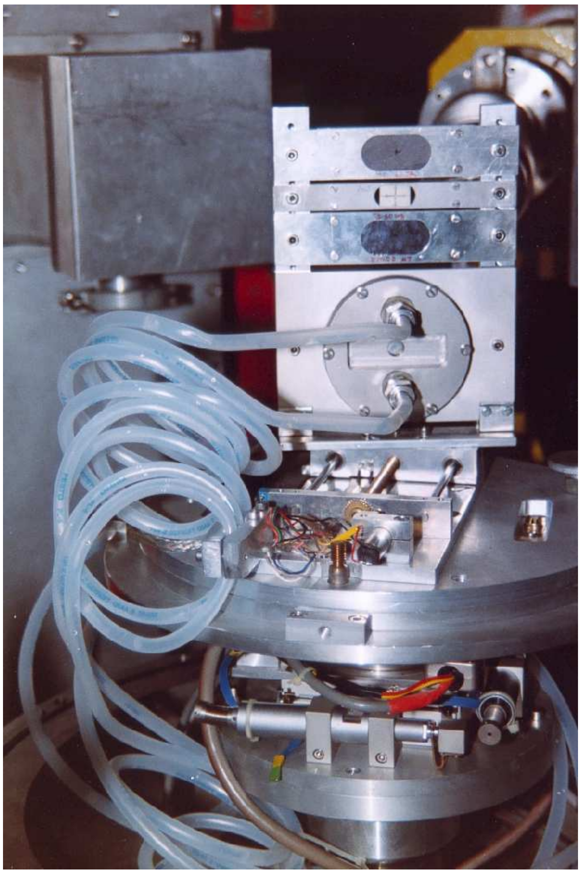
3.3 Spektrometeroptik

Im Rahmen dieser Arbeit wurden umfangreiche Studien zur Spektrometeroptik betrieben. Soweit sie in die Datenanalyse des VCS-Experiments eingegangen sind, finden sich Details in [Roc98].

Darüber hinaus wurde in Zusammenarbeit mit J. Bermuth ein neues Target entwickelt und in Betrieb genommen, welches die Kalibrationsmessungen wesentlich effektiver gestaltet. Motivation hierfür war die schlechte Eichung des Elektronspektrometers B bei hohen Impulsen, die sich dadurch erklärt, das im Standard-Eichverfahren elastische Elektronenstreuung an schweren Kernen benutzt wird, die bei hohen Impulsen und den erreichbaren Streuwinkeln extrem kleine Zählraten aufweist. Zusätzlich kann, wenn das Spektrometer unter Vorwärtswinkeln steht, nicht die volle Vertex-Akzeptanz des Spektrometers durch Verschieben des Eichtargets vermessen werden.

Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu umgehen, ist die Benutzung von elastischer Elektron-Proton-Streuung $p(e,e'p')$, $p(e,p')e'$ oder $p(e,e')p'$, wobei man beispielsweise mit den Rückstoßimpulsen der Protonen ohne weiteres sämtliche Impulsakzeptanzen der Spektrometer, insbesondere den über der Einschussenergie des Beschleunigers liegenden Maximalimpuls von Spektrometer B, erreicht.

Da für Kalibrationszwecke die Kenntnis des Targetorts wichtig ist, eignet sich das ausgedehnte Flüssig-Wasserstoff-Target nicht. Das Wasserfall-Target [Voe82] ist wegen seines Aufbaus mit Schutzathmosphäre zu groß, um ausreichend bewegt werden zu können. Entsprechend wurde ein neues, kompaktes flaches Target entworfen [Ber00], bei dem Wasser durch zwei dünne, auf 0.5 mm Abstand gehaltene Havarfolien gepumpt wird. Auf den beweglichen Targetschlitten montiert [Fri95], lässt sich das Target 100 mm in Strahlrichtung bewegen und damit die volle Akzeptanz der Spektrometer abdecken. Der Aufbau ist in Abb. 3.2 zu sehen. Die Wasserzu- und rückleitungen sind in Spiralen aufgewickelt, um die Beweglichkeit des Targets trotz



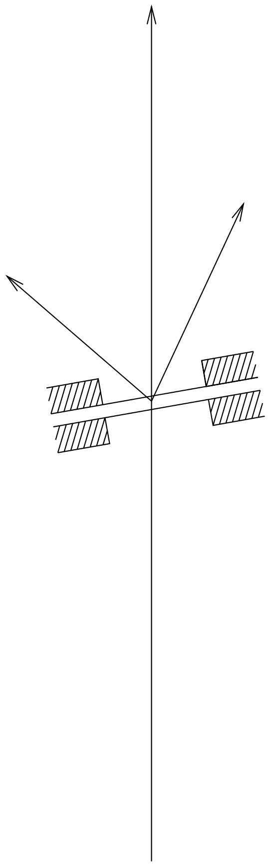


Abb. 3.2: Wasser-Eichtarget, das speziell für Kalibrationsmessungen entwickelt wurde. Die Vakuum-Steukammer ist hier für die Installation entfernt. Links im Hintergrund ist das mit einem Schutzblech versehene Eintrittsfenster von Spektrometer A, rechts oben der Anfang der Exit-Beamline zu sehen.

der recht starren Schläuche zu gewährleisten. Das Target ist leicht in Richtung von Spektrometer A geneigt, damit dort etwas größere Winkel erreicht werden können, wie der rechten Skizze zu entnehmen ist.

Eines der untersuchten Probleme der Spektrometeroptik sind die Sättigungseffekte in Spektrometer A bei hohen Impulsen (s. Abb. 3.3) mit Protonen aus der Reaktion $e(p, e'p')$. Die notwendige genaue Kenntnis des Protonimpulses wird durch Berechnung allein aus den Energien von ein- und auslaufendem Elektron (ohne Kenntnis über die Winkel der Teilchen) erreicht. In Abhängigkeit vom dispersiven Winkel θ kommt es zu einer parabelförmigen Struktur. Im Zuge der mit oben beschriebenem Eichtarget genommenen Daten wurde für Spektrometer A eine neue Rückrechnungsmatrix für hohe Felder erzeugt [Pos00].

Für die Saclay-Analyse wurde eine parabolische Funktion an den dargestellten Verlauf für verschiedene Impulseinstellungen angepasst und damit das Sättigungsverhalten parametrisiert. Man führt den wesentlichen Teil der Koordinaten-Rückrechnung mit der herkömmlichen Matrix durch, welche in allen Koordinaten bis zur 5. Ordnung korrigiert, und wendet dann eine kleine, referenzimpulsabhängige Matrix zur Nachiteration an, die nur Elemente bis zur 2. Ordnung enthält. Dieses Verfahren

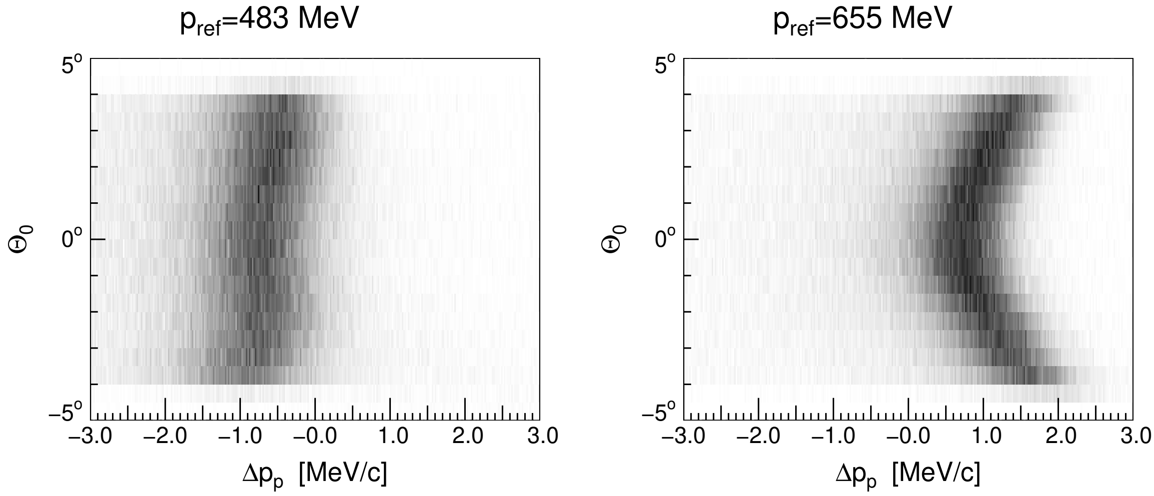


Abb. 3.3: Sättigungseffekt in den dispersiven Koordinaten von Spektrometer A. Dargestellt ist der im Protonspektrometer rekonstruierte Impuls bezogen auf den durch das Elektronspektrometer berechenbaren Impuls. Links wird der Impuls bei einer moderaten Referenzimpuls-Einstellung gut rekonstruiert, rechts, bei maximalem Referenzimpuls, ist eine starke Abhängigkeit vom dispersiven Winkel erkennbar.

ist kompakter als die Bestimmung mehrerer neuer Matrizen im Sättigungsbereich. Allerdings wurde noch nicht untersucht, ob es eine gleichwertige Alternative zur Beschreibung der Magnetoptik mit Sättigungseffekten darstellt.

3.4 Das Kryotarget

Von den Besonderheiten bei der Benutzung des Kryotargets werden hier zwei Aspekte erwähnt:

- Wie bei der Analyse der Eichdaten des Protonpolarimeters herausgefunden wurde (C. Bohinc, [Pos00]), bildet sich auf dem 20 K kalten Target ein nicht vernachlässigbarer Niederschlag, auf dessen Zusammensetzung im Zusammenhang mit den beobachteten Untergrundereignissen noch einmal eingegangen wird. Vergleiche von analysierten Daten und Monte-Carlo-Simulation haben für die VCS-Daten ergeben, dass sich verschiedene Aufstreu- und Energieverlusteffekte mit einer Eisdicke von 0.35 mm Wasser erklären lassen. Andere Experimente geben ähnliche Werte an; dabei zeigt sich, dass die Eisdicke dicker wird mit schlechterem (glücklicherweise immer mitprotokollierten) Streukammervakuum. In Abb. 3.4 ist ein ca. 4mm dicker Eismantel, wie er sich bei schlechtem Vakuum bildet, erkennbar.

- Während der Strahlzeit im April 1997 war ein Weggeber-Potentiometer der Fahrmimik des Kryotargets defekt, und entsprechend musste das Kryotarget im folgenden von Hand und per Auge in Position gebracht werden. In der späteren Analyse der Daten hat sich dann herausgestellt, dass die leichten Variationen der Targetposition[4] einen so großen Fehler in der Datenanalyse verursachten, dass

[4]Eine Bewegung des Kryotargets aus und wieder in den Strahl war in mindestens täglichen Abständen nötig, um mit einem Leuchtschirm die Strahlposition zu kontrollieren

die betroffenen Daten mehr systematischen Fehler als Gewinn an statistischer Genauigkeit bewirkten. Sie wurden daher schließlich ganz verworfen. Einige Kinematiken haben damit nur etwas mehr als die Hälfte der geplanten Statistik erreicht.

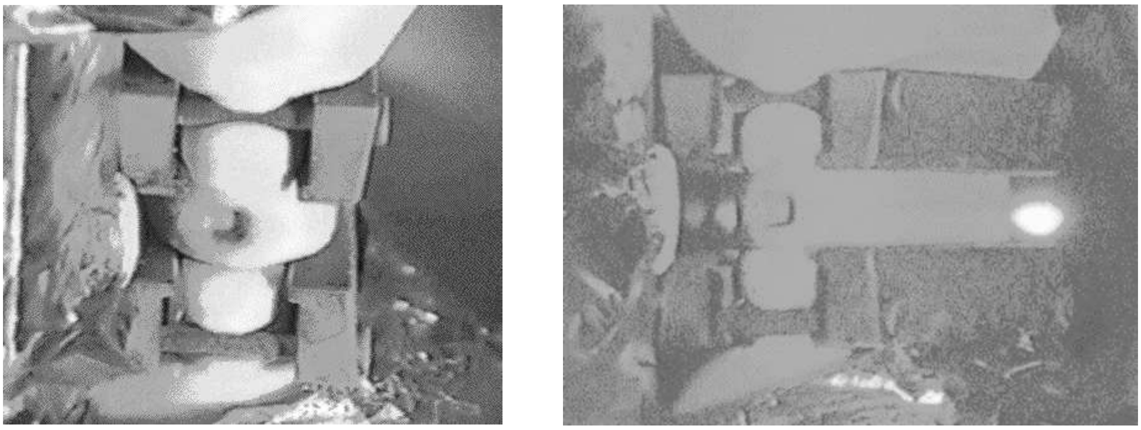


Abb. 3.4: Front- und Seitenansicht der Kryozelle mit Eismantel, der sich bei Betrieb in schlechtem Vakuum gebildet hat (Beispiel Januar 2000). Vorne erkennt man die rechteckige Einbuchtung, die der gewedelte Elektronenstrahl durch „Wegschmelzen" des Eises erzeugt.

3.5 Ereignisidentifikation

Zur Identifikation der echten Ereignisse wird zunächst die Koinzidenzzeit zwischen Elektronen- und Protonenspektrometer betrachtet. Nach Korrektur der Flugzeit der Teilchen in den Spektrometern liegen die echten Koinzidenzen in einem scharfen Pik mit einer Halbwertsbreite von etwa 800 ps. Bei der untersuchten Reaktion werden zusätzlich Koinzidenzen von Protonen mit negativen Pionen beobachtet, die aus den Targetwänden stammen. Diese werden sowohl durch den Schnitt auf den inneren Bereich des Targets als auch durch Fehlen des Cherenkov-Signals herausgefiltert.

Weiterhin wird die exklusive Reaktion

$$e + p \to e' + p' + \gamma \tag{3.1}$$

über die Massenbilanz der detektierten Teilchen, die das nicht nachgewiesene Photon identifiziert, festgelegt:

$$M_X^2 = (e + p - e' - p')^2 = (\Delta E)^2 - (\Delta\vec{p})^2 \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.2}$$

In Abb. 3.6 ist für zwei Settings am M_X^2-Spektrum die Wirkung der angewandten Schnitte gezeigt. Hier sei betont, dass die rekonstruierte Größe die fehlende Masse *zum Quadrat* ist; da die Verteilung um $M_X^2 = 0$ herum liegt, ist ein Bestimmen der Quadratwurzel nicht sinnvoll, wie es beispielsweise in der Pion-Schwellenproduktion üblich ist. Um die Breite der rekonstruierten Piks zu vergleichen, muss man

$$\Delta M_X \approx \frac{\Delta M_X^2}{2M_X} \tag{3.3}$$

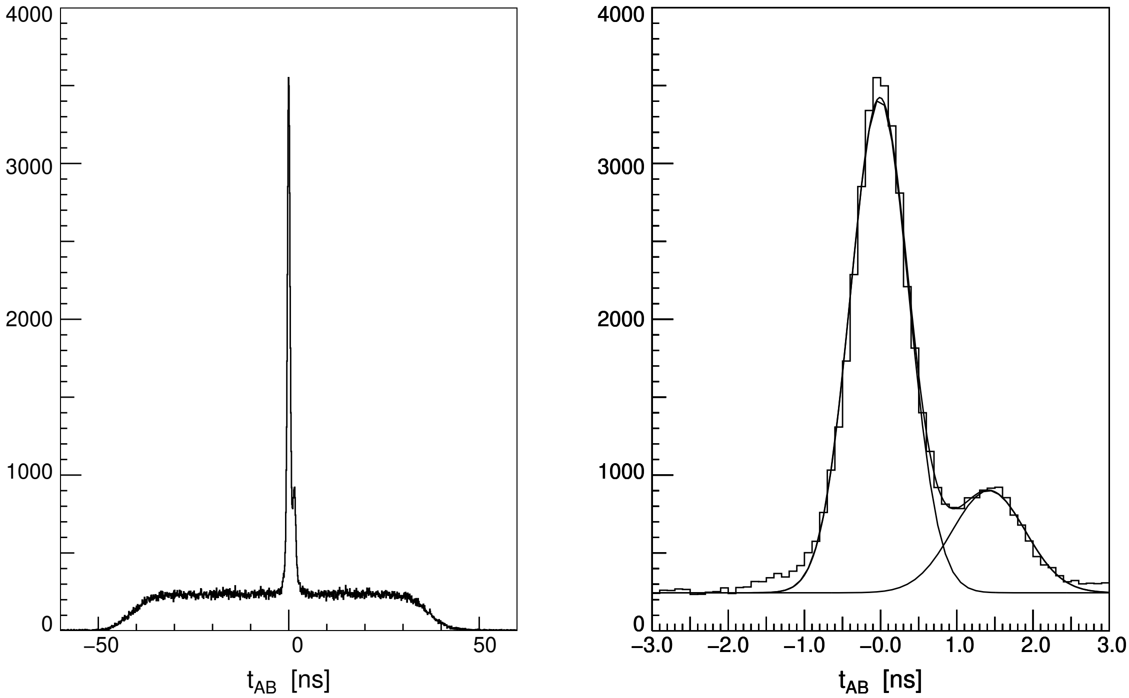


Abb. 3.5: Flugzeitkorrigiertes Koinzidenzzeitspektrum für die Daten bei q'=90 MeV. Da hier weder, wie in der endgültigen Analyse, auf den inneren Bereich der Targetzelle geschnitten noch Koinzidenz mit dem Cherenkov-Signal verlangt wurde, sind auch noch Koinzidenzen von Protonen mit negativen Pionen zu sehen, die wegen ihrer längeren Flugzeit gegenüber Elektronen verschoben sind.

beachten. Die beobachtete Breite $\Delta M_\gamma^2 \approx 300$ MeV^2 ist entsprechend verträglich mit einer Auflösung $\Delta m_{\pi^0} \approx 1.2$ MeV [Dis96]. Abb. 3.6 kann man entnehmen, dass die ggf. auch in der Akzeptanz liegenden Pionen-Ereignisse, die tatsächlich etwa die gleiche Breite ΔM_X^2 haben wie die Photon-Ereignisse, deutlich von letzteren getrennt sind.

Für die Diskussion der weiteren beobachteten Effekte werden die zweidimensionalen Spektren ΔE-Δp (Abb. 3.9) betrachtet. Die erwarteten Ereignisse der Reaktion 3.1 liegen auf der Winkelhalbierenden ΔE=$|\Delta p|$. In Abb. 3.9 rechts kann man zusätzlich den Pion-Konkurrenzprozess gemäß $|\Delta p| = \sqrt{\Delta E^2 - m_{\pi^0}^2}$ sehen.

Für das Setting zur kleinen Photonenergie q'=33.6 MeV (Abb. 3.9 links) stellt man einen starken Untergrund im unphysikalischen Bereich $M_X^2 < 0$ (oberhalb der Winkelhalbierenden) fest. In diesem Untergrund kann man eine Reihe von Prozessen identifizieren; die zugehörigen apparativen Details sind in Figur 3.7 skizziert. Zunächst sind zwei prominente, praktisch vertikale Linien bei $\mathit{\Delta E} \approx 12$ und 18 MeV erkennbar, die bei Schnitt auf das Innere der Targetzelle verschwinden und durch Reaktionen an der Targetwand entstehen. Sie können eindeutig identifiziert werden mit den dominanten quasielastischen Reaktionen an ^{16}O,

$$^{16}\mathrm{O}(e,e'p)^{15}\mathrm{N} \quad (\tfrac{1}{2}^-) \qquad \mathit{\Delta E} = 12.1 \text{ MeV}, \tag{3.4}$$

$$^{16}\mathrm{O}(e,e'p)^{15}\mathrm{N}^* \quad (\tfrac{3}{2}^-) \qquad \mathit{\Delta E} = 18.4 \text{ MeV}, \tag{3.5}$$

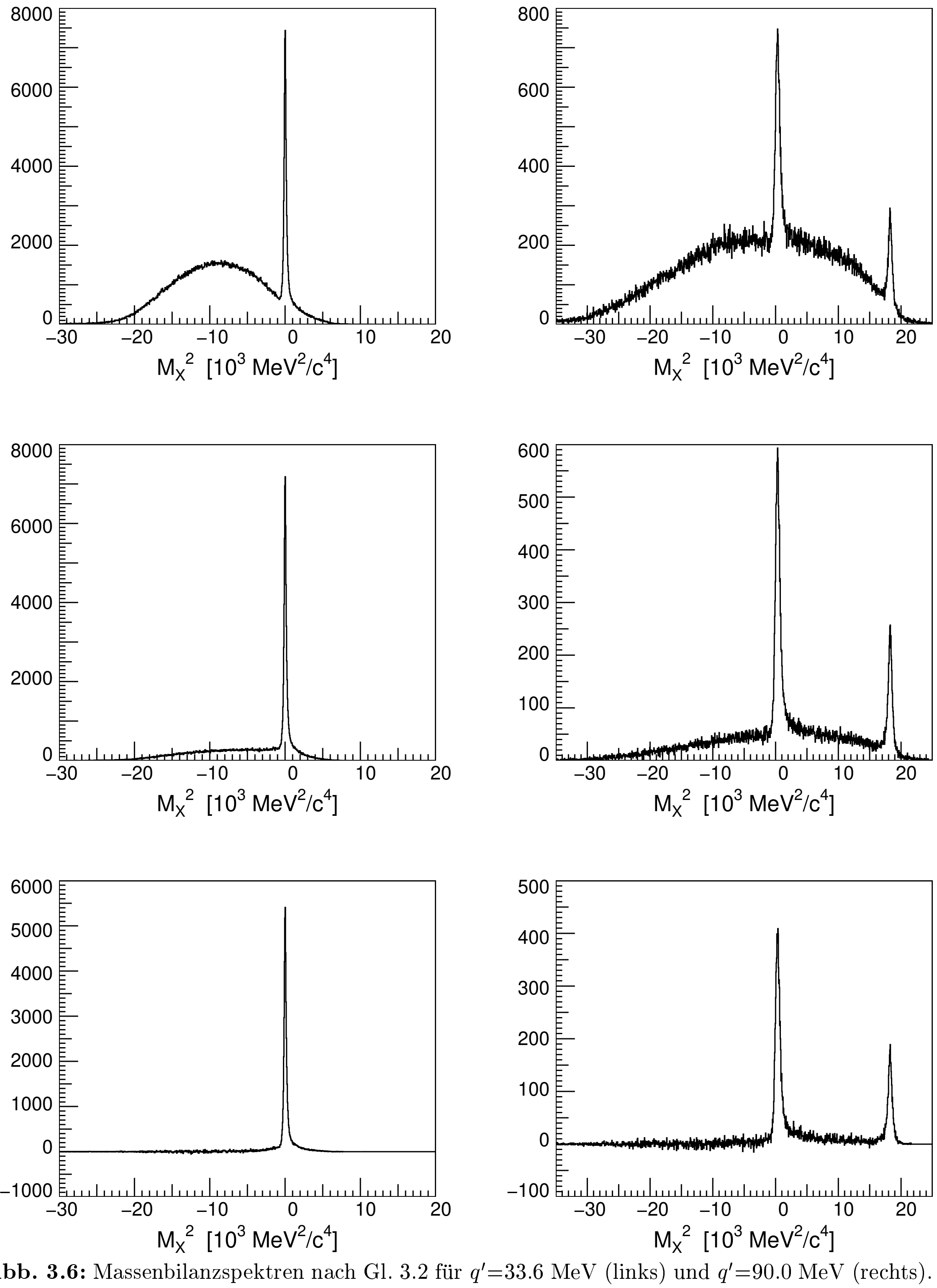


Abb. 3.6: Massenbilanzspektren nach Gl. 3.2 für q'=33.6 MeV (links) und q'=90.0 MeV (rechts). In den obersten beiden Graphen sind die Rohspektren abgebildet, die mittleren Graphen zeigen die Wirkung des Koinzidenzzeitschnittes, und ganz unten sind sowohl sämtliche Schnitte angebracht als auch der Untergrund der zufälligen Koinzidenzen abgezogen.

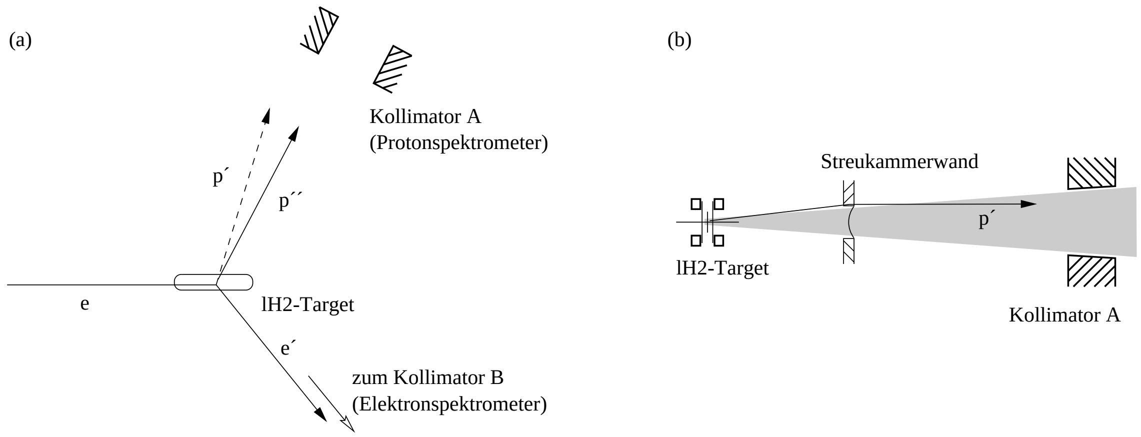


Abb. 3.7: Qualitative Darstellung der Untergrundprozesse in Targetnähe
(a) Target- und Kollimatoranordnung *von oben* betrachtet und Teilchenbahnen von einlaufendem Strahl (e), gestreutem Elektron (e'), elastisch rückstoßendem Proton (p') und nachgestreutem Proton (p"). Während die elastische Kinematik über die Winkelakzeptanz des Protonspektrometers weggeschnitten wird, können die Protonen nach einer weiteren Streuung im Target oder an den Targetwänden in den akzeptierten Bereich gelangen.
(b) *Seiten*ansicht der vertikalen Winkelakzeptanz des Protonspektrometers. Durch die viel zu enge vertikale Auslegung des Kaptonfensters in der Streukammer-Aluminiumwand kommt es zu Rückstreuung in die Akzeptanz des Spektrometers.

die entsprechenden Spektren sind aus der Messung dieser Reaktionen bekannt [Leu94]. Die beobachteten Werte für ΔE ergeben sich aus der Bindungsenergie des Protons und der Anregungsenergie des Restkerns; die kinetische Energie des Rückstoßkerns spielt bei den beobachteten Rückstoßimpulsen praktisch keine Rolle, und deshalb verlaufen die Linien fast senkrecht. Die beobachtete leichte Krümmung ist jedoch mit dem erwarteten Zusammenhang

$$\Delta E_{kin} = \frac{\Delta p^2}{2M} \quad \Big(= 0.76 \text{ MeV} \quad \text{bei } \Delta p = 150 \text{ MeV/c und } M = M_{^{16}\mathrm{O}} \Big) \tag{3.6}$$

verträglich. Eine genauere Behandlung muss hier nicht vorgenommen werden, da diese Ereignisse ohnehin bei Schnitt auf das Innere des Targets aussortiert werden.

Da die Targetwand selbst keinen Sauerstoff enthält, muss der Niederschlag am Target stark sauerstoffhaltig sein und ist dadurch mit großer Wahrscheinlichkeit als gefrorenes Wasser identifiziert[5].

Die Linien bei $\Delta E \approx 0$ und der bis zu etwa $\Delta E \approx 50$ MeV, hauptsächlich bei $|\Delta p| > \frac{4}{3}\Delta E$ verlaufende Untergrund bleiben jedoch bei allen angewendeten Schnitten auf gültige Ereignisse bestehen, sie beruhen also auf echten Koinzidenzen *im* Target. Dieser Untergrund war ein Schwerpunkt der ersten Analysen des Experiments. Bei einer ersten Testmessung für Daten mit $q' = 21$ MeV wurde gesehen, dass sich der

[5] Der Nachweis dieses Prozesses zeigt, dass sich auch dort, wo die Elektronen durch die Targetwand treten, Niederschlag bilden muss, obwohl dort sehr viel weniger verliegt als am sonstigen Target, vgl. Abschnitt 3.4.

betrachtete Untergrund zu kleineren Photonenergien, also in die Nähe der elastischen Kinematik, so verstärkt, dass er die Messung unmöglich macht, da praktisch keine Zählrate mehr in den Ereignissen auf der Winkelhalbierenden zu erzielen war.

Ein Erklärungsversuch [Lhu97] war, dass die elastisch gestreuten Protonen an den Wänden des Schwermetall-Kollimators zurückgestreut werden. Denn wegen der grossen Impulsakzeptanz des Elektronspektrometers wurden dort auch Elektronen aus elastischer e-p-Streuung registriert, viele davon in Koinzidenz mit dem betrachteten Untergrund. Dieses legte nahe, im Elektronspektrometer einen Schnitt auf inela-

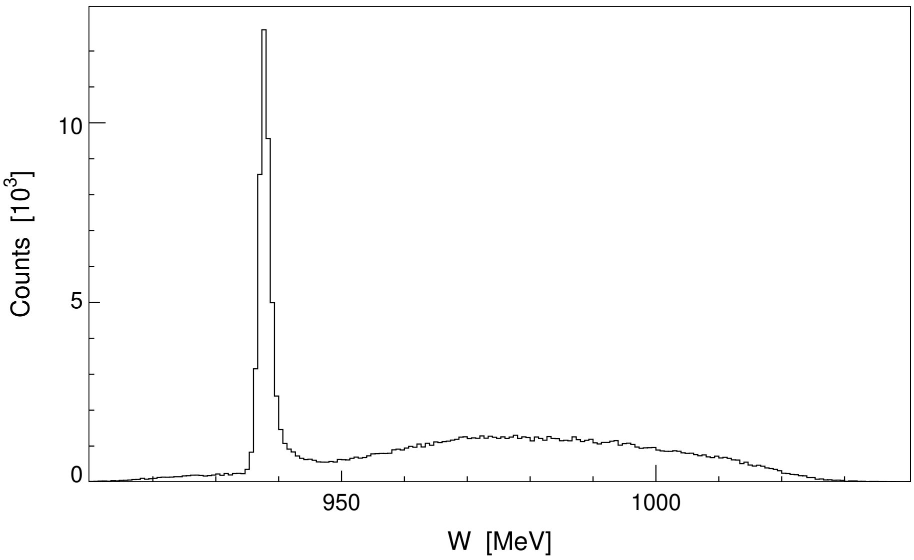


Abb. 3.8: Schwerpunktsenergie W bei q'=33.6 MeV. W berechnet sich ausschließlich aus der Information des Elektronarms. Obwohl für dieses Spektrum auf echte Koinzidenz mit dem Protonenarm geschnitten wurde und Protonen aus elastischer Streuung nicht in der Akzeptanz des Spektrometers liegen, ist ein prägnanter Pik elastischer Streuung $W = M_p$ vorhanden. Erklärung s. Text.

stische Ereignisse anzubringen, den man durch $W > M_p + 10$ MeV erreicht (vgl. Abb. 3.8), ohne die gewünschten Ereignisse mit wegzuschneiden. Hier ergeben sich zwei Probleme:

- Streuung am Kollimator konnte in einer Simulation nicht die Intensität und die Form des Untergrundes wiedergeben; vielmehr sollte danach die Intensität dieses Effektes vernachlässigbar klein sein.

- Der Schnitt in der Schwerpunktsenergie W beseitigt zwar die identifizierten elastisch gestreuten Elektronen, aber zu den wie auch immer zustandekommenden Koinzidenzen wird es auch den Strahlenschwanz der auslaufenden Elektronen geben, der dann unerkannt unter den echten Ereignissen liegt. Daher ist ein Verständnis der beobachteten Ereignisse wichtig.

Zunächst konnte in der eingehenden weiteren Analyse im Rahmen dieser Arbeit die Herkunft der fast senkrecht verlaufenden Linien in Abb. 3.9 (links) bei $\Delta E \approx 0$ geklärt werden: Es handelt sich um elastische Streuung, bei der das außerhalb

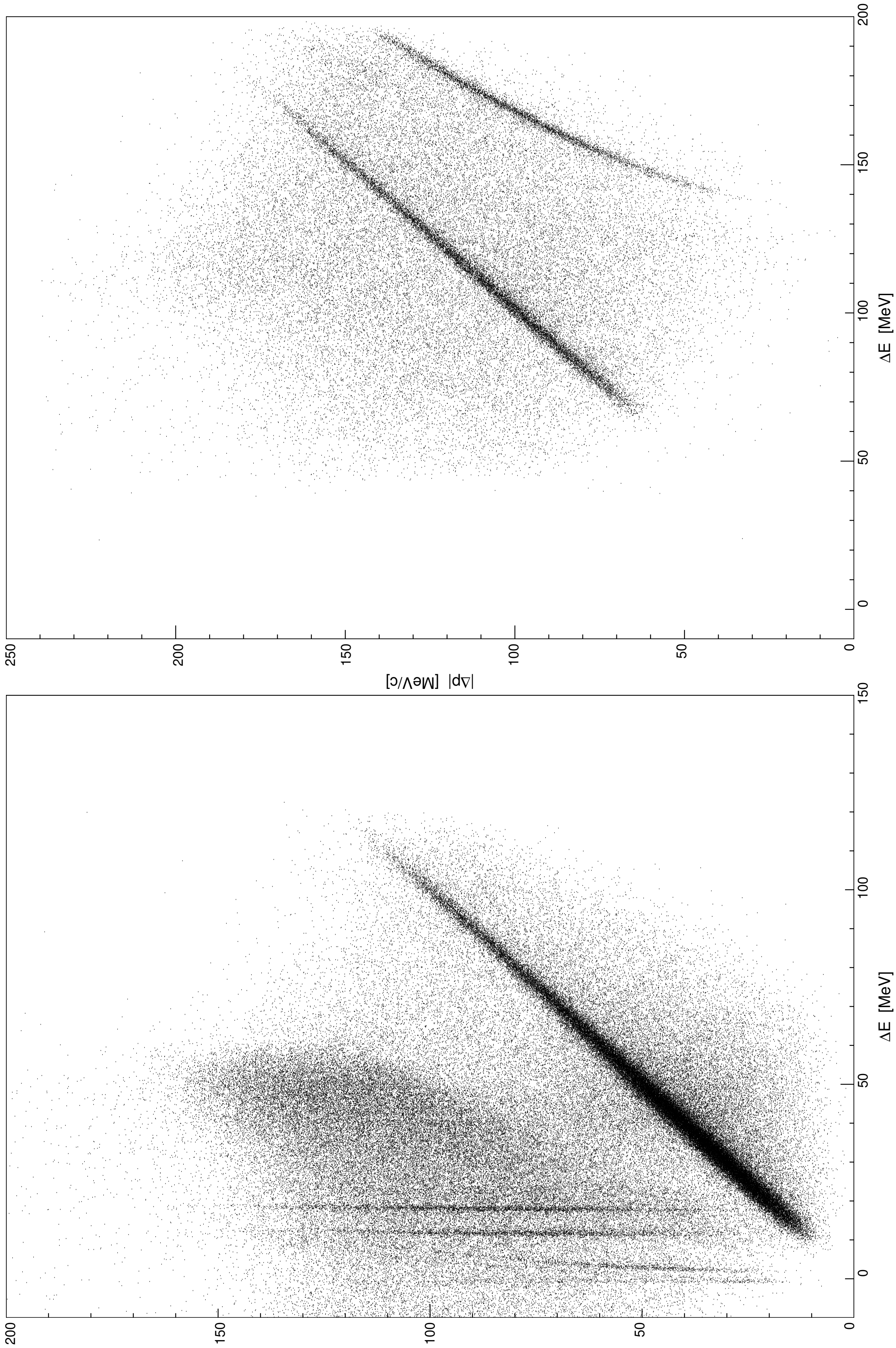


Abb. 3.9: ΔE-Δp-Rohspektrum für die Daten bei q'=33.6 MeV (*links*, Abbildung um 90° drehen!) und bei q'=90.0 MeV (*rechts*). In den Rohdaten für q'=33.6 MeV ist ein starker Untergrund im „unphysikalischen“ Bereich $|\Delta p| > \Delta E$ erkennbar, bei Rohdaten für q'=90.0 MeV ist die Konkurrenzreaktion der π^0-Produktion enthalten.

der Akzeptanz des Spektrometers auslaufende Proton (vgl. Abb. 3.7 a) an einem weiteren Proton des Targetmaterials oder an einem Kern der Havar-Targetwand (hauptsächlich Kobalt) eine zweite Streuung erfährt. Dabei kann das Proton seinen Winkel so ändern, dass es in die Akzeptanz des Protonspektrometers fällt:

$$p' + p_2 \;\rightarrow\; p'' + p_2' \qquad (3.7)$$
$$p' + \mathrm{Co} \;\rightarrow\; p'' + \mathrm{Co} \qquad (3.8)$$

Dabei ändert es bei Δp=100 MeV/c seine Energie um ΔE=5.3 MeV bei Reaktion (3.7) bzw. 0.1 MeV bei (3.8). Der Verlauf dieser Linien wurde durch die Simulation bestätigt. Die Linie gemäß (3.8) verläuft bei ΔE=0 praktisch senkrecht nach oben, diejenige nach (3.7), außerordentlich schwach[6], zeigt deutlich die Krümmung gemäß Gl. (3.6) für $M = M_{\text{Proton}}$. Parallel zu dieser Linie verläuft in konstantem Abstand von ΔE = 2.2 MeV eine stärker ausgeprägte Linie. Diese gehört zum quasielastischen Aufbruch von Deuteronen,

$$^2\mathrm{H}(e,e'p)n, \qquad \Delta E_{\text{Aufbruch}} = 2.2 \text{ MeV}. \qquad (3.9)$$

Diese Linie zeigt eine Krümmung gemäß Gl. (3.6) für $M = M_{\text{Neutron}}$ und deshalb praktisch den gleichen, um 2.2 MeV verschobenen Verlauf wie diejenige von Reaktion (3.7). Damit liegt eine klare Signatur für die Deuteriumverunreinigung im Wasserstofftarget[7] vor.

Die Stärke dieser scharfen Linien ist recht klein gemessen am weiteren Untergrund, welcher im ΔE-Δp-Spektrum diffus im Bereich $|\Delta p| > \frac{4}{3}\Delta E$ verteilt ist. Einen deutlichen Hinweis für die Ursache von solchem Untergrund hat sich aus einer Beobachtung der MIT-Gruppe bei ihrem Experiment an ^{3}He ergeben, die eindeutig Rückstreuung der auslaufenden Teilchen in den extrem nah an der Spektrometerakzeptanz liegenden Aluminiumwänden der Streukammer (vgl. Abb. 3.7 b) nachweisen konnte. Zwischen den Teilchenbahnen, die vertikal gerade noch in der Akzeptanz liegen, und diesen Wänden war nur ein Spiel von etwa 1 bis 2 mm. Daher kommt es in einer analogen Reaktion zu (3.7) zu den beobachteten Ereignissen. Er wurde für das VCS-Experiment bisher nicht in einer Simulation reproduziert, daher kann auch keine definitive Aussage getroffen werden, ob der verwendete Schnitt $|\Delta p| < \frac{4}{3}\Delta E$ wirklich den gesamten Untergrund entfernt.

Die verantwortliche Streukammer ist inzwischen durch eine mit größeren Öffnungen ersetzt.

[6]In der Graphik 3.9 (a) ist sie trotzdem deutlich zu sehen, wenn man von schräg unten auf die Verteilung schaut

[7]Diese ist aus anderen Überlegungen zu $< 10^{-4}$ abgeschätzt und bei der vorliegenden Analyse vernachlässigt (beispielsweise der Einfluss auf die Luminosität)

Kapitel 4

Extraktion der Polarisierbarkeits-Strukturfunktionen

Die aus den Daten gewonnenen absoluten Koinzidenzwirkungsquerschnitte

$$\frac{d^5\sigma}{(d\mathrm{k}'d\Omega_e)_{lab}(d\Omega_\gamma)_{cm}}$$

sind in Tab. 4 zusammengefasst und in Abb. 4.1 dargestellt. Die Kinematik ist jeweils festgelegt durch die Eigenschaften von einlaufendem (virtuellen) und auslaufendem (reellen) Photon. Für das virtuelle Photon wurden in sämtlichen Einstellungen der 3-Impuls q im Photon-Proton-Schwerpunktsystem und der Polarisationsparameter ε konstant gehalten,

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= 600 \text{ MeV/c}, \\ \varepsilon &= 0.62. \end{aligned}$$

Für das reelle Photon wurde für den Impulsbetrag q′ und die Richtung[1] (ϑ_γ, φ) der Wertebereich

$$\begin{aligned} \mathrm{q}' &= (\ 33.6 \pm 15) \text{ MeV/c}, \\ & (\ 45.0 \pm 15) \text{ MeV/c}, \\ & (\ 67.5 \pm 15) \text{ MeV/c}, \\ & (\ 90.0 \pm 15) \text{ MeV/c}, \\ & (111.5 \pm 15) \text{ MeV/c}, \\ \vartheta_\gamma &= -150^\circ \text{ bis } +5^\circ \\ \varphi &= 0^\circ \pm 22^\circ \quad \text{(Messung } \textit{in} \text{ der Streuebene)} \end{aligned}$$

abgedeckt. Die entsprechenden Kinematiken im Laborsystem sind in Tabelle G.1 im Anhang G zusammengestellt.

4.1 Anpassung der Polarisierbarkeits-Parameter

An die gemessenen Wirkungsquerschnitte, im folgenden kurz mit σ_{exp} bezeichnet, wurden gemäß dem Ansatz

$$\sigma_{exp} = x\,\{\sigma_{BH+Born} + \sigma_{LL}\cdot(P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon) + \sigma_{LT}\cdot P_{LT}\} \tag{4.1}$$

die drei freien Parameter x, $(P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon)$ und P_{LT} angepasst. Die Größen $\sigma_{BH+Born}$, σ_{LL} und σ_{LT} ergeben sich in bekannter Weise nach den Gln. (1.21) bis (1.23) aus

[1] Zur Erfassung des Raumwinkels aus der Streuebene hinaus s. Diskussion am Ende von Kapitel 1, insbes. Abb. 1.5

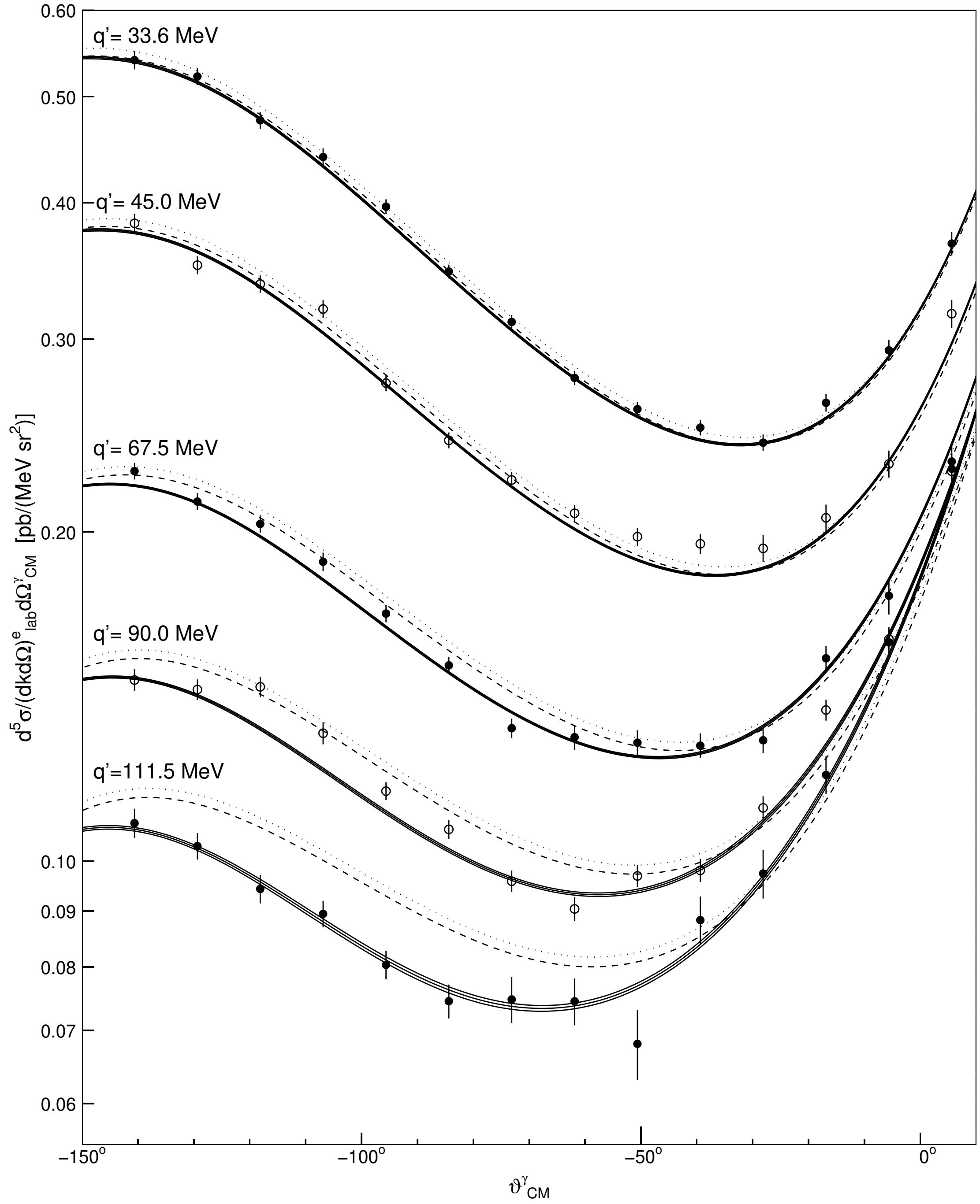


Abb. 4.1: Die gemessenen Wirkungsquerschnitte der Reaktion $e + p \rightarrow e' + p' + \gamma$ als Funktion des Winkels ϑ_γ (Photon-Proton-Schwerpunktsystem) in logarithmischer Darstellung. Die Messpunkte sind zur besseren Unterscheidung für verschiedene q$'$ abwechselnd ausgefüllt und offen dargestellt. *Gestrichelt* und *gepunktet* ist der Verlauf des Wirkungsquerschnittes für die bekannten Bethe-Heitler- und Born-Beiträge eingezeichnet; er wurde mit den Formfaktoren nach [MMD96] (*gestrichelt*) bzw. nach [Höh76] (*gepunktet*) berechnet. *Durchgezogen* ist der Verlauf des Wirkungsquerschnittes bei Berücksichtigung der extrahierten Polarisierbarkeiten. Das eingezeichnete Fehlerband ist mit den statischen Fehlern, wie in Tab. 4.2 angegeben, berechnet.

	$q' = 33.6$		$q' = 45.0$		$q' = 67.5$		$q' = 90.0$		$q' = 111.5$	
$\vartheta_{\gamma\gamma}$	σ	$\Delta\sigma$	σ	$\Delta\sigma$	σ	$\Delta\sigma$	σ	$\Delta\sigma$	σ	$\Delta\sigma$
-140.62	0.523	0.010	0.371	0.007	0.220	0.004	0.142	0.003	0.105	0.003
-129.38	0.505	0.009	0.339	0.006	0.206	0.004	0.139	0.003	0.100	0.003
-118.12	0.460	0.008	0.326	0.006	0.197	0.004	0.140	0.003	0.091	0.003
-106.88	0.426	0.008	0.310	0.006	0.182	0.004	0.127	0.003	0.087	0.002
-95.62	0.384	0.006	0.265	0.005	0.163	0.003	0.112	0.002	0.078	0.002
-84.38	0.335	0.005	0.235	0.004	0.146	0.003	0.103	0.002	0.072	0.003
-73.12	0.301	0.004	0.216	0.004	0.128	0.003	0.093	0.002	0.072	0.004
-61.88	0.268	0.004	0.201	0.004	0.126	0.003	0.087	0.002	0.072	0.004
-50.62	0.251	0.004	0.192	0.004	0.124	0.003	0.094	0.002	0.066	0.005
-39.38	0.241	0.004	0.189	0.004	0.123	0.003	0.095	0.002	0.085	0.004
-28.12	0.234	0.004	0.187	0.005	0.125	0.003	0.108	0.003	0.094	0.005
-16.88	0.254	0.005	0.199	0.006	0.148	0.004	0.133	0.003	0.116	0.005
-5.62	0.284	0.006	0.223	0.006	0.169	0.007	0.154	0.003	0.153	0.005
5.62	0.355	0.009	0.306	0.009	0.224	0.007	0.220	0.004	0.221	0.007

Tab. 4.1: Experimentelle Wirkungsquerschnitte in pb/(MeV sr^2). $\Delta\sigma$ bezieht sich nur auf den statistischen Fehler.

den kinematischen Variablen, für die die Messwerte σ_{exp} bestimmt wurden. Die dabei eingehenden elastischen Formfaktoren des Protons wurden gemäß [MMD96] berechnet.

Die Variable x wurde zur Untersuchung des Einflusses der Absolutnormierung auf die Extraktion der Generalisierten Polarisierbarkeiten eingeführt. Zur Unsicherheit der Absolutnormierung tragen folgende Effekte bei, die allein durch die in den vorliegenden Daten enthaltene Information nicht eindeutig voneinander getrennt werden können:

- Verschiedene Parametrisierungen der *elastischen Formfaktoren des Protons* ergeben unterschiedliche Werte im hier benötigten Bereich $Q^2 \approx 0.33$ GeV^2. Die Unterschiede machen sich allerdings bei den hier gemessenen Wirkungsquerschnitten im wesentlichen nur als globaler Faktor bemerkbar, wie in Abb. 4.1 für zwei Parametrisierungen erkennbar ist. Die unterschiedlichen Ergebnisse spiegeln die Tatsache wider, dass die Formfaktoren, die über Messungen des elastischen Wirkungsquerschnitts bestimmt werden, mit einem Fehler im Bereich von etwa 1% behaftet sind. Die im Rahmen dieses Experiments geplante präzise Messung des elastischen Formfaktors musste wegen der in Kapitel 2 behandelten Schwierigkeiten zu den Strahlungskorrekturen zunächst zurückgestellt werden.
- Die Strahlungskorrektur für den VCS-Prozess ist gemäß den Erläuterungen in Kapitel 2 nur mit einer Genauigkeit von etwa 2% (am Wirkungsquerschnitt) bekannt.
- Wie in Kapitel 3 ausführlich behandelt wurde, sind die Daten mit einer *experimentellen Unsicherheit* behaftet. Das Bestreben der vorliegenden Analyse lag

darin, sämtliche Effizienzkorrekturen und die Berechnung der Luminosität mit größtmöglicher Sorgfalt durchzuführen. Die verbleibende Unsicherheit aufgrund der Genauigkeit der einzelnen Korrekturen wird mit 2% abgeschätzt.

Die χ^2-Minimierung liefert das in Tab. 4.2 mit den (korrelierten) statistischen Fehlern angegebene Resultat, mit welchem der in Abb. 4.1 eingezeichnete Verlauf des Wirkungsquerschnitts unter Berücksichtigung der generalisierten Polarisierbarkeit des Protons berechnet wurde.

Die in der Anpassung (4.1) als freier Parameter angesetzte globale Normierung x wird in Abschnitt 4.3 nochmal angesprochen.

		$\chi^2/67 = 1.39$
$P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon$	P_{LT}	x
(24.0 ± 1.6) GeV^{-2}	(-4.6 ± 0.7) GeV^{-2}	0.984 ± 0.003

Tab. 4.2: Resultat der Anpassung der freien Parameter in Gl (4.1)

Die numerisch berechneten Fehlerellipsen für die Anpassung sind in Abb. 4.2 dargestellt. Es besteht eine starke Korrelation zwischen den extrahierten Strukturfunktionen.

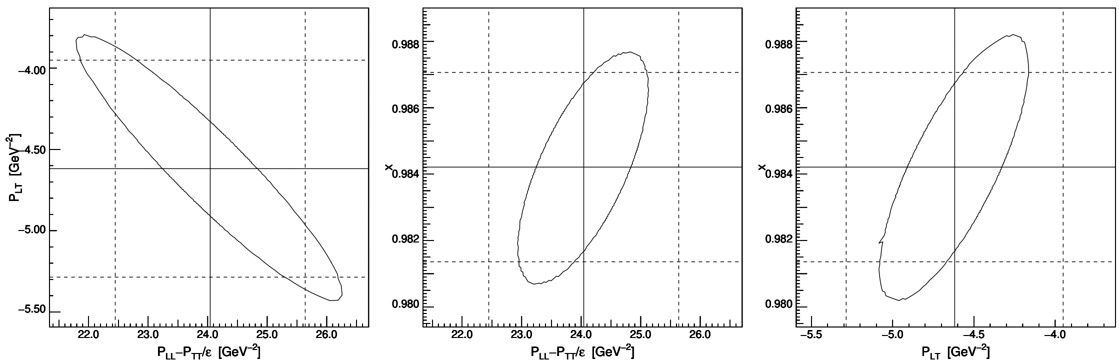


Abb. 4.2: Fehlerellipsen für die drei Paare der angepassten Parameter (der Verlauf der $\Delta\chi^2 = 1$-Ellipse wurde jeweils numerisch bestimmt). *Gestrichelt* sind die aus der Kovarianzmatrix errechneten Fehler eingezeichnet.

4.2 Abschätzung der systematischen Unsicherheit

Um ein Maß für den systematischen Fehler zu enthalten, wurden 2 Studien gemacht:

- Der Einfluss einer Änderung der Normierung um 1%. Hierbei werden die Strukturfunktionen mit fixiertem Parameter x in einem alternativen Ansatz (Abschnitt 4.3) angepasst, und zwar einmal mit dem optimalen Wert, und dann

$\Delta(P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon)$	ΔP_{LT}	
± 0.8 GeV^{-2}	± 1.1 GeV^{-2}	Normierung
± 4.1 GeV^{-2}	± 1.4 GeV^{-2}	Parametervariation

Tab. 4.3: Bestimmung des Beitrags zweier Ursachen systematischer Unsicherheit.

mit einer Variation um $\pm 1\%$. Die damit verbundene Änderung der extrahierten Strukturfunktionen wird als Maß für den mit der Normierung verbundenen systematischen Fehler genommen.

- Die Genauigkeit sämtlicher anderer in die Analyse eingehender Größen, wie die zentralen Impuls- und Winkeleinstellungen der Spektrometer, Position der Kollimatoren und des Targets. Zur Abschätzung des dadurch verursachten systematischen Fehlers wurde die Analyse mit zwei Parametersätzen durchgeführt, und zwar zunächst mit denjenigen Werten, die als Setz- bzw. Auslesewerte vorliegen, und dann mit einem im Rahmen der Genauigkeit, mit der die Parameter bekannt sind, variierten Parametersatz[2]. Hierbei wurden die Parameter in der Weise verändert, dass die experimentellen Verteilungen (wie die Massenbilanzspektren, vgl. Abb. 3.6) möglichst gut mit den simulierten Spektren übereinstimmen. Die Änderung des extrahierten Ergebnisses wird als Maß für die systematische Unsicherheit, die durch den Experimentaufbau bestimmt ist, angegeben.

Das Ergebnis der beiden Studien ist in Tabelle 4.2 dargestellt. Die beiden systematischen Fehler werden linear summiert. Zusammengefasst ergibt sich als Ergebnis der Messung

$$\begin{aligned} P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon &= (\ 24.0 \pm 1.6_{stat} \pm 4.9_{sys}\ )\ \mathrm{GeV}^{-2}\ , \\ P_{LT} &= (-4.6 \pm 0.7_{stat} \pm 2.5_{sys}\ )\ \mathrm{GeV}^{-2}\ . \end{aligned}$$

4.3 Alternative Auswertung

Bei Fixierung von x kann man die Datenpunkte verschiedener Photonenergie bei gleichem Winkel zusammenfassen und Ansatz 4.1 bezüglich der Strukturfunktionen linearisieren,

$$(\sigma_{exp}/x - \sigma_{BH+Born}) \cdot f \ = \ \Delta\mathcal{M}_0 \ = \ v_{LL} \cdot (P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon) + v_{LT} \cdot P_{LT}, \quad (4.2)$$

wobei f gemäß Gl. (1.21) die q'-Abhängigkeit $f \sim 1/\mathrm{q}'$ enthält und v_{LL} und v_{LT} gemäß Gl. (1.23) einzusetzen sind. Dies führt zu der prägnanten Darstellung des Polarisierbarkeiteffektes in Abb. 4.3. In Tabelle 4.4 sind die Ergebnisse der linearen Regression für verschiedene Werte x um den optimalen Wert angegeben.

Für den in der globalen Anpassung gefundenen optimalen Wert $x = 0.984$ ergeben sich die gleichen Werte für die Strukturfunktionen. Da allerdings durch das Zusammenfassen der Daten verschiedener Photonenergie Information über die Normierung

[2]private Mitteilung N. d'Hose

verlorengeht, führt die vergleichsweise große Variation von x um $\pm 1\%$ nur zu einer sehr kleinen Änderung in χ^2. Dies liegt daran, dass bei der Zusammenfassung der Daten diejenigen mit kleiner Photonenergie mit geringem Gewicht eingehen, da sie nur ein kleines experimentelles Signal im Verhältnis zum statistischen Fehler enthalten. Dem gegenüber wird in der globalen Anpassung an alle 70 Datenpunkte die Normierung gerade über die Daten mit kleiner Photonenergie mit dem sehr geringem statistischen Fehler $\Delta x = 0.003$ festgelegt.

x	$\chi^2/12$	$\chi^2/68$	$P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon$ [GeV^{-2}]	P_{LT} [GeV^{-2}]
0.974	1.620	1.457	24.90 $\pm$ 1.59	-5.83 $\pm$ 0.58
0.979	1.619	1.387	24.46 $\pm$ 1.59	-5.23 $\pm$ 0.58
0.984	1.621	1.363	24.04 $\pm$ 1.58	-4.64 $\pm$ 0.58
0.989	1.627	1.384	23.61 $\pm$ 1.57	-4.05 $\pm$ 0.57
0.994	1.637	1.450	23.20 $\pm$ 1.56	-3.47 $\pm$ 0.57

Tab. 4.4: Resultat der Anpassung bei verschiedenen festgelegten x. Das Minimum in χ^2 ist bei Anpassung aller Datenpunkte gemäß (4.1) ($70-2$ Freiheitsgrade, Spalte $\chi^2/68$) wesentlich ausgeprägter als nach Zusammenfassung der Daten verschiedener Energie gemäß (4.2) ($14-2$ Freiheitsgrade, Spalte $\chi^2/12$). Die angepassten Werte für die Strukturfunktionen sowie ihre Fehler sind in beiden Fällen gleich.

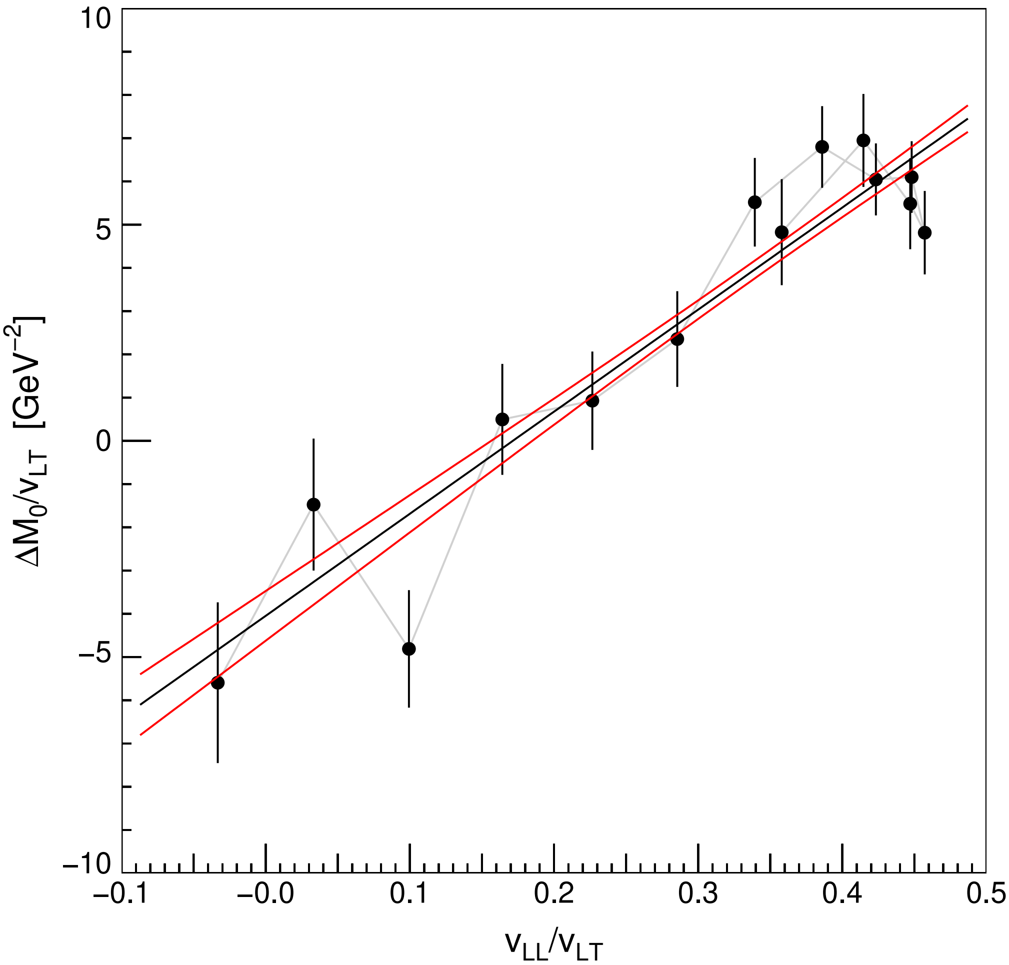


Abb. 4.3: Separation der Strukturfunktionen durch Zusammenfassung der Messpunkte bei verschiedener Photonenergie bei gleichem Winkel und Linearisierung der Winkelabhängigkeit. Mit der grauen Linie sind die Punkte in der Folge der Bins im Winkel ϑ^{γ}_{CM} (vgl. Abb. 4.1 bzw. Tab. 4) miteinander verbunden; der Punkt am linken Bildrand bei $v_{LL}/v_{LT} \approx -0.03$ entspricht dabei dem Winkel $\vartheta^{\gamma}_{CM} = 5.62°$.

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse des Experiments zur Messung der Virtuellen Comptonstreuung am Proton, das am Elektronenbeschleuniger MAMI in den Jahren 1996 und 1997 auf Vorschlag von N. d'Hose (Saclay) durchgeführt wurde. Eine Reihe von Beiträgen des Autors sind bereits in zwei abgeschlossene Dissertationen [Lhu97, Roc98] (Saclay) eingeflossen. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich im wesentlichen auf Neuerungen gegenüber dem Stand dieser Arbeiten und auf Ansätze allgemeinerer Art im Hinblick auf die Präzision von Elektronen-Streuexperimenten.

Es wurden die absoluten Koinzidenzwirkungsquerschnitte für Photon-Elektroproduktion am Proton über die Reaktion $p(e,e'p')\gamma$ bestimmt, wobei das reelle auslaufende Photon über die Rekonstruktion seines 4-Impulses aus den gemessenen anderen Teilchenimpulsen identifiziert wird, insbesondere also über seine invariante Masse $p_X^2 = 0$. Die Reaktion ist, anders ausgedrückt, der Bremsstrahlungs-Prozess zur elastischen Streuung. Explizit in seiner Winkelabhängigkeit gemessen wird dieser, wie in Kapitel 1 erläutert, im *rückwärtigen Winkelbereich* des reellen Photons vom Strahlungsbeitrag des Protons dominiert, so dass die Reaktion hier als „Virtuelle Comptonstreuung“ (VCS) einen Beitrag der Generalisierten Polarisierbarkeiten enthält. Dieser wurde in der vorliegenden Auswertung extrahiert. Das Resultat ist derzeit zur Veröffentlichung eingereicht [RFL00].

Die quantenelektrodynamischen Strahlungskorrekturen sind an dieser Stelle aus zweierlei Gründen Gegenstand eingehender Untersuchungen geworden. Zum einen muss der VCS-Prozess selbst einer etwa 20%igen Strahlungskorrektur unterzogen werden, bevor Abweichungen im Bereich einiger Prozent zweifelsfrei als Polarisierbarkeitseffekt identifiziert werden können; die Rechnungen hierzu (mit Beiträgen des Autors der vorliegenden Arbeit) sind in [Vdh00] zu finden. Zum anderen wird durch die Virtuelle Comptonstreuung das Bremsstrahlungsspektrum der elastischen Streuung mit den Beiträgen des Protons sehr genau unter geometrischen Bedingungen gemessen, wo bisher die theoretische Berechnung [MMT69] nicht experimentell überprüft worden war. Daher sind mit diesem Experiment auch die Strahlungskorrekturen zur elastischen Streuung wieder in das wissenschaftliche Interesse gerückt, wie Veröffentlichungen, die während der Fertigstellung dieser Arbeit erschienen sind [Ros99, MTj00], zeigen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde, in Anlehnung an die Arbeiten von t'Hooft und Veltman [tHV79], eine wesentliche Vereinfachung der Schreibweise der alt-ehrwürdigen Mo&Tsai-Formel [MMT69] erreicht, welche eine Diskussion und ein Verständnis der analytischen Form der verschiedenen Beitäge greifbarer erscheinen lässt. Die zuverlässige Beherrschung der Strahlungskorrekturen berührt direkt die Frage der Bestimmung der Formfaktoren des Protons aus Messungen des elastischen Wirkungsquerschnitts. Dieser Teil des im Rahmen dieser Arbeit anvisierten Forschungsprogramms ist mit der Behandlung der Strahlungskorrekturen nur zu einem vorläufigen Abschluss gekommen.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen dieser Arbeit lag in der Auswertung der ex-

	$P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon$	P_{LT}
Experiment	24.0 ± 1.6 ± 4.9	-4.6 ± 0.7 ± 2.5
ChPT[Knö97, Hem97]	26.3	-5.7
LSM[MeD96]	10.9	0.
ELM[Vdh96]	5.9	-1.9
CQM[GLT95, PSD00]	14.7	-4.5

Tab. 4.5: Das experimentelle Resultat im Vergleich mit theoretischen Rechnungen: Chirale Störungsrechnung (ChPT), lineares σ-Modell (LSM), effektive Lagrangedichte (ELM), Konstituenten-Quarkmodell (CQM).

perimentellen Daten.

Insbesondere wurde, auf Erkenntnissen aus [Dis90] und [Fri95] fußend, der Algorithmus zur Bestimmung der Teilchenspuren in den vertikalen Driftkammern verfeinert und eine bei Verwendung des Standard-Algorithmus auftretende Ineffizienz von typischerweise 5% (im Koinzidenzexperiment, diese Zahl ist abhängig von den verwendeten Schnitten) aufgeklärt. Die Ursache für die beobachtete Ineffizienz sind Signale in den Driftkammern, die zusätzlich zu den von der Teilchenspur direkt ausgelösten Signalen auftreten. Sie können mit Spuren von Sekundärteilchen erklärt werden. Mit der entwickelten Verfeinerung können bei etwa der Hälfte der betroffenen Ereignisse die richtigen Teilchenspuren zurückgewonnen werden; bei der vorliegenden Analyse wurde ein aus diesen Erkenntnissen abgeleitetes Korrekturverfahren verwendet.

Weiterhin ist, insbesondere durch die kinematische Nähe des untersuchten Prozesses zur elastischen Streuung mit ihrem um einige Größenordnungen größerem Wirkungsquerschnitt, der auftretende Untergrund und seine Abtrennung von den echten Ereignissen ein wichtiger Bestandteil der Datenanalyse. Zahlreiche Rück- und Aufstreuungseffekte im und um das Target konnten identifiziert und in ihrer Auswirkung auf die Datenanalyse untersucht werden.

Aus den gemessenen Koinzidenzwirkungsquerschnitten wurden die Polarisierbarkeits-Strukturfunktionen des Protons bei Impulsübertrag q=600 MeV/c und Polarisationsparamter $\varepsilon = 0.62$ des virtuellen Photons bestimmt zu

$$\begin{aligned} P_{LL} - P_{TT}/\varepsilon &= (\ 24.0 \pm 1.6_{stat} \pm 4.9_{sys}\ )\ \mathrm{GeV}^{-2}\ , \\ P_{LT} \qquad &= (-4.6 \pm 0.7_{stat} \pm 2.5_{sys}\ )\ \mathrm{GeV}^{-2}\ . \end{aligned}$$

Die bei der Extraktion der Strukturfunktionen auftretende Frage der Absolutnormierung der Daten wurde untersucht. Es zeigt sich, dass durch das Prinzip der Messung und den verwendeten theoretischen Ansatz die Absolutnormierung mit an die Daten angepasst werden kann. Der angepasste Wert liegt mit 0.984±0.003 im Bereich der erwarteten Unsicherheit.

In Tabelle 4.5 ist das Ergebnis der Messung mit den zur Zeit vorliegenden theoretischen Berechnungen der Polarisierbarkeits-Strukturfunktionen verglichen. Es besteht eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis der chiralen Störungstheorie, während die anderen Rechnungen signifikante Abweichungen zeigen. Im Rahmen dieser Arbeit soll nicht versucht werden, hieraus weitergehende Schlussfolgerungen zu ziehen.

Für zukünftige Experimente zur virtuellen Comptonstreuung bieten sich folgende Weiterungen an:

Die q- und $\varepsilon-$Abhängigkeit der Strukturfunktionen sollte gemessen werden, um weitere Einsicht in das dynamische Verhalten des Protons zu gewinnen. Über den zur Zeit an MAMI zugänglichen Bereich hinaus wurden Messungen bei größeren q^2 an TJNAF (USA) in Angriff genommen, sowie (für kleinere Werte von q^2) an MIT-Bates (USA), von welchen zum Abschluss der vorliegenden Arbeit allerdings keine Resultate bekannt waren.

Dispersionsrechnungen können VCS-Messungen über die Pionproduktions-Schwelle hinaus interpretierbar machen, wo zur Photonproduktion der Konkurrenzprozess der Pionproduktion am Proton hinzukommt.

Eine vollständige experimentelle Bestimmung der generalisierten Polarisierbarkeiten wird erst durch VCS-Doppelpolarisations-Experimente möglich. Derartige Experimente stellen allerdings wegen der Reduktion der Ereignisrate um einen Faktor 50 bei der Polarisationsmessung eine ganz neue Herausforderung dar.

Anhang A

Relativistische Zweikörper-Kinematik

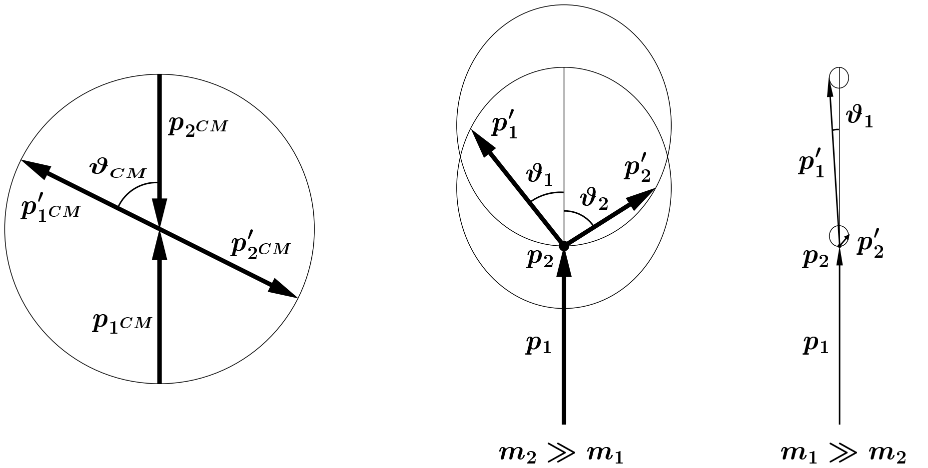


Abb. A.1: Impulse beim elastischen Stoß im Schwerpunktsystem (*links*) und im Ruhesystem des Teilchens 2, falls dieses viel schwerer (z.B. elastische Elektronenstreuung an Wasserstoffkernen, *Mitte*) oder leichter (z.B. Aufstreuung von Protonen an Hüllenelektronen, *rechts*) als Teilchen 1 ist.

Im Schwerpunktsystem zweier elastisch stoßender Teilchen mit Massen m_1, m_2 sind die Beträge der ein- und auslaufenden Impulse sowohl vor als auch nach der Streuung alle gleich,

$$|\vec{p}_{1CM}| = |\vec{p}_{2CM}| = |\vec{p'}_{1CM}| = |\vec{p'}_{2CM}| = p_{CM}. \tag{A.1}$$

Im folgenden wird die Berechnung der anderen Größen betrachtet, wenn die Energie des einlaufenden Teilchens $E_1 = m_1\gamma_1$ und der Streuwinkel ϑ_1 sowie die Massen m_1 und m_2 gegeben sind.

Der Lorentzfaktor für die Transformation vom Schwerpunktsystem in das System, in dem das Teilchen 2 anfangs ruht, ist gegeben durch

$$\gamma_{2CM} = \frac{E_{2CM}}{m_2} = \frac{\gamma_1 + \mu}{\sqrt{1 + 2\gamma_1\mu + \mu^2}} \tag{A.2}$$

mit dem Massenverhältnis

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \tag{A.3}$$

und es gilt

$$p_{CM} = m_2 c\sqrt{\frac{\gamma_1^2 - 1}{1 + 2\gamma_1\mu + \mu^2}}. \tag{A.4}$$

Mit γ_{2CM} und ϑ_{CM} lassen sich die Winkel

$$\tan\vartheta_2 = \frac{\sin\vartheta_{CM}}{\gamma_{2CM}(1+\cos\vartheta_{CM})} \tag{A.5}$$

und

$$\tan\vartheta_1 = \frac{\sin\vartheta_{CM}}{\sqrt{\gamma_{2CM}^2+\mu^{-2}-1}+\gamma_{2CM}\cos\vartheta_{CM}} \tag{A.6}$$

ausdrücken, und Umkehrung von (A.6) ergibt

$$\cos\vartheta_{CM} = \frac{\cot\vartheta_1\sqrt{\cot^2\vartheta_1+1-\mu^{-2}}-\gamma_{2CM}\sqrt{\gamma_{2CM}^2-1+\mu^{-2}}}{\cot^2\vartheta_1+\gamma_{2CM}^2} \; . \tag{A.7}$$

Zur Vollständigkeit sei, analog zu Gl. (A.2), auch für Teilchen 1 angegeben

$$\gamma_{1CM} = \frac{E_{1CM}}{m_1} = \frac{1+\mu\gamma_1}{\sqrt{1+2\mu\gamma_1+\mu^2}} \; . \tag{A.8}$$

Mit Gl. (A.2) und (A.7) kann man also für Einschußenergie E_1 und Streuwinkel ϑ_1 im Laborsystem (d.h. im Ruhesystem von m_2) den Winkel ϑ_{CM} und damit die kinematischen Verhältnisse im Schwerpunktsystem exakt ausrechnen. Mit der Lorentztransformation zurück in das Laborsystem (d.h. Boost mit γ_2) erhält man die exakte elastische Kinematik, welche um Terme der Ordnung $(m_1/m_2)^2$ von gebräuchlichen Näherungsformeln wie

$$E_1' = \frac{E_1}{1+\frac{2E_1}{m_2}\sin^2\frac{\vartheta_1}{2}} \tag{A.9}$$

und

$$Q^2 = 4E_1E_1'\sin^2\frac{\vartheta_1}{2} \tag{A.10}$$

abweicht. Für einige der Betrachtungen in Kapitel 2 ist die Berechnung mit dieser höheren Genauigkeit erforderlich.

Die Energie des gestreuten Elektrons kann auch direkt exakt berechnet werden nach der Formel [Mer00]

$$E_1' = \frac{(E_1+m_2)(E_1m_2+m_1^2)+(E_1^2-m_1^2)\cos\vartheta_1\sqrt{m_2^2+m_1^2\sin^2\vartheta_1}}{(E_1+m_2)^2-(E_1^2-m_1^2)\cos^2\vartheta_1} \tag{A.11}$$

Anhang B

Mathematische Funktionen

B.1 Dilogarithmus

Der in Kapitel 2 und im Anhang C benutzte Dilogarithmus[1] ist definiert als

$$\mathrm{Li}_2(x) \equiv -\int_0^x \frac{\ln|1-y|}{y} dy \quad \left(= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2} \quad \text{für } |x| < 1 \right). \tag{B.2}$$

Die angegebene Potenzreihenentwicklung konvergiert insbesondere für $x \to 1$ sehr langsam; man wertet die Funktion daher am günstigsten aus unter Benutzung der Relationen [MMT69, tHV79]

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\mathrm{Li}_2(1-x) - \ln|x| \cdot \ln|1-x| + \frac{\pi^2}{6}, \tag{B.3}$$

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln^2|x| + \frac{\pi^2}{6} \cdot (3\theta(x) - 1) \tag{B.4}$$

$$\text{mit } \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad \text{(Stufenfunktion)}$$

$$\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} \frac{z^n}{n!} \quad \text{für } -1 < x < 0.5 \tag{B.5}$$

$$\text{mit } z = -\ln|1-x|.$$

In Gl. B.5 sind die Bernoullizahlen B_n nach der „zweiten Definition" im Bronstein [Bro95] verwendet,

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$	...

$B_{2n+1} = 0$ für $n = 1, 2, ...$

Mit Gln (B.3) und (B.4) lässt sich jedes Argument in den Bereich $-1 < x < 0.5$ transformieren, in dem dann die außerordentlich schnell konvergierende Summe (B.5) zur Berechnung benutzt werden kann [tHV79].

[1] Diese Funktion wird in der Literatur gelegentlich mit dem Symbol *Sp* (für Spencefunktion) gekennzeichnet, welches allerdings, wenigstens im deutschen Sprachgebrauch, auch für *Spurbildung* verwendet wird. Auf Euler geht die Einführung der Polylogarithmen,

$$\mathrm{Li}_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^n} \tag{B.1}$$

zurück.

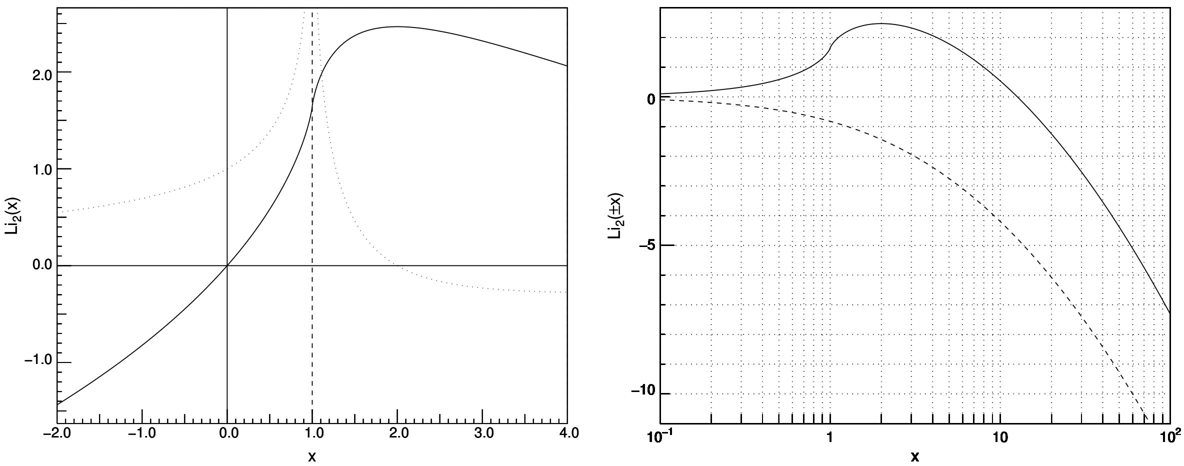


Abb. B.1: Dilogarithmus- oder Spence-Funtion $Sp(x)$.
Links Auftragung linear in x. Bei $x = 1$ ist die Funktion selbst stetig, ihre Ableitung (Integrand in (B.2), dargestellt als gepunktete Kurve) allerdings logarithmisch divergent. Die senkrechte Tangente an die Funktion bei $x = 1$ ist gestrichelt eingezeichnet.
Rechts logarithmische Auftragung in x, wie Figur 5 in [Tsa61] (Dort ist der Bereich um $x = 1$ ungenau dargestellt, daher hier das korrekte Bild). *Durchgezogen* ist $\mathrm{Li}_2(x)$, *gestrichelt* $\mathrm{Li}_2(-x)$ aufgetragen.

Die Relationen (B.3) und (B.4) können recht elegant bewiesen werden, indem man mittels

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Li}_2(x) \quad = \quad -\frac{\ln|1-x|}{x} \tag{B.6}$$

zeigt, dass z.B.

$$\frac{d}{dx}\left[\ \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) + \ln|x|\cdot\ln|1-x|\ \right] \quad = \quad 0 \qquad \forall x \notin \{0,1\} \tag{B.7}$$

gilt, die in der eckigen Klammer stehende Funktion also bis auf die ausgenommenen Stellen, an denen sie nicht stetig differenzierbar ist, konstant ist. Die Konstante wird dann jeweils für die zusammenhängenden Bereiche, in denen die Funktion stetig differenzierbar ist, bestimmt.

Damit lässt sich Källéns Relation ([Kal58], S.305, dort Gl. (34.24))

$$\mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(-x) \quad = \quad \mathrm{Li}_2\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{1+x}\right) + \pi^2\left[\theta(1+x) - \frac{3}{4}\right] \tag{B.8}$$

sehr viel kürzer und transparenter ableiten als im ursprünglichen Beweis in [Kal58]. Im weiteren ist sie mit der Substitution $x = 2a - 1$ nützlich,

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{2a-1}{a}\right) - \mathrm{Li}_2(2a-1) + \mathrm{Li}_2(1-2a) \quad = \quad \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{a}\right) - \pi^2\left[\theta(a) - \frac{3}{4}\right]. \tag{B.9}$$

Im Rahmen dieser Arbeit wurde folgende weitere Relation hergeleitet:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}_2(c) \ + \ \mathrm{Li}_2(a) \ - \ \mathrm{Li}_2(ac) \ + \ \mathrm{Li}_2(cd) \ - \ \mathrm{Li}_2(d/a) \ = \\ &= \ \frac{1}{2}\ln^2|a| \ - \ \ln|d|\ln|a| \ + \ \frac{\pi^2}{6} \ + \ \pi^2\cdot\theta(-a)\left[\theta(d) - \frac{1}{2}\right] \end{aligned} \tag{B.10}$$

für beliebige a und c und

$$d \;=\; d(a,c) \;=\; \frac{1-a}{c-1}. \tag{B.11}$$

Aus (B.10) folgt mit der Substitution $c = (b-1)/(b-a)$ die im folgenden benötigte Identität

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}_2(1-b) \;-\; \mathrm{Li}_2\left(\frac{ab-a}{b-a}\right) \;+\; \mathrm{Li}_2\left(\frac{b-1}{b-a}\right) \;+\; \mathrm{Li}_2(a) \;-\; \mathrm{Li}_2\left(\frac{a-b}{a}\right) \;= \\ &\quad = \;\frac{1}{2}\ln^2|a| \;-\; \ln|b-a|\ln|a| \;+\; \frac{\pi^2}{6} \;+\; \pi^2\cdot\theta(-a)\left[\theta(a-b)-\frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Diese Relation lässt sich ebenfalls durch partielles Ableiten nach a und b beweisen.

Wie der Autor kurz vor Fertigstellung der vorliegenden Arbeit feststellen konnte, findet sich in [Lew58] eine ganze Gruppe ähnlicher Relationen von Dilogarithmen in Abhängigkeit von zwei Variablen, die sich aus einer Grundform ableiten lassen. Zu dieser Gruppe gehört wahrscheinlich auch die gefundene Relation (B.12), was allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wurde.

B.2 Einige Integrale

Ein Basisintegral ist (Bronstein [Bro95] Nr.40)

$$\begin{aligned} &I_1(a,b,c) = \\ &\int_0^1 \frac{dy}{ay^2+by+c} = \end{aligned} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\dfrac{b+2c+\sqrt{\Delta}}{b+2c-\sqrt{\Delta}} & \text{für } \Delta > 0 \qquad \boxed{\Delta = b^2-4ac} \\ \dfrac{4a}{b(2a+b)} & \text{für } \Delta = 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{b+2c} & \text{für } \Delta < 0\,. \end{cases} \tag{B.13}$$

Tsai hat in der Herleitung seiner Strahlungskorrektur-Formel das Integral

$$\begin{aligned} I_T(a,b,d) &= \int_0^1 \frac{\ln|1-y\cdot d|dy}{ay^2+by} = \\ &= \frac{-1}{b}\left[\mathrm{Li}_2(d) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{ad+bd}{a+bd}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{bd}{a+bd}\right) + \ln\left|\frac{a+bd}{a}\right|\ln\left|\frac{a+b}{b}\right|\right] \end{aligned} \tag{B.14}$$

benutzt, welches ein Spezialfall (c=0) von

$$\begin{aligned} &I_2(a,b,c,d) = \\ &\int_0^1 \frac{\ln|1-y\cdot d|dy}{ay^2+by+c} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\;[\;\mathrm{Li}_2(\lambda_+\xi_+) - \mathrm{Li}_2(\xi_+) + \ln|\xi_+ - 1|\cdot\ln\lambda_+ \;- \\ &\qquad\qquad - \mathrm{Li}_2(\lambda_-\xi_-) + \mathrm{Li}_2(\xi_-) - \ln|\xi_- - 1|\cdot\ln\lambda_-\;] \\ &\quad \text{für } \Delta = b^2-4ac > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_\pm = \frac{2a+b\pm\sqrt{\Delta}}{b\pm\sqrt{\Delta}}, \quad \xi_\pm = \frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a/d+b\pm\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \tag{B.15}$$

ist. Gl. (B.15) wurde vom Autor der vorliegenden Arbeit zur Diskussion der Strahlungskorrektur-Formel bestimmt. Tsai hat in seiner Herleitung bei der Auswertung der Graphen das auftretende Integral immer so geschrieben, dass der vernachlässigte Term c von der Ordnung m_e/M_p ist. Mit Gl. (B.15) kann man (durch numerischen Vergleich von exaktem und genähertem Ausdruck) nachweisen, dass dies eine sehr gute Näherung ist.

Interessanterweise ist der andere, hier nicht benötigte Fall für (B.15), $b^2-4ac<0$, in der Literatur zu finden [Pru83] und sei hier, in die gleiche Form wie (B.15) gebracht, der Vollständigkeit halber angegeben,

$$
\begin{aligned}
I_2(a,b,c,d) &= \Delta' \left[\arctan\frac{1}{(2c+b)\Delta'} \cdot \ln\left|1+\frac{bd+cd^2}{a}\right| + \mathrm{cl}(\lambda_1,\lambda) - \mathrm{cl}(\lambda_2,\lambda)\right] \\
&\qquad \text{mit } \Delta' = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \;, \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \Delta' b \;, \\ \lambda_2 &= \Delta'(2a+b) \;, \\ \lambda &= \Delta'(-2a/d-b) \;, \end{aligned} \\
&\qquad \mathrm{cl}(\tan\tfrac{\vartheta}{2}, \tan\tfrac{\varphi}{2}) = \mathrm{Cl}_2(\vartheta+\varphi) + \mathrm{Cl}_2(\pi-\vartheta) \;, \\
&\qquad \mathrm{Cl}_2(\xi) \equiv -\int_0^\xi \ln\left|2\sin\frac{\tau}{2}\right| d\tau \quad \text{(Clausen-Integral)} \\
&\qquad\qquad \left(= \xi(1-\ln\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_{2n}|\xi^{2n+1}}{2n\cdot(2n+1)!}\right) \;.
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

Anhang C

Strahlungskorrekturen und numerische Integration des Strahlenschwanzes

C.1 Vergleich mit Mo und Tsai

Die in Mo und Tsai [MMT69] verwendeten Größen hängen mit den in Kapitel 2 eingeführten wie folgt zusammen:

$$\begin{array}{rcl} \boxed{\text{Mo/Tsai}} & & \boxed{\text{Kapitel 2}} \\ E_1 & = & E_e \\ E_{3\ \text{peak}} & = & E_{e'}^{el} \\ \Delta E & = & \Delta E_s/\eta \end{array}$$

Es sei hier betont, dass

$$E_3 \;=\; E_{3\ \text{peak}} \;=\; E_{e'}^{el}$$

(und nicht $E_{e'}$) mit den entsprechenden Ausdrücken für η und Q^2 in den Formeln in Mo und Tsai zu nehmen ist.

C.1.1 Elektronbeiträge

Der erste Ausdruck in Formel (2.13), ℓ_k, ist in Mo und Tsai ([MMT69], S. 208, Gl. II.6) geschrieben:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{(\Delta E_s)^2}{E_e E_{e'}^{el}}\right) &= \ln\left(\frac{\eta^2 \Delta E^2}{E_e \eta^{-1} E_e}\right) = \ln\left(\frac{\Delta E^2}{E_e^2}\,\eta^3\right) \\ &= -\left(2\ln\frac{E_e}{\Delta E} - 3\ln\eta\right) \end{aligned}$$

Weiterhin ist in Mo und Tsai die Funktion (vgl. (2.16))

$$f(\vartheta,\eta) \;=\; u_e - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right) + 2 \;=\; \mathrm{Li}_2\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2\eta \tag{C.1}$$

genähert durch (Definition der Funktion $\mathrm{Li}_2(x)$ s. Gl. (B.2))

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{MT}}(\eta) &= \mathrm{Li}_2\left(\frac{E_3 - E_1}{E_3}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{E_1 - E_3}{E_1}\right) \\ &= \mathrm{Li}_2(1-\eta) + \mathrm{Li}_2(1-\eta^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2}\ln^2\eta, \end{aligned} \tag{C.2}$$

es fehlt also der explizit von ϑ abhängige Term. Diesen hat Schwinger [Sch49] in der Berechnung der Strahlungskorrektur bei Potentialstreuung ($\eta = 0$) erhalten (die ausintegrierte Form hat erstmals Källén [Kal58] angegeben[1]),

$$f^{\mathrm{SK}}(\vartheta) = 2\sin\tfrac{\vartheta}{2}\int_{cos\frac{\vartheta}{2}}^{1}\left[\frac{\ln\frac{1+\xi}{2}}{1-\xi} - \frac{\ln\frac{1-\xi}{2}}{1+\xi}\right]\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \cos^2\frac{\vartheta}{2}}} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned} &= -\left[\ln\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\ln\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right] \\ &= \mathrm{Li}_2\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Es gilt damit

$$f(\eta,\vartheta) \;=\; f^{\mathrm{MT}}(\eta) \;+\; f^{\mathrm{SK}}(\vartheta).$$

Vernachlässigt man den Term $f^{\mathrm{SK}}(\vartheta)$, so führt dies zu einem nur vom Streuwinkel $\vartheta_{e'}$ abhängigen Fehler in der Bestimmung des Wirkungsquerschnitts,

$$\Delta\delta^{\mathrm{MT}} \;=\; \frac{\alpha}{\pi}\Big(f(\vartheta,\eta) - f^{\mathrm{MT}}(\eta)\Big) \;=\; \frac{\alpha}{\pi}\,f^{\mathrm{SK}}(\vartheta),$$

der von 0% (bei $\vartheta_{e'} = 0°$) bis -0.43% (bei $\vartheta_{e'} = 180°$) rangiert und damit in einer ähnlichen Größenordnung liegt wie die in Kapitel 2 diskutierte Coulombkorrektur.

C.1.2 Protonbeiträge

Die in Gl. (2.17) benutzte Abkürzung u_Z schreiben Mo und Tsai [MMT69] als

$$u_Z \;=\; \mathcal{J}(2E_3/M,\;\; E_1/E_4) - \mathcal{J}(2E_1/M,\;\; E_3/E_4) \tag{C.5}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(a,b) \;=\; & \mathrm{Li}_2\left(\frac{b-1}{b}\right) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-b}{a-b}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{a-ab}{a-b}\right) \;-\; \ln\left|\frac{a-b}{b-ab}\right|\cdot\ln a \;+ \\ & +\; \mathrm{Li}_2(2-a) \;-\; \mathrm{Li}_2\left(\frac{2-a}{a}\right) \;+\; \mathrm{Li}_2\left(\frac{a-2}{a}\right) \;-\; \ln\left|\frac{1}{1-a}\right|\cdot\ln a\;. \end{aligned} \tag{C.6}$$

[1] Vorsicht: Neben den zahlreichen Druckfehlern in Mo und Tsai ist diese Funktion falsch aus [Kal58] entnommen. Dort ist der Dilogarithmus etwas abweichend definiert mit der Funktion $\Phi(x) = -\mathrm{Li}_2(-x) - \pi^2/12$.

Unter Benutzung von (B.12) und (B.9) vereinfacht sich diese recht komplizierte Schreibweise zu

$$\mathcal{J}(a,b) = \mathrm{Li}_2(1-a/b) \; - \; 2\cdot\mathrm{Li}_2(1-a) \; - \; \pi^2/12 \tag{C.7}$$

C.2 Details zum Bremsstrahlungsspektrum

In Abschnitt 2.3.3 wurde die numerische Integration des Bremsstrahlungs-Spektrums behandelt. In Abb. C.1 ist das Gitter dargestellt, das den gesamten Raumwinkel 4π erfasst. Die Schrittweite in der Abbildung ist in beiden Dimensionen doppelt so groß wie die größte zur numerischen Integration benutzte Schrittweite.

Diese Schrittweite reicht nicht aus, um die Struktur des Wirkungsquerschnitts in dem Bereich, in dem das Photon in Richtung von ein- oder auslaufendem Elektron emittiert wird, richtig zu erfassen. Dazu werden die kritischen Bereiche in zwei weiteren Ausschnittsvergrößerungen mit zunehmend kleinerer Schrittweite gerastert; das feinste Raster ist in Abb. C.2 dargestellt.

Wie insbesondere im Querschnitt (Abb. 2.3 im Haupttext) sichtbar ist, fällt der Wirkungsquerschnitt, wenn das Photon einen Winkel von 0° mit ein- oder auslaufendem Elektron einschließt, auf praktisch 0 ab. Dies ist die Ursache für die unterschiedliche Erscheinungsform der beiden Elektronpiks in Abb. C.1. Das Raster ist zu grob, um die wirkliche Struktur der Piks aufzulösen, und im einen Fall trifft ein Rasterpunkt gerade das Minimum in der Mitte des Piks (für die Richtung des einlaufenden Elektrons, (0°, 0°)), während im anderen Fall ein Maximalwert getroffen wird (in der Nähe der Richtung des auslaufenden Elektrons, (52.18°, 0°)). Man kann durch leichtes Verschieben des Rasters ein optisch ansprechenderes Bild erzeugen, worauf hier bewusst verzichtet wurde.

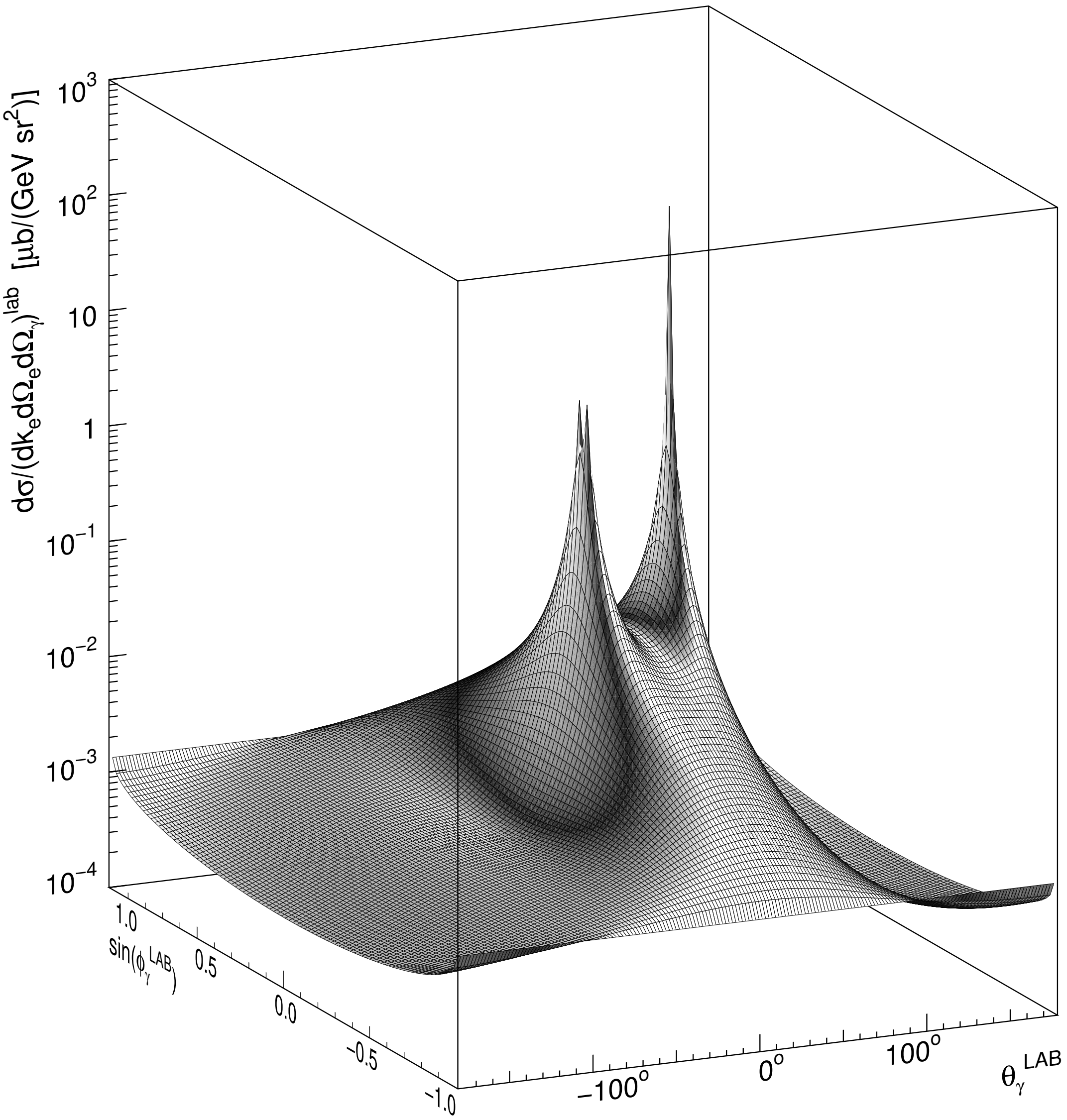


Abb. C.1: Differentieller Bremsstrahlungs-Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit vom Raumwinkel des Photons im Laborsystem. Der Schnitt entlang $\sin(\phi_\gamma^{LAB}) = 0$ ergibt den in Abb. 1.4 dargestellten Verlauf, hier jedoch zur Kinematik $E_e = 855.00$ MeV, $\vartheta_{e'} = 52.18°$, $E_{e'} = 621.4$ MeV. Zur Pikform s. Text.

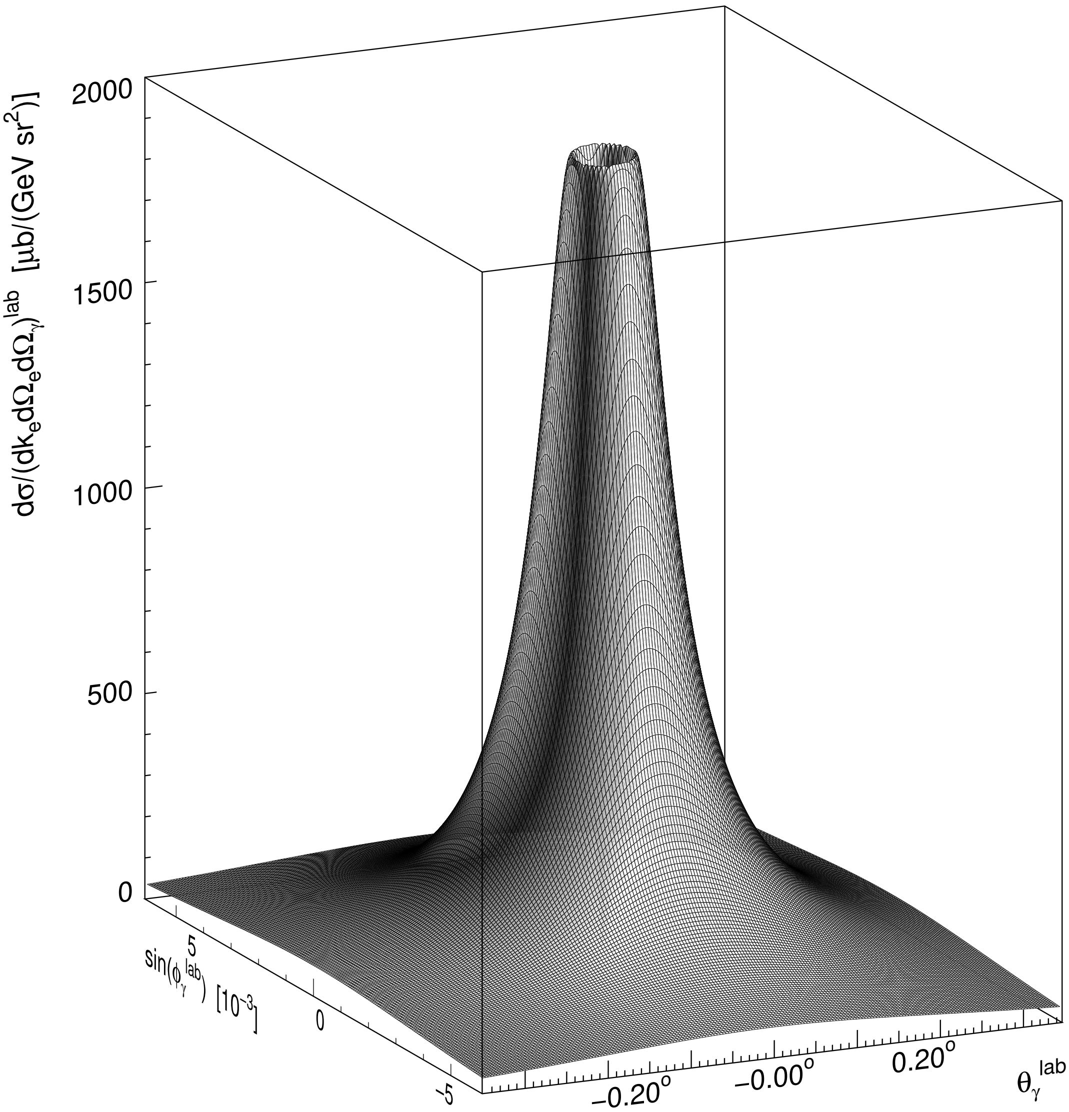


Abb. C.2: Ausschnittsvergrößerung des Piks in Richtung des einlaufenden Elektrons in C.1. Im Haupttext ist dieselbe Abbildung entlang $\theta_\gamma^{LAB} = 0$ aufgeschnitten dargestellt (Abb. 2.3), um den Abfall des Wirkungsquerschnitts auf praktisch 0 für Emission des Photons *exakt* in Richtung des Elektrons sichtbar zu machen.

Anhang D

Spurrekonstruktion in den vertikalen Driftkammern

D.1 Vorbemerkung zur Optimierung der Spurrekonstruktion in den Driftkammern

Die in Kapitel 3 angesprochene Verbesserung des Spurrekonstruktions-Algorithmus ist am besten in den Fehlerverteilungen der linearen Regression der einzelnen Spuren zu erkennen.

In diesen Fehlerverteilungen spiegelt sich zunächst das gute oder weniger gute Einstellen einiger experimenteller Parameter wider; diese sind die Driftgeschwindigkeit und für alle vier Ebenen die TDC-Kanäle, die der Driftzeit 0 entsprechen ("Offsets"). Die Driftgeschwindigkeit ist von Gasmischung, angelegter Hochspannung und Druck abhängig; man kann nicht davon ausgehen, dass sie über größere Zeiträume konstant ist. Da die Feldgeometrie für die vier Kammern eines Spektrometers gleich ist, ist die Driftgeschwindigkeit in allen Kammern jeweils dieselbe, wie sich bei Überprüfungen bestätigt hat.

Umgekehrt ist ein präzises Kriterium zur Bestimmung dieser Parameter die Häufigkeitsverteilung der Koordinatenfehler, insbesondere der häufigste und der mittlere Wert. Sind die wahrscheinlichsten (am häufigsten auftretenden) Koordinatenfehler klein, so hat man einen guten Parametersatz gewählt. Dieses geschieht zur Zeit von Hand, indem man denselben Satz Daten mehrfach unter Variation der Parameter analysiert und versucht, dadurch das Optimum zu erreichen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden erste Versuche, diese Suche zu automatisieren und so das Auffinden der besten Parameter für einen größeren Datensatz zu ermöglichen, durchgeführt. Das Problem kann allerdings nur zusammen mit zwei weiteren Punkten richtig gelöst werden:

- Die Driftzeit-Information hängt nicht nur vom Driftweg in der Driftkammer, sondern auch von der Laufzeit des Teilchens zum (zeitgebenden) Szintillator, dem Auftreffpunkt dort und der Signalhöhe ab. Die unterschiedlichen Szintillatorplatten haben zusätzlich durch Kabellängen u.ä. einen relativen Zeitversatz ("Offset"), der mit berücksichtigt werden muss. Diese Effekte wurden schon bei der Korrektur der Koinzidenzzeit behandelt, setzen allerdings teilweise die Spurinformation voraus, sodass zu einer endgültigen Lösung eine Nachiteration notwendig würde.
- Da jeder Draht in den Driftkammern über einen eigenen TDC verfügt, müssen

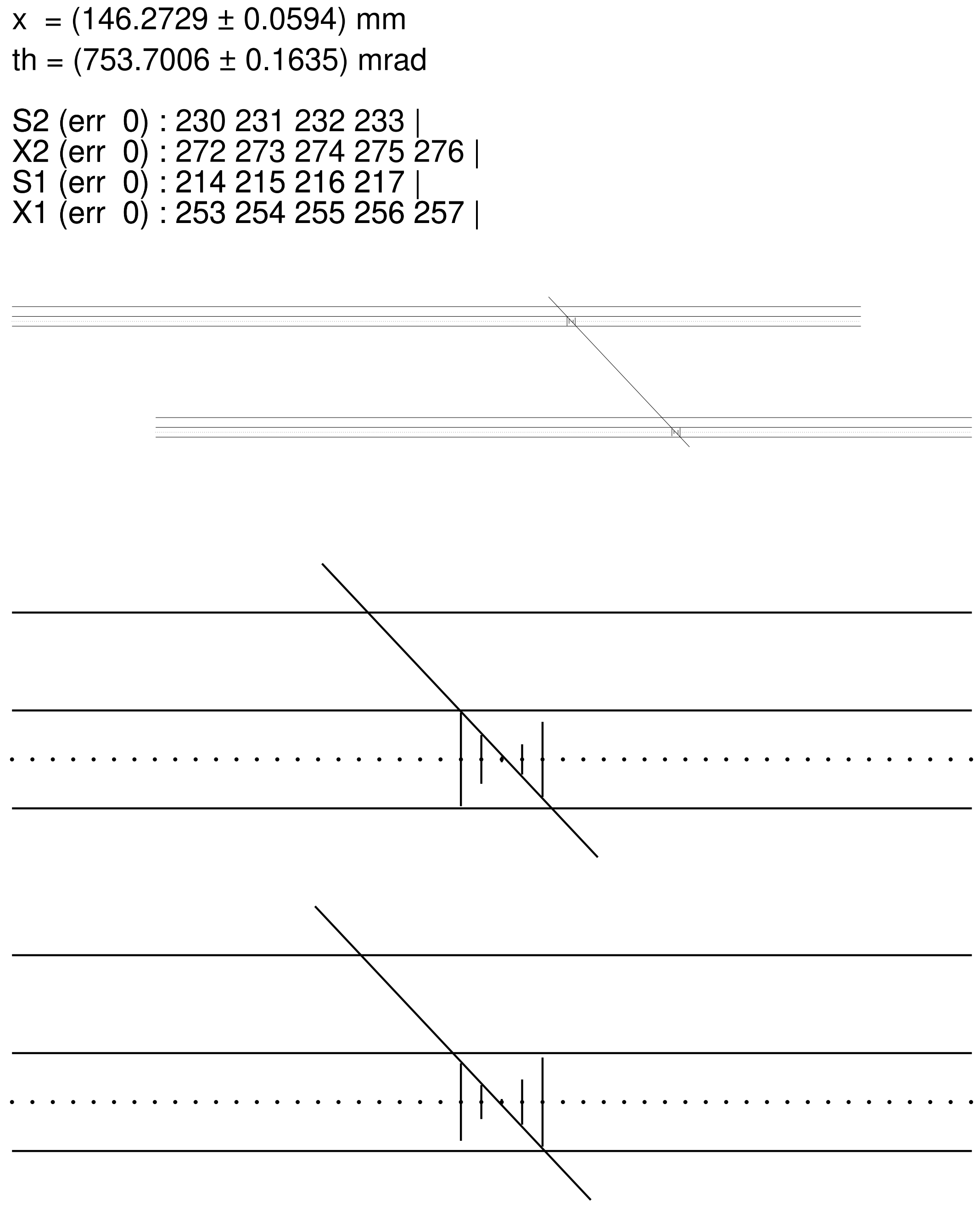


Abb. D.1: Typische Spurrekonstruktion in den beiden x-Ebenen von Spektrometer A (Run 970414164156, Ereignis 137).
Oben die extrahierten (dispersiven) Koordinaten x und θ mit den Fehlern, die sich aus der linearen Regression ergeben, darunter die Nummern der Drähte in allen 4 Ebenen und die zugehörigen Fehlerindizes nach [Dis96]; in beiden x-Ebenen haben jeweils 5 Drähte angesprochen.
Mitte: Seitenansicht des gesamten Kammerpackets; die untere Ebene ist die $x1$-Ebene, die obere die $x2$-Ebene. Es sind jeweils drei Kathodenfolien gezeichnet; die mittlere ist die gemeinsame Kathodenfolie von x- und s-Ebene. Die Drähte der x-Ebene sind fein gepunktet eingezeichnet.
Unten: Die Vergrößerung der Durchstoßpunkte durch die beiden Kammerebenen (hier durch entsprechenden Versatz übereinander gezeichnet) verdeutlicht, wie durch die gewählte Geometrie (mittlerer Durchtrittswinkel $\approx 45°$, Abstand der Drähte $\approx \frac{1}{5}$ des Abstandes zur Kathodenfolie) Redundanz und damit hohe Genauigkeit erreicht wird.

streng genommen alle Draht-Offsets einzeln bestimmt werden. Zusätzlich hat sich herausgestellt, dass man nicht davon ausgehen kann, dass alle Drähte optimal positioniert sind, sowohl vom Ort als auch von der Zugspannung („Durchhängen von Drähten“) her. Dies hat Feldverformungen zur Folge, die lokal mit berücksichtigt werden müssen.

D.2 Genauigkeit der Spurrekonstrukion

Die Rekonstruktion der Teilchenspuren durch die vertikalen Driftkammern ist in Abb. D.1 an einem Beispiel dargestellt. Die Bestimmung der x-Koordinate des Durchstoßpunktes erfolgt über die gesamte Länge der sensitiven Fläche von 2000 mm auf ca. 70 μm genau. Typische Häufigkeitsverteilungen der Fehler Δx zeigen Abb. D.2 und D.5. Die Fehlerverteilungen lassen sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$h(\Delta x) = \begin{cases} h_1(\Delta x) = & p_0 \cdot e^{-\left(\frac{\Delta x - p_1}{p_2}\right)^2} \quad \text{für} \quad \Delta x \leq p_3 \\ h_2(\Delta x) = & h_1(p_3)\cdot\, e^{-p_4(\Delta x - p_3)} \quad \text{für} \quad p_3 < \Delta x \leq p_5 \\ & h_2(p_5)\cdot\, e^{-p_6(\Delta x - p_5)} \quad \text{für} \quad p_5 < \Delta x \end{cases} \tag{D.1}$$

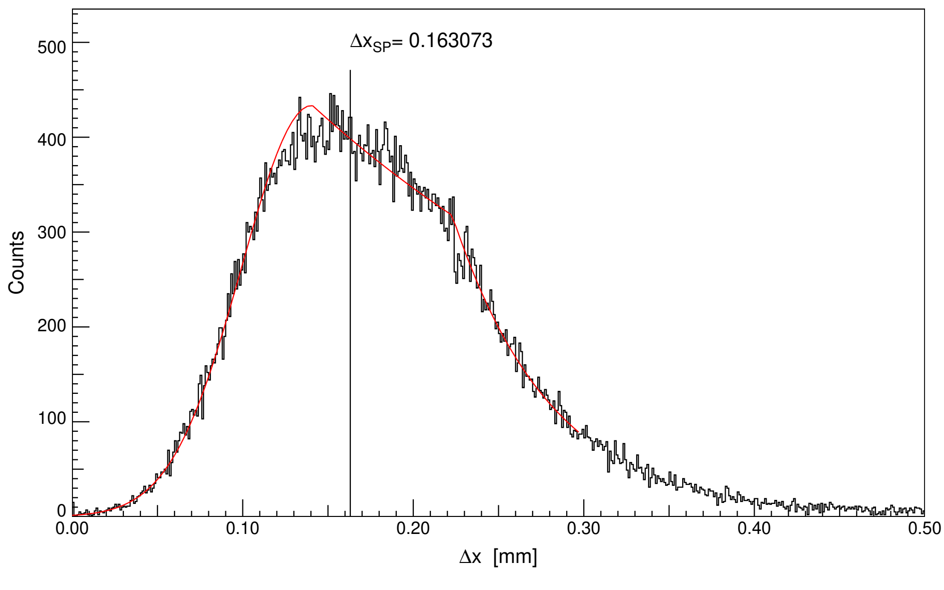


Abb. D.2: Vergleich der aus den Spuren eines Runs bestimmten Fehlerverteilung mit einer Funktion gemäß (D.1) (hier mit nicht optimal angepassten Parametern). Der mit Gl. (D.2) ermittelte Schwerpunkt ist eingezeichnet.

Ein gutes Maß für die Größe des Fehlers in der Bestimmung von x ist der Pikschwerpunkt Δx_{SP} mit der Definition

$$\Delta x_{SP} = \frac{g_1 p_1 + g_{35} p_{35}}{g_1 + g_{35}}, \tag{D.2}$$

wobei

$$p_{35} = \frac{p_3 + p_5}{2} \tag{D.3}$$

$$g_1 = \sqrt{\pi}\, p_2 \cdot p_0 \tag{D.4}$$

$$g_{35} = \begin{cases} g'_{35} & : \quad g'_{35} > 0 \\ 0 & : \quad g'_{35} \leq 0 \end{cases} \tag{D.5}$$

$$\text{mit} \quad g'_{35} = (p_5 - p_3) \cdot (h(p_5) + h(p_3) - 1.2 g_1). \tag{D.6}$$

Der Term $-1.2g_1$ in G. (D.6) ist eine empirisch ermittelte Größe, die der Abweichung des „Pikschwerpunkts“ von p_1, also vom Maximum der Verteilung, so Rechnung trägt, dass sich Δx_{SP} zur Anpassung der Parameter eignet.

D.3 Das Driftzeit-Differenz-Kriterium

Wie in Abschnitt 3.2 angesprochen, muss zur Verbesserung der Informationsauswertung ein zuverlässiges Verfahren angewendet werden, das die „Spreu vom Weizen“ trennt. In diesem Sinne wurde im Rahmen dieser Arbeit das Driftzeit-Drifferenz-Kriterium (DDK) in den Spurbestimmungs-Algorithmus integriert, das nun erläutert wird.

Als Beispiel betrachten wir zunächst das Ereignis in Abb. D.3 oben. In der linken Abbildung erkennt man, dass im (oberen) $x2$-Kammerpacket zwei zusätzliche Signale von Drähten vorhanden sind, die „offensichtlich“[1] nicht zum Cluster gehören. Hier wurde an zwei in der Nähe des Clusters liegenden Drähten jeweils eine Driftzeit gemessen, die etwa dem gesamten Driftweg von Kathodenfolie bis zum Draht entspricht (Eine mögliche Erklärung ist die Auslösung von Elektronen aus der Kathodenfolie durch beim Primärteilchendurchtritt entstehende Photonen). Ein Kriterium, mit dem man diese Drähte von den anderen unterscheiden kann, ist, dass die Differenz ihrer Driftzeiten nicht derjenigen benachbarter Drähte in einem Cluster entspricht. Denn die Cluster werden von Teilchenspuren erzeugt, die in einem eng begrenzten Winkelintervall durch die Kammern treten, und somit beschränken sich die Differenzen der Driftzeiten auf ein enges Intervall. Die Rekonstruktion der Spuren bei Mitnahme der Drähte, die dem DDK nicht genügen, d.h. beim Standard-Algorithmus, ergibt Fehler (Δx, $\Delta\theta$) von (2.21mm, 4.99mrad) im oberen bzw. von (2.15mm, 4.24mrad) im unteren Beispiel von Abb. D.3.

Nach Verwerfen der Signale mit falscher Driftzeit-Differenz zum Nachbarn (rechts in Abb. D.3) ergeben sich die entsprechenden Fehler zu (0.05mm, 0.13mrad) (oben rechts) und (0.15mm, 0.44mrad) (unten rechts).

Das Intervall zulässiger Driftzeit-Differenzen ändert sich, bedingt durch die Magnetoptik, mit dem Durchtrittsort durch die Fokalebene. Um den Schnitt auf die

[1] Allerdings nicht „offensichtlich“ für eine naive lineare Regression!

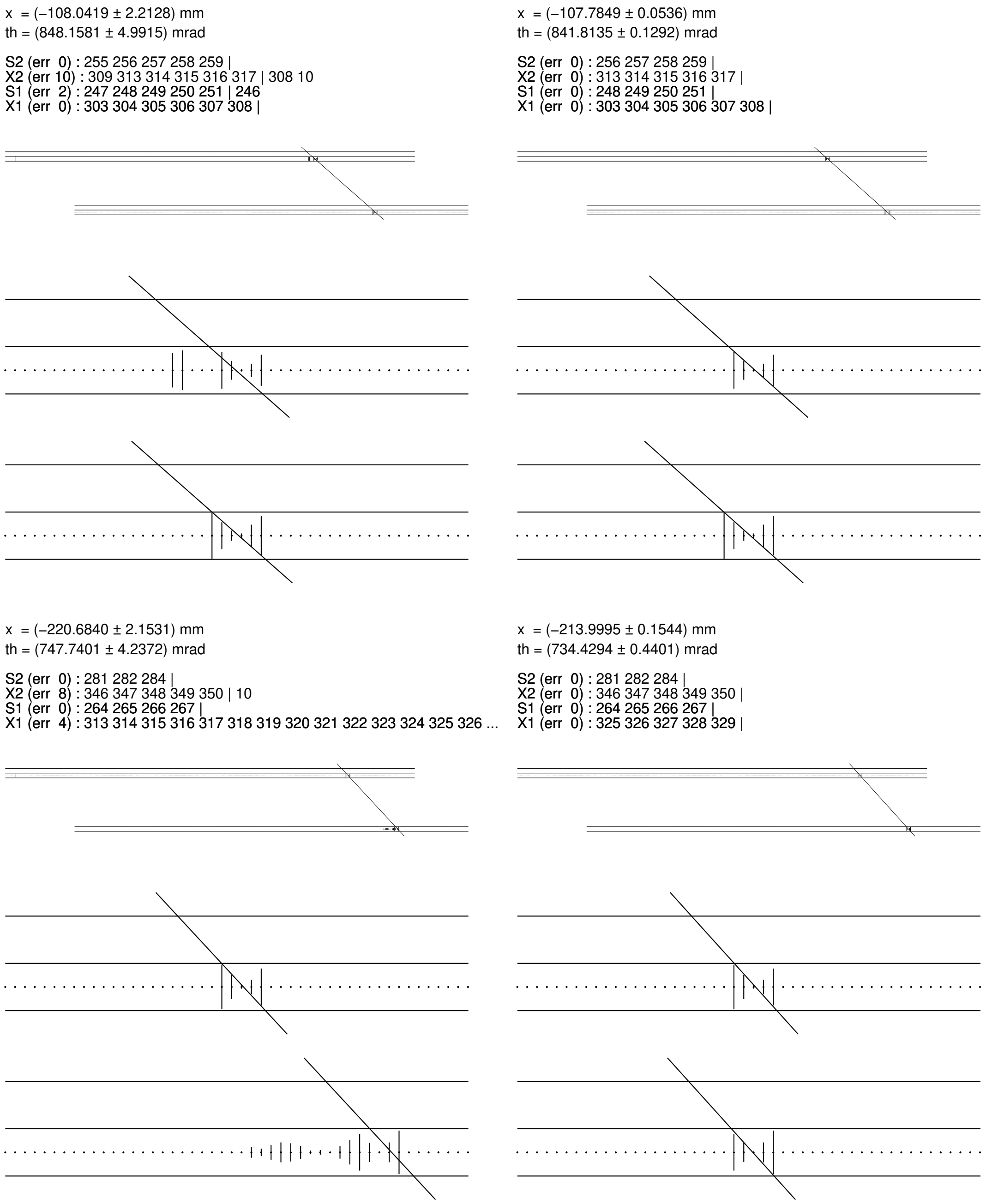


Abb. D.3: Effekt des Driftzeit-Differenz-Kriteriums (DDK); Darstellungen wie in Abb. D.1, links die Analyse mit dem Standard-Algorithmus, rechts mit DDK. Oben ein Ereignis mit zusätzlichen Signalen in der $x2$-Ebene, unten in der $x1$-Ebene.

zulässigen Driftzeitdifferenzen möglichst eng halten zu können, wird die Abhängigkeit von der Drahtnummer (resp. der dispersiven Koordinate x) explizit berücksichtigt. Dieser Zusammenhang ist für die $x1$-Ebene von Spektrometer A aus Abb. D.7 ersichtlich. Dieser Abbildung entnimmt man, dass das zulässige Intervall für den ersten Draht etwa von -100 bis -270 geht und sich mit einer Steigung von 0.08 pro Draht zu größeren Werten hin verschiebt. Zur Anwendung des DDK bei der Analyse von Daten übergibt man diese drei Werte als `run.db`-Eintrag der Variablen `A.VDC.x.cut` (entsprechend für die anderen Spektrometer und die s-Ebenen).

Die Anwendung des Driftzeit-Differenzkriteriums wird mit der `run.db`-Variablen `A.VDC.x.mode`, welche standardmäßig auf 0 (d.h. nicht aktiv) gesetzt ist, aktiviert. Zur Zeit sind für `mode` die Werte 0, 1 und -1 vorgesehen. Die Kriterien für 1 oder -1 unterscheiden sich nur in der Behandlung von einzelnen Drähten, d.h. Drähten, bei denen keiner der beiden Nachbardrähte angesprochen hat. Diese werden bei `mode=1` verworfen, bei `mode=-1` beibehalten. Es zeigt sich, dass `mode=1` nur in den x-Ebenen vorteilhaft angewandt werden kann, weil hier immer mehr als drei Driftzellen durchquert werden und damit das Fehlen eines einzelnen Drahtes nicht das gesamte Cluster „kosten“ muss.

Für die s-Ebenen ist das Setzen von `mode=-1` sinnvoll, da dort unter den steilsten Winkeln nur drei Drähte ansprechen, und das Fehlen des mittleren Drahtes eines solchen Clusters zum Verlust des gesamten Clusters führen würde. Hier wird besonders deutlich, dass es vielversprechend ist, das DDK auf die übernächsten Nachbarn auszudehnen. Hierbei muss beachtet werden, dass es bei übernächsten Nachbardrähten besonders wahrscheinlich ist, dass der erste *vor* und der zweite bereits *nach* dem Durchtritt des Teilchens durch die Mittelebene angesprochen wurde, und sich somit ein Kriterium für die *Summe* der beiden Driftzeiten ergibt. (vgl. Weiterentwicklung und Abb. D.8)

Die günstigste Parameterwahl für die vorliegende Analyse ist

```
[970318000000]
A.VDC.x.mode =  1; A.VDC.x.cut = { 100, 270, 0.0771 }
A.VDC.s.mode = -1; A.VDC.s.cut = { 140, 330, 0.1494 }
```

D.4 Auswirkung auf experimentelle Spektren

Die im Rahmen des vorgestellten Experiments gemachten Beobachtungen zur Anwendung des DDK sind in den Abb. D.4 bis D.7 zusammengestellt:

- Die Anwendung des DDK reduziert den mittleren Fehler um mehr als einen Faktor 2 auf $\overline{\Delta x}_{\text{DDK}} \approx 150\mu$m gegenüber dem mit dem Standard-Algorithmus erzielten Wert $\overline{\Delta x} \approx 330\mu$m (vgl. Abb. D.6, oberes Bild). Der häufig angegebene „Mittelwert“ um 80μm [Blo98] kommt durch willkürliches Abschneiden der Fehlerverteilung bei $\Delta x < 500\mu$m zustande.
- Die mittlere Anzahl der Drähte in einer Ebene pro Ereignis, die der Standard-Algorithmus auswertet (Multiplizität), wird reduziert. Insbesondere wird der

Ausläufer der Multiplizitätsverteilung zu extrem hohen Werten (bis 50) praktisch abgeschnitten; das Multiplizitätsspektrum mit DDK reicht nur bis zu der durch Doppeltreffer erklärlichen Multiplizität von 16.

- Die relative Anzahl der Ereignisse, die gegenüber dem Standard-Algorithmus zurückgewonnen werden, liegt – abhängig von den angewandten Schnitten – im Bereich von einigen Prozent.

D.5 Weiterentwicklung

Neben den in der Einleitung zu diesem Anhang angesprochenen Verbesserungsmöglichkeiten (Einzeldraht-Offsets und Szintillator-Korrektur) ist auch eine Weiterentwicklung des Spuralgorithmus sehr wünschenswert, wie man z.B. Abb. D.5 entnimmt, wo erkennbar ist, dass keineswegs alle Ereignisse mit unakzeptabel großem Fehler "recovered" werden. Außerdem sind den Abb. D.8 und D.9 weitere Entwicklungsmöglichkeiten im Zusammenhang mit dem DDK zu entnehmen, dies sind:

- Nutzung der Driftzeit-Differenz-Information zum *über*nächsten Nachbarn zur Verfeinerung des vorgestellten Verfahrens.
- Eine zusätzliche „Nutzungsmöglichkeit" der Driftzeit-Differenz-Spektren ergibt sich, wenn bei der Messung der Kollimator in vertikaler Richtung stark eingeschränkt ist (vgl. Abb. D.9) und entsprechend der Durchtrittswinkel durch die Driftkammern in einem noch engeren Bereich liegt. Dann sind die angesprochenen Einzeldraht-Offsets relativ zum Nachbarn direkt sichtbar und können vermutlich genauer extrahiert werden als bei der üblichen Methode, bei der der Fußpunkt des Einzeldraht-Driftzeitspektrums bestimmt wird.

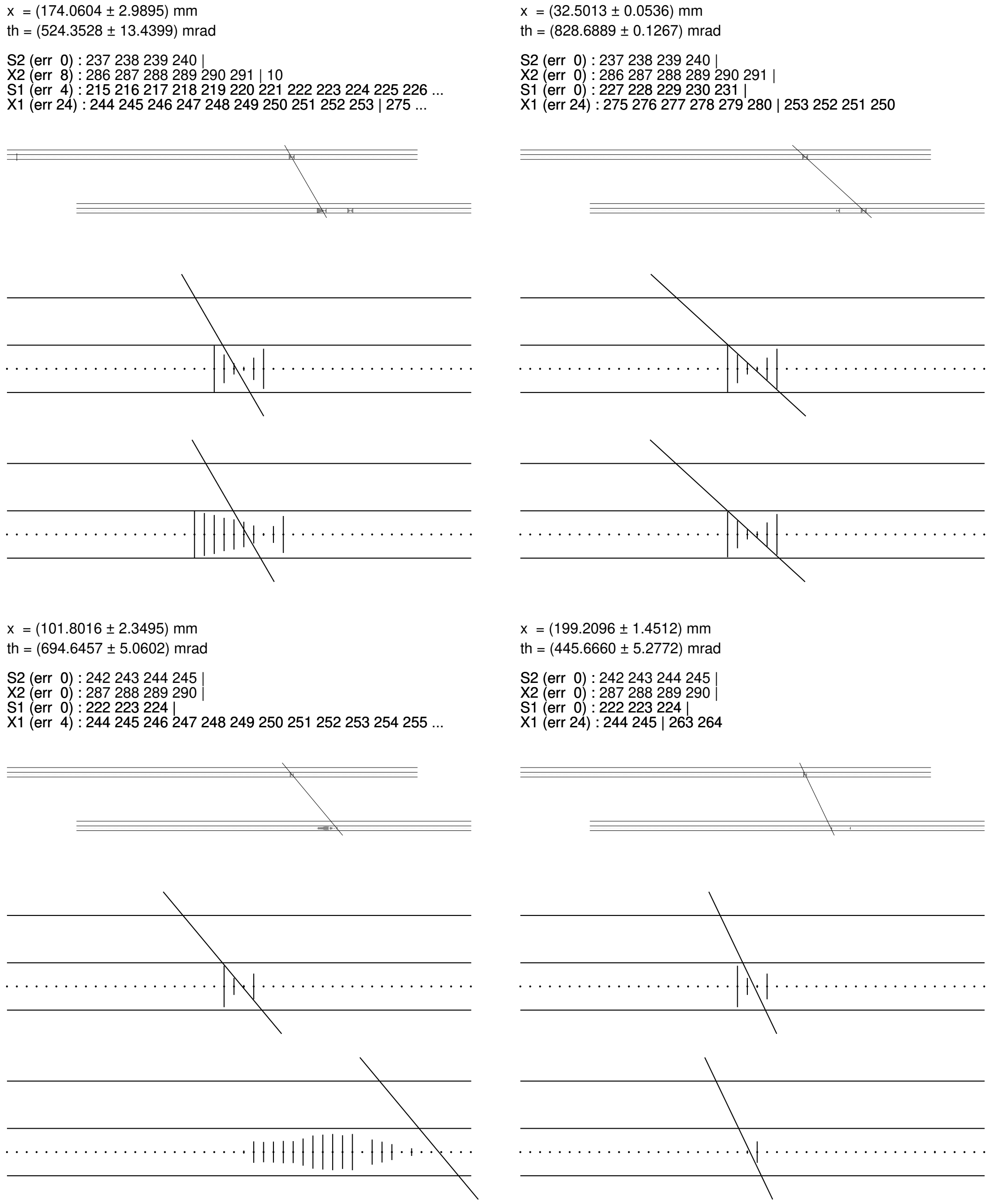
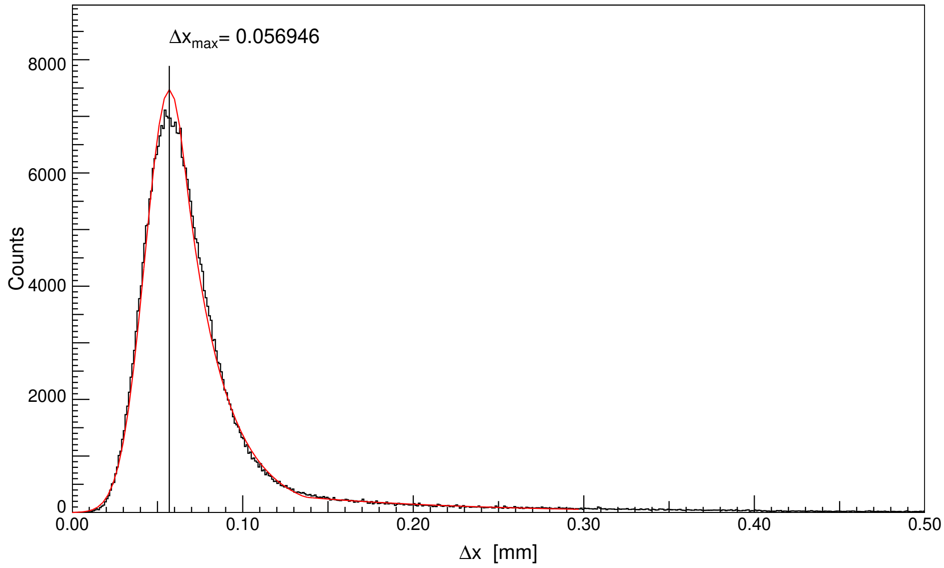


Abb. D.4: Weitere typische Ereignistypen, vgl. Abb. D.3.
Oben: Eine zusätzlich auftretende Spur wird vom Standard-Algorithmus wegen der höheren Signalanzahl als richtiges Cluster fehlinterpretiert und führt zu einer Rekonstruktion, die mit der richtigen Bahn (rechts, mit DDK erhalten) höchstens den Schnittpunkt in der $x2$-Ebene gemeinsam hat.
Unten (auch dies kommt vor, wenn auch äußerst selten): Die in den zusätzlichen Signalen enthaltenen Driftzeiten erfüllen zufällig das DDK und führen zu einem Cluster aus 2 Drähten, das zur Spurrekonstruktion herangezogen wird. Dies führt zu einer Rekonstruktion, die schlechter ist als das Resultat des Standard-Algorithmus, der die Signale aus der $x1$-Ebene einfach verwirft.

(a)



(b)

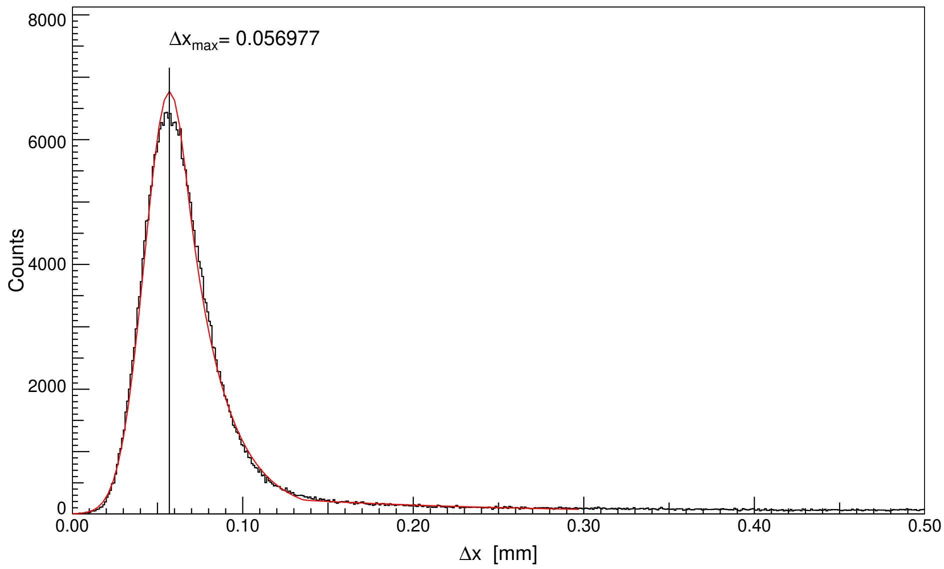
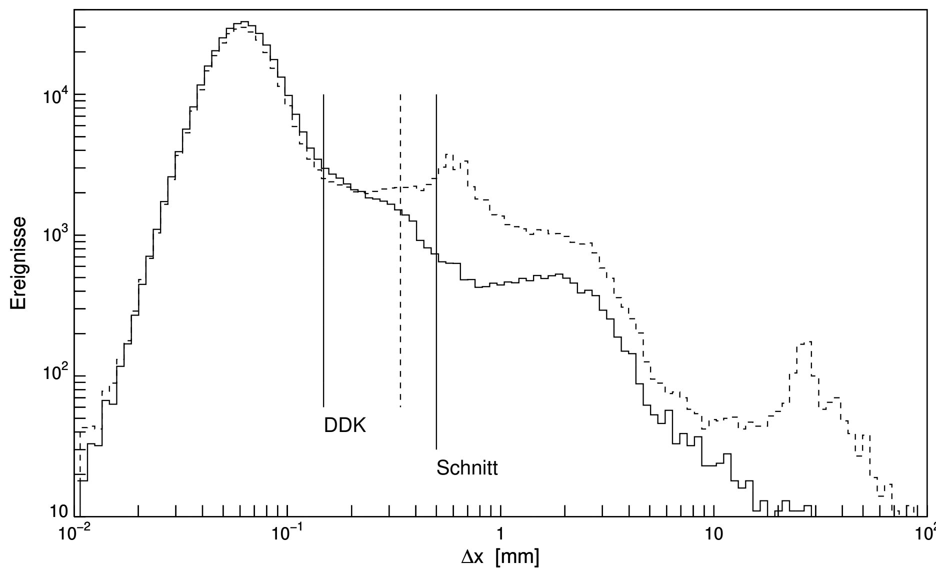


Abb. D.5: Fehlerverteilung Δx mit Anpassung gemäß Gl. (D.6) wie in Abb. D.2, hier allerdings mit optimierten Parametern für Spektrometer A.
(a) Ergebnis mit DDK, (b) mit Standard-Algorithmus. (b) ist in bezug auf die Lage des Maximums (56.98μm) und des *ausschließlich aus den in dieses Histogramm eingetragenen Ereignissen ermittelte* Mittelwerts (87.2μm) vergleichbar zu den Werten, die in [Blo98] (S. 287) angegeben wurden. Der Mittelwert der in Histogramm (a) eingetragenen Ereignisse liegt bei 79.6μm; der Ausläufer zu großen Fehlern ist im Vergleich zu (b) erkennbar unterdrückt (vgl. hierzu auch oberes Histogramm in Abb. D.6). Die aus den gleichen Rohdaten (Run 970414164156) erhaltene Ereigniszahl in Histogramm (a) liegt um ca. 7% höher als in (b). Zur Diskussion s. Text.



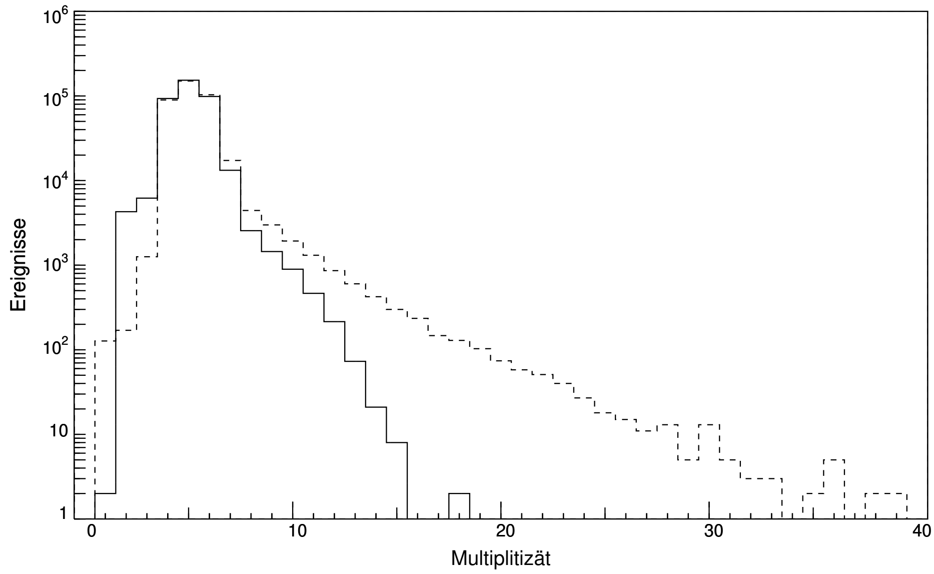
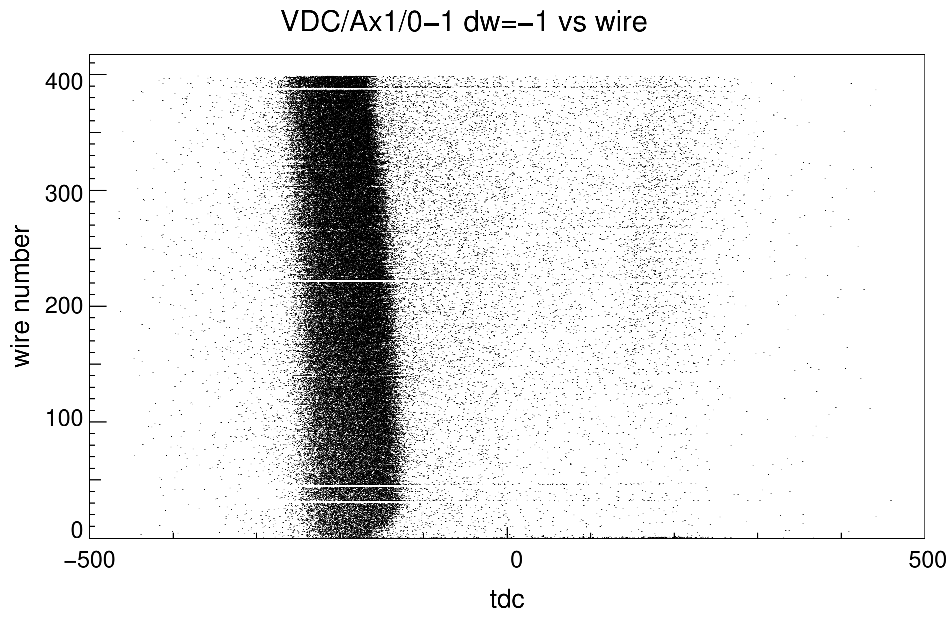


Abb. D.6:
Oben: Die Fehlerverteilung wie in Abb. D.5, jedoch in logarithmischer Auftragung auf beiden Achsen. Der Schnitt, wie er z. B. durch die Histogrammgrenzen in Abb. D.5 gegeben ist, (Δx=0.5 mm) ist angedeutet. Gestricheltes Histogramm: Standard-Algorithmus; durchgezogen: mit DDK. Der „echte" Mittelwert der Fehlerverteilung der Koordinate x (also unter Berücksichtigung *aller* Ereignisse) beträgt im Standard-Algorithmus 339μm (vertikale gestichelte Linie), er wird durch Anwendung des DDK auf 148μm reduziert. Der für Abb. D.5 angegebene Mittelwert spiegelt den tatsächlichen Wert ebensowenig wider wie der in [Blo98] angegebene.
Unten: Multiplizitätsspektrum mit und ohne Anwendung des DDK. Die hohen Multiplizitäten werden durch Anwendung des DDK deutlich unterdrückt.



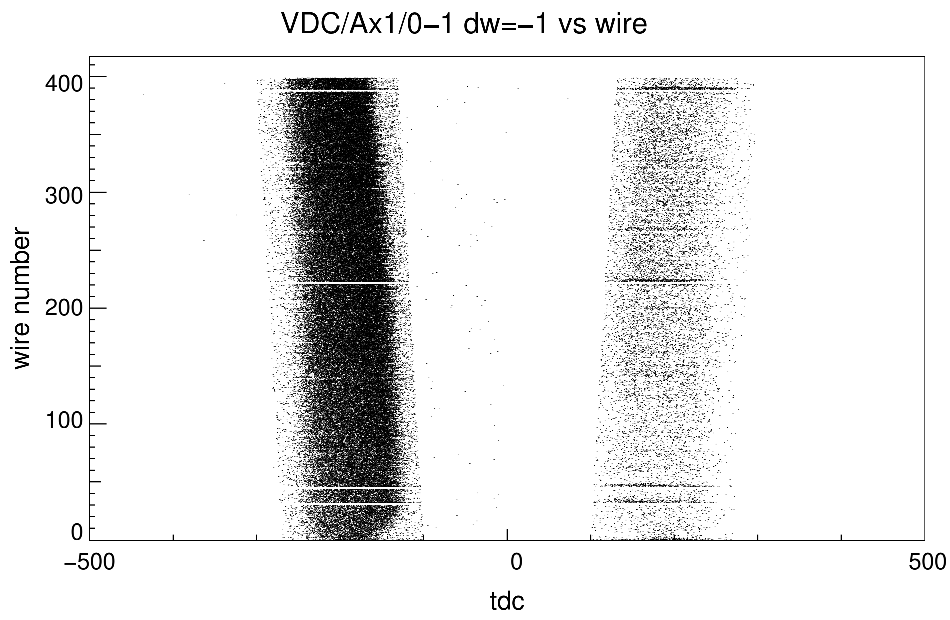
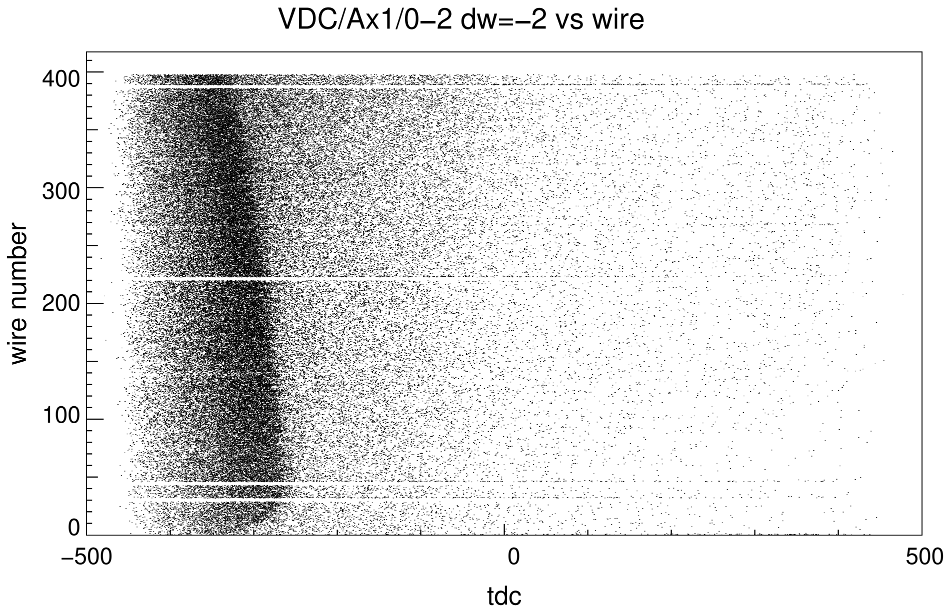


Abb. D.7:
Oben: Driftzeit-Differenzen von Rohdaten in Abhängigkeit von der Drahtnummer in der $x1$-Ebene für Spektrometer A (run970412111612). Auf der x-Achse ist mit `tdc` die Differenz der Driftzeiten vom ersten zum zweiten Draht mit Signal aufgetragen (daher die Bezeichnung "0-1"), und zwar nur dann, wenn die beiden Drähte Nachbarn sind. Dies wird durch Differenzbildung der Drahtnummern abgeprüft, welche in diesem Falle -1 ist (daher "dw=-1"). Da für die ersten beiden Drähte in der Regel mit steigenden Kanalnummern kleinere Driftzeiten verbunden sind, ist die Zeitdifferenz negativ.
Unten: Das Spektrum nach Anwendung des Driftzeit-Differenz-Kriteriums. Die Wirkung des Schnittes ist klar erkennbar.
Es ist auch ein Steifen erkennbar, bei dem die zweite Driftzeit *größer* ist als die erste (positive Differenzwerte); dies ist der Fall für die Drähte, die nach Durchtritt des Teilchens durch die Mittelebene des Detektors getroffen werden. Da es recht unwahrscheinlich ist, dass es sich dabei um den ersten und zweiten Draht eines Clusters handelt, gibt es hier entsprechend weniger Einträge. Sie treten allerdings gehäuft auf, wenn ein Draht systematisch nicht anspricht und somit das Ansprechen vor dem Teilchendurchtritt durch die Mittelebene unwahrscheinlicher ist (weiße Streifen im Band negativer Differenzen korrelieren mit schwarzen Streifen im Band positiver Differenzen).



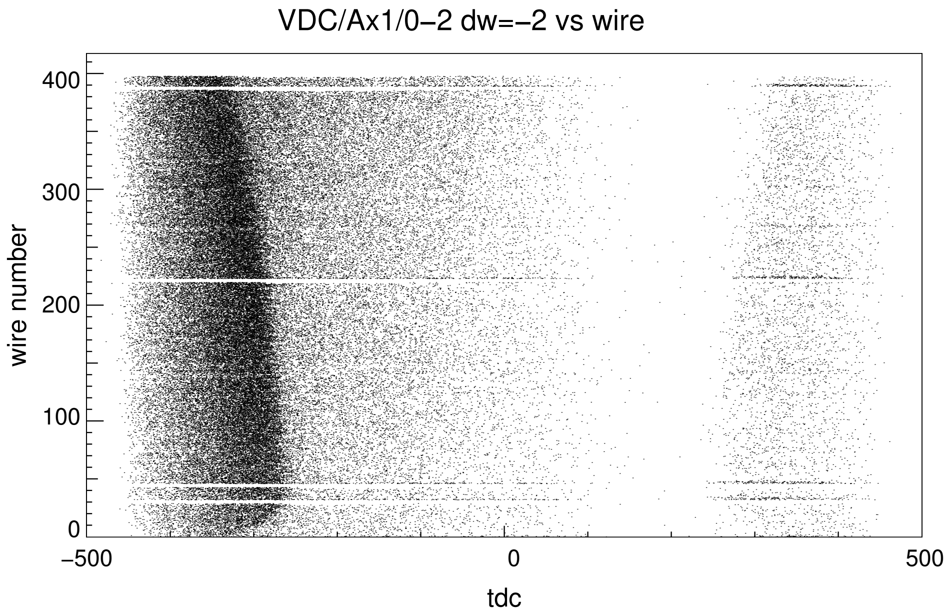


Abb. D.8: Wie D.7, hier allerdings die Driftzeit-Differenz zum *über*nächsten Nachbarn. Diese Differenzen liegen bei etwa doppelt so großen Werten wie die Differenzen zum Nachbarn. In einer Verfeinerung des vorgestellten Algorithmus kann diese Information als zusätzliches Kriterium für „gute Driftzeiten“ genutzt werden.

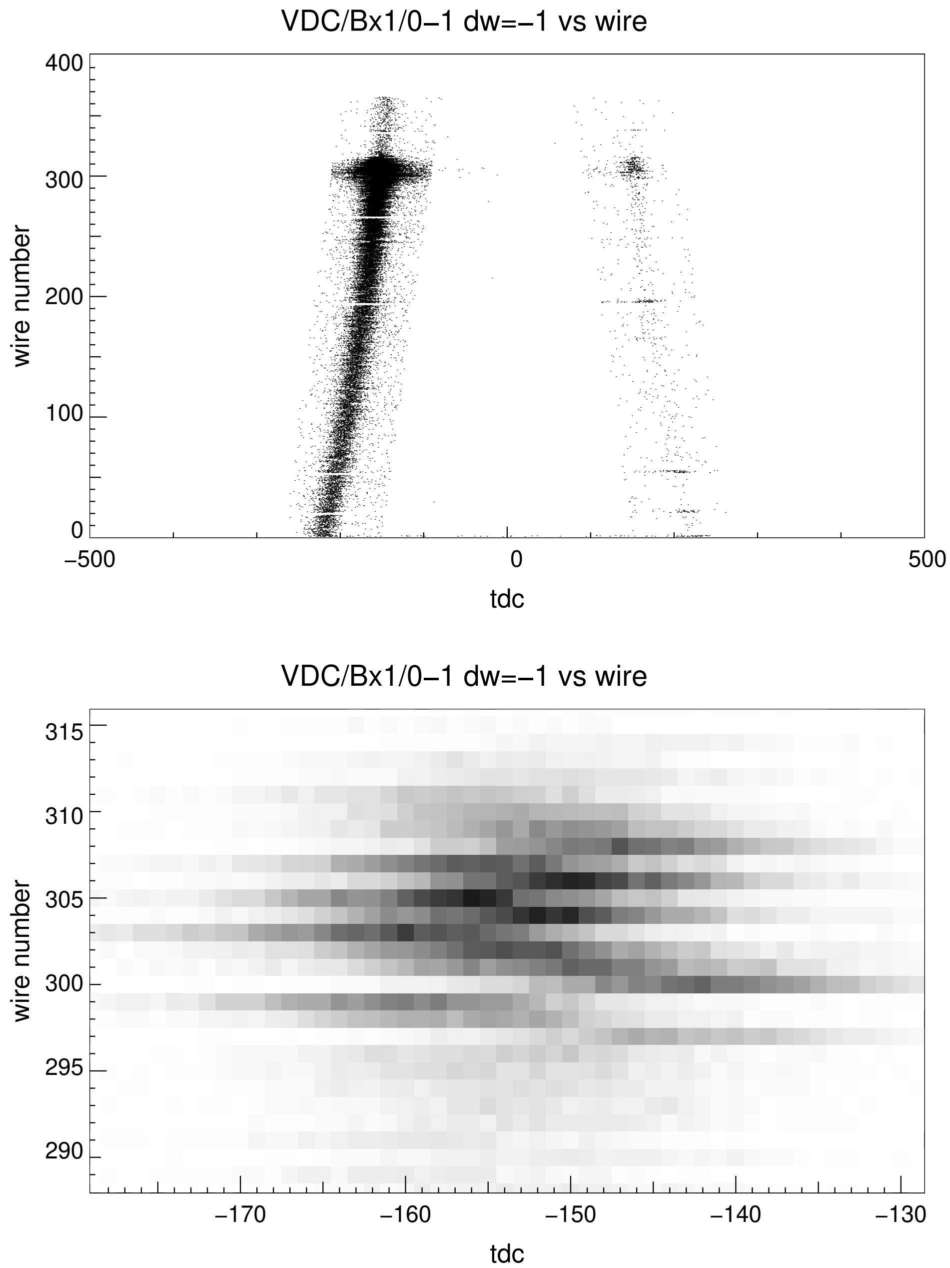


Abb. D.9: Wie D.7, hier für Spektrometer B, gemessen mit fast geschlossenem Kollimator und entsprechend stark eingeschränktem Durchtrittswinkel (run1000115005356). Im Bildausschnitt unten erkennt man recht starke Schwankungen, die sich aus den Offsets und Positionsabweichungen der Drähte ergeben. Da für diese Driftzeit-Differenzen alle Signale verwendet werden (und nicht, wie bei der Offsetbestimmung aus dem Driftzeitspektrum selbst, nur die kürzesten Driftzeiten), ist hiermit ein effektiver Zugriff auf die weiteren Korrekturparameter gegeben.

Anhang E

Details zur externen Bremsstrahlung

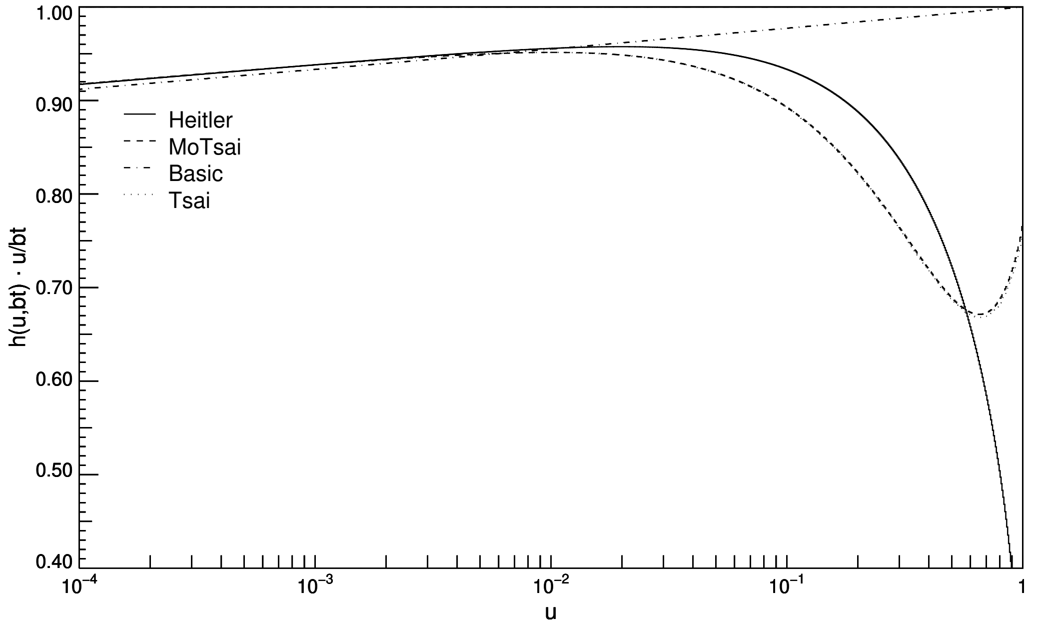


Abb. E.1: Häufigkeitsverteilung für externe Bremsstrahlung mit $bt = 0.01$.

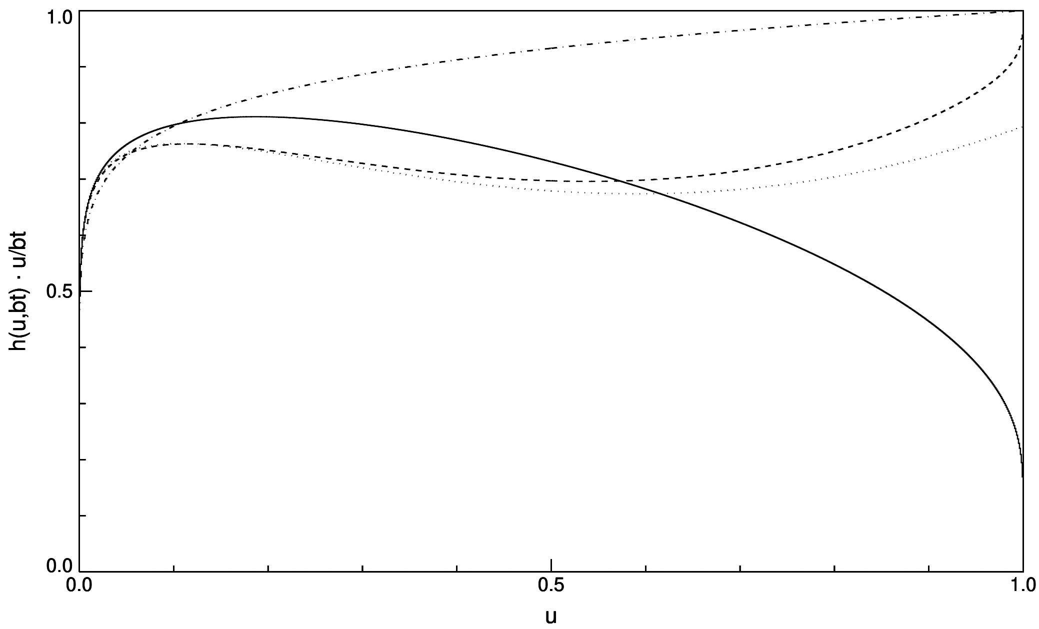


Abb. E.2: Wie Abb. 2.7, aber u-Achse linear (wie in den Abbildungen in [Pie89]).

Anhang F

Schnelle Transfermatrixauswertung

Die Spektrometeroptik wird durch eine Koeffizientenmatrix c^n_{ijkl} beschrieben, durch welche sich die gesuchten Koordinaten t^n der Teilchenspuren am Reaktionsort (Targetkoordinaten) aus den gemessenen Detektorkoordinaten[1] (x, th, y, ph) ergeben [Kor95]:

$$t^n = \sum_{ijkl} c^n_{ijkl}\, x^i th^j y^k ph^l. \tag{F.1}$$

Besonderer Rechenaufwand entsteht offensichtlich bei Auswertung des 4-Produktes $x^i th^j y^k ph^l$, und der ursprünglich verwendete Algorithmus [Kra95] hat daher ein Feld angelegt, in dem alle benötigten Potenzen der vier Koordinaten gespeichert und von dort bei der Bestimmung der Summe F.1 abgerufen wurden. Damit wurde beispielsweise x^4 nur einmal berechnet und dann (je nach Matrix) bis zu 20 mal verwendet.

Man kann die Anzahl der Multiplikationen abermals reduzieren, wenn man berücksichtigt, dass die Rückrechnungs-Matrizen so aufgebaut sind, dass sich jedes 4-Produkt als Produkt zweier 4-Produkte mit kleineren Potenzen schreiben lässt[2], abgesehen von den vier Ausgangswerten $x(= x^1 th^0 y^0 ph^0), y, th, ph$. Ein Beispiel ist $x^5 th^2 y^2 ph = x^2 y^2 \cdot x^3 th^2 ph$.

Der hierfür entwickelte Algorithmus ist ein schönes Beispiel objektorientierten Programmierstils: Bereits in der Initialisierungsroutine wird die dem Algorithmus eigene Baumstruktur implizit erzeugt, indem sich jedes 4-Produkt (die `ftmEntries`) seine „Eltern sucht und merkt“:

```
for (tmp=ftmEntries; tmp; tmp=tmp->getNext())
  tmp->findParents(ftmEntries);
```

Damit wird die benötigte Verkettung automatisch erreicht, ohne dass beispielsweise eine besondere Reihenfolge der 4-Produkte explizit abgeprüft oder nachsortiert werden müsste. Zur Vollständikeit sei noch die *Methode* `findParents` vorgestellt:

[1] Hier wird die im Programmtext benutzte Schreibweise th und ph für θ und ϕ genommen

[2] Wenn nicht für alle 4-Produkte eine solche Zerlegung besteht, wie im allgemeinen Falle, so kann durch Einfügen von Zwischenprodukten die minimale Anzahl von nötigen Produktbildungen erreicht werden

```
int
ftmEntry::findParents(ftmEntry *entries)
{
  int i, found;
  ftmEntry *myMom, *myDad;

  for (myMom=entries; myMom && myMom!=this; myMom=myMom->next) {
    for (myDad=entries; myDad && myDad!=this; myDad=myDad->next) {
      for (found=1,i=0; i<4; i++)
        found &= ((*myMom)(i)+(*myDad)(i) == powers[i]);
      if (found) {
        mom = myMom;
        dad = myDad;
        return 0;
      }
    }
  }

  return -1;
}
```

Der im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte Algorithmus wurde von M. Distler in seine aktuelle Form gebracht.

Anhang G

Gemessene Kinematiken

q' MeV/c	Name	k_e MeV/c	$k_{e'}$ MeV/c	$\vartheta_{e'}$	p' MeV/c	$\vartheta_{p'}$
111.5	E2	855	539.4	52.18°	655.0	30.6°
	E23				596.0	
	E3				536.4	
	E13				483.0	34.9°
	E1					39.2°
90.0	D2	825	537.5	53.02°	636.4	33.2
	D23				572.8	
	D3				521.0	
	D13				500.0	37.1°
	D1					41.0°
67.5	C2	795	536.5	53.78°	636.3	36.8°
	C12				556.0	
	C1				536.0	41.7°
45.0	B2	765	534.7	54.51°	601.2	38.4°
	B1				550.0	40.2°
33.6	A2	750	533.9	54.87°	583.2	39.7°
	A1				546.3	40.7°

Tab. G.1: Kinematiken des VCS-Experiments. q' ist die Energie des reellen Photons im Photon-Proton-Schwerpunktsystem, alle anderen Größen sind im Laborsystem angegeben. Nicht angegebene Werte sind den darüberliegenden Zeilen zu entnehmen.

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem Herrn Professor Thomas Walcher für die aufregende und herausfordernde Themenstellung und für seine immer gegenwärtige Unterstützung.

Je remercie Nicole d'Hose pour son soutien et pour son engagement dans la direction du «groupe VCS», et Julie Roche, David Lhuillier, Sophie Kerhoas et Gabriel Tamas pour leur collaboration constructive et pour le temps passé ensemble. Aussi (avec un sourire) en français, Luc Van Hoorebeke, pour avoir toujours été capable de creér une bonne atmosphère, outre ses autres qualités. Les jeux et les complications des langues, un jour frustrant, l'autre éclairant - c'est notre dieu Tetagramagramá? Pour moi, en tout cas, toute l'expérience est inoubliable ainsi que, je crois, pour tous ceux qui y ont vraiment participé.

Marc Vanderhaeghen danke ich für die fruchtbare Zusammenarbeit und für die sorgfältige Durchsicht einer Vorversion dieser Arbeit.

Allen „Mainzern", insbesondere den Mitgliedern der A1-Kollaboration und der Beschleuniger-Gruppe, danke ich für die gemeinsamen Anstrengungen, ohne die das Ziel dieser Arbeit nicht hätte erreicht werden können. Insbesondere bin ich Harald Merkel und Michael Distler für die engagierte Zusammenarbeit dankbar und Thomas Pospischil, Ingo Ewald und Michael Kohl für die anregenden mittäglichen Diskussionen.

Lebenslauf

Jan Michael Friedrich
Drususstraße 16
55131 Mainz
Staatsangehörigkeit: deutsch

9. Mai 1969	geboren in Wiesbaden-Sonnenberg
1975 bis 1979	Münchfeld-Grundschule Mainz
1979 bis Juni 1988	Rabanus-Maurus-Gymnasium Mainz
1988/89	Grundwehrdienst
WS 1989/90	Beginn des Studiums der Physik und Mathematik an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Juli 1991	Vordiplomprüfung in Physik
Oktober 1991	Vordiplomprüfung in Mathematik
WS 1992/93 und SS 1993	Auslandsstudium mit einem DAAD-Stipendium in Seattle (USA)
Juli 1994 bis Dezember 1995	Anfertigung der experimentellen Diplomarbeit an MAMI unter der Anleitung von Prof. Dr. Th. Walcher mit dem Thema „Akzeptanzmessungen an der 3-Spektrometer-Anlage“
Februar 1996	Abschluss der Diplomprüfung in Physik
seit März 1996	Arbeit an der experimentellen Doktorarbeit an MAMI unter der Anleitung von Prof. Dr. Th. Walcher, dabei wissenschaftlicher Angestellter im Rahmen des Sonderforschungsbereichs „Mittelenergiephysik mit elektromagnetischer Wechselwirkung“, bzw. ab 1999 „Vielkörperstruktur stark wechselwirkender Teilchen“
seit Februar 2000	Wissenschaftlicher Angestellter an der Technischen Universität München am Lehrstuhl von Prof. Dr. Stephan Paul

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

Literatur zu Kapitel 2 (Strahlungskorrekturen) separat, s.u.

[Ber00] J. Bermuth: Dissertation, Institut für Physik, Mainz, in Vorbereitung

[BjD65] J. D. Bjorken, S. D. Drell: Relativistische Quantenmechnik
McGraw-Hill Inc., New York 1965

[Blo98] K. I. Blomqvist *et al.*:
The three-spectrometer facility at the Mainz microtron MAMI
Nuclear Instruments and Methods **A 403** (1998) 263-301

[Bro95] I. N. Bronstein, K. A. Semendjaev, G. Musiol, H.Mühlig:
Taschenbuch der Mathematik,
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1995

[Dis90] M. O. Distler: Aufbau und Test einer vertikalen Driftkammer
Diplomarbeit IfK (1990)

[Dis95] M. O. Distler: Cindy++ und chlib++ user's guide, IfK (1996)

[Dis96] M. O. Distler: Elektro-Pionproduktion am Proton an der Schwelle
Dissertation IfK (1996)

[Dre97] D. Drechsel, G. Knöchlein, A. Metz, S. Scherer
Pysical Review C **55** (1997) 424

[Dre98] D. Drechsel, G. Knöchlein, A. Yu. Korchin, A. Metz, S. Scherer
Pysical Review C **57** (1998) 941

[Ewa96] I. Ewald: Entwicklung und Erprobung einer langen, dünnen
Flüssig-Wasserstoff-Targetzelle
Diplomarbeit IfK (1996)

[Fri95] Friedrich, J.M.: Akzeptanzmessungen an der 3-Spektrometer-Anlage
Diplomarbeit, IfK (1995)

[GLT95] P. A. M. Guichon, G. Q. Liu, A. W. Thomas:
Virtual Compton Scattering
Nuclear Physics **A591** (1995) 606

[GuV98] P. A. M. Guichon, M. Vanderhaeghen:
Virtual Compton Scattering off the nucleon
Prog. Part. Nucl. Physics **41** (1998) 125

[Hei54] W. Heitler: The Quantum Theory of Radiation
Oxford University Press, London 1954

[Hem97] Th. R. Hemmert, B. R. Holstein, G. Knöchlein, S. Scherer
Physical Review **D55** (1997) 2630
Physical Review Letters **79** (1997) 22

[Höh76] G. Höhler *et al*: Analysis of electromagnetic nucleon form factors
Nuclear Physics **B114** (1976) 505

[Jac54] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics
J. Wiley&Sons Inc., New York 1962

[Knö97] G. Knöchlein: Virtual Compton Scattering off the Nucleon and Chiral Perturbation Theory
Dissertation IfK, Shaker Verlag Aachen 1997

[Kor95] M. Korn:
Entwicklung des Bahnrückverfolgungsverfahrens für die Drei-Spektrometer-Anlage und experimentelle Bestimmung der Abbildungseigenschaften der Spektrometer A und B mit elastischer Elektronenstreuung
Dissertation, IfK (1995)

[Kra95] H. Kramer: Grundlagen für das Steuerungs- und Überwachungssystem der Drei-Spektrometer-Anlage am Elektronenbeschleuniger MAMI
Dissertation, IfK (1995)

[Leo87] W. R. Leo: Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments
Springer-Verlag 1987

[Leu94] M. Leuschner *et al.*: Quasielastic proton knockout from ^{16}O
Pysical Review **C49** (1994) 957

[Lhu97] D. Lhuillier: Diffusion Compton Virtuelle a basse energie
Dissertation, Université de Caen 1997

[Low54] F. E. Low: Scattering of Light of Very Low Frequency by Systems of Spin $\frac{1}{2}$
Physical Review **96** (1954) 1428

[MeD96] A. Metz, D. Drechsel
Zeitschrift für Physik **356** (1996) 351

[MMD96] P. Mergell, U.-G. Meißner, D. Drechsel
Nuclear Physics **A596** (1996) 367

[Mer00] H. Merkel: private Mitteilung

[NuR88] W. H. Press, S. A. Saul, W. T. Vetterling, B. P. Flannery:
Numerical Recipes in C, Cambridge University Press 1988

[Per87] D. Perkins: Introduction to High Energy Physics
Addison-Wesley Publishing Company 1987

[Pos00] Th. Pospischil: Dissertation, Mainz, in Fertigstellung

[Pru83] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev:
Integrals and Series, engl. Übersetzung Glasgow 1986 (orig. russ. 1983)

[PSD00] B. Pasquini, S. Scherer, D. Drechsel, in Vorbereitung

[RFL00] J. Roche, J. M. Friedrich, D. Lhuillier *et al.*:
The first determination of Generalized Polarizabilities of the Proton by a Virtual Compton Scattering experiment
eingereicht zur Veröffentlichung bei Physical Review Letters

[Roc98] J. Roche: Diffusion Compton Virtuelle a MAMI et mesure des polarisabilités généralisées du proton
Dissertation, Université Blaise Pascal 1998

[Sak69] J. J. Sakurai: Advanced Quantum Mechanics
Addison-Wesley Publishing Company 1969

[Sim80] G. G. Simon, Ch. Schmitt, F. Borkowski, V. H. Walther:
Absolute electron-proton cross sections at low momentum transfer measured with a high pressure gas target system
Nuclear Physics **A333** (1980) 381

[Vdh96] M. Vanderhaeghen
Physics Letters **B368** (1996) 13

[Voe82] N. Voegler, J. Friedrich:
A background free oxygen target for electron scattering measurements with high beam currents
Nuclear Instruments and Methods **198** (1982) 293

[Wal94] R. C. Walker: Measurements of the proton elastic form factors for $1 \leq Q^2 \leq 3$ (GeV/c)^2 at SLAC
Physical Review **D49** (1994) 5671

[WeiXX] M. Weis: Dissertation, in Vorbereitung

Artikel zu Strahlungskorrekturen in chronologischer Reihenfolge

[Bet32] H. Bethe: Bremsformel für Elektronen relativistischer Geschwindigkeit.
Zeitschrift für Physik **76** (1932) 293

[BHe34] H. Bethe, W. Heitler: On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons
Proceedings of the Royal Society SA **146** (1934) 83

[BlN37] F. Bloch, A. Nordsieck: Note on the Radiation Field of the Electron
Phys. Rev. **52** (1937) 54

[BOp46] H. Bethe, R. Oppenheimer: Reaction of Radiation on Electron Scattering and Heitler's Theory of Radiation Damping
Phys. Rev. **70** (1946) 451

[Sch49] J. Schwinger: The Electrodynamic Properties of the Electron – Radiative Corrections to Scattering,
Phys. Rev. **76** (1949) 790

[SDr52] L. I. Schiff: Radiative Correction to the Angular Distribution of Nuclear Recoils from Electron Scattering,
S. D. Drell: Recoil Correction to Bremsstrahlung Cross Section
Phys. Rev. **87** (1952) 750, 753

[JaR54] J. M. Jauch, F. Rohrlich: The infrared divergence
Helvetica Physica Acta **27** (1954) 613

[Kal58] G. Källén: Quantenelektrodynamik, Handbuch der Physik Bd. V,
Springer-Verlag 1958

[Lew58] L. Lewin: Dilogarithms and associated functions
MacDonald London 1958

[Tsa61] Y. S. Tsai: Radiative Corrections to Electron-Proton Scattering
Physical Review **122** (1961) 1898

[YFS61] D. R. Yennie, S. C. Frautschi, H. Suura:
The Infrared Divergence Phenomena and High-Energy Processes
Annals of Physics **13** (1961) 379

[TsW66] Y. S. Tsai, V. Whitis: Thick-Target Bremsstrahlung and Target Considerations for Secondary-Particle Production by Electrons
Physical Review **149** (1966) 1248

[MIT67] MIT summer school 1967, darin insbesondere
E. Lomon: Radiative Corrections
J. Bergstrom: Line Shapes and the Radiative Tail Near the Elastic Peak

[Sie69] R. H. Siemann *et al.*: Wide-Angle Bremsstrahlung
Phys. Rev. Lett. **22** (1969) 421

[MMT69] L. C. Maximon: Comments on Radiative Corrections,
L. W. Mo, Y. S. Tsai: Radiative Corrections to Elastic and Inelastic ep and μp Scattering
Review of Modern Physics **41** (1969) 193, 205

[Tsa71] Y. S. Tsai: Radiative Corrections to Electron Scatterings
SLAC-PUB-848 (1971)

[Ear73] R. A. Early: Numerical Solution of the Electron Diffusion Equation
Nuclear Instruments and Methods **109** (1973) 93

[Tsa74] Y. S. Tsai: Pair production and bremsstrahlung of charged leptons
Review of Modern Physics **46** (1974) 815

[tHV79] G. 't Hooft, M. Veltman: Scalar one-loop integrals
Nuclear Physics **B153** (1979) 365

[Pie89] M. Pieroth (Diplomarbeit Mainz 1986), J. Friedrich, P. Semmel,
N. Voegler, J. LeRose, P. D. Zimmermann:
Radiation Tail in Electron Scattering: Approximations in the Calculation

and Comparison to Measurements
Nuclear Instruments and Methods **B36** (1989) 263

[Ros99] R. Rosenfelder: Coulomb Corrections to Elastic Electron-Proton Scattering and the Proton Charge Radius
nucl-th/9912031, Dezember 1999

[Vdh00] M. Vanderhaeghen, J. M. Friedrich, D. Lhuillier, D. Marchand, L. Van Hoorebeke, J. Van de Wiele:
QED Radiative Corrections to Virtual Compton Scattering
hep-ph/0001100, Januar 2000

[MTj00] L. C. Maximon, J. A. Tjon:
Radiative Corrections to Electron-Proton Scattering
nucl-th/0002058, Februar 2000

[Fri00] J. Friedrich, private Mitteilung