

**Modellunabhängige Separation von Strukturfunktionen  
aus simulierten  $(e, e'p)$ -Wirkungsquerschnitten  
und Optimierung geplanter Koinzidenz-Experimente  
in bezug auf maximalen Informationsgewinn**

Dissertation

zur Erlangung des Grades

“Doktor der Naturwissenschaften”

am Fachbereich Physik

der Johannes Gutenberg-Universität

in Mainz

Thomas Veit

geb. in Kirchheimbolanden/Pfalz

Mainz 1992

Dekan:	Prof. Dr. M. Steiner
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. J. Friedrich
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Th. Walcher
3. Berichterstatter:	Prof. Dr. S. Brandt
Tag der mündl. Prüfung:	12. Mai 1993

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2. Der <math>(e, e'p)</math> – Formalismus</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 Kinematik . . . . .	3
2.2 Wirkungsquerschnitt und Strukturfunktionen . . . . .	5
<b>3. Das Problem der Separation von Strukturfunktionen</b> . . . . .	<b>9</b>
3.1 Punktweise Separationen . . . . .	9
3.1.1 Die Methode von de Forest . . . . .	10
3.1.2 Die Methode von Donnelly . . . . .	13
3.1.3 Verallgemeinerte Methode . . . . .	14
3.2 Modellunabhängige Separation mit der Methode des flexiblen Ansatzes . . . . .	16
<b>4. Test der modellunabhängigen Separation durch ein simuliertes <math>(e, e'p)</math>–Experiment</b> . . . . .	<b>19</b>
4.1 Die Kinematiken des simulierten Experiments . . . . .	19
4.2 Die Festlegung des Separationsgebietes . . . . .	22
4.3 Erzeugung von Pseudodaten durch Simulation des Experiments . . . . .	25
4.4 Modellunabhängige Analyse der Pseudodaten . . . . .	27
4.5 Statistischer Test des Verfahrens . . . . .	32
<b>5. Optimierung von <math>(e, e'p)</math>–Experimenten durch Informationsmaximierung</b> . . . . .	<b>34</b>
5.1 Optimierung bei punktweiser Separation – Programm OPOISEP . . . . .	35
5.1.1 Optimierung bei ungewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen . . . . .	37
5.1.2 Optimierung bei gewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen . . . . .	39
5.2 Optimierung bei modellunabhängiger Separation – Programm OP-TEEP . . . . .	40
5.2.1 Optimierung bei ungewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen . . . . .	42
5.2.2 Optimierung bei gewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen . . . . .	49
<b>6. Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>A. Analytische Matrixinversion bei der punktweisen Separation</b> . . . . .	<b>57</b>
A.1 Die Methode von de Forest . . . . .	57
A.2 Die Methode von Donnelly . . . . .	59
<b>B. Konstruktion der Basis des flexiblen Ansatzes</b> . . . . .	<b>62</b>
B.1 Tensorprodukt linearer Räume . . . . .	62
B.2 Basis für die $\Theta_{pq}$ –Richtung . . . . .	63
B.3 Splines als Basisfunktionen . . . . .	66
<b>C. Kinematische Beziehungen</b> . . . . .	<b>69</b>

C.1	Transformation von Spektrometerkoordinaten auf physikalische Koordinaten – Modul TRANSPHYS . . . . .	69
C.2	Berechnung der kinetischen Energie des Protons aus den physikalischen Koordinaten bei festem $E_m$ – Modul KINENERG . . . . .	72
C.3	Die beiden angepassten Kinematiken des simulierten Experiments . . . . .	74
<b>D.</b>	<b>Das Modell für die quasielastische Streuung . . . . .</b>	<b>76</b>
D.1	Erzeugung eines Datenfiles der Strukturfunktionen – Programm GENRESP . . . . .	76
D.2	Die Distordierung des Elektrons bei der quasielastischen Streuung . . . . .	78
<b>E.</b>	<b>Monte–Carlo–Algorithmen . . . . .</b>	<b>79</b>
E.1	Phasenraumvolumen und Zählrate beim 6–fach differentiellen Wirkungsquerschnitt . . . . .	79
E.2	Phasenraumvolumen und Zählrate beim 5–fach differentiellen Wirkungsquerschnitt . . . . .	83
E.3	Die Zuordnung der Bins zu physikalischen Koordinaten . . . . .	86
<b>F.</b>	<b>Anwendung der Informationsungleichung auf die punktweise Separation der Strukturfunktionen . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>G.</b>	<b>Analytische Optimierung in paralleler Kinematik . . . . .</b>	<b>91</b>

# 1. Einleitung

Hochenergetische Elektronen, wie sie von Mainzer Mikrotron (*MAMI*) erzeugt werden, sind eine ausgezeichnete Sonde zur Untersuchung der Kernstruktur. Ihr Vorteil gegenüber hadronischen Projektilen beruht darauf, daß die Wechselwirkung zwischen Elektron und Kern elektroschwacher Natur ist und deshalb mit hoher Präzession im Rahmen der QED berechnet werden kann. Wegen der kleinen Kopplungskonstanten  $\alpha$  ( $\simeq 1/137$ ) ist bei leichten bis mittelschweren Kernen bereits der Ein-Photon-Austausch hinreichend genau, so daß in dieser Näherung die elektromagnetischen Ströme des Kerns bei einem wohldefinierten Energie- und Impulsübertrag getestet werden.

Detaillierte Information über Ein-Teilchen-Eigenschaften der Kerne ist in  $(e, e'p)$ -Experimenten enthalten, bei denen das gestreute Elektron in Koinzidenz mit einem vom Kern emittierten Proton nachgewiesen wird. Aufgrund allgemein gültiger Prinzipien läßt sich der Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion in Anteile von vier Strukturfunktionen zerlegen, welche die gesuchte Information über die Übergangsströme des hadronischen Systems enthalten (Kap. 2). Daher sind experimentell bestimmte Strukturfunktionen hervorragende Observable zum Test theoretischer Kernmodelle, wobei die verschiedenen Funktionen auf Teilaspekte der Modelle unterschiedlich empfindlich sind.

Bei den üblichen Methoden werden die Strukturfunktionen an diskreten Stellen aus gemessenen Wirkungsquerschnitten separiert (Abschn. 3.1). Dazu muß jedoch die im Experiment über ein endliches Phasenraumvolumen erfaßte Information so kontrahiert werden, daß die Wirkungsquerschnitte in den kinematischen Variablen, von denen die Strukturfunktionen abhängen, übereinstimmen. Dieses Vorgehen erfordert entsprechende Korrekturen, bei denen Annahmen über die Variation des Wirkungsquerschnitts innerhalb des relevanten Phasenraums eingehen.

Das erste Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer Methode, die auf die obengenannte Kontraktion weitgehend verzichtet und stattdessen die gesamte, im Phasenraum enthaltene Information nutzt, um die Strukturfunktionen innerhalb eines ausgedehnten Gebietes  $G$  zu bestimmen. Diese *modellunabhängige Separation* wird in Abschnitt 3.2 erläutert und in Kapitel 4 wird ein ausführlicher Test der Methode durch Simulation eines  $(e, e'p)$ -Experiments beschrieben.

Der zweite Aspekt dieser Arbeit behandelt ein Problem, das bei der Planung eines Streuexperiments auftritt. Dabei geht es um die Entscheidung, unter welchen Kinematiken einzelne Messungen durchzuführen sind und wie die Strahlzeit auf die Messungen verteilt werden soll, damit bei vorgegebener Meßzeit ein Maximum an Information gewonnen wird. Diese Aufgabe ist dadurch besonders kompliziert, daß die physikalischen Größen, auf die das Experiment abzielt, aus den gemessenen Wirkungsquerschnitten erst durch aufwendige Analyseverfahren

gewonnen werden. Aus diesem Grund und wegen der großen Zahl der Parameter, die das Experiment beschreiben, ist eine optimale Lösung des Problems nicht leicht zu finden; dabei stellt bereits die Frage was “optimal” ist ein Problem dar.

Für den Spezialfall von  $(e, e'p)$ -Experimenten, deren Ziel die Separation von Strukturfunktionen ist, sollte ein Verfahren zur Bestimmung der optimalen Experiment-Parameter im Detail ausgearbeitet werden. Dieses Optimierungsprogramm baut auf die im ersten Teil erarbeiteten Ergebnisse auf; zusätzlich mußte das Hauptproblem jeder Optimierung, die Angabe einer geeigneten “Zielfunktion” und ihre Maximierung bzw. Minimierung, gelöst werden. Gestützt auf die Informationstheorie wird dazu eine Varianzfunktion benutzt, die sich invers zu der Information verhält, die in den Messungen über die Strukturfunktionen enthalten ist. Durch Minimierung der Varianzfunktion wird für ein spezielles Experiment eine Lösung angegeben.

## 2. Der $(e, e'p)$ – Formalismus

In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick über den  $(e, e'p)$ – Formalismus gegeben und es werden einige grundlegende Begriffe erklärt. Als Literatur für den gesamten  $(e, e'p)$ –Themenkomplex sind besonders die Übersichtsartikel von Frullani und Mougey [26] und von Boffi, Giusti und Pacati [12] zu empfehlen; die Darstellung des Wirkungsquerschnitts und der Strukturfunktionen, wie sie in Abschnitt 2.2 erfolgt, orientiert sich dagegen im wesentlichen an den Arbeiten von Picklesimer und van Orden [39, 40, 41]. Weitere Details, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, findet man z.B. bei Donnelly [20, 21, 22], Raskin und Donnelly [23, 44], Drechsel und Giannini [24] und Boffi, Giusti und Pacati [8, 9, 10, 11].

### 2.1 Kinematik

Die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Elektron und Kern wird für leichte bis mittelschwere Kerne mit hinreichender Genauigkeit in *1. Bornscher Näherung* (Abb. 2.1) beschrieben. In dieser Näherung überträgt ein virtuelles Photon (*Ein-Photon-Austausch*) den Viererimpuls  $q = (\omega, \vec{q})$  auf den Targetkern  $A$ , der vor dem Stoß durch den Vierervektor  $P_A = (E_A, \vec{P}_A)$  beschrieben wird. Der Impulsübertrag des Photons ist dabei durch die Vierer-Vektoren  $k_i = (e_i, \vec{k}_i)$  und  $k_f = (e_f, \vec{k}_f)$  des einlaufenden bzw. auslaufenden Elektrons, gemäß

$$q = k_i - k_f \quad (2.1)$$

bestimmt. Das ausgetauschte Photon ist raum-artig, d.h

$$q^2 := \omega^2 - |\vec{q}|^2 < 0 \quad ; \quad (2.2)$$

im folgenden wird meistens die positive Größe

$$Q^2 := -q^2 \quad (2.3)$$

verwendet.

Oberhalb der Teilchenschwelle kann ein Proton mit  $p = (E_p, \vec{p})$  den Kernverband verlassen. Im *Zwei-Arm-Experiment* wird dieses Proton in Koinzidenz mit dem auslaufenden Elektron nachgewiesen, woraus man den *exklusiven Wirkungsquerschnitt*<sup>1</sup> bestimmt. Der Restkern  $B$  mit  $P_B = (E_B, \vec{P}_B)$  wird dabei nicht registriert. Beim  $(e, e')$ –Experiment (*Einarm-Experiment*) bleibt auch noch das Proton unbeobachtet (*inklusive Wirkungsquerschnitt*).

---

<sup>1</sup>Präziser ist dafür die Bezeichnung semi-inklusive Wirkungsquerschnitt [12].

$$\begin{array}{ccc}
(e_f, \vec{k}_f) & (E_B, \vec{P}_B) & (E_p, \vec{p}) \\
& (\omega, \vec{q}) & \\
(e_i, \vec{k}_i) & & (E_A, \vec{P}_A) \\
\text{-bb-error} = & = &
\end{array}$$

Abbildung 2.1: Die  $(e, e'p)$ -Übergangsamplitude in 1. Bornscher Näherung.

Damit man die Reaktionskinematik direkt aus Meßgrößen bestimmen kann, werden die beteiligten Vierer-Vektoren im Laborsystem entwickelt. In diesem System ist  $e_i$  durch die Beschleunigerenergie gegeben und  $\vec{k}_f, \vec{p}$  sind die beim Koinzidenz-Experiment in den Spektrometern registrierten Dreier-Impulse. Weil die Masse  $m_e$  des Elektrons in den hier betrachteten kinematischen Bereichen gegenüber  $e_i$  und  $|\vec{k}_f|$  vernachlässigt werden kann, gilt der “*extreme relativistic limit*” (*ERL*), d.h.

$$|\vec{k}_i| \simeq e_i \quad (2.4)$$

$$e_f \simeq |\vec{k}_f| . \quad (2.5)$$

Im Laborsystem ruht der Targetkern  $A$  der Masse  $M_A$  und wird daher durch den Vierer-Vektor  $P_A = (M_A, \vec{0})$  beschrieben.

Als “*missing momentum*” wird der Dreier-Impuls

$$\vec{p}_m := -\vec{P}_B = \vec{p} - \vec{q} \quad (2.6)$$

bezeichnet; er ist in der PWIA (“*plane wave impulse approximation*”) – bei der angenommen wird, daß das auslaufende Proton nicht mehr mit dem Restkern  $B$  wechselwirkt – identisch mit dem Impuls des Protons vor dem Stoß.

Die Differenz der Gesamtenergien (Ruheenergien und kinetische Energien) vor und nach dem Stoß ergibt eine von Null verschiedene “*missing energy*”

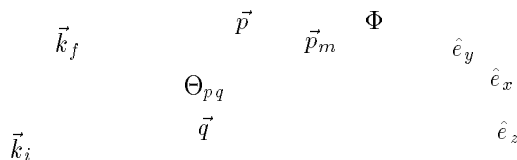
$$E_m = \omega - T_p - T_B ; \quad (2.7)$$

hier sind  $T_p$  und  $T_B$  die kinetischen Energien des auslaufenden Protons bzw. des Restkerns  $B$ . Diese fehlende Energie setzt sich aus der Separationsenergie  $E_{sep}$  des Protons und aus einer möglichen Anregungsenergie  $E_x$  des Restkerns zusammen, d.h.

$$E_m = E_{sep} + E_x . \quad (2.8)$$

Zur Veranschaulichung der verwendeten Koordinaten ist in Abbildung 2.2 die Reaktionskinematik im Impulsraum graphisch dargestellt. Das dabei benutzte





-bb-error = =

Abbildung 2.2: Die Kinematik eines typischen  $(e, e'p)$ -Experiments.

Bezugssystem ist durch

$$\left\{ \hat{e}_x = \hat{e}_y \times \hat{e}_z, \hat{e}_y = (\hat{k}_i \times \hat{k}_f) / \sin \Theta_e, \hat{e}_z = \hat{q} \right\} \quad (2.9)$$

gegeben, wobei  $\Theta_e$  der Winkel zwischen  $\vec{k}_i$  und  $\vec{k}_f$  ist (*Elektronstreuwinkel*). Der später verwendete Winkel zwischen  $\vec{k}_i$  und  $\vec{p}$  wird mit  $\Theta_p$  bezeichnet. Im Bezugssystem (2.9) wird die Richtung des Protonimpulses  $\vec{p}$  durch den Polarwinkel  $\Theta_{pq}$  und den Azimutalwinkel  $\Phi$  festgelegt.

Die Impuls-Vektoren liegen typischerweise in zwei Ebenen, deren relative Verkipfung durch  $\Phi$  gegeben ist. Die *Streuebene* wird von  $\vec{k}_i$  und  $\vec{k}_f$  aufgespannt, die *Reaktionsebene* von  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$ ; der Impulsübertrag  $\vec{q}$  ist dabei in beiden Ebenen enthalten. Die Reaktion ist *in-plane*, falls  $\vec{p}$  in der Streuebene liegt, d.h. Streuebene und Reaktionsebene zusammenfallen. Liegt  $\vec{p}$  außerhalb der Streuebene ( $\Phi \neq 0, \pi$ ), dann handelt es sich um eine *out-of-plane* Kinematik;  $\Phi$  wird deshalb auch als *out-of-plane*-Winkel bezeichnet.

## 2.2 Wirkungsquerschnitt und Strukturfunktionen

In der PWBA (*plane wave Born approximation*), d.h. in 1. Bornscher Näherung unter expliziter Vernachlässigung der Elektron-Distordierung, läßt sich der  $(e, e'p)$ -Wirkungsquerschnitt aufgrund allgemein gültiger Symmetrieprinzipien (Eichinvarianz, Lorentz-Kovarianz) in die folgende Summe von vier Termen zerlegen:

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f|d\Omega_e d|\vec{p}'|d\Omega_p} = K \sigma_M \{v_L W_L + v_T W_T + v_{LT} W_{LT} \cos \Phi + v_{TT} W_{TT} \cos 2\Phi\} \quad (2.10)$$

Der Vorfaktor

$$K = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m_p |\vec{p}|^2}{E_p} , \quad (2.11)$$

der Mott'sche Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_M = \left( \frac{\alpha \cos \frac{1}{2} \Theta_e}{2 e_i \sin^2 \frac{1}{2} \Theta_e} \right)^2 \quad (2.12)$$

und die kinematischen Faktoren (*Lepton-Funktionen*)

$$\begin{aligned} v_L &= \left( \frac{Q^2}{\bar{q}^2} \right)^2 , \\ v_T &= \frac{Q^2}{2 \bar{q}^2} + \tan^2 \frac{1}{2} \Theta_e , \\ v_{LT} &= \frac{Q^2}{\bar{q}^2} \sqrt{\frac{Q^2}{\bar{q}^2} + \tan^2 \frac{1}{2} \Theta_e} , \\ v_{TT} &= \frac{Q^2}{2 \bar{q}^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

sind explizit bekannt. Die gesuchte physikalische Information über das hadronische System ist in den *Strukturfunktionen*

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{|\vec{q}|^2}{\omega^2} W_{zz} , \\ W_T &= W_{xx} + W_{yy} , \\ W_{LT} &= \frac{1}{\cos \Phi} 2 \frac{|\vec{q}|}{\omega} W_{xz} , \\ W_{TT} &= \frac{1}{\cos 2\Phi} (W_{xx} - W_{yy}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

enthalten, welche Linearkombinationen der im Bezugssystem (2.9) entwickelten Komponenten des *Hadron-Tensors*

$$W_{\mu\nu} = \overline{\sum_{if}} \int d^3 P_B \delta^{(4)}(q + P_A - P_B - p) J_\mu^* J_\nu \quad (2.15)$$

sind. Das Symbol  $\overline{\sum_{if}}$  bezeichnet dabei die Summation über (unbeobachtete) Endzustände und die Mittelung über Anfangszustände und

$$J_\mu = \langle P_B, p | \hat{J}_\mu(q) | P_A \rangle \quad (2.16)$$

die Übergangsmatrixelemente<sup>2</sup> des Kernstromoperators  $\hat{J}_\mu(q)$ .

Die im weiteren mit  $\lambda$  bezeichneten Indices  $L, T, LT, TT$  an den Strukturfunktionen geben die Komponenten des Übergangstroms  $J_\mu$  an, aus denen die jeweiligen  $W_\lambda$  aufgebaut sind. Dabei unterscheidet man zwischen longitudinalen

---

<sup>2</sup>Die Spinquantenzahlen sind nicht mit angegeben, da nur unpolarisierte Teilchen betrachtet werden.

( $L \Leftrightarrow \|\vec{q}\rangle$ ) und transversalen Anteilen ( $T \Leftrightarrow \perp \vec{q}\rangle$ ) des Stroms. In  $W_L$  geht z.B. nur die longitudinale Komponente ein ( $\propto J_z^* J_z$ ), während  $W_{LT}$  aus einer Kombination von longitudinalen und transversalen Anteilen besteht ( $\propto J_x^* J_z$ ). Völlig analog sind die zugehörigen Lepton-Funktionen  $v_\lambda$  durch die entsprechenden Komponenten des Übergangstroms der Elektronen gegeben.

Die  $W_\lambda$  sind reelle Funktionen der Lorentz-Skalare, die man aus den Produkten  $a \circ b := a_\mu b^\mu$  zweier, am hadronischen Vertex beteiligten Vierer-Vektoren  $a$ ,  $b$  bilden kann (siehe z.B. [19, 20, 39, 12]). Wegen der Vierer-Impulserhaltung und der festen Massen  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $m_p$  sind dabei nur vier Kombinationen linear unabhängig, z.B.

$$(q^2, q \circ P_A, q \circ p, p \circ P_A) \quad . \quad (2.17)$$

Statt der Lorentz-Skalare wird hier eine äquivalente Beschreibung der funktionalen Abhängigkeit durch die vier im Laborsystem definierten Variablen

$$(|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}, E_m) \quad (2.18)$$

bevorzugt; dabei ist zu beachten, daß die Strukturfunktionen nicht mehr vom Azimutalwinkel  $\Phi$  des auslaufenden Protons abhängen.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf Reaktionen bei denen der Restkern  $B$  im Grundzustand oder in einem diskreten Anregungszustand bleibt. Solche Übergänge sind im “missing-energy”-Spektrum als scharfe Peaks zu erkennen, d.h. für sie gilt

$$E_m = E'_m = E_{s\epsilon p} + E_x \quad , \quad (2.19)$$

wobei die Energien  $E'_m$  diskrete Werte von  $E_m$  sind, die sich aus den diskreten Energien  $E_x$  (Anregungsspektrum) des Restkern ergeben. In diesem Fall kann der 6-fach differentielle Wirkungsquerschnitt (2.10) über eine der (scharfen) Linien integriert werden und man erhält den 5-fach differentielle Wirkungsquerschnitt dieses speziellen Übergangs:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f|d\Omega_\epsilon d\Omega_p} &= \int_{Linie} \frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f|d\Omega_\epsilon d|\vec{p}|d\Omega_p} d|\vec{p}| \\ &= K' \sigma_M \{v_L R_L + v_T R_T + v_{LT} R_{LT} \cos \Phi + v_{TT} R_{TT} \cos 2\Phi\} \quad . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Der Vorfaktor ist gegeben durch

$$K' = \frac{m_p |\vec{p}|}{(2\pi)^3} \quad ; \quad (2.21)$$

die “neuen” Strukturfunktionen  $R_\lambda$  (*Responsefunktionen*), die nur noch von

$$\zeta := (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}) \quad (2.22)$$

abhängen, folgen aus

$$\begin{aligned} R_\lambda(\zeta) &:= \int_{Linie} W_\lambda(\zeta, E_m) dE_p \\ &= \int_{Linie} W_\lambda(\zeta, E_m) \eta^{-1} dE_m \quad , \end{aligned} \quad (2.23)$$

wobei der *Recoil-Faktor*

$$\eta := \frac{\partial E_m}{\partial E_p} = 1 + \frac{E_p}{E_B} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}_m}{|\vec{p}|^2} \quad (2.24)$$

der Variablentransformation Rechnung trägt. Im Gegensatz zu den Responsefunktionen ist der in Gleichung (2.20) angegebene 5-fach differentielle Wirkungsquerschnitt nicht nur eine Funktion von  $\zeta$ , sondern hängt noch in bekannter Weise von  $e_i$  und  $\Phi$  ab.

Aus (2.10) läßt sich formal der inklusive Wirkungsquerschnitt berechnen; dazu muß der 6-fach differentielle Wirkungsquerschnitt über den Impuls und den vollen Raumwinkel des auslaufenden Protons integriert werden. Wegen der expliziten  $\Phi$ -Abhängigkeit verschwinden dabei die Interferenz-Terme und es folgt

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f|d\Omega_e} = K' \sigma_M \{v_L S_L(|\vec{q}|, \omega) + v_T S_T(|\vec{q}|, \omega)\} \quad (2.25)$$

Die Strukturfunktionen  $S_{\lambda'}$  ( $\lambda' = L, T$ ) des inklusiven Wirkungsquerschnitts sind dann formal durch

$$S_{\lambda'}(|\vec{q}|, \omega) := \iint W_{\lambda'}(\zeta, E_m) dE_p d\Omega_p \quad (2.26)$$

definiert.

### 3. Das Problem der Separation von Strukturfunktionen

Aus der Analyse von  $(e, e')$ -Experimenten [1, 2, 3, 37, 38, 16] ist bereits ein Verfahren zur Separation der beiden Strukturfunktionen  $S_L$  und  $S_T$  bekannt. Bei dieser auf Rosenbluth [46] zurückgehenden Methode (*Rosenbluth-Plot*) werden die Streuquerschnitte, die bei konstantem  $|\vec{q}|$  und  $\omega$ , aber unterschiedlichem  $\Theta_e$  (Variation von  $e_i$ ) gemessen sind, durch  $\sigma_M$  dividiert und anschließend als Funktion von  $\tan^2 \frac{1}{2}\Theta_e$  aufgetragen<sup>1</sup>. Aufgrund der Gleichung (2.25) erwartet man dabei einen linearen Zusammenhang, so daß aus den Parametern einer an die Daten angepaßten Geraden die beiden Strukturfunktionen  $S_L$  und  $S_T$  an dem festen Punkt  $(|\vec{q}|, \omega)$  bestimmt werden können.

Die Rosenbluth-Methode läßt sich im Spezialfall der parallelen Kinematik ( $\vec{q} \parallel \vec{p}$ ) direkt auf die Koinzidenz-Experimente übertragen. Wegen  $\Theta_{pq} = 0$  verschwinden bei dieser Kinematik die Interferenz-Strukturfunktionen (Anh. B.2), wodurch eine Auswertung analog zum inklusiven Experiment möglich wird. Diese Tatsache wurde in einer Reihe von Experimenten (z.B. [54, 55, 51, 45]) zur Separation von  $R_L$  und  $R_T$  ausgenutzt.

Die Interferenz-Strukturfunktionen kann man dagegen aus Wirkungsquerschnitten bestimmen, die bei unterschiedlichem “out-of-plane”-Winkel  $\Phi$ , aber ansonsten festgehaltener Kinematik, gemessen sind (*Asymmetrie-Messungen*). Wegen der großen systematischen Fehler sind bislang jedoch nur wenige entsprechende Daten verfügbar [50, 15, 53].

Durch Kombination von Rosenbluth-Methode und Asymmetrie-Messungen ergibt sich eine Möglichkeit alle vier Strukturfunktionen an einer festen Stelle  $\zeta = \zeta_0$  zu bestimmen. Diese klassische, von de Forest [19] vorgeschlagene Methode wird in Abschnitt 3.1.1, ein alternativer Vorschlag von Donnelly [22] in Abschnitt 3.1.2 untersucht. Beide Methoden sind Spezialfälle des in Abschnitt 3.1.3 diskutierten verallgemeinerten Fitverfahrens. Als Erweiterung zu den *punktweisen* Separationen wird in Abschnitt 3.2 mit einer *modellunabhängigen* Separation ein neuartiges Konzept vorgestellt, mit dem die Strukturfunktionen innerhalb eines *ausgedehnten* kinematischen Bereiches bestimmt werden können.

#### 3.1 Punktweise Separationen

Bei *punktweisen* Separationen werden die vier Strukturfunktionen an einem festen Punkt  $\zeta = \zeta_0$  aus Wirkungsquerschnitten bestimmt, die an der Stelle  $\zeta_0$ ,

---

<sup>1</sup>Es gibt auch andere Möglichkeiten die Daten aufzutragen, was am Prinzip des Rosenbluth-Plots aber nichts ändert.

aber bei unterschiedlichem  $e_i$  und  $\Phi$ , gemessen sind. Die Variation des Wirkungsquerschnitts in diesen beiden Koordinaten erlaubt die Separation der vier Strukturfunktionen. Dabei genügen bereits vier spezielle Messungen, die bei den beiden bekannten Verfahren von de Forest [19] und Donnelly [22] unterschiedlich gewählt werden. Wir werden mit den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Methoden zeigen (siehe Abschn. 5.1.1), daß das Verfahren von de Forest dem von Donnelly vorgeschlagenen deutlich überlegen ist.

### 3.1.1 Die Methode von de Forest

Bei der von de Forest vorgeschlagenen Methode werden zuerst drei Messungen bei festgehaltener Elektronenkinematik durchgeführt, d.h. es wird zunächst die  $\Phi$ -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts voll ausgenutzt. Damit die statistischen Fehler dieser drei Messungen klein sind, wird der kleinste Elektronstreuungswinkel (Vorwärtswinkel)  $\Theta_e^{(V)}$  benutzt, der sich bei festem  $|\vec{q}|$  und  $\omega$  aus der maximalen Beschleunigerenergie  $e_i^{(V)}$  ergibt. Die vierte Messung wird dann mit kleiner Elektronenenergie, d.h. bei geänderter Polarisierung des virtuellen Photons durchgeführt.

Im ersten Schritt werden zur Separation von  $R_{LT}$  zwei Streuquerschnitte bei  $\Phi = 0$  und  $\Phi = \pi$  (links und rechts von  $\vec{q}$ ) gemessen. An den  $\Phi$ -abhängigen Faktoren mit denen die Strukturfunktionen in (2.20) gewichtet werden, ist dabei zu erkennen, daß  $R_{LT}$  in die theoretischen Wirkungsquerschnitte links und rechts von  $\vec{q}$  mit unterschiedlichem Vorzeichen eingeht, während sich die Gewichtung der anderen Strukturfunktionen nicht ändert. Daher läßt sich aus der Differenz der gemessenen, *reduzierten Wirkungsquerschnitte*<sup>2</sup>

$$\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi) := \frac{1}{K' \sigma_M} \frac{d\tilde{\sigma}}{d|\vec{k}_f| d\Omega_e d\Omega_p}(e_i^{(V)}, \Phi) \quad (3.1)$$

bei  $\Phi = 0, \pi$  der Schätzwert

$$\tilde{R}_{LT} = \frac{\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) - \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi)}{2 v_{LT}^{(V)}} \quad (3.2)$$

für die “wahre” Strukturfunktion  $R_{LT}$  ermitteln.

Im nächsten Schritt wird bei unveränderter Einschubenergie, aber einem “echten” “out-of-plane”-Winkel,  $\Phi_0 \neq 0, \pi$ , der Wirkungsquerschnitt  $\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0)$  gemessen. Die  $\Phi$ -Abhängigkeit ist nun voll ausgeschöpft; damit ist zum einen die transversal-transversale Interferenz-Strukturfunktion durch<sup>3</sup>

$$\tilde{R}_{TT} = \frac{\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \cos^2 \frac{1}{2} \Phi_0 - \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) + \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0}{2 v_{TT} \sin^2 \Phi_0} \quad (3.3)$$

<sup>2</sup>Meßwerte bzw. Schätzungen werden im weiteren immer mit “ $\sim$ ” gekennzeichnet. Der konstante Vektor  $\zeta = \zeta_0$  wird in den Argumentenlisten weggelassen.

<sup>3</sup>Weil die kinematischen Faktor  $v_L$  und  $v_{TT}$  nicht vom Elektronstreuungswinkel  $\Theta_e$  abhängen, tragen sie, im Gegensatz zu  $v_T$  und  $v_{LT}$ , keinen hochgestellten Index.

bestimmt, zum anderen die Summe

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{redL/T}^{(V)} &:= v_L \tilde{R}_L + v_T^{(V)} \tilde{R}_T \\
&= \frac{1}{2 \sin^2 \Phi_0} \left[ (\sin^2 \Phi_0 - \cos^2 \frac{1}{2} \Phi_0) \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) + \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) + \right. \\
&\quad \left. + (\sin^2 \Phi_0 - \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0) \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \right] \tag{3.4}
\end{aligned}$$

aus longitudinalem und transversalem Anteil festgelegt.

Zur L/T-Separation wird nun im letzten Schritt die Polarisation

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{|\vec{q}|^2 v_L}{2 Q^2 v_T} \\
&= \left[ 1 + 2 \frac{|\vec{q}|^2}{Q^2} \tan^2 \frac{1}{2} \Theta_e \right]^{-1} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

des virtuellen Photons verändert, was man durch Vergrößerung des Elektron-Streuwinkels auf  $\Theta_e = \Theta_e^{(R)}$  (Rückwärtswinkel) erreicht. Damit  $\zeta$  (insbesondere  $|\vec{q}|$ ) bei der Änderung von  $\Theta_e$  konstant bleibt, muß die Energie der einlaufenden Elektronen auf  $e_i = e_i^{(R)}$  verkleinert werden. Der “out-of-plane”-Winkel dieser vierten Messung sei auf  $\Phi = 0$  gesetzt, der vierte Wirkungsquerschnitt also durch  $\tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0)$  gegeben. Weil  $\tilde{R}_{LT}$  und  $\tilde{R}_{TT}$  bereits durch die ersten drei Messungen festgelegt sind, wird mit der vierten Messung die Summe

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{redL/T}^{(R)} &:= v_L \tilde{R}_L + v_T^{(R)} \tilde{R}_T \\
&= \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) + \frac{1}{2 \sin^2 \Phi_0} \left[ \left( \frac{-v_{LT}^{(R)}}{v_{LT}^{(V)}} \sin^2 \Phi_0 - \cos^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \right) \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) + \left( \frac{v_{LT}^{(R)}}{v_{LT}^{(V)}} \sin^2 \Phi_0 - \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \right) \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \right] \tag{3.6}
\end{aligned}$$

bestimmt. Aus (3.4) und (3.6) wird mit Hilfe des Rosenbluth-Plots [46], der hier aus der Bestimmung einer Geraden durch zwei Meßpunkte besteht, die L/T-Separation durchgeführt.

Zur weiteren Formalisierung des Verfahrens werden die beiden Vektoren

$$\tilde{\sigma}_{red} := \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \end{pmatrix} \tag{3.7} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{R}} := \begin{pmatrix} \tilde{R}_L \\ \tilde{R}_T \\ \tilde{R}_{LT} \\ \tilde{R}_{TT} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

definiert. Die gemessenen reduzierten Wirkungsquerschnitte und die gesuchten Schätzwerte der Responsefunktionen sind dann durch das lineare Gleichungssystem

$$\tilde{\sigma}_{red} = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{R}} \tag{3.9}$$

miteinander verknüpft, wobei die Matrix  $\mathbf{V}$  aus den leptonischen Funktionen, ggf. multipliziert mit den jeweiligen  $\Phi$ -abhängigen Anteilen, gebildet ist:

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} \cos \Phi_0 & v_{TT} \cos 2\Phi_0 \\ v_L & v_T^{(V)} & -v_{LT}^{(V)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(R)} & v_{LT}^{(R)} & v_{TT} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Aufgrund der hier speziell gewählten Messungen ist die Matrix  $\mathbf{V}$  invertierbar, so daß man die gesuchten Responsefunktionen aus

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{V}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{red} \quad (3.11)$$

erhält. Die Matrix  $\mathbf{V}^{-1}$ , deren dritte und vierte Zeile man direkt aus (3.2) und (3.3) abliest, ist im Anhang A.1 vollständig angegeben.

Die reduzierten Wirkungsquerschnitte sind Meßgrößen und daher mit einem Fehler  $\Delta \tilde{\sigma}_{red}$  behaftet. Wichtig für die Bewertung des Ergebnisses ist die Auswirkung der Meßfehler auf die Genauigkeit in der Bestimmung der Strukturfunktionen. Für diese Betrachtung werden die Varianzen  $(\Delta \tilde{\sigma}_{red})^2$  (die Messungen sind unabhängig voneinander) in der diagonalen *Kovarianzmatrix*

$$\mathbf{C}_\sigma := \begin{pmatrix} (\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0))^2 & & & \mathbf{0} \\ & (\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0))^2 & & \\ & & (\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi))^2 & \\ \mathbf{0} & & & (\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0))^2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

angeordnet. Unter Verwendung der *Gewichtsmatrix*

$$\mathbf{G}_\sigma := \mathbf{C}_\sigma^{-1} \quad (3.13)$$

ergibt sich gemäß Standardmethoden der Fehlerfortpflanzung (z.B. S. Brandt [13]) die Kovarianzmatrix für die extrahierten Strukturfunktionen aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{R}}} &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}_\sigma (\mathbf{V}^{-1})^T \\ &= (\mathbf{V}^T \mathbf{G}_\sigma \mathbf{V})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese in 1. Ordnung durchgeführte Fehlerfortpflanzung ist hier wegen der Linearität der Gleichung (3.11) exakt gültig. Die Fehler  $\Delta \tilde{R}_\lambda$  an den Strukturfunktionen  $\tilde{R}_\lambda$  sind gegeben durch die Wurzeln der Diagonalelemente von  $\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{R}}}$ :

$$\Delta \tilde{R}_\lambda = \sqrt{(\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{R}}})_{\lambda\lambda}}; \quad (3.15)$$

sie sind im Anhang A explizit angegeben.

Aus der analytischen Form ist direkt abzulesen, daß die Fehler  $\Delta \tilde{R}_\lambda$  bestimmter Strukturfunktionen  $\tilde{R}_\lambda$  sehr groß werden, wenn einzelne Anteile der insgesamt



benötigten *Separations-Information* klein sind. Diese Information besteht bei der de-Forest-Methode aus Links/Rechts- ( $\Phi = 0, \pi$ ), “out-of-plane”- ( $\Phi \neq 0, \pi$ ) und Vorwärts/Rückwärts-Information ( $e_i = e_i^{(V)}, e_i^{(R)}$ ). Fehlt ein Teil der Separations-Information vollständig, dann ist eine Bestimmung aller vier Struktur-funktionen nicht möglich. Formal drückt sich das darin aus, daß die Matrix  $\mathbf{V}$  singular und damit nicht invertierbar ist.

### 3.1.2 Die Methode von Donnelly

Der von Donnelly [22] vorgeschlagene Satz von vier Messungen unterscheidet sich von der de-Forest-Methode dadurch, daß auf die Ausnutzung der Links/Rechts-Asymmetrie des Wirkungsquerschnitts verzichtet und stattdessen seine  $\Theta_e$ -Abhängigkeit voll ausgeschöpft wird:

Analog zum klassischen Rosenbluth-Plot werden die bei konstantem  $\zeta$  und  $\Phi$ , aber unterschiedlichem  $\Theta_e$  (bzw.  $e_i$ ) gemessenen reduzierten Wirkungsquerschnitte als Funktion von  $\tan^2 \frac{1}{2} \Theta_e$  aufgetragen (“*Super-Rosenbluth*”-Plot). Im Gegensatz zum klassischen Verfahren bei Einarm-Messungen ist dabei aber i.a. keine Gerade zu erwarten, denn gemäß (2.20) sorgt der  $LT$ -Anteil des Wirkungsquerschnitts für eine Krümmung. Zur Bestimmung dieser Krümmung, aus der man entsprechend  $\tilde{R}_{LT}$  gewinnt, genügen bereits drei Messungen bei drei verschiedenen Energien der einlaufenden Elektronen. Wir wählen dafür die beiden im letzten Abschnitt verwendeten Energien  $e_i^{(V)}$  und  $e_i^{(R)}$ , sowie eine dazwischenliegende Energie  $e_i^{(M)}$ . Der “out-of-plane”-Winkel der drei Messungen wird konstant auf  $\Phi = 0$  gehalten. Durch Anpassung einer entsprechend “krummen” Kurve an die Meßwerte läßt sich neben den Schätzwerten  $\tilde{R}_T$  und  $\tilde{R}_{LT}$  die Summe

$$\tilde{\sigma}_{red_{L/TT}}(0) := v_L \tilde{R}_L + v_{TT} \tilde{R}_{TT} \quad (3.16)$$

aus longitudinalem und transversal-transversalem Anteil bestimmen.

Durch eine vierte Messung bei einem “echten” “out-of-plane”-Winkel  $\Phi_0 \neq 0, \pi$  (wir wählen dabei  $e_i = e_i^{(V)}$ ) wird die Summe

$$\tilde{\sigma}_{red_{L/TT}}(\Phi_0) := v_L \tilde{R}_L + v_{TT} \tilde{R}_{TT} \cos 2\Phi_0 \quad (3.17)$$

bestimmt, so daß die Strukturfunktionen  $\tilde{R}_L$  und  $\tilde{R}_{TT}$  mit (3.16) und (3.17) voneinander getrennt werden können.

Wie bei de Forest besteht die Donnelly-Methode formal aus dem Problem, das lineare Gleichungssystem

$$\tilde{\sigma}_{red} = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{R}} \quad (3.18)$$

nach  $\tilde{\mathbf{R}}$  aufzulösen, wobei der Vektor

$$\tilde{\sigma}_{red} := \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(M)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

die speziell hier gewählten Meßwerte und die Matrix

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(M)} & v_{LT}^{(M)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(R)} & v_{LT}^{(R)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} \cos \Phi_0 & v_{TT} \cos 2\Phi_0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

die entsprechenden kinematischen Gewichtungsfaktoren enthält. Die Matrix  $\mathbf{V}^{-1}$  und die statistischen Fehler  $\Delta \tilde{R}_\lambda$  sind im Anhang A.2 explizit angegeben (Fehlerfortpflanzung wie in Abschnitt 3.1.1).

An den analytischen Ausdrücken läßt sich auch diesmal ablesen, daß die Fehler bestimmter Strukturfunktionen sehr groß werden, wenn einzelne Anteile der Separations–Information klein sind. Bei der Donnelly–Methode besteht diese zur Trennung der vier Strukturfunktionen benötigte Information aus Vorwärts/Mitte/Rückwärts– und aus “out–of–plane”–Information.

### 3.1.3 Verallgemeinerte Methode

Die beiden besprochenen Verfahren zur Trennung der vier Strukturfunktionen werden in diesem Abschnitt zu einem Fitverfahren verallgemeinert. Dazu wird angenommen, daß eine Anzahl  $N \geq 4$  von reduzierten Wirkungsquerschnitten<sup>4</sup>  $\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}$  bei  $\zeta = \zeta_0$  gemessen sei. Die zur Trennung benötigte Separations–Information muß durch Variation von  $e_i$  und  $\Phi$  “irgendwie” in den Meßwerten enthalten sein.

Analog zu den beiden letzten Abschnitten werden bei dem verallgemeinerten Verfahren die  $N$  reduzierten Wirkungsquerschnitte zum Vektor

$$\tilde{\sigma}_{red} := \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{red}^{(1)} \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(N)} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

zusammengefaßt und die Meßfehler in der diagonalen  $(N \times N)$ –Gewichtsmatrix

$$\mathbf{G}_\sigma = \begin{pmatrix} 1/(\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(1)})^2 & & & \mathbf{0} \\ & 1/(\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(2)})^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1/(\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(N)})^2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

angeordnet. Weil diesmal mehr Messungen als Unbekannte vorhanden sind, wird für die reduzierten Wirkungsquerschnitte der Ansatz

$$\sigma_{red}^{(ans)} = \mathbf{V} \mathbf{R}^{(ans)} \quad (3.23)$$

<sup>4</sup>Der obere Index  $(k)$  zählt hier die  $N$  Messungen durch.

gemacht, wobei  $\mathbf{V}$  nun durch die  $(N \times 4)$ -Matrix

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} v_L & v_T^{(1)} & v_{LT}^{(1)} \cos \Phi^{(1)} & v_{TT} \cos 2\Phi^{(1)} \\ v_L & v_T^{(2)} & v_{LT}^{(2)} \cos \Phi^{(2)} & v_{TT} \cos 2\Phi^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_L & v_T^{(N)} & v_{LT}^{(N)} \cos \Phi^{(N)} & v_{TT} \cos 2\Phi^{(N)} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

gegeben ist und  $\mathbf{R}^{(ans)}$  den (freien) Ansatz für die wahren Strukturfunktionen  $\mathbf{R}$  bezeichnet.

Der Satz  $\tilde{\mathbf{R}}$  von Strukturfunktionen, der die Messungen am besten reproduziert, wird durch  $\chi^2$ -Minimierung [5, 13] bestimmt. In der oben eingeführten Nomenklatur läßt sich  $\chi^2$  schreiben als

$$\chi^2(\mathbf{R}^{(ans)}) = \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{red} - \mathbf{V} \mathbf{R}^{(ans)} \right)^T \mathbf{G}_\sigma \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{red} - \mathbf{V} \mathbf{R}^{(ans)} \right) . \quad (3.25)$$

Weil der Ansatz (3.23) linear bzw.  $\chi^2$  quadratisch in den Parametern  $\mathbf{R}^{(ans)}$  ist, kann die Minimierung von (3.25) analytisch durchgeführt werden. Man erhält

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{V}^+ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{red} , \quad (3.26)$$

wobei

$$\mathbf{V}^+ = \left( \mathbf{V}^T \mathbf{G}_\sigma \mathbf{V} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{G}_\sigma \quad (3.27)$$

die *Pseudoinverse* (*Moore–Penrose–Inverse*) der Matrix  $\mathbf{V}$  ist (siehe z.B. [49]).

Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  zu den Best-Fit-Strukturfunktionen  $\tilde{\mathbf{R}}$  ist die Inverse der Krümmungsmatrix  $\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{R}}}$  von  $\chi^2$  im Parameterraum. Aus (3.25) erhält man daher

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{R}}} := \mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1} = \left( \mathbf{V}^T \mathbf{G}_\sigma \mathbf{V} \right)^{-1} , \quad (3.28)$$

was formal mit der in Abschnitt 3.1.1 angegebenen Kovarianzmatrix übereinstimmt. Analog zu dem genannten Abschnitt sind die (korrelierten) Fehler der Strukturfunktionen durch

$$\Delta \tilde{R}_\lambda = \sqrt{(\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{R}}})_{\lambda\lambda}} \quad (3.29)$$

gegeben. Bei vier gemessenen Wirkungsquerschnitten ist die Matrix  $\mathbf{V}$  quadratisch und Gleichung (3.27) vereinfacht sich zu

$$\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^{-1} \quad \text{falls} \quad N = 4 , \quad (3.30)$$

so daß im Spezialfall der vier von de Forest bzw. Donnelly vorgeschlagenen Messungen das Fitverfahren in die im Anhang A.1 bzw. A.2 beschriebenen analytischen Lösungen übergeht.

Der hier behandelte allgemeine Formalismus wird im Abschnitt 5.1 zur Optimierung von  $(e, e'p)$ -Experimenten bei punktwiser Separation von Strukturfunktionen benutzt. Die Aufgabe besteht dabei darin, die Energien  $e_i^{(k)}$ , Winkel  $\Phi^{(k)}$  und Meßzeiten  $T^{(k)}$  der einzelnen Messungen so zu wählen, daß bei vorgegebener

Gesamtmeßzeit  $T_{tot}$  die Varianzen  $(\Delta\tilde{R}_\lambda)^2$  minimal werden. Bei vier geplanten Messungen und gleicher Gewichtung der Varianzen der einzelnen Strukturfunktionen findet das Optimierungs-Verfahren (Programm OPOISEP) gerade die von de Forest beschriebenen Kinematiken als optimale Lösung (siehe Abschn. 5.1.1).

### 3.2 Modellunabhängige Separation mit der Methode des flexiblen Ansatzes

Die reduzierten Wirkungsquerschnitte, die zur punktweisen Separation der Strukturfunktionen benutzt werden, müssen alle an einem festen Punkt  $\zeta = \zeta_0$  gemessen sein. Diese Bedingung läßt sich im konkreten Experiment selbst bei entsprechend sorgfältiger Justierung nicht erfüllen: wegen der ausgedehnten Akzeptanzen der Spektrometer wird ein gewisser Bereich in  $\zeta$  überdeckt, dessen Form und Größe i.a. für jede Messung verschieden ist. Die Kontraktion des ausgedehnten Phasenraums auf einen Punkt erfordert entsprechende Korrekturen, die mit erheblichen Unsicherheiten verbunden sind, zumal die Variation des Wirkungsquerschnitts in  $\zeta$  a priori nicht bekannt ist. Dieses Problem ist umso bedeutender, je größer das in der einzelnen Messung erfaßte Phasenraumvolumen ist; seine korrekte Behandlung spielt daher bei den großen Akzeptanzen der am Mainzer Mikrotron verwendeten Spektrometer (vgl. Tab. 4.2 auf S. 21) eine wichtige Rolle.

Einerseits haben wir es somit bei einer Auswertung auf die beschriebene Weise mit einem ernsten Problem zu tun, andererseits wird aber gerade durch die ausgedehnten Akzeptanzen Information über den Wirkungsquerschnitt als Funktion von  $\zeta$  zugänglich. Diese Information wird bei der im folgenden beschriebenen *modellunabhängigen Separation* genutzt, um die Strukturfunktionen innerhalb eines kompakten kinematischen Bereiches (*Separationsgebiet*  $G$ ) im Raum der Koordinaten  $\zeta$  zu bestimmen.

Bei diesem Verfahren wird der Wirkungsquerschnitt in einer hinreichend flexiblen Form parametrisiert, die auf der in Gleichung (2.20) angegebenen Zerlegung in vier Strukturfunktionen aufbaut. Dazu werden die Strukturfunktionen  $R_\lambda(\zeta)$  gemäß

$$R_\lambda(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{\lambda i} \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta) \quad (3.31)$$

in ein vollständiges Basissystem  $\mathcal{B}_{\lambda i}$  (siehe Anh. B) entwickelt; dabei genügt innerhalb eines kompakten Gebietes  $G$  bereits eine endliche Zahl  $N_p$  von Parametern  $p_{\lambda i}$ , um die Strukturfunktionen mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu beschreiben.

Zur Bestimmung der  $N_p$  Parameter  $p_{\lambda i}$  werden  $N$  Wirkungsquerschnitte gemessen ( $N \geq N_p$ ), wobei die Kinematiken  $\zeta^{(k)}$  der Messungen im ganzen Separationsgebiet  $G$  verteilt sind und die Separationsinformation durch Variation von  $e_i$

und  $\Phi$  in den Messungen enthalten ist. Mit dem (endlichen) Ansatz

$$R_\lambda^{(ans)}(\zeta; p_{\lambda i}^{(ans)}) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} p_{\lambda i}^{(ans)} \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta) \quad (3.32)$$

für die Strukturfunktionen  $R_\lambda$  hat man einen hinreichend *flexiblen Ansatz* für den reduzierten Wirkungsquerschnitt an der Stelle  $\zeta^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{red}^{(ans)(k)} &= \sum_\lambda V_{k\lambda} R_\lambda^{(ans)}(\zeta^{(k)}; p_{\lambda i}^{(ans)}) \\ &= \sum_\lambda \sum_{i=1}^{n_\lambda} V_{k\lambda} p_{\lambda i}^{(ans)} \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta^{(k)}) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Matricelemente  $V_{k\lambda}$  sind bereits durch die Gleichung (3.24) im vorigen Abschnitt definiert. Ordnet man die Parameter  $p_{\lambda i}^{(ans)}$  in einem Vektor  $\mathbf{p}^{(ans)}$  an – indem man die beiden Indices  $\lambda i$  auf einen Einzelindex, symbolisiert durch  $(\lambda i)$ , abbildet – dann läßt sich (3.33) als lineares Gleichungssystem

$$\sigma_{red}^{(ans)} = \mathbf{B} \mathbf{p}^{(ans)} \quad (3.34)$$

schreiben, wobei die Matrix  $\mathbf{B}$  durch ihre Elemente

$$B_{k(\lambda i)} := V_{k\lambda} \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta^{(k)}) \quad (3.35)$$

gegeben ist.

Analog zum vorigen Abschnitt werden die Parameter  $\tilde{\mathbf{p}}$ , die die Messungen am besten reproduzieren, durch Minimierung von

$$\chi^2(\mathbf{p}^{(ans)}) = \left( \tilde{\sigma}_{red} - \mathbf{B} \mathbf{p}^{(ans)} \right)^T \mathbf{G}_\sigma \left( \tilde{\sigma}_{red} - \mathbf{B} \mathbf{p}^{(ans)} \right) \quad (3.36)$$

nach  $\mathbf{p}^{(ans)}$  bestimmt; die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{p}}}$  ist wieder durch die Inverse der Krümmungsmatrix  $\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{p}}}$  von  $\chi^2$  im Parameterraum gegeben. Die explizite Rechnung ergibt

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{B}^+ \tilde{\sigma}_{red} , \quad (3.37)$$

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{p}}} := \mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{p}}}^{-1} = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{G}_\sigma \mathbf{B} \right)^{-1} , \quad (3.38)$$

wobei

$$\mathbf{B}^+ = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{G}_\sigma \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{G}_\sigma \quad (3.39)$$

die Pseudoinverse der Matrix  $\mathbf{B}$  ist. Äquivalent zu (3.37) ist die Formulierung

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{p}}} \boldsymbol{\beta} ; \quad (3.40)$$

hier bezeichnet

$$\boldsymbol{\beta} := \mathbf{B}^T \mathbf{G}_\sigma \tilde{\sigma}_{red} \quad (3.41)$$

den halben, negativen Gradienten von  $\chi^2$  im Parameterraum. Diese Darstellung wird in Abschnitt 5.2 aus praktischen Gründen bevorzugt.

Die Strukturfunktionen  $\tilde{R}_\lambda(\zeta)$ , die die Messungen am besten reproduzieren, lassen sich an jedem Punkt  $\zeta \in G$  aus den Best-Fit-Parametern gemäß

$$\tilde{R}_\lambda(\zeta) := R_\lambda^{(ans)}(\zeta; \tilde{p}_{\lambda i}) \quad (3.42)$$

berechnen. Zur Bestimmung der statistischen Fehler dieser Schätzungen ist ein zweiter Schritt in der Behandlung der Fehlerfortpflanzung notwendig. Er führt auf das *Kovarianzmatrixfunktional*

$$(\mathbf{C}_{\tilde{R}})_{\lambda\lambda'}(\zeta, \zeta') = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{i'=1}^{n_{\lambda'}} \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta) (\mathbf{C}_{\tilde{p}})_{(\lambda i)(\lambda' i')} \mathcal{B}_{\lambda' i'}(\zeta') ; \quad (3.43)$$

mit seiner Hilfe läßt sich zu jedem Paar von Punkten  $\zeta, \zeta' \in G$  eine  $(4 \times 4)$ -Matrix angeben, die die Korrelationen der 4 Strukturfunktionen an der Stelle  $\zeta$  mit den 4 Strukturfunktionen an der Stelle  $\zeta'$  enthält. Die Wurzeln aus den Diagonalanteilen von  $\mathbf{C}_{\tilde{R}}$ , d.h. diagonal sowohl in den diskreten Indices, als auch in den kontinuierlichen Variablen, ergeben die gesuchten (korrelierten) Fehler

$$\Delta \tilde{R}_\lambda(\zeta) = \sqrt{(\mathbf{C}_{\tilde{R}})_{\lambda\lambda}(\zeta, \zeta)} \quad (3.44)$$

der Strukturfunktion  $\tilde{R}_\lambda$  an der Stelle  $\zeta$ . Zu jedem  $\tilde{R}_\lambda$  lassen sich damit zwei Hyperflächen innerhalb  $G$  angeben, zwischen denen die wahre Funktion  $R_\lambda$  mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Diese Hyperflächen sind eine Verallgemeinerung des Fehlerbands, das man im eindimensionalen Fall bei modellunabhängigen Analysen<sup>5</sup> erhält.

---

<sup>5</sup>Das hier vorgeschlagene Verfahren ist der modellunabhängigen Analyse von Einarm-Wirkungsquerschnitten nachempfunden [17, 47, 25, 4, 30, 31]. Während dort der flexible Ansatz im eindimensionalen  $r$ -Raum für die (Übergangs)Ladungsdichten  $\rho_l(r)$  und die (Übergangs)Stromdichten  $J_l(r)$  ( $l$  ist die Multipolarität des Übergangs) gemacht wird, erfolgt er hier im dreidimensionalen  $\zeta$ -Raum für die Strukturfunktionen.

## 4. Test der modellunabhängigen Separation durch ein simuliertes $(e, e'p)$ -Experiment

Die in Abschnitt 3.2 beschriebene modellunabhängige Analyse ist eine neue Methode, mit der die Responsefunktionen innerhalb eines kompakten Separationsgebietes  $G$  aus gemessenen Wirkungsquerschnitten bestimmt werden können. Bevor ein solches Verfahren auf wirkliche Messungen angewendet wird, ist ein Test mit Pseudomeßdaten, bei denen die Strukturfunktionen als Input bekannt sind, unumgänglich.

Im Frühstadium dieser Arbeit wurden dazu Kinematiken  $e_i$ ,  $\Phi$ ,  $\zeta$  random-erzeugt, wobei  $\zeta$  auf ein vorgegebenes Separationsgebiet  $G$  beschränkt wurde. Zu jeder Kinematik wurde der Wirkungsquerschnitt mit dem in Anhang D beschriebenen Modell berechnet und mit einem vorgewählten Meßfehler verwürfelt. Während es fast unmöglich ist, diese Pseudomeßwerte mit der punktwweisen Separation zu analysieren, denn die Bedingung  $\zeta = const$  ist für verschiedene  $e_i$  und  $\Phi$  *nicht* erfüllt, reproduziert die modellunabhängige Separation die Strukturfunktionen im Rahmen ihrer Fehler.

Der Test, der in diesem Kapitel beschrieben wird, ist wesentlich näher am realen Experiment orientiert. In Abschnitt 4.1 werden die Kinematiken und Meßzeiten eines an *MAMI* geplanten  $(e, e'p)$ -Experiments [33] angegeben; das von den Messungen überdeckte Separationsgebiets  $G$  wird in Abschnitt 4.2 bestimmt. Durch Simulation des geplanten Experiments werden realitätsnahe Pseudomeßwerte erzeugt (Abschn. 4.3), mit denen anschließend die modellunabhängige Separation getestet wird (Abschn. 4.4).

### 4.1 Die Kinematiken des simulierten Experiments

Als Test wird ein  $(e, e'p)$ -Experiment an Kohlenstoff in paralleler Kinematik bei  $T_p = 70$  MeV gewählt, wobei hier speziell der Übergang zum Grundzustand des resultierenden Bor-Kerns betrachtet wird ( $^{12}C(e, e'p)^{11}B_{g.s.}$ ). Dabei werden die in Tabelle 4.1 angegebenen Kinematiken verwendet, welche den quasifreien Bereich ( $\omega \simeq |\vec{q}|^2/2m_p$ ) überdecken. Die zehn aufgelisteten Messungen stammen aus dem *MAMI*-Proposal [33] (Messungen Nr. 6 und Nr. 7 leicht abgewandelt).

Im Kopf der Tabelle 4.1 sind Targetdicke und Elektronenstrom angegeben; beide Größen werden während des ganzen Experiments als konstant angenommen. Zur L/T-Separation sind die ersten fünf Messungen unter Vorwärtswinkeln bei großer Strahlenergie ( $e_i = 850$  MeV)<sup>1</sup>, die restlichen Messungen dagegen unter

---

<sup>1</sup>Die maximale *MAMI*-Energie beträgt eigentlich 855.5 MeV, was für den in diesem Kapitel beschriebenen Test aber irrelevant ist.

<b>Konstanten</b>															
Targetdicke $d = 25.0 \text{ mg/cm}^2$															
Elektronenstrom $I = 50.0 \mu\text{A}$															
<b>Kinematiken und Meßzeiten</b>															
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	Strahl	zentr. Spektrometerkoord. $\mathcal{S}_{zen}$						zentr. physikalische Koord. $\mathcal{P}_{zen}$							
Nr	$e_i$ [MeV]	$\Theta_e^{(s)}$ [°]	$\Phi_e^{(s)}$ [°]	$ \vec{k}_f $ [MeV/c]	$\Theta_p^{(s)}$ [°]	$\Phi_p^{(s)}$ [°]	$ \vec{p} $ [MeV/c]	$ \vec{q} $ [MeV/c]	$\omega$ [MeV]	$\Theta_{pq}$ [°]	$\Phi$ [°]	$E_m$ [MeV]	e/p Spek	T [h]	
1	850.0	0.0	20.3	745.0	0.0	-59.7	369.1	300.0	105.0	0.0	n.def.	34.77	B/A	1.0	
2	850.0	0.0	24.2	745.0	0.0	-60.8	369.1	350.0	105.0	0.0	n.def.	34.98	B/A	1.0	
3	850.0	0.0	28.1	745.0	0.0	-61.2	369.1	400.0	105.0	0.0	n.def.	34.95	B/A	2.0	
4	850.0	0.0	31.9	745.0	0.0	-61.1	369.1	450.0	105.0	0.0	n.def.	34.68	B/A	1.0	
5	850.0	0.0	35.8	745.0	0.0	-60.6	369.1	500.0	105.0	0.0	n.def.	34.16	B/A	2.0	
6	210.0	0.0	126.0	123.8	0.0	-19.5	369.1	300.0	86.2	0.0	n.def.	15.96	A/B	2.5	
7	235.0	0.0	130.0	149.0	0.0	-19.0	369.1	350.0	86.0	0.0	n.def.	15.96	A/B	3.5	
8	265.0	0.0	139.2	160.0	0.0	-15.2	369.1	400.0	105.0	0.0	n.def.	34.95	A/B	3.0	
9	290.0	0.0	141.7	185.0	0.0	-14.8	369.1	450.0	105.0	0.0	n.def.	34.68	A/B	1.5	
10	320.0	0.0	137.5	215.0	0.0	-16.9	369.1	500.0	105.0	0.0	n.def.	34.16	A/B	2.5	
<b>Gesamtmeßzeit:</b>														<b>20.0</b>	

Tabelle 4.1: Die Kinematiken und Meßzeiten für die Streuung am Kohlenstoff im quasifreien Bereich mit  $T_p = 70 \text{ MeV}$  unter paralleler Kinematik. Die angegebenen Werte sind dem *MAMI*-Proposal entnommen.

Rückwärtswinkeln bei kleinerer Energie ( $e_i = 210 \dots 320 \text{ MeV}$ ) vorgesehen. Die Stellungen und mittleren Impulse der beiden Spektrometer werden durch die *zentralen Spektrometerkoordinaten*

$$\mathcal{S}_{zen} = \left( \Theta_e^{(s)}, \Phi_e^{(s)}, |\vec{k}_f|, \Theta_p^{(s)}, \Phi_p^{(s)}, |\vec{p}| \right) \quad (4.1)$$

festgelegt, wobei die Definition der Spektrometerwinkel<sup>2</sup>  $\Theta_e^{(s)}, \Phi_e^{(s)}, \Theta_p^{(s)}, \Phi_p^{(s)}$  aus der Abbildung C.1 auf Seite 69 ersichtlich wird. Aus  $e_i$  und  $\mathcal{S}_{zen}$  sind die *zentralen physikalischen Koordinaten*

$$\mathcal{P}_{zen} = \left( |\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}, \Phi, E_m \right) \quad (4.2)$$

mit der im Anhang C.1 angegebenen Transformation berechenbar.

Wie man an Spalte 3 und 6 der Tabelle ersieht (alle Einträge sind Null), ist hier nicht vorgesehen eines der Spektrometer aus der Hallenebene heraus zu heben, was bei Spektrometer B prinzipiell möglich wäre. Das Koinzidenz-Ereignis, welches von den Spektrometern unter den zentralen Spektrometerkoordinaten

<sup>2</sup>Die hier verwendeten Winkel sind in der Spektrometerkonvention (oberer Index (s)) angegeben; insbesondere gilt  $\Theta_e^{(s)} \neq \Theta_e, \Theta_p^{(s)} \neq \Theta_p$ .



Spektrometer Magnet-Konfiguration		A QSDD	B D	C QSDD
Max. Teilchenimpuls	[MeV/c]	735	870	551
Impuls-Akzeptanz	[%]	20	15	25
Winkel-Akzeptanz				
$\Delta\Phi^{(s)}$	[mrad]	$\pm 100$	$\pm 20$	$\pm 100$
$\Delta\Theta^{(s)}$	[mrad]	$\pm 70$	$\pm 70$	$\pm 70$
Raumwinkel $\Delta\Omega$	[msr]	28	5.6	28
Winkel-Bereich				
Minimaler Winkel	[°]	18	7	18
Maximaler Winkel	[°]	160	60	160
Auflösung				
Impuls		$\leq 10^{-4}$	$\leq 10^{-4}$	$\leq 10^{-4}$
Winkel	[mrad]	$\leq 3$	$\leq 3$	$\leq 3$

Tabelle 4.2: Design Spezifikationen der Mainzer Drei-Spektrometer-Anordnung.

registriert wird, ist also “in-plane”<sup>3</sup>. Spalte 4 gibt daher direkt den Elektronstreuwinkel des zentralen Ereignisses an ( $\Theta_e = \Phi_e^{(s)}$ ) und aus Spalte 7 folgt der Protonwinkel ( $\Theta_p = |\Phi_p^{(s)}|$ ). Um die Wechselwirkung des emittierten Protons mit dem Restkern (*final state interaction FSI*) näherungsweise konstant zu halten, sind alle Messungen bei derselben kinetischen Energie des auslaufenden Protons ( $T_p = 70$  MeV) vorgesehen, woraus sich der in Spalte 8 angegebene mittlere Impuls des Proton-Spektrometers ( $p = 369.1$  MeV/c) ergibt.

Die Impulsüberträge  $|\vec{q}|$  (Spalte 9) sind so gewählt, daß ein ausgedehnter  $|\vec{q}|$ -Bereich ( $\simeq [300, 500]$  MeV/c) stückweise mit Messungen überdeckt wird. Dabei werden die zentralen Energieüberträge  $\omega$  (Spalte 10) – bis auf die abgewandelten Messungen Nr. 6 und Nr. 7 (s.u.) – konstant gehalten und die parallele Kinematik benutzt ( $\Theta_{pq} = 0$ ). Die Größe des insgesamt in den drei Koordinaten  $|\vec{q}|$ ,  $\omega$ ,  $\Theta_{pq}$  überdeckten Bereichs (Separationsgebiet  $G$ ) wird in Abschnitt 4.2 genauer untersucht. Der “out-of-plane”-Winkel (Spalte 12) des zentralen Ereignisses ist wegen  $\Theta_{pq} = 0$  hier nicht definiert (n.def.); die ausgedehnten Akzeptanzen erfassen jedoch immer einen bestimmten  $\Phi$ -Bereich, der zur Trennung der Interferenz-Strukturfunktionen genutzt werden kann.

Die zentrale “missing energy”  $E_m$  (Spalte 13) schwankt bei den acht Messungen, die unverändert aus dem Proposal übernommen sind, von 34.16 MeV bis 34.98 MeV. Dadurch soll insbesondere der Bereich großer  $E_m$  untersucht werden, woraus man sich Information über die fehlende Stärke der experimentell bestimmten Schalenmodellbesetzungen (siehe z.B. [56]) erhofft. Abweichend von der im Proposal verfolgten Route, sind die Energien  $E_m$  der Messungen Nr. 6 und Nr. 7 dem speziell hier betrachteten Übergang zum Grundzustand des Bor-Kerns angepaßt (siehe Anh. C.3), so daß  $E_m = E_{sep} = 15.96$  MeV beträgt.

Zum Nachweis der auslaufenden Teilchen (Spalte 14) werden die Spektrometer A und B der Drei-Spektrometer-Anordnung des *MAMI*-Projekts benutzt. Ak-

<sup>3</sup>Von einem schrägen Einschub der Elektronen wird hier abgesehen.

zeptanzen und Auflösungsvermögen der Spektrometer sind in Tabelle 4.2 zusammengestellt; eine ausführliche Beschreibung der teilchenoptischen Eigenschaften ist in [6] zu finden.

Die letzte Spalte der Tabelle 4.1 gibt die im Proposal für die einzelnen Messungen vorgesehenen Meßzeiten  $T$  bei einer Gesamtmeßzeit  $T_{tot} = 20$  h an.

## 4.2 Die Festlegung des Separationsgebietes

Durch die Bestimmung der Strukturfunktionen innerhalb eines ausgedehnten kinematischen Bereichs (Separationsgebiet  $G$ ) wollen wir neue physikalische Erkenntnisse über die  $(e, e'p)$ -Reaktion, insbesondere über die Übergangsströme des Kerns, gewinnen. Dadurch werden wichtige Randbedingungen für die in Betracht kommenden theoretischen Modelle festgelegt, wobei die verschiedenen Strukturfunktionen auf Teilaspekte unterschiedlich sensibel sind und somit eine gezielte Untersuchung einzelner Beiträge als Funktion von  $\zeta = (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq})$  ermöglichen. Bei der Planung eines entsprechenden  $(e, e'p)$ -Experiments wird daher zunächst das für die Trennung der Strukturfunktionen vorgesehene Separationsgebiet, das aus den genannten physikalischen Gründen interessant erscheint, festgelegt (z.B. ein Teil des quasifreien Bereichs in paralleler Kinematik). Dabei müssen aber auch experimentelle Randbedingungen berücksichtigt werden, d.h. das Separationsgebiet muß mit den zur Verfügung stehenden Apparaturen zugänglich sein. Die Kinematiken der geplanten Messungen werden dann so gewählt, daß  $G$  unter Variation von  $e_i$  und  $\Phi$  mit Meßdaten belegt wird (Separations-Information).

Auf solche Weise wurden auch die Kinematiken des Proposals festgelegt; in diesem Abschnitt soll nachträglich untersucht werden, wie groß das dort erfaßte Separationsgebiet tatsächlich ist. Während dieses Gebiet bei einer klassischen punktwisen Analyse nur aus dem Überlapp besteht, der die vollständige Separations-Information enthält, kann bei einer modellunabhängigen Separation ein erweiterter Bereich ins Auge gefaßt werden. Der flexible Ansatz erlaubt in einem gewissem Rahmen sowohl Interpolationen als auch Extrapolationen.

Für die oben erwähnte Untersuchung werden die Akzeptanzen der Spektrometer, die von den primären Meßgrößen her in den Koordinaten

$$\mathcal{S} = \left( \Theta_e^{(s)}, \Phi_e^{(s)}, |\vec{k}_f|, \Theta_p^{(s)}, \Phi_p^{(s)}, |\vec{p}| \right) \quad (4.3)$$

gegeben sind, in den Raum der physikalisch relevanten Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\zeta, \Phi, E_m) \\ &= (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}, \Phi, E_m) \end{aligned} \quad (4.4)$$

transformiert (siehe Anh. C.1). Wird dabei nur ein bestimmter Endzustand des Restkerns betrachtet, was bei unserem Testexperiment der Fall ist, dann sind nur die vier Koordinaten

$$\mathcal{P}' = (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}, \Phi) \quad (4.5)$$

-bb-error = =

Abbildung 4.1: Die Akzeptanzen im  $\mathcal{P}'$ -Raum bei  $E_m = 15.96$  MeV (Messungen unter Vorwärtswinkeln hellgrau, unter Rückwärtswinkeln dunkelgrau schattiert). Die Teile a, b und c zeigen die  $|\vec{q}|$ - $\omega$ -Ebene bei  $\Theta_{pq} = 3^\circ$  und  $\Phi = 0^\circ, 90^\circ$  und  $180^\circ$ , der Teil d die  $|\vec{q}|$ - $\Theta_{pq}$ -Ebene bei  $\omega = 91$  MeV und  $\Phi = 0^\circ$  ( $\Theta_{pq} > 0^\circ$ ) bzw.  $\Phi = 180^\circ$  ( $\Theta_{pq} < 0^\circ$ ).

		Minimum	Maximum	Ausdehnung
Separationsgebiet				
$ \vec{q} $	[MeV/c]	280.0	520.0	240.0
$\omega$	[MeV]	85.0	97.0	12.0
$\Theta_{pq}$	[ $^\circ$ ]	0.0	6.0	6.0
“out-of-plane”-Winkel				
$\Phi$	[ $^\circ$ ]	0.0	360.0	360.0

Tabelle 4.3: Das Separationsgebiet und der überdeckte  $\Phi$ -Bereich der Testexperiments.

variabel. Dadurch sind aber die sechs Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}$  nicht mehr unabhängig voneinander, d.h. die Transformation muß unter Beachtung einer entsprechenden Nebenbedingung erfolgen (vgl. Anh. C.2).

Die Transformation der Akzeptanzen wurde für die zehn Messungen des Testexperiments durchgeführt. Da eine graphische Darstellung der so entstehenden vierdimensionalen Volumina nicht möglich ist, sind in Abbildung 4.1 geeignete Schnitte aufgetragen, durch die man eine Vorstellung davon bekommt, wie die Akzeptanzen im  $\mathcal{P}'$ -Raum angeordnet sind. Eine detaillierte geometrische Erklärung für Lage und Gestalt der dargestellten Akzeptanzen ist relativ kompliziert; prinzipiell kann man aber sagen, daß die meisten Effekte auf den festen Endzustand  $E_m = 15.96$  MeV zurückzuführen sind.

Die Teile a, b und c der betrachteten Abbildung zeigen die Akzeptanzen in der  $|\vec{q}|$ - $\omega$ -Ebene bei konstantem  $\Theta_{pq}$  ( $3^\circ$ ), aber unterschiedlichem  $\Phi$  ( $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ). Der gestrichelt eingezeichnete  $|\vec{q}|$ - $\omega$ -Bereich  $\tilde{G}$  wird in allen drei Plots durch die Vorwärts-Messungen 1 – 5 überdeckt, daher ist sowohl Links/Rechts-Information ( $\Phi = 0^\circ, 180^\circ$ ), als auch “out-of-plane”-Information ( $\Phi = 90^\circ$ ) in den Testmessungen enthalten. Das liegt daran, daß das Protonen-Spektrometer unter paralleler Kinematik steht, wobei wegen der ausgedehnten Akzeptanzen bei kleinem  $\Theta_{pq}$  im wesentlichen der volle  $\Phi$ -Bereich erfaßt wird. Spezielle “out-of-plane”-Messungen sind daher in diesem Fall nicht notwendig.

Damit die zur L/T-Separation benötigte Information ebenfalls in den Messungen enthalten ist, ist es erforderlich, daß der ins Auge gefaßte Bereich außer von den Vorwärtsmessungen auch von den Rückwärtsmessungen 6 – 10 belegt wird, zumindest bei *einem* Winkel  $\Phi$ . Da dies für den Bereich  $\tilde{G}$  weitgehend der Fall ist, kann dieser Bereich als die  $|\vec{q}|$ - $\omega$ -Ausdehnung des Separationsgebietes akzeptiert werden.

Zur Bestimmung der  $\Theta_{pq}$ -Ausdehnung des Gebietes  $G$  ist in Teil d der Ab-

Bins $B'$		erstes Bin	letztes Bin	Größe	Anzahl
phys. Koord. $\mathcal{P}'$					
$ \vec{q} $	[MeV/c]	287.5	512.5	15.0	16
$\omega$	[MeV]	86.5	95.5	3.0	4
$\Theta_{pq}$	[°]	1.0	5.0	2.0	3
$\Phi$	[°]	0.0	270.0	90.0	4

Tabelle 4.4: Die bei der Simulation des Testexperiments benutzten Bins  $B'$  in den physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}'$ . Die Werte für das erste und letzte Bin beziehen sich auf die jeweiligen geometrischen Mittelpunkte.

bildung 4.1 die  $|\vec{q}|$ - $\Theta_{pq}$ -Ebene bei  $\omega = 91$  MeV dargestellt. Abweichend von der sonst gewählten Nomenklatur bezeichnet bei dem hier aufgetragenen “in-plane”-Schnitt  $\Theta_{pq} > 0^\circ$  den Bereich mit  $\Phi = 0^\circ$  und  $\Theta_{pq} < 0^\circ$  den Bereich mit  $\Phi = 180^\circ$ . Man erkennt, daß die Vorwärtsmessungen bis etwa  $\Theta_{pq} = 8^\circ$  reichen, während die Rückwärtsmessungen maximal bis  $\Theta_{pq} = 4^\circ$  gehen. Als Ausdehnung in dieser Koordinate wird der Kompromiß ( $\Theta_{pq} = 6^\circ$ ) gewählt; der fehlende Überlapp im  $\Theta_{pq}$ -Bereich von  $4^\circ$ – $6^\circ$  muß daher vom flexiblen Ansatz überbrückt werden, was in diesem Bereich zu einem relativ großen statistischen Fehler der extrahierten Strukturfunktionen führt. Wie wir noch sehen werden, reduziert die in Abschnitt 5.2.1 behandelte Optimierung diese Fehler dadurch, daß die Rückwärtsmessungen weiter zum Rand des  $\Theta_{pq}$ -Bereiches gelegt werden. Die vorgeschlagene  $\Theta_{pq}$ -Ausdehnung des Separationsgebietes läßt der späteren Optimierung daher zusätzlichen Freiraum.

Die im ersten Teil dieses Abschnitts erarbeiteten Ergebnisse sind in Tabelle 4.3 zusammengefaßt; neben der Größe des Separationsgebiets ist zusätzlich der von den Messungen überdeckte  $\Phi$ -Bereich aufgelistet. Wie im folgenden erläutert wird, teilen wir diesen insgesamt in den physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}'$  erfaßten Bereich in kleinere Bins ein, damit eine Bestimmung der Strukturfunktionen als Funktionen von  $\zeta$  möglich ist.

Prinzipiell werden zur experimentellen Bestimmung von Wirkungsquerschnitten Bins zum Einsortieren der registrierten Ereignisse benötigt. In welchen Koordinaten diese Bins konstruiert werden hängt dabei von der jeweiligen Fragestellung des Experiments ab. In unserem Fall, wo die Strukturfunktionen innerhalb des Separationsgebietes als Funktionen von  $\zeta$  bestimmt werden sollen, muß der 5-fach differentielle Wirkungsquerschnitt für verschiedene Strahl-Energien  $e_i$  als Funktion der physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}'$  experimentell abgetastet werden. Daher ist es notwendig für jede der bei festem  $e_i$  durchgeführten Messungen Bins  $B'$  in den vier Koordinaten  $\mathcal{P}'$  zur Verfügung zu stellen. Zur Konstruktion dieser Bins wird das Separationsgebiet  $G$  zusammen mit dem überdeckten  $\Phi$ -Bereich in kleine Würfel unterteilt. Dabei werden vier Bins in  $\Phi$  mit geometrischen Mittelpunkten bei  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$  verwendet. Durch diese Wahl ist die zur Trennung der Interferenz-Strukturfunktionen benötigte Links/Rechts- ( $\Phi = 0, 180^\circ$ ) und “out-of-plane”-Information ( $\Phi = 90, 270^\circ$ ) in den Meßdaten

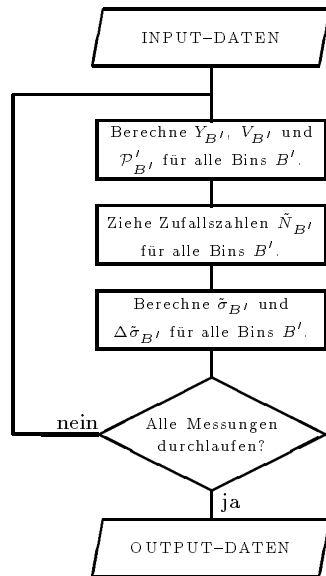


Abbildung 4.2: Flußdiagramm zum Unterprogramm SEEP; die einzelnen Schritte sind im Text erläutert.

enthalten<sup>4</sup>. Die gewählten Bins sind konsistent mit den optimalen Winkeln  $\Phi$ , die das Optimierungsprogramm OPOISEP in Abschnitt 5.1.1 bei punktweiser Separation der Strukturfunktionen ermittelt.

Die gesamte für das Testexperiments vorgeschlagene Binierung ist in Tabelle 4.4 angegeben; diese Einteilung wird auch bei der im nächsten Abschnitt beschriebenen Simulation benutzt.

### 4.3 Erzeugung von Pseudodaten durch Simulation des Experiments

Zur Simulation von  $(e, e'p)$ -Experimenten wurde das Unterprogramm SEEP entwickelt, dessen Algorithmus in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt ist. Der Input dieses Programmteils besteht aus den Kinematiken und Meßzeiten der einzelnen Messungen, den Akzeptanzen der verwendeten Spektrometer, den Target- und Strahlgrößen, sowie der Größe der verwendeten Bins. Für das Testexperiment sind diese Daten in Tabelle 4.1 bzw. 4.4 zusammengestellt. Der Output von SEEP enthält die simulierten Wirkungsquerschnitte, ihre statistischen Fehler, sowie die vollständigen Kinematiken der einzelnen Pseudomeßwerte.

Der Hauptteil von SEEP besteht aus einer Schleife, die für alle geplanten Messungen des Experiments durchlaufen wird. Innerhalb dieser Schleife werden die Phasenraumvolumina  $V_{B'}$  und die Zählraten  $Y_{B'}$  aller getroffenen Bins  $B'$  mit

<sup>4</sup>Eigentlich genügen hier bereits drei Bins, denn die “wahren” Wirkungsquerschnitte bei  $\Phi = 90^\circ$  und  $\Phi = 270^\circ$  sind dieselben.

den im Anhang E.2 beschriebenen Monte–Carlo–Integrationen berechnet. Bezeichnet  $T$  die Meßzeit der momentan in der Schleife bearbeiteten Messung, dann erhält man aus der Zählrate  $Y_{B'}$  gemäß

$$N_{B'} = Y_{B'} T \quad (4.6)$$

den “wahren” Wert für die Zahl der Koinzidenzereignisse im Bin  $B'$ . Dieser Wert ist, vom Integrationsfehler des Monte–Carlo–Verfahrens abgesehen, eine exakte reelle Zahl. Um die statistische Streuung in die Simulation einzubringen, werden daher im nächsten Schritt Pseudomeßwerte  $\tilde{N}_{B'}$  aus der Poisson–Verteilung

$$\rho(\tilde{N}_{B'}) = \frac{(N_{B'})^{\tilde{N}_{B'}}}{\tilde{N}_{B'}!} \exp(-N_{B'}) \quad (4.7)$$

random–erzeugt. Diese Verteilung kann für  $N_{B'} \gg 1$  durch die Gaußverteilung

$$\rho(\tilde{N}_{B'}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_{B'}}} \exp\left\{-\frac{(\tilde{N}_{B'} - N_{B'})^2}{2 N_{B'}}\right\} \quad (4.8)$$

angenähert werden; beide Alternativen stehen dem Unterprogramm SEEP zur Verfügung. Aus den Pseudomeßwerten  $\tilde{N}_{B'}$  berechnet sich der mittlere 5–fach differentielle Wirkungsquerschnitt im Bin  $B'$  gemäß

$$\tilde{\sigma}_{B'} := \frac{1}{T f_N} \frac{\tilde{N}_{B'}}{V_{B'}} \quad , \quad (4.9)$$

sein statistischer Fehler ist dabei durch

$$\Delta\tilde{\sigma}_{B'} := \frac{1}{T f_N} \frac{\sqrt{\tilde{N}_{B'}}}{V_{B'}} \quad (4.10)$$

gegeben. Hier bezeichnet der Normierungsfaktor  $f_N$  das Produkt aus Stromdichte der einlaufenden Elektronen ( $j_e$ ) und Zahl der Targetkerne ( $n_0$ ):

$$f_N = j_e n_0 \quad . \quad (4.11)$$

Die erzeugten Wirkungsquerschnitte müssen noch physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}'$  innerhalb der Bins zugeordnet werden. Dabei zeigt sich, daß die Verwendung der geometrischen Mittelpunkte der Bins unter Umständen zu systematischen Fehlern führt, deshalb werden stattdessen die bereits parallel zu  $Y_{B'}$  und  $V_{B'}$  berechneten mittleren physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}'_{B'}$  benutzt, die dieses vor allem bei Randbins auftretende Problem in erster Näherung umgehen (siehe Anh. E.3).

Der Output des Unterprogramms besteht dann aus einer Liste, deren einzelne Zeilen

$$(e_i, |\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}, \Phi, \tilde{\sigma}_{red}, \Delta\tilde{\sigma}_{red})$$

jeweils die vollständige Information über einen einzelnen Datenpunkt enthalten, wobei mit

$$\tilde{\sigma}_{red} = \frac{1}{K' \sigma_M} \tilde{\sigma}_{B'} , \quad (4.12)$$

$$\Delta \tilde{\sigma}_{red} = \frac{1}{K' \sigma_M} \Delta \tilde{\sigma}_{B'} \quad (4.13)$$

der reduzierte Wirkungsquerschnitt bzw. sein statistischer Fehler bezeichnet ist. Bei der Simulation des Testexperiments durch SEEP wurde auf diese Weise ein Satz von  $N = 1009$  Pseudomeßdaten erzeugt.

## 4.4 Modellunabhängige Analyse der Pseudodaten

Die mit SEEP erzeugten Daten werden nun mit Hilfe der in Abschnitt 3.2 beschriebenen modellunabhängigen Separation analysiert.

Für dieses Verfahren benötigt man zunächst eine Basis zur Entwicklung der Strukturfunktionen  $R_\lambda$ . Eine Möglichkeit ist in Tabelle 4.5 durch eine rein polynominelle Basis (B1) angegeben. In dieser Tabelle sind, getrennt für die vier Strukturfunktionen  $R_\lambda$ , drei elementare Basissysteme in den drei  $\zeta$ -Komponenten  $|\vec{q}|$ ,  $\omega$  und  $\Theta_{pq}$  aufgelistet. Die gesamte aus  $n_\lambda$  Elementen bestehende Basis für die Strukturfunktion  $R_\lambda$  erhält man durch Tensorproduktbildung (siehe Anh. B.1) der elementaren Basissysteme der entsprechenden Spalte. Die Summation über alle  $n_\lambda$  ergibt die Gesamtzahl der Basiselemente oder gleichbedeutend damit die Gesamtzahl der Parameter, die durch die Messungen bestimmt werden können:  $N_p = 240$ .

Unter Verwendung der Basis B1 ergibt sich bei einem Fit an den speziellen Satz von Pseudomeßdaten folgendes  $\chi^2$  pro Freiheitsgrad:

$$\chi_{p.F.}^2 = 0.9939 ,$$

wobei die Zahl der Freiheitsgrade  $N_F := N - N_p = 769$  beträgt. Der Stichprobenwert der Variablen  $\chi_{p.F.}^2$  liegt so nahe bei 1, daß der polynominelle Ansatz zumindest für den vorliegenden Satz von Pseudodaten als hinreichend flexibel anzusehen ist; in der Tat wurde der Grad der Polynome so hoch gewählt, daß dies der Fall ist. Da diese einzelne Stichprobe aber noch keine endgültige Aussage darüber erlaubt, ob der Ansatz tatsächlich flexibel genug ist, wird eine genauere Analyse der  $\chi_{p.F.}^2$ -Statistik in Abschnitt 4.5 erfolgen.

Eine alternative Basis (B2) ist in Tabelle 4.6 angegeben. Sie unterscheidet sich von der rein polynominellen Basis B1 dadurch, daß in der  $|\vec{q}|$ -Koordinate 10 B-Splines (siehe Anh. B.3) benutzt werden. Wie bei den Polynomen wird die gesamte Basis wieder durch Tensorproduktbildung erzeugt. Bei der Berechnung der Freiheitsgrade des Fits ist aber nun zu beachten, daß die 10 Splines der  $|\vec{q}|$ -Koordinate noch zwei Randbedingungen erfüllen müssen. Deshalb sind in dieser

Polynome als Basisfunktionen				
	$R_L$	$R_T$	$R_{LT}$	$R_{TT}$
$ \vec{q} $	$\{ 1,  \vec{q} , \dots,  \vec{q} ^7 \}$	$\{ 1,  \vec{q} , \dots,  \vec{q} ^7 \}$	$\{ 1,  \vec{q} , \dots,  \vec{q} ^7 \}$	$\{ 1,  \vec{q} , \dots,  \vec{q} ^7 \}$
$\omega$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$
$\Theta_{pq}$	$\{ 1, \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \}$	$\{ 1, \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \}$	$\{ \Theta_{pq}, \Theta_{pq}^3 \}$	$\{ \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \}$
$n_\lambda$	72	72	48	48

Tabelle 4.5: Die Basis B1 der Responsefunktionen zur modellunabhängigen Analyse der Pseudodaten. Für die einzelnen  $R_\lambda$  sind in geschweiften Klammern die elementaren Basiselemente in den drei Koordinaten  $|\vec{q}|$ ,  $\omega$  und  $\Theta_{pq}$  aufgelistet. Die angegebene  $\Theta_{pq}$ -Basis berücksichtigt die Symmetrie der Strukturfunktionen in  $\Theta_{pq}$  bzw. ihr Verhalten für  $\Theta_{pq} \rightarrow 0$  (vgl. Anh. B.2). In der letzten Zeile ist die Gesamtzahl  $n_\lambda$  der Basiselemente angegeben.

Splines/Polynome als Basisfunktionen				
	$R_L$	$R_T$	$R_{LT}$	$R_{TT}$
$ \vec{q} $	10 B-Splines	10 B-Splines	10 B-Splines	10 B-Splines
$\omega$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$	$\{ 1, \omega, \omega^2 \}$
$\Theta_{pq}$	$\{ 1, \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \}$	$\{ 1, \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \}$	$\{ \Theta_{pq}, \Theta_{pq}^3 \}$	$\{ \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \}$
$n_\lambda$	90	90	60	60

Tabelle 4.6: Die Basis B2 der Responsefunktionen zur modellunabhängigen Analyse der Pseudodaten. Sie unterscheidet sich von B1 dadurch, daß in der  $|\vec{q}|$ -Richtung 10 B-Splines als elementare Basisfunktionen verwendet werden.

Richtung nur 8 Parameterkombinationen linear unabhängig, was insgesamt wieder auf die Zahl von  $N_F = 769$  Freiheitsgraden führt. Der Fit an die Daten ergibt mit

$$\chi_{p.F.}^2 = 0.9922$$

wieder einen praktisch bei 1 liegenden Wert.

Das Ergebnis der modellunabhängigen Separation ist in den Abbildungen 4.3 und 4.4 durch Vergleich der aus den Pseudodaten extrahierten Strukturfunktionen (die grau schattierten Bereiche kennzeichnen ihre Fehlerbänder) mit den in die Simulation hineingesteckten (durchgezogene Kurven) für  $\omega = 91$  MeV und  $\Theta_{pq} = 3^\circ$  als Funktion von  $|\vec{q}|$  dargestellt. Auf der linken Seite der Abbildungen (Teile a und c) wurde die rein polynomiale Basis B1 zur Analyse benutzt; auf der rechten Seite (Teile b und d) die Kombination aus Polynomen und Splines (Basis B2). Es ist deutlich zu erkennen, daß das Ergebnis der Separation praktisch unabhängig von der Wahl des verwendeten Basissystems ist. Bei beiden Basissystemen werden allerdings die extrahierten Strukturfunktionen an den Rändern des Separationsgebietes sehr ungenau. Dieser bereits aus ein-dimensionalen Fits bekannte Effekt ist durch die hohe Ordnung der Polynome



bedingt und ist bei den in der Basis B2 verwendeten Splines, die stückweise aus Polynomen 3. Grades bestehen, daher etwas weniger ausgeprägt, als bei den Polynomen 7. Grades der Basis B1.

Die Abbildungen zeigen außerdem, daß der flexible Ansatz, der die Wirkungsquerschnitte an diskreten Punkten gut beschreibt, auch die Strukturfunktionen im Rahmen der “Meßgenauigkeit” als Funktionen in  $G$  reproduziert. Das Verfahren führt also nicht zu einer Verzerrung der extrahierten Strukturfunktionen, was in Anbetracht dessen, daß für ihre Bestimmung ein schwieriges Inversionsproblem zu lösen ist, bemerkenswert ist.

Die einzelnen Strukturfunktionen werden mit unterschiedlicher relativer Genauigkeit bestimmt. So gewinnt man aus der Abbildung 4.3 einen guten Eindruck über den Verlauf der extrahierten Strukturfunktionen  $\tilde{R}_L$  und  $\tilde{R}_T$  als Funktionen von  $|\vec{q}|$ ; die Fehlerbänder sind fast überall kleiner als die Variationen der Funktionen in  $|\vec{q}|$ . Dieses Verhältnis ist für die beiden Interferenz-Strukturfunktionen (vgl. Abb. 4.4) wesentlich ungünstiger. Da diese in paralleler Kinematik verschwinden, sind sie in dem durch das Experiment erfaßten kinematischen Bereich klein gegen  $\tilde{R}_L$  und  $\tilde{R}_T$ . Bei den Interferenz-Strukturfunktionen reicht die statistische Genauigkeit daher nicht einmal zur Bestimmung des Vorzeichens aus; sie sind im Rahmen ihres Fehlers mit den gestrichelt markierten Nulllinien verträglich.

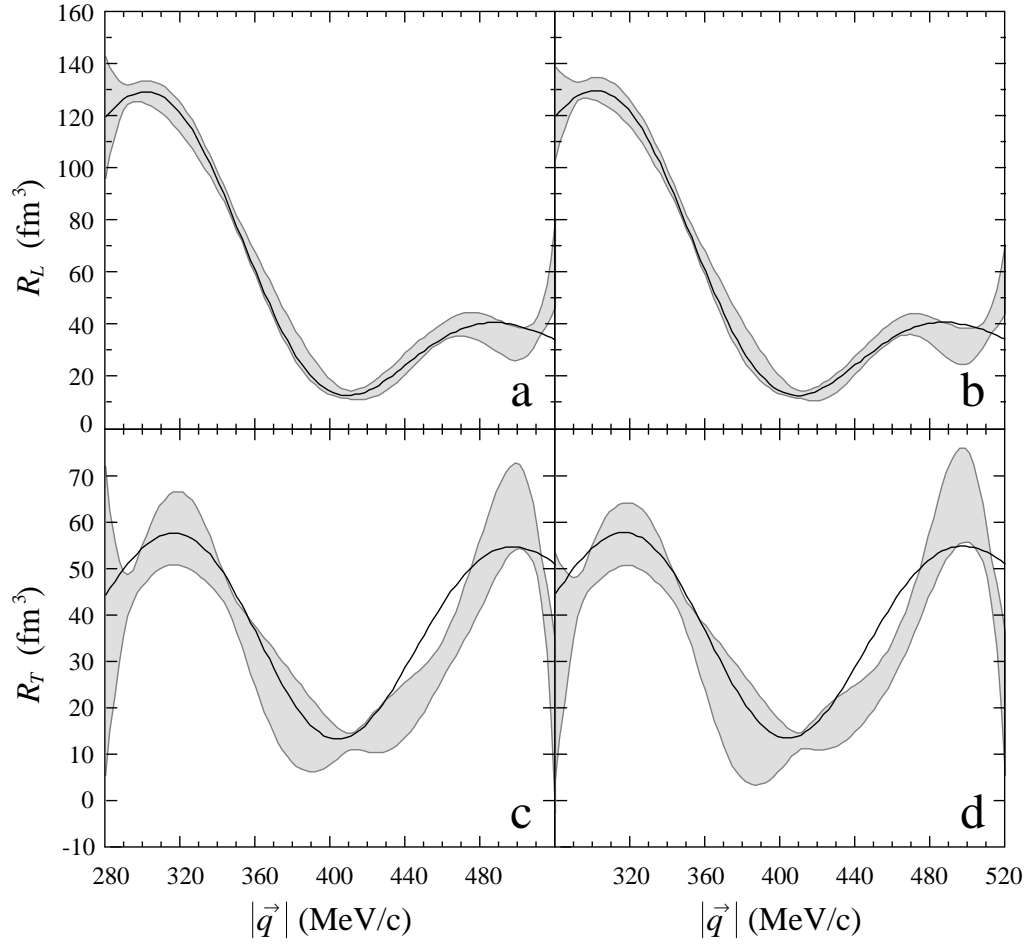


Abbildung 4.3: Die Strukturfunktionen  $R_L$  (Teil a,b der Abb.) und  $R_T$  (Teil c,d der Abb.) als Fkt. von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91$  MeV,  $\Theta_{pq} = 3^\circ$ . Die durchgezogenen Kurven kennzeichnen die in die Simulation hineingesteckten Strukturfunktionen, die grau schattierten Bereiche geben die Fehlerbänder der separierten Strukturfunktionen wider. Auf der linken Seite der Abb. (Teil a,c) wurde die Basis B1 für den flexiblen Ansatz der modellunabhängigen Separation benutzt, auf der rechten Seite (Teil b,d) die Basis B2.

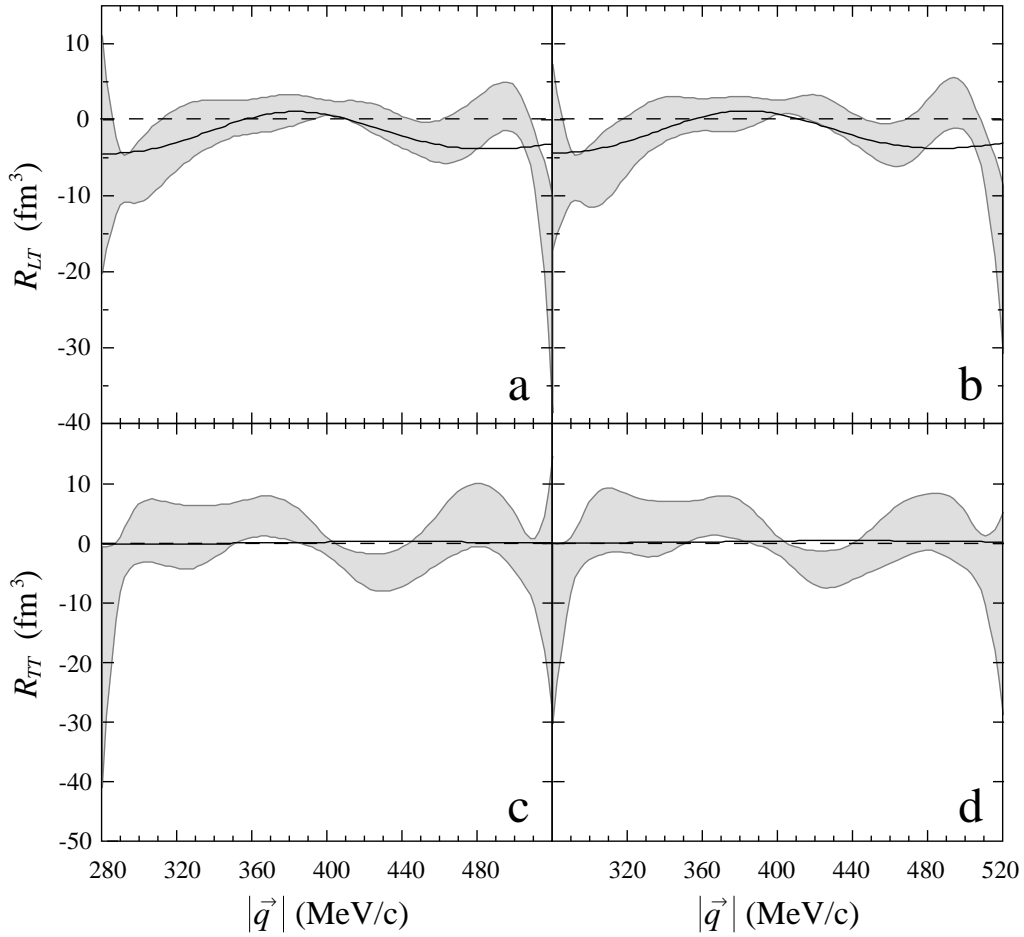


Abbildung 4.4: Die Strukturfunktionen  $R_{LT}$  (Teil a,b der Abb.) und  $R_{TT}$  (Teil c,d der Abb.) als Fkt. von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91$  MeV,  $\Theta_{pq} = 3^\circ$ . Die durchgezogenen Kurven kennzeichnen die in die Simulation hineingesteckten Strukturfunktionen (im Vergleich dazu ist gestrichelt die Nulllinie eingezeichnet), die grau schattierten Bereiche geben die Fehlerbänder der separierten Strukturfunktionen wider. Auf der linken Seite der Abb. (Teil a,c) wurde die Basis B1 für den flexiblen Ansatz der modellunabhängigen Separation benutzt, auf der rechten Seite (Teil b,d) die Basis B2.

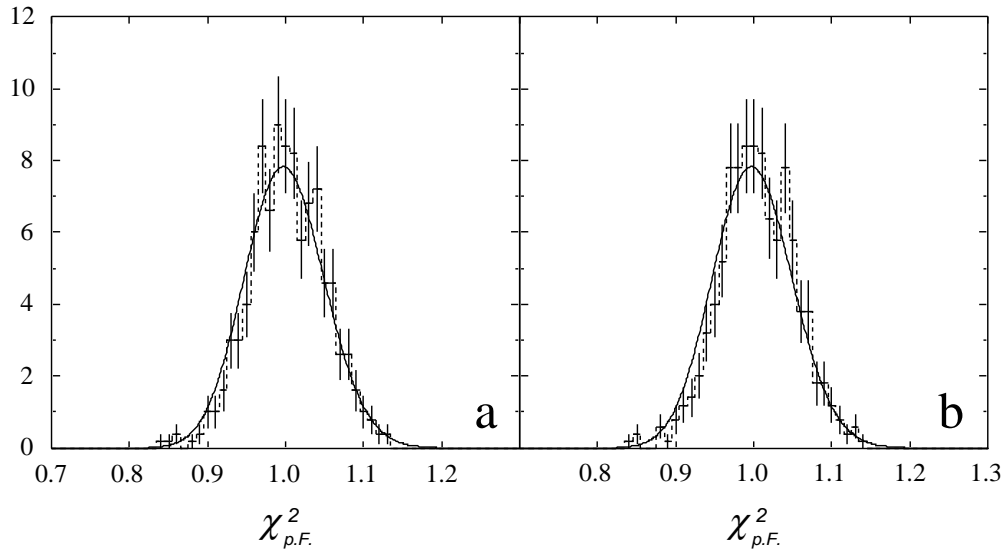


Abbildung 4.5: Wahrscheinlichkeitsdichten (durchgezogene Linien) und normierte Häufigkeiten (gestrichelt mit Fehlerbalken) der Variablen  $\chi_{p.F.}^2$ . In Teil a wurde die Basis B1, in Teil b die Basis B2 für den flexiblen Ansatz verwendet.

## 4.5 Statistischer Test des Verfahrens

Die Werte der Variablen  $\chi_{p.F.}^2$  bei den beiden Stichproben, die sich im letzten Abschnitt bei Verwendung der Basissysteme B1 und B2 ergaben, erlauben keine endgültige Aussage über das Verfahren. Erst eine Untersuchung der Verteilung der Zufallsgröße  $\chi_{p.F.}^2$  gibt Aufschluß darüber, ob das Verfahren eine unverfälschte Extraktion der Information erlaubt. Dazu wurde die Simulation der Pseudomeßdaten 500-mal mit verschiedenen Startwerten der Random-Funktion wiederholt. Für jeden Satz von Pseudodaten wurde die Analyse mit B1 und B2 durchgeführt,  $\chi_{p.F.}^2$  berechnet und in  $r = 29$  Intervalle  $\xi_k$  der Breite  $\Delta = 0.01$  einsortiert. Durch Normieren der Häufigkeiten  $n_k$  auf die Gesamtzahl der Stichproben  $n$  und die Intervallbreite  $\Delta$  ergeben sich die “experimentellen” Wahrscheinlichkeitsdichten für  $\chi_{p.F.}^2$ , welche in der Abbildung 4.5 zusammen mit ihren statistischen Fehlern eingetragen sind. Die durchgezogene Linie kennzeichnet die theoretische Wahrscheinlichkeitsdichte

$$g(\chi_{p.F.}^2) = \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} (\chi_{p.F.}^2)^{\lambda-1} \exp(-\lambda \chi_{p.F.}^2) \quad (4.14)$$

für  $\chi_{p.F.}^2$  bei  $N_F$  Freiheitsgraden, wobei  $\lambda = N_F/2$  ist. Qualitativ sieht man bereits, daß für beide Basissysteme die Dichtewerte, im Rahmen ihrer Fehler um die theoretische Verteilung streuen. Leichte systematische Abweichungen sind für  $\chi_{p.F.}^2$  zwischen 0.88 und 0.95 zu erkennen; hier sind die normierten Häufigkeiten durchweg kleiner als die theoretische Verteilung. Die Ursache dieser relativ kleinen Abweichung ist schwer feststellbar; auf der hier betrachteten statistischen

$\chi^2$ -Test		
	Basis B1	Basis B2
$X^2$	22.25	30.66
$E(\chi^2)$	28	28
$\sigma(\chi^2)$	7.48	7.48
$\alpha$	0.1	0.1
$\chi^2_{1-\alpha}$	37.92	37.92
Hypothese abgelehnt?	nein	nein

Tabelle 4.7:  $\chi^2$ -Test des Verfahrens bei Verwendung der Basissysteme B1 und B2.

Stufe können sich z.B. bereits Systematiken des computer-internen Random-Generators bemerkbar machen.

Um Abbildung 4.5 auch quantitativ beurteilen zu können, wurde wieder ein  $\chi^2$ -Test durchgeführt. Testgröße dieses Verfahrens ist

$$X^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \quad (4.15)$$

mit

$$p_k = \int_{\xi_k} g(\chi_{p.F.}^2) d\chi_{p.F.}^2 ; \quad (4.16)$$

sie sollte asymptotisch (d.h.  $n \rightarrow \infty$ ) wie  $\chi^2$  mit

$$f = r - 1 \quad (4.17)$$

Freiheitsgraden verteilt sein.

In Tabelle 4.7 ist das Ergebnis des Tests zusammengefaßt. Die statistische Größe  $X^2$  liegt in beiden Fällen (Basis B1 und Basis B2) innerhalb der Standardabweichung  $\sigma(\chi^2) = \sqrt{2f} = 7.48$  um den Erwartungswert  $E(\chi^2) = f = 28$ . Üblicherweise wird die Bewertung des Tests durch Angabe eines Signifikanzniveaus  $\alpha$  vorgenommen; eine Wahl von  $\alpha = 0.1$  bedeutet, daß mit 90 prozentiger Wahrscheinlichkeit der Stichprobenwert  $X^2$  kleiner als  $\chi^2_{1-\alpha}$  sein sollte. Die Testgröße erfüllt dies in beiden Fällen.

Somit gibt es auf der Ebene dieses Tests keinen Grund, die Annahme, daß sich der Wirkungsquerschnitt an den Stellen, wo Meßwerte vorliegen, durch den flexiblen Ansatz mit den Basissystemen B1 oder B2 beschreiben läßt, abzulehnen.

## 5. Optimierung von $(e, e'p)$ -Experimenten durch Informationsmaximierung

Bei der Planung eines Streuexperiments sind unter anderem die Kinematiken der einzelnen Messungen und die Verteilung der Strahlzeit auf die Messungen so festzulegen, daß in der vorgegebenen Gesamtmeßzeit ein maximaler Informationsgewinn erzielt wird. Diese Aufgabe wird dadurch erschwert, daß zwischen den im Experiment (mehr oder weniger direkt) zugänglichen Größen, den Wirkungsquerschnitten, und den gesuchten physikalischen Größen, auf die das Experiment abzielt (z.B. den Strukturfunktionen), ein aufwendiges Analyseverfahren steht. Aus diesem Grund und wegen der großen Zahl von Parametern, die das Experiment charakterisieren (Setup-Parameter  $\mathbf{s}$ ), ist eine Lösung des Optimierungsproblems schwer zu finden. Dabei ist bereits die Definition dessen, was man unter "optimaler Lösung" versteht, problematisch.

Das Optimierungsproblem ist aber wohldefiniert, wenn man in der Lage ist, den durch ein gegebenes Experiment erzielten Informationsgewinn durch eine Zielfunktion  $\mathcal{Z}(\mathbf{s})$  zu bewerten. Aus dem Minimum bzw. Maximum dieser Zielfunktion ergibt sich schließlich die optimale Lösung  $\tilde{\mathbf{s}}$ . Das entsprechende Vorgehen zur Optimierung eines geplanten Experiments ist in Abbildung 5.1 schematisch dargestellt.

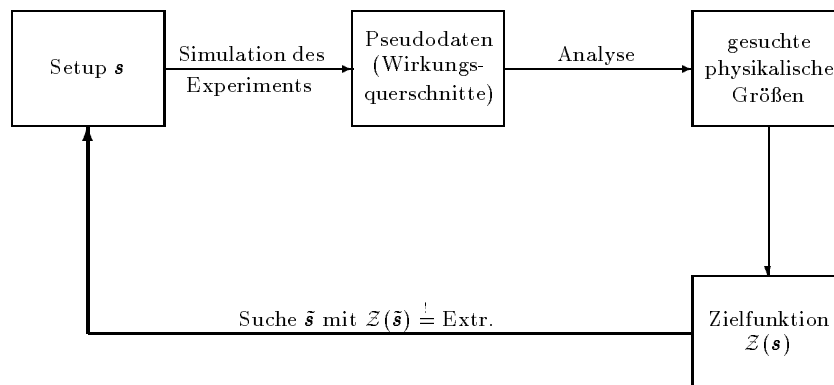


Abbildung 5.1: Das allgemeine Konzept zur Optimierung von geplanten Streuexperimenten.

Im folgenden wird dieses allgemeine Konzept auf geplante  $(e, e'p)$ -Experimenten zur Bestimmung der physikalischen Größen "Strukturfunktionen" angewandt. Die Optimierung dieser Experimente besteht in der Maximierung der Information, die in den gemessenen Wirkungsquerschnitten über die gesuchten Strukturfunktionen enthalten ist.

## 5.1 Optimierung bei punktweiser Separation – Programm OPOISEP

In diesem Abschnitt werden  $(e, e'p)$ -Experimente betrachtet, deren Ziel die Separation von Strukturfunktionen an einem festen Punkt  $\zeta = \zeta_0$  ist (vgl. Abschn. 3.1). Der Algorithmus zur Optimierung dieser Experimente wird entsprechend Diagramm 5.1 im folgenden entwickelt:

Im ersten Schritt muß das Experiment durch einen Satz von Setup-Parametern  $\mathbf{s}$  charakterisiert werden. Als verfügbare Parameter kommen bei einer punktweisen Separation nur die Energien  $e_i^{(k)}$ , die Winkel  $\Phi^{(k)}$  und die Meßzeiten  $T^{(k)}$  der einzelnen Messungen in Frage; das Experiment ist bezüglich dieser Parameter unter der Nebenbedingung konstanter Gesamtmeßzeit,  $T_{sum} = const$ , zu optimieren.

Zur Simulation des Experiments wird angenommen, daß das gesamte von den Spektrometern bei der  $k$ -ten Messung erfaßte Phasenraumvolumen  $V_{Ph}^{(k)}$  zur Bestimmung eines einzigen Wirkungsquerschnitts benutzt wird. Das Problem der Kontraktion des Phasenraums auf einen Punkt wird dabei nicht weiter berücksichtigt; wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Wirkungsquerschnitt innerhalb der Akzeptanzen konstant ist. Der “wahre” Wert für die Zahl der Koinzidenzereignisse der  $k$ -ten Messung ist dann direkt durch

$$N^{(k)} = f_N T^{(k)} V_{Ph}^{(k)} K' \sigma_M^{(k)} \left( v_L R_L + v_T^{(k)} R_T + v_{LT}^{(k)} R_{LT} \cos \Phi^{(k)} + v_{TT} R_{TT} \cos 2\Phi^{(k)} \right) \quad (5.1)$$

gegeben, wobei die “wahren” Strukturfunktionen  $R_\lambda$  hier durch das in Anhang D beschriebene Modell vorgegeben werden.

Diese Ersetzung der “wahren” Strukturfunktionen  $R_\lambda$  durch die mit einem theoretischen Modell berechneten ist nicht unproblematisch. Solange die  $R_\lambda$  nicht experimentell bestimmt sind, weiß niemand mit letzter Sicherheit<sup>1</sup>, welche Werte sie an der Stelle  $\zeta_0$  (oder allgemeiner als Funktion von  $\zeta$ ) haben; verschiedene theoretische Modelle sagen unterschiedliche Strukturfunktionen vorher. Bei der Simulation eines  $(e, e'p)$ -Experiments in einem unerforschten kinematischen Bereich bleibt uns keine andere Wahl als die unbekanntenen “wahren” Strukturfunktionen durch die Vorhersagen eines (willkürlich ausgewählten) theoretischen Modells zu ersetzen. Eine solche Simulation ist daher immer mit einer schwer abzuschätzenden modellabhängigen Unsicherheit belastet. Die geschilderte Problematik trifft auch auf die in Abschnitt 4.3 beschriebene Simulation zu; dort wird sie aber nicht ganz so offensichtlich wie an dieser Stelle.

Aus dem durch (5.1) gegebenen “wahren” Wert  $N^{(k)}$  für die Zahl der Koinzidenzereignisse der  $k$ -ten Messung wird ein Pseudomeßwert  $\tilde{N}^{(k)}$  gemäß Abschnitt 4.3 random-erzeugt. Der Pseudomeßwert “reduzierter Wirkungsquerschnitt der

---

<sup>1</sup>Selbst dann bleibt ein Rest an Unsicherheit, der durch die Größe des Fehlerbalkens (bzw. Fehlerbandes) gegeben ist.

$k$ -ten Messung" ist dann durch

$$\tilde{\sigma}_{red}^{(k)} = \frac{1}{K' \sigma_M^{(k)}} \frac{\tilde{N}^{(k)}}{f_N T^{(k)} V_{Ph}^{(k)}} , \quad (5.2)$$

sein statistischer Fehler durch

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(k)} &= \frac{1}{K' \sigma_M^{(k)}} \frac{\sqrt{\tilde{N}^{(k)}}}{f_N T^{(k)} V_{Ph}^{(k)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{K' \sigma_M^{(k)}} \frac{\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}}{f_N T^{(k)} V_{Ph}^{(k)}}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

gegeben.

Aus den reduzierten Wirkungsquerschnitten  $\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}$  und ihren Fehlerangaben  $\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(k)}$  werden die Strukturfunktionen  $\tilde{R}_\lambda$  und ihre entsprechenden Fehler  $\Delta \tilde{R}_\lambda$  mit dem in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Formalismus bestimmt. Die auf Seite 15 zur Berechnung der Pseudoinversen  $\mathbf{V}^+$  (Gl. (3.27)) benötigte Inversion der Matrix  $\mathbf{G}_{\tilde{R}}$  (Gl. (3.28)) erfolgt dabei mit numerischen Standardmethoden.

Zur Optimierung wird eine Zielfunktion  $\mathcal{Z}(\mathbf{s})$  benötigt, mit der eine gegebene Experimentkonfiguration  $\mathbf{s}$  bewertet werden kann. Wir benutzen dafür eine Varianzfunktion, die sich auf die Cramér–Rao–Informationsungleichung (siehe z.B. [13]) stützt. Unter der Voraussetzung, daß die Zahl der Koinzidenzereignisse gaußverteilt ist (für  $N^{(k)} \gg 1$  in guter Näherung erfüllt), vereinfacht sich diese Ungleichung bei der Anwendung auf unser Problem (siehe Anh. F) zu

$$\left(\Delta \tilde{R}_\lambda\right)^2 = \frac{1}{I(R_\lambda)} . \quad (5.4)$$

Die Gleichung (5.4) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Varianz  $(\Delta \tilde{R}_\lambda)^2$  der extrahierten Strukturfunktion  $\tilde{R}_\lambda$  und der Information  $I(R_\lambda)$ , die in den experimentellen Daten über die "wahre" Strukturfunktion  $R_\lambda$  enthalten ist;  $I(R_\lambda)$  ist maximal wenn  $\Delta \tilde{R}_\lambda$  minimal ist. Darauf aufbauend definieren wir die *totale Varianz*

$$\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}) := \sum_\lambda w_\lambda \left(\Delta \tilde{R}_\lambda(\mathbf{s})\right)^2 ; \quad (5.5)$$

sie ist ein Maß für die Information, die in den Messungen über alle vier Strukturfunktionen enthalten ist. Durch Wahl der Gewichte  $w_\lambda$  kann der Information über die einzelnen Strukturfunktionen unterschiedliche Bedeutung gegeben werden, wodurch sich spezielle physikalische Zielsetzungen in die Optimierung einbringen lassen (siehe Abschn. 5.1.1, 5.1.2).

Die optimalen Setup-Parameter  $\tilde{\mathbf{s}}$  werden schließlich durch Minimierung von  $\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s})$  bestimmt (siehe z.B. [13]). Dazu wird bei vorgegebener Zahl von Messungen ein Start-Setup  $\mathbf{s}_0$  random-erzeugt und an dieser Stelle im  $\mathbf{s}$ -Raum Gradient und Krümmung der totalen Varianz  $\mathcal{V}_{tot}$  berechnet. Die Nebenbedingung  $T_{sum} = const$ , die durch einen Lagrangeparameter in die Minimierung



eingebraucht wird, erfordert dabei ein Renormierung einzelner Komponenten des Gradienten. Aus der Krümmungsmatrix und dem renormierten Gradienten läßt sich dann ein neuer Wert  $\mathbf{s}_1$  bestimmen, der näher bei  $\tilde{\mathbf{s}}$  liegt als  $\mathbf{s}_0$ . Dieses Verfahren wird iterativ wiederholt, bis sich die totale Varianz nur noch unwesentlich ändert.

Zur Optimierung von  $(e, e'p)$ -Experimenten bei punktwieser Separation der Responsefunktionen wird der beschriebene Algorithmus mit dem Programm OPOI-SEP ausgeführt. Ergebnisse werden in den Abschnitten 5.1.1 und 5.1.2 an zwei Beispielen diskutiert, die eine unterschiedliche physikalische Zielsetzung verfolgen. Zur Berücksichtigung dieser Ziele wird in der totalen Varianz eine entsprechende Bewertung (ungewichtet bzw. gewichtet) der Information über die einzelnen Strukturfunktionen vorgenommen.

### 5.1.1 Optimierung bei ungewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen

Geplant sei ein Experiment, das die Reaktion  $^{12}\text{C}(e, e'p)^{11}\text{B}_{g.s.}$  mit dem Ziel untersucht, alle vier Responsefunktionen an der Stelle

$$\zeta_0 = (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}) = (400.0 \text{ MeV}/c, 91.0 \text{ MeV}, 4.0^\circ)$$

möglichst genau zu bestimmen. Dazu sind vier Messungen vorgesehen, wobei die Gesamtmeßzeit  $T_{sum} = 10 \text{ h}$  betragen soll. Das auslaufende Elektron soll dabei im Spektrometer A, das Proton im Spektrometer B der *MAMI*-Anordnung nachgewiesen werden. Targetdicke und Strom der einlaufenden Elektronen sind auf

$$\begin{aligned} d &= 25.0 \text{ mg}/\text{cm}^2, \\ I &= 50.0 \mu\text{A} \end{aligned}$$

festgelegt; die maximal zur Verfügung stehende Energie der einlaufenden Elektronen beträgt 850 MeV.

Zur Optimierung des geplanten Experiments werden die "wahren" Strukturfunktionen an der Stelle  $\zeta_0$  benötigt. Wie auf Seite 35 erläutert wurde, werden diese durch die Vorhersagen des in Anhang D beschriebenen Modells ersetzt. Man erhält die Werte

$$\begin{aligned} R_L(\zeta_0) &= 21.962 \text{ fm}^3, \\ R_T(\zeta_0) &= 18.975 \text{ fm}^3, \\ R_{LT}(\zeta_0) &= 0.427 \text{ fm}^3, \\ R_{TT}(\zeta_0) &= 0.485 \text{ fm}^3. \end{aligned}$$

Außerdem müssen in (5.5) die Gewichte  $w_\lambda$  für die totale Varianz  $\mathcal{V}_{tot}$  gewählt werden. Wir wählen hier zunächst

$$w_\lambda = 1 \quad \forall \lambda,$$

Messungen							Separation				
$k$	$e_i^{(k)}$ [MeV]	$\Theta_e^{(k)}$ [°]	$\Phi^{(k)}$ [°]	$\epsilon^{(k)}$	$T^{(k)}$ [h]	$\Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}/\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}$ [%]	$\lambda$	$w_\lambda$	$\Delta\tilde{R}_\lambda$ [fm <sup>3</sup> ]	$\Delta\tilde{R}_\lambda/\tilde{R}_\lambda$ [%]	$I(R_\lambda)$
1	850.0	28.1	0.0	0.884	1.11	0.82	$L$	1.0	0.281	1.28	12.65
2	850.0	28.1	180.0	0.884	1.10	0.83	$T$	1.0	0.399	2.11	6.27
3	850.0	28.1	90.2	0.884	1.65	0.68	$LT$	1.0	0.184	43.22	29.39
4	245.5	179.8	bel.	0.000	6.14	2.11	$TT$	1.0	0.283	58.23	12.52

Tabelle 5.1: Ergebnis der Optimierung aller Setup-Parameter bei gleicher Gewichtung der einzelnen Varianzen. Der optimale Satz von Messungen gehört zur Klasse der von de Forest vorgeschlagenen Messungen. Die totale Varianz beträgt 0.352.

Messungen							Separation				
$k$	$e_i^{(k)}$ [MeV]	$\Theta_e^{(k)}$ [°]	$\Phi^{(k)}$ [°]	$\epsilon^{(k)}$	$T^{(k)}$ [h]	$\Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}/\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}$ [%]	$\lambda$	$w_\lambda$	$\Delta\tilde{R}_\lambda$ [fm <sup>3</sup> ]	$\Delta\tilde{R}_\lambda/\tilde{R}_\lambda$ [%]	$I(R_\lambda)$
1	850.0	28.1	0.0	0.884	0.88	0.92	$L$	1.0	1.484	6.76	0.45
2	295.1	105.0	0.0	0.218	5.11	1.59	$T$	1.0	0.524	2.76	3.64
3	245.5	179.8	0.0	0.000	3.60	2.75	$LT$	1.0	2.269	531.72	0.19
4	850.0	28.1	59.7	0.884	0.41	1.36	$TT$	1.0	1.745	359.54	0.33

Tabelle 5.2: Ergebnis einer auf die Klasse der Donnelly-Messungen eingeschränkten Optimierung bei gleicher Gewichtung der einzelnen Varianzen. Die totale Varianz beträgt 10.672

d.h. wir nehmen keine besondere Gewichtung der einzelnen Varianzbeiträge vor. Das unter diesen Voraussetzungen vom Optimierungsprogramm OPOISEP erzielte Ergebnis ist in Tabelle 5.1 zusammengefaßt. Ein Vergleich mit Abschnitt 3.1.1 zeigt, daß die vom Programm gefundene Lösung zur Klasse der von de Forest vorgeschlagenen Messungen gehört:

Drei Messungen werden bei der maximalen Einschußenergie (850 MeV) und damit unter minimalem Elektronstreuwinkel (28.1°) durchgeführt; diese Messungen nutzen die  $\Phi$ -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts aus. Die vierte Messung wird auf die bei konstantem  $|\vec{q}|$  und  $\omega$  minimal mögliche Strahlenergie  $e_i^{(4)} \simeq (|\vec{q}| + \omega)/2 = 245.5$  MeV (maximaler Rückwärtswinkel  $\Theta_e^{(4)} \simeq 180^\circ$ ) festgelegt. Für die Polarisation des virtuellen Photons erhält man bei dem angegebenen Vorwärtswinkel  $\epsilon = 0.9$  und bei dem extremen Rückwärtswinkel  $\epsilon = 0$ . Dieser maximal mögliche Unterschied im Polarisationsparameter  $\epsilon$  führt zur optimalen L/T-Separation und läßt sich in der Tat für den Spezialfall der parallelen Kinetik, wo die Interferenz-Strukturfunktionen verschwinden, auch analytisch als optimale Lösung ableiten (siehe Anh. G).

Der vom Programm berechnete Wert für den “out-of-plane”-Winkel  $\Phi^{(3)}$  weicht von dem vielleicht erwarteten Wert 90.0° leicht ab. Der ermittelte Wert 90.2° erklärt sich aber – genauso wie die unterschiedlichen Zeiten für die Messungen Nr. 1 und Nr. 2 – durch die Links/Rechts-Asymmetrie des Wirkungsquer-

schnitts. Zur Verdeutlichung wurde das Vorzeichen des “wahren”  $R_{LT}$  willkürlich geändert, was zur Folge hat, daß das Optimierungsprogramm, bei gleichzeitiger Vertauschung der Meßzeiten der ersten und zweiten Messung den “out-of-plane”-Winkel  $\Phi^{(3)} = 89.8^\circ$  berechnet. Zur weiteren Verdeutlichung wurde in einer weiteren Untersuchung  $R_{LT}$  auf Null gesetzt; dann ermittelt OPOISEP wie erwartet den Winkel  $\Phi^{(3)} = 90.0^\circ$  bei gleicher Meßzeit für die Messungen Nr. 1 und Nr. 2.

Die vom Optimierungsprogramm ermittelte optimale Lösung gehört zur Klasse der von de Forest vorgeschlagenen Messungen. Interessant ist ein Vergleich des Informationsgewinns dieser optimalen Lösung mit dem, den man bei Beschränkung auf die Klasse der von Donnelly vorgeschlagenen Messungen erzielen kann. Diese Untersuchung läßt sich ebenfalls mit OPOISEP durchführen. Dazu werden die “out-of-plane”-Winkel der ersten drei Messungen konstant auf  $\Phi^{(k)} = 0^\circ$  gehalten und nur die restlichen Setup-Parameter zur Optimierung freigegeben. Auf diese Weise erhält man die in Tabelle 5.2 angegebenen optimalen Donnelly-Messungen. Ein Vergleich mit Tabelle 5.1 zeigt, daß die optimalen de-Forest-Messungen nicht nur insgesamt zu einer um den Faktor 30.3 kleineren totalen Varianz, sondern zu einer deutlich genaueren Bestimmung jeder einzelnen Strukturfunktion führen. Das Programm hat uns damit gezeigt, daß sich die beiden Methoden bei der Anwendung auf konkrete Experimente deutlich unterscheiden – ein Ergebnis das sich aus den Betrachtungen in Abschnitt 3.1 nicht erkennen ließ.

### 5.1.2 Optimierung bei gewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen

Das dem geplanten Experiment zugrundeliegende physikalische Ziel wird nun gegenüber dem in Abschnitt 5.1.1 besprochenen dahingehend abgewandelt, daß nur die Interferenz-Strukturfunktionen  $R_{LT}$  und  $R_{TT}$  bestimmt werden sollen, während auf die Extraktion von  $R_L$  und  $R_T$  verzichtet wird. Um diese Anforderung in der Optimierung zu berücksichtigen, setzen wir die Gewichte auf

$$\begin{aligned} w_L &= w_T = 0 , \\ w_{LT} &= w_{TT} = 1 . \end{aligned}$$

Das Programm OPOISEP liefert die in Tabelle 5.3 angegebene Lösung.

Diese Lösung verzichtet auf eine Variation der Strahlenergie, die im ungewichteten Fall zur L/T-Separation benötigt wird, und setzt alle Messungen auf die maximale Energie. Auffällig ist dabei, daß nur drei Messungen vom Optimierungsprogramm vorgesehen sind, obwohl vier Messungen angeboten werden. Es ist klar, daß drei Messungen zur Separation der Interferenz-Strukturfunktionen ausreichen; könnte es aber nicht günstiger sein, z.B. noch eine vierte Messung bei derselben Strahlenergie, aber bei irgend einem anderen Winkel  $\Phi$ , durchzuführen? Es ist aber so, daß eine Messung unter beliebigem “out-of-plane”-Winkel weniger Separations-Information enthält als irgendeine der drei anderen

Messungen							Separation				
$k$	$\epsilon_i^{(k)}$ [MeV]	$\Theta_e^{(k)}$ [°]	$\Phi^{(k)}$ [°]	$\epsilon^{(k)}$	$T^{(k)}$ [h]	$\Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}/\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}$ [%]	$\lambda$	$w_\lambda$	$\Delta\tilde{R}_\lambda$ [fm <sup>3</sup> ]	$\Delta\tilde{R}_\lambda/\tilde{R}_\lambda$ [%]	$I(R_\lambda)$
1	850.0	28.1	90.2	0.884	4.13	0.43	$L$	0.0	$\infty$	$\infty$	0.0
2	850.0	28.1	0.0	0.884	2.95	0.50	$T$	0.0	$\infty$	$\infty$	0.0
3	850.0	28.1	180.0	0.884	2.92	0.51	$LT$	1.0	0.113	26.55	77.88
4	–	–	–	–	0.00	$\infty$	$TT$	1.0	0.176	36.36	32.11

Tabelle 5.3: Ergebnis der Optimierung bei Verzicht auf die Bestimmung von  $R_L$  und  $R_T$ .

Messungen. Da die Gesamtmeßzeit konstant bleibt, müßte für eine vierte Messung bei den anderen drei Zeit eingespart werden, wodurch man aber mehr Information verliert als man neu dazugewinnt. Dies wird von dem Programm richtig “erkannt” das folgerichtig auf die vierte Messung verzichtet, d.h.  $T^{(4)}$  auf Null setzt.

## 5.2 Optimierung bei modellunabhängiger Separation – Programm OPTEEP

Das in Abbildung 5.1 dargestellte allgemeine Prinzip der Optimierung von Streuexperimenten wird nun auf  $(e, e'p)$ -Experimente angewandt, deren Ziel die Separation von Strukturfunktionen innerhalb eines ausgedehnten Gebietes  $G$  ist.

Die Setup-Parameter eines solchen Experiments bestehen aus den Strahlenergien  $\epsilon_i$ , den zentralen physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}_{zen} = (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}, \Phi)$ , auf die die Spektrometer eingestellt sind, sowie den Meßzeiten  $T$  der geplanten Messungen (vgl. Tab. 4.1 auf S. 20). Zu einem gegebenen Satz von Setup-Parametern kann eine realitätsnahe Simulation des Koinzidenz-Experiments entsprechend Abschnitt 4.3 durchgeführt werden. Aus den erzeugten Pseudodaten werden im nächsten Schritt die Strukturfunktionen unter Verwendung der in Abschnitt 3.2 beschriebenen modellunabhängigen Separation bestimmt.

Zur Vervollständigung des Optimierungskonzepts ist die Definition der Zielfunktion  $\mathcal{Z}(\mathbf{s})$  entsprechend den Überlegungen des letzten Abschnitts auf den ausgedehnten Bereich  $G$  zu verallgemeinern. Statt wie bisher die Fehler der Strukturfunktionen an einem festen Punkt  $\zeta_0$  klein zu machen, sollen sie nun in ganz  $G$  minimiert werden. Wir ersetzen daher in (5.5) die gewichteten Varianzen  $w_\lambda(\Delta\tilde{R}_\lambda(\mathbf{s}))^2$  durch ihre Erwartungswerte in  $G$ ,

$$\left\langle w_\lambda \left( \Delta\tilde{R}_\lambda(\mathbf{s}) \right)^2 \right\rangle_G := \frac{1}{\mathcal{N}} \int_G w_\lambda(\zeta) \left( \Delta\tilde{R}_\lambda(\zeta; \mathbf{s}) \right)^2 d\zeta, \quad (5.6)$$

und erhalten als neue Zielfunktion die totale Varianz

$$\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}) = \sum_\lambda \left\langle w_\lambda \left( \Delta\tilde{R}_\lambda(\mathbf{s}) \right)^2 \right\rangle_G. \quad (5.7)$$

Die Gewichte  $w_\lambda$  sind hier zu Funktionen von  $\zeta$  verallgemeinert worden, wodurch sich z.B. physikalisch besonders interessante Teilbereiche innerhalb  $G$  besonders gewichtet lassen. Die Normierung

$$\mathcal{N} := \int_G d\zeta \quad (5.8)$$

gibt das Volumen des Separationsgebietes  $G$  an.

Die Minimierung von  $\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s})$  unter der Nebenbedingung konstanter Gesamtmeßzeit,  $T_{sum} = const$ , erfolgt wieder nach dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Standardverfahren. Die Zahl  $N_s$  der Setup-Parameter  $\mathbf{s}$  hat sich aber dadurch vergrößert, daß für jede Messung drei neue Parameter ( $|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}$ ) dazugekommen sind und je nach Größe des Separationsgebietes mehr als vier Messungen zur Separation der Strukturfunktionen benötigt werden<sup>2</sup>. Wegen der großen Zahl der Setup-Parameter muß die totale Varianz daher sehr oft berechnet werden. Durchläuft man bei jeder dieser Berechnungen den vollen Algorithmus aus Kapitel 4, so führt dies zu unakzeptabel langen Rechenzeiten. Viel Zeit läßt sich aber einsparen, wenn man beachtet, daß bei dem benutzten Standardverfahren höchstens zwei Setup-Parameter simultan verändert werden (zur Berechnung der Krümmung von  $\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s})$  im  $\mathbf{s}$ -Raum), d.h. daß höchstens zwei Messungen neu simuliert werden müssen, während die Pseudomeßwerte der übrigen Messungen unverändert übernommen werden können. Entsprechend braucht man bei dem anschließenden Fit an die Daten die Matrix  $\mathbf{G}_{\vec{p}}$  (3.38) und den Vektor  $\beta$  (3.41) nicht vollständig neu zu berechnen, sondern es genügt die Anteile, die von den beiden alten Messungen kamen, zu subtrahieren, und die, die von den beiden neuen Messungen kommen, zu addieren.

Eine weitere Rechenzeitverkürzung wird dadurch erzielt, daß man die totale Varianz (5.7) durch Einsetzen von (3.44), (3.43) auf die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}) &= \sum_\lambda \frac{1}{\mathcal{N}} \int_G w_\lambda(\zeta) \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{i'=1}^{n_\lambda} \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta) (\mathbf{C}_{\vec{p}})_{(\lambda i)(\lambda i')} \mathcal{B}_{\lambda i'}(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_\lambda \text{Sp}(\mathbf{I}^{(\lambda)} \mathbf{C}_{\vec{p}}^{(\lambda)}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

bringt, wobei die  $(n_\lambda \times n_\lambda)$ -Matrizen  $\mathbf{I}^{(\lambda)}$ ,  $\mathbf{C}_{\vec{p}}^{(\lambda)}$  komponentenweise durch

$$\left(\mathbf{I}^{(\lambda)}\right)_{i'i} := \frac{1}{\mathcal{N}} \int_G w_\lambda(\zeta) \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta) \mathcal{B}_{\lambda i'}(\zeta) d\zeta, \quad (5.10)$$

$$\left(\mathbf{C}_{\vec{p}}^{(\lambda)}\right)_{ii'} := (\mathbf{C}_{\vec{p}})_{(\lambda i)(\lambda i')} \quad (5.11)$$

definiert sind; der Vorteil dieser Umformung liegt darin, daß die zeitintensiven Integrationen über das Separationsgebiet  $G$  nur einmal zu Beginn der Optimierung ausgeführt und nicht bei jeder Berechnung der totalen Varianz wiederholt werden müssen (Abspeichern der vier Matrizen  $\mathbf{I}^{(\lambda)}$ ).

---

<sup>2</sup>Bei 10 Messungen geht es z.B. um 60 Setup-Parameter.

Besonders einfach wird die Berechnung der totalen Varianz, wenn ein im Gebiet  $G$  orthonormales Basissystem verwendet wird,

$$\int_G \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta) \mathcal{B}_{\lambda i'}(\zeta) d\zeta = \delta_{ii'} \quad , \quad (5.12)$$

und die Gewichtsfunktionen innerhalb  $G$  konstant gewählt werden können,

$$w_\lambda(\zeta) = w_\lambda \quad \forall \zeta \in G \quad . \quad (5.13)$$

In diesem Spezialfall berechnet man die totale Varianz gemäß

$$\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}) = \sum_\lambda \frac{w_\lambda}{\mathcal{N}} \text{Sp}\left(\mathbf{C}_{\vec{p}}^{(\lambda)}\right) \quad (5.14)$$

aus den gewichteten Spuren der Kovarianzmatrizen  $\mathbf{C}_{\vec{p}}^{(\lambda)}$ .

Der beschriebene Algorithmus zur Optimierung von  $(e, e'p)$ -Experimenten, deren Ziel die Separation von Strukturfunktionen innerhalb eines ausgedehnten Gebietes  $G$  ist, wird vom Programm OPTEEP ausgeführt. Ergebnisse dieses Programms werden in den beiden folgenden Abschnitten an der Optimierung des in Kapitel 4 beschriebenen  $(e, e'p)$ -Experiments diskutiert. In Abschnitt 5.2.1 werden wir zeigen, daß bei ungewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen das Programm eine Lösung findet, die eine wesentlich genauere Bestimmung aller vier Strukturfunktionen ermöglicht als die ursprünglich geplanten Messungen. In Abschnitt 5.2.2 wird an einem Beispiel demonstriert, daß sich physikalische Zielsetzungen durch entsprechende Wahl der Gewichtsfunktionen in der Optimierung berücksichtigen lassen.

### 5.2.1 Optimierung bei ungewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen

Das in Kapitel 4 beschriebene  $^{12}C(e, e'p)^{11}B_{g.s.}$ -Experiment soll so realisiert werden, daß es alle vier Strukturfunktionen innerhalb des vorgegebenen Separationsgebietes  $G$  mit gleichem Gewicht extrahiert. Deshalb setzen wir für die Bestimmung der optimalen Setup-Parameter  $\mathbf{s}$  mit dem Programm OPTEEP die Gewichtsfunktionen auf

$$w_\lambda(\zeta) = 1 \quad \forall \lambda \quad \forall \zeta \in G \quad .$$

Für den flexiblen Ansatz der modellunabhängigen Separation wählen wir die rein polynominelle Basis B1 (s. Tab. 4.5 auf S. 28); als Startpunkt der Optimierung (Anfangs-Setup  $\mathbf{s}^{(in)}$ ) werden die in Tabelle 4.1 auf Seite 20 angegebenen Kinematiken und Meßzeiten benutzt.

Zur Optimierung freigegeben sind die Impulsüberträge  $|\vec{q}|$ , die Energieüberträge  $\omega$ , die Winkel  $\Theta_{pq}$  und die Verteilung der Meßzeiten  $T$  bei fester Gesamtmeßzeit  $T_{sum}$ . Die Energien  $e_i$  werden auf den Anfangswerten festgehalten und es wird auf

Konstanten															
Targetdicke $d = 25.0 \text{ mg/cm}^2$															
Elektronenstrom $I = 50.0 \text{ } \mu\text{A}$															
Kinematiken und Meßzeiten															
	Strahl	zentr. Spektrometerkoord. $\mathcal{S}_{zen}$						zentr. physikalische Koord. $\mathcal{P}_{zen}$							
Nr	$\epsilon_i$ [MeV]	$\Theta_e^{(s)}$ [°]	$\Phi_e^{(s)}$ [°]	$ \vec{k}_f $ [MeV/c]	$\Theta_p^{(s)}$ [°]	$\Phi_p^{(s)}$ [°]	$ \vec{p} $ [MeV/c]	$ \vec{q} $ [MeV/c]	$\omega$ [MeV]	$\Theta_{pq}$ [°]	$\Phi$ [°]	$E_m$ [MeV]	e/p Spek	T [h]	
1	850.0	0.0	20.0	747.0	0.0	-62.1	369.1	295.3	103.0	2.2	180.0	32.72	B/A	0.84	
2	850.0	0.0	23.7	751.3	0.0	-63.1	369.1	342.4	98.7	1.3	180.0	28.66	B/A	0.68	
3	850.0	0.0	28.1	745.8	0.0	-63.1	369.1	400.3	104.2	1.8	180.0	34.14	B/A	0.74	
4	850.0	0.0	32.0	745.4	0.0	-62.8	369.1	451.4	104.6	1.6	180.0	34.26	B/A	0.68	
5	850.0	0.0	36.0	746.1	0.0	-62.1	369.1	503.2	103.9	1.4	180.0	33.01	B/A	1.34	
6	210.0	0.0	122.3	126.5	0.0	-22.1	369.1	297.5	83.5	1.1	180.0	13.25	A/B	4.22	
7	235.0	0.0	124.6	153.1	0.0	-23.0	369.1	345.7	81.9	1.6	180.0	11.87	A/B	1.73	
8	265.0	0.0	128.8	178.2	0.0	-20.5	369.1	401.5	86.8	0.3	180.0	16.75	A/B	3.30	
9	290.0	0.0	138.1	189.2	0.0	-13.8	369.1	448.9	100.8	2.6	0.0	30.47	A/B	2.49	
10	320.0	0.0	135.3	218.0	0.0	-16.3	369.1	499.0	102.0	1.6	0.0	31.17	A/B	3.98	
<b>Gesamtmeßzeit: 20.00</b>															

Tabelle 5.4: Die Kinematiken und Meßzeiten (End-Setup  $\mathbf{s}^{(fin)}$ ) des geplanten  $^{12}\text{C}(e, e'p)^{11}\text{B}_{g.s.}$ -Experiments, das unter dem Aspekt “möglichst genaue Separation aller vier Strukturfunktionen in einem ausgedehnten Gebiet  $G$ ” optimiert wurde (ungewichtete Optimierung).

spezielle “out-of-plane”-Messungen verzichtet. Die Optimierung der freigegebenen Setup-Parameter ( $N_s = 40$ ) erfordert eine CPU-Zeit von ca. 110 Stunden auf einer RISC-Station<sup>3</sup>. Im Vergleich dazu benötigt eine volle Simulation mit dem in Kapitel 4 beschriebenen Algorithmus, wobei pro Messung 10000 Wirkungsquerschnitte berechnet werden, bereits 15 Minuten. Dadurch ist aber erst ein einziger Funktionswert der totalen Varianz berechnet, während zur Berechnung der (symmetrischen) Krümmungsmatrix im  $\mathbf{s}$ -Raum  $(N_s^2 + N_s)/2 = 820$  Funktionswerte benötigt werden. Mit dem vollen Algorithmus würde diese Aufgabe demnach ca. 205 Stunden dauern; durch die im letzten Abschnitt beschriebenen Zeiteinsparungen wird sie bereits in ca. 22 Stunden erledigt. Die gesamte CPU-Zeit von 110 Stunden wurde zum sukzessiven Auffinden des Minimums der totalen Varianz verwendet (24 Iterationsschritte), wobei zur weiteren Einsparung nicht bei jedem Schritt alle  $N_s = 40$  Parameter optimiert wurden. Die Optimierung führt zu dem in Tabelle 5.4 zusammengefaßten End-Setup  $\mathbf{s}^{(fin)}$ .

In der Tabelle 5.5 sind die Varianzen vor und nach der Optimierung zusammen-

<sup>3</sup>Gemessen an der Rechenleistung der vor ca. 6 Jahren am Institut eingesetzten Micro-VAX wäre damals eine standardmäßige Anwendung des Optimierungsverfahrens unmöglich gewesen.

Varianzen und Gewinn-Faktoren			
$\lambda$	$\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(in)})$	$\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(fin)})$	$\alpha_\lambda$
$L$	1757.8	475.1	3.70
$T$	3607.5	981.6	3.68
$LT$	824.4	46.7	17.62
$TT$	914.8	167.0	5.48
$tot$	7104.6	1670.3	4.25

Tabelle 5.5: Die Varianzen vor und nach der Optimierung und die erzielten Gewinn-Faktoren.

Skalierung der Varianzen			
$\lambda$	$\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(in)})$	$\alpha_{tot}\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(fin)})$	$\alpha_\lambda/\alpha_{tot}$
$L$	1757.8	2020.6	0.87
$T$	3607.5	4175.0	0.86
$LT$	824.4	198.8	4.15
$TT$	914.8	710.2	1.29
$tot$	7104.6	7104.6	1.00

Tabelle 5.6: Die Bedeutung des totalen Gewinn-Faktors für die Varianzen der einzelnen Strukturfunktionen.

gestellt; dabei bezeichnet

$$\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}) = \left\langle w_\lambda \left( \Delta \tilde{R}_\lambda(\mathbf{s}) \right)^2 \right\rangle_G \quad (5.15)$$

den in (5.6) definierten Erwartungswert. Die absoluten Zahlenwerte dieser Größen besagen wenig, der eigentliche Wert der Optimierung kann aus den *Gewinn-Faktoren*

$$\alpha_\lambda := \frac{\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(in)})}{\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(fin)})} \quad (5.16)$$

in der letzten Spalte der Tabelle 5.5 abgelesen werden. Das Hauptergebnis der Optimierung besteht aus dem totalen Gewinn-Faktor

$$\alpha_{tot} := \frac{\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}^{(in)})}{\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}^{(fin)})} = 4.25 \quad , \quad (5.17)$$

der das Verhältnis der totalen Varianzen vor und nach der Optimierung angibt.

Das Ergebnis ist leicht zu bewerten, wenn man beachtet, daß sich  $\mathcal{V}_{tot}$  umgekehrt proportional zur Meßzeit verhält, d.h. bei Änderung der Gesamtmeßzeit von  $T_{sum}$  auf

$$T'_{sum} = T_{sum}/\beta \quad (5.18)$$

skaliert die totale Varianz gemäß

$$\mathcal{V}_{tot}(T'_{sum}) = \beta \mathcal{V}_{tot}(T_{sum}) \quad . \quad (5.19)$$

Durch Verkleinern aller einzelnen Meßzeiten um denselben Faktor  $\alpha_{tot}$  läßt sich daher die totale Varianz des End-Setups wieder auf den Wert für den Anfangs-Setup erhöhen. Das bedeutet, daß wir bei einem Experiment mit dem durch die Optimierung bestimmten End-Setup in einer um den Faktor  $\alpha_{tot} = 4.25$  erniedrigten Gesamtmeßzeit genausoviel Information über die Strukturfunktionen gewinnen wie vor der Optimierung in der ursprünglich vorgesehenen Meßzeit!

Die für die Meßzeit geführte Argumentation läßt sich genauso auf andere Größen des geplanten Experiments, mit denen die totale Varianz umgekehrt proportional



-bb-error = =

Abbildung 5.2: Die Akzeptanzen im  $\mathcal{P}'$ -Raum bei  $E_m = 15.96$  MeV für den End-Setup  $\mathbf{s}^{(fin)}$ . (Messungen unter Vorwärtswinkeln hellgrau, unter Rückwärtswinkeln dunkelgrau schattiert). Die Teile a, b und c zeigen die  $|\vec{q}|$ - $\omega$ -Ebene bei  $\Theta_{pq} = 3^\circ$  und  $\Phi = 0^\circ, 90^\circ$  und  $180^\circ$ , der Teil d die  $|\vec{q}|$ - $\Theta_{pq}$ -Ebene bei  $\omega = 91$  MeV und  $\Phi = 0^\circ$  ( $\Theta_{pq} > 0^\circ$ ) bzw.  $\Phi = 0^\circ$  ( $\Theta_{pq} < 0^\circ$ ).

skaliert, übertragen. Dazu zählen z.B. die Stromdichte  $j_\epsilon$  der einlaufenden Elektronen und das gesamte Phasenraumvolumen  $V_{ph}$ . Der Gewinn des Faktors  $\alpha_{tot}$  entspräche einer Verbesserung der experimentellen Genauigkeit durch entsprechende Vervielfachung der genannten Größen, sofern die Zählraten eine derartige Steigerung überhaupt zulassen. Eine solche Steigerung ist natürlich angesichts der Tatsache, daß z.B. gerade der Strahlstrom und die Spektrometerakzeptanzen beim *MAMI*-Projekt völlig ausgereizt sind, nicht vorstellbar.

Bei einem Experiment mit dem durch die Optimierung bestimmten End-Setup in einer um den Faktor  $\alpha_{tot}$  erniedrigten Gesamtmeßzeit ist zu beachten, daß zwar insgesamt genausoviel Information über die Strukturfunktionen gewonnen wird wie vor der Optimierung, es aber durchaus sein kann, daß der Informationsgewinn über die einzelnen Strukturfunktionen unterschiedlich ist. Dieses Problem wird in Tabelle 5.6 durch Vergleich von  $\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(in)})$  mit der skalierten Varianz  $\alpha_{tot}\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(fin)})$  untersucht. Die in der letzten Spalte aufgeführte Größe

$$\alpha_\lambda/\alpha_{tot} = \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(in)})/\alpha_{tot}\mathcal{V}_\lambda(\mathbf{s}^{(fin)}) \quad (5.20)$$

gibt die nach der Skalierung erzielten Gewinn-Faktoren an. Man erkennt, daß sich nach der Skalierung die L/T-Separation gegenüber dem ursprünglichen Experiment verschlechtert, die Bestimmung der Interferenz-Strukturfunktionen aber verbessert hat, d.h. daß in der Tat eine Umverteilung der einzelnen Informationsbeiträge stattgefunden hat.

Nach dieser Zwischenbemerkung wenden wir uns wieder dem vom Optimierungsprogramm gefundenen End-Setup  $\mathbf{s}^{(fin)}$  zu. Für eine Diskussion dieses Parametersatzes transformieren wir die Akzeptanzen der Spektrometer wieder in den Raum der physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}'$  (vgl. Abschn.4.2). Die Akzeptanzen im  $\mathcal{P}'$ -Raum sind für den End-Setup in Abbildung 5.2 durch verschiedene Schnitte dargestellt; wir betrachten im Vergleich dazu die Abbildung 4.1 auf Seite 23 für den Anfangs-Setup. An den Schnitten in der  $|\vec{q}|$ - $\omega$ -Ebene ist zu erkennen, daß die Rückwärtsmessungen des End-Setups das Separationsgebiet besser überdecken als die entsprechenden Messungen des Anfangs-Setups; dadurch wird die L/T-Separation verbessert (im wesentlichen durch Anpassung der Energieüberträge  $\omega$  der Messungen 8–10). Diese Anpassung wurde beim Anfangs-Setup für die Messungen 6 und 7 bereits “per Hand” vorgenommen (siehe Anh. C.3) und von OPTEEP nur noch unwesentlich verändert. Als Nebeneffekt ist zu bemerken, daß die optimierten Messungen nun einen Bereich in  $\omega$  überdecken der grösser als die vorgegebene Ausdehnung des Separationsgebietes in dieser Koordinate ist. Man könnte das Separationsgebiet nun eigentlich in  $\omega$  weiter ausdehnen als bisher; dieser Aspekt wird jedoch hier nicht weiter verfolgt.

Während offenbar wenig Spielraum in der Optimierung der  $|\vec{q}|$ -Koordinaten des Experiments vorhanden war, wurden die  $\Theta_{pq}$ -Koordinaten der Messungen stärker verändert. Dieser Sachverhalt ist deutlich in Teil d der Abbildung 5.2 zu erkennen: zum einen überdecken die 850 MeV Messungen nun den Bereich links und rechts von  $\vec{q}$  gleich gut, was die Bestimmung von  $R_{LT}$  verbessert, zum anderen liegen die Messungen unter Rückwärtswinkeln nun so, daß auch der Rand des  $\Theta_{pq}$ -Bereichs besser ausgefüllt wird, wodurch die L/T-Separation in diesem speziellen Teil des Separationsgebietes verbessert wird.

In den Abbildungen 5.3, 5.4 sind die resultierenden Fehlerbänder als Schnitte bei  $\omega = 91$  MeV,  $\Theta_{pq} = 4^\circ$  dargestellt. Dabei ist jeweils links das Ergebnis für den Anfangs-Setup, dem rechts für den End-Setup gegenübergestellt. Man erkennt, daß der Haupteffekt der Optimierung darin besteht, daß die Fehlerbänder "gleichmäßiger" geworden sind, d.h. die vor der Optimierung vorhandenen, teilweise starken Variationen der Fehler sind nach der Optimierung deutlich geringer geworden, wobei sich als Gesamt-Effekt eine wesentliche Verringerung der Fehlerbänder (insbesondere an den Rändern des Separationsgebietes) ergibt. Daß dabei nicht direkt der ermittelte Gewinn-Faktor erkennbar wird, ist darauf zurückzuführen, daß hier nur ein spezieller Schnitt aufgetragen ist.

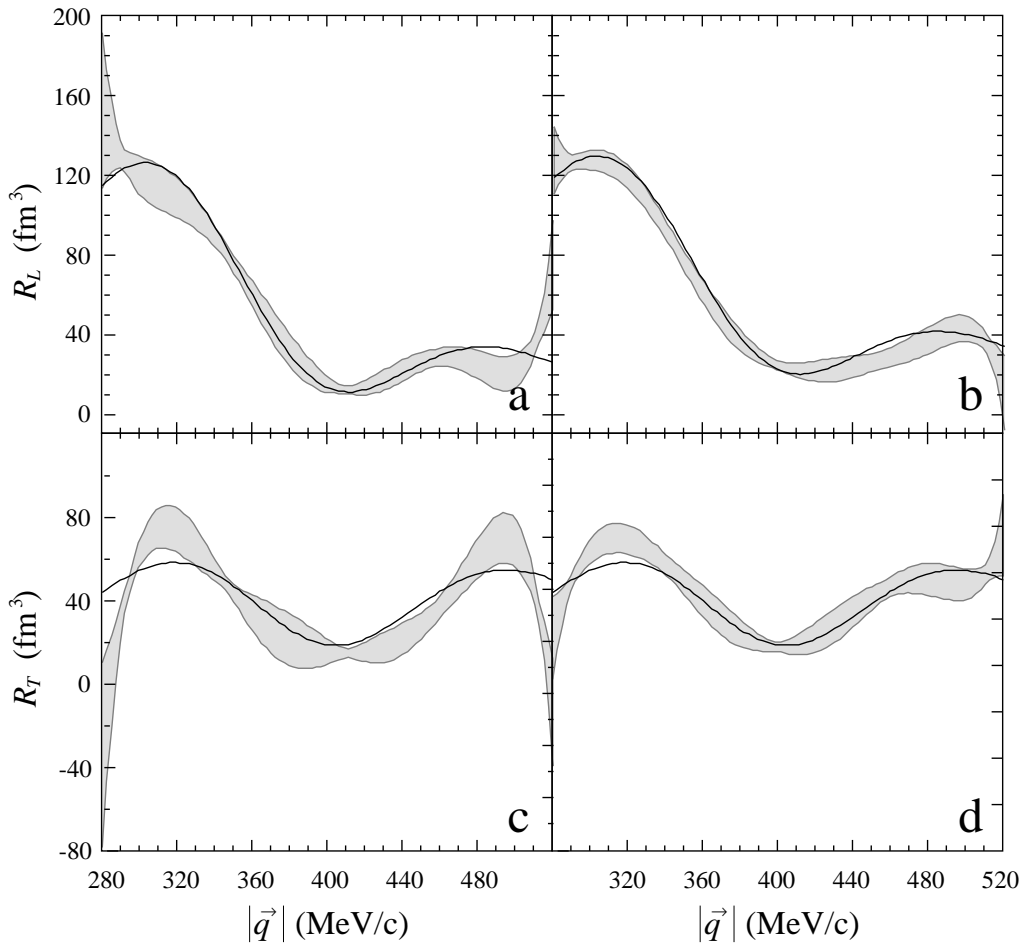


Abbildung 5.3: Die Strukturfunktionen  $R_L$  (Teil a,b der Abb.) und  $R_T$  (Teil c,d der Abb.) als Fkt. von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91 \text{ MeV}$ ,  $\Theta_{pq} = 4^\circ$ . Die durchgezogenen Kurven kennzeichnen die in die Simulation hineingesteckten Struktur­funktionen, die grau schattierten Bereiche geben die Fehlerbänder der separierten Struktur­funktionen wider. Auf der linken Seite der Abb. (Teil a,c) ist das Ergebnis vor der Optimierung der Setup-Parameter aufgetragen, auf der rechten Seite (Teil b,d) nach der Optimierung.

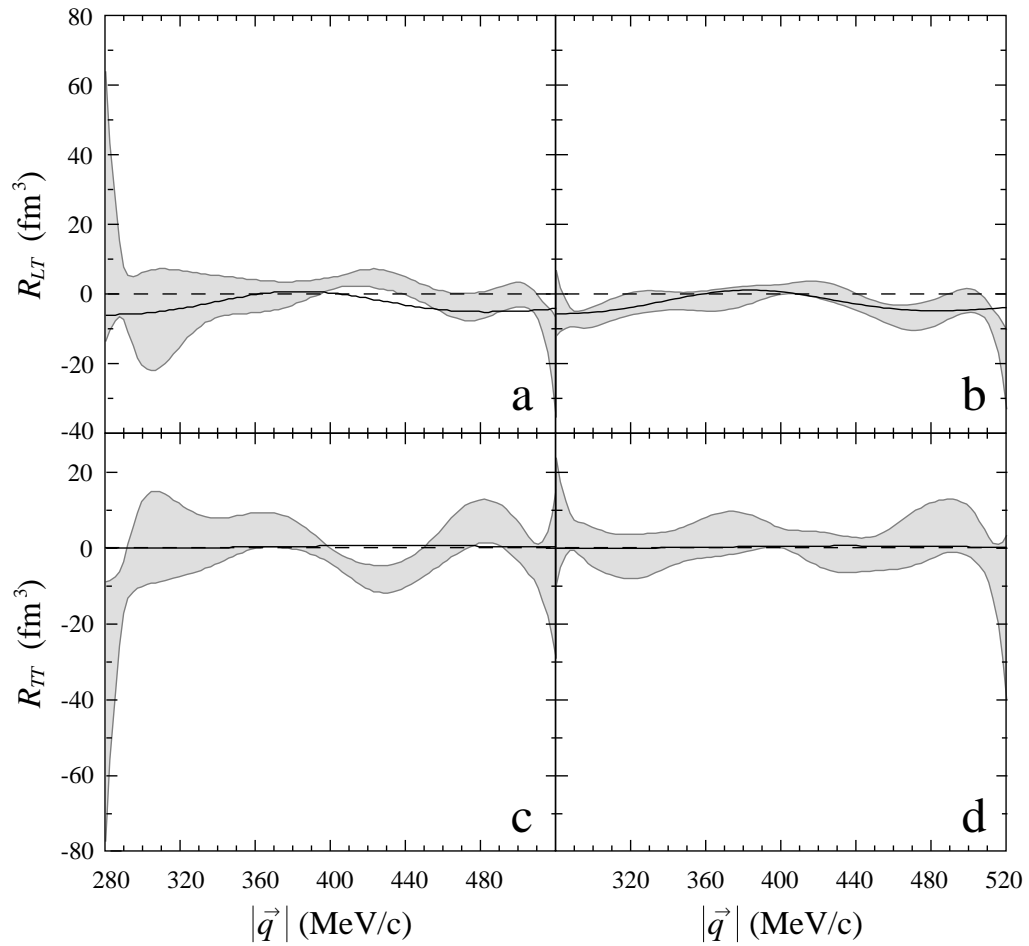


Abbildung 5.4: Die Strukturfunktionen  $R_{LT}$  (Teil a,b der Abb.) und  $R_{TT}$  (Teil c,d der Abb.) als Fkt. von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91 \text{ MeV}$ ,  $\Theta_{pq} = 4^\circ$ . Die durchgezogenen Kurven kennzeichnen die in die Simulation hineingesteckten Strukturfunktionen (im Vergleich dazu ist gestrichelt die Nulllinie eingezeichnet), die grau schattierten Bereiche geben die Fehlerbänder der separierten Strukturfunktionen wider. Auf der linken Seite der Abb. (Teil a,c) ist das Ergebnis vor der Optimierung der Setup-Parameter aufgetragen, auf der rechten Seite (Teil b,d) nach der Optimierung.

### 5.2.2 Optimierung bei gewichteter Bewertung der Information über die einzelnen Strukturfunktionen

Zur Demonstration der Wirkungsweise der im Optimierungsverfahren verwendeten Gewichtsfunktionen ändern wir im folgenden die Zielsetzung des geplanten  $^{12}\text{C}(e, e'p)^{11}\text{B}_{g.s.}$ -Experiments dahingehend, daß nur noch die Interferenz-Strukturfunktionen  $R_{LT}$  und  $R_{TT}$  möglichst genau bestimmt werden sollen. Die Extraktion soll aber nicht im gesamten Separationsgebiet  $G$  erfolgen, sondern nur in einem auf  $|\vec{q}| \in [360, 440]$  MeV/c eingeschränkten Bereich. Diese geänderte Zielsetzung kann durch die folgende Wahl der Gewichtsfunktionen in die Optimierung eingebracht werden:

$$\begin{aligned} w_L(\zeta) &= 0 \quad \forall \zeta \in G , \\ w_T(\zeta) &= 0 \quad \forall \zeta \in G , \\ w_{LT}(\zeta) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } |\vec{q}| \in [360, 440] \text{ MeV/c} , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases} \\ w_{TT}(\zeta) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } |\vec{q}| \in [360, 440] \text{ MeV/c} , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Diese Vorgehensweise erscheint vielleicht z.T. etwas künstlich, denn eine Einschränkung auf den angegebenen  $|\vec{q}|$ -Bereich ließe sich auch durch Verkleinern des Separationsgebietes erreichen. In diesem Fall würden aber von vorneherein nur Meßdaten innerhalb des eingeschränkten  $|\vec{q}|$ -Bereiches in Erwägung gezogen, während bei Verwendung der vorgeschlagenen Gewichtsfunktionen Wirkungsquerschnitte aus dem vollen  $|\vec{q}|$ -Bereich berücksichtigt werden.

Als Ausgangspunkt der Optimierung wird derselbe Anfangs-Setup  $\mathbf{s}^{(in)}$  wie in Abschnitt 5.2.1 gewählt. Zur Optimierung freigegeben sind alle Setup-Parameter, außer den Strahlenergien  $e_i$  und den "out-of-plane"-Winkeln  $\Phi$ . Unter diesen Voraussetzungen erhält man nach der Optimierung den in Tabelle 5.7 angegebenen End-Setup  $\mathbf{s}^{(fin)}$ . Konsistent mit der gewählten Zielsetzung (keine L/T-Separation vorgesehen) verzichtet die vom Optimierungsprogramm gefundene Lösung auf die Messungen 6–10 bei kleinen Strahlenergien. In Tabelle 5.7 sind diese Messungen, für die das Programm keine Meßzeit vorsieht, daher nicht mehr mit aufgeführt.

Das Ergebnis der Optimierung ist stark durch den eingeschränkten  $|\vec{q}|$ -Bereich geprägt. So läßt sich z.B. aus der Meßzeitverteilung ablesen, daß den beiden Randmessungen 1 und 5 deutlich weniger Bedeutung für den Informationsgewinn zukommt als den drei zentralen Messungen 2–4. Die Messungen 2–4 sind in  $|\vec{q}|$  näher zusammengedrückt, damit das in der totalen Varianz berücksichtigte Zentrum besser abgedeckt wird, während die Randmessungen 1, 5 weiter nach außen gewandert sind (vergleiche hierzu die Abb. 4.1 auf S. 23 mit der Abb. 5.5 auf S. 51). Durch letzteres wird der bekannte Effekt, daß Polynome an den Rändern des Definitionsbereiches sehr ungenau werden, bereits durch zwei wenig genaue Zusatzmessungen weitgehend unterdrückt.

Die Wahl der Gewichtsfunktionen spiegelt sich auch in den Fehlerbändern der extrahierten Strukturfunktionen  $\tilde{R}_{LT}$  und  $\tilde{R}_{TT}$  deutlich wieder; dazu ist in den

<b>Konstanten</b>															
Targetdicke $d = 25.0 \text{ mg/cm}^2$															
Elektronenstrom $I = 50.0 \text{ } \mu\text{A}$															
<b>Kinematiken und Meßzeiten</b>															
	Strahl	zentr. Spektrometerkoord. $\mathcal{S}_{zen}$						zentr. physikalische Koord. $\mathcal{P}_{zen}$							
Nr	$\epsilon_i$ [MeV]	$\Theta_e^{(s)}$ [°]	$\Phi_e^{(s)}$ [°]	$ \vec{k}_f $ [MeV/c]	$\Theta_p^{(s)}$ [°]	$\Phi_p^{(s)}$ [°]	$ \vec{p} $ [MeV/c]	$ \vec{q} $ [MeV/c]	$\omega$ [MeV]	$\Theta_{pq}$ [°]	$\Phi$ [°]	$E_m$ [MeV]	e/p Spek	T [h]	
1	850.0	0.0	20.0	748.6	0.0	-62.4	369.1	295.3	101.4	2.2	180.0	31.15	B/A	0.30	
2	850.0	0.0	25.3	744.2	0.0	-63.2	369.1	363.6	105.8	2.3	180.0	35.79	B/A	5.80	
3	850.0	0.0	27.9	744.9	0.0	-63.4	369.1	397.6	105.1	2.2	180.0	35.01	B/A	6.72	
4	850.0	0.0	30.6	744.0	0.0	-63.1	369.1	432.8	106.0	2.0	180.0	35.76	B/A	6.48	
5	850.0	0.0	35.9	745.0	0.0	-62.4	369.1	502.1	105.0	1.8	180.0	34.08	B/A	0.70	
<b>Gesamtmeßzeit:</b>													<b>20.00</b>		

Tabelle 5.7: Die Kinematiken und Meßzeiten (End-Setup  $\mathbf{s}^{(fin)}$ ) des geplanten  $^{12}\text{C}(e, e'p)^{11}\text{B}_{g.s.}$ -Experiments, das unter dem Aspekt “möglichst genaue Separation der Interferenz-Strukturfunktionen innerhalb eines bestimmten Teils des Separationsgebietes” optimiert wurde (gewichtete Optimierung).

Abbildungen 5.6 und 5.7 wieder der Schnitt bei  $\omega = 91 \text{ MeV}$  und  $\Theta_{pq} = 4^\circ$  aufgetragen. Jeweils rechts ist das Ergebnis dieses Abschnitts dem in Abschnitt 5.2.1 erzielten links gegenübergestellt. Im Vergleich zum früheren Ergebnis sind die Fehlerbänder in dem Bereich, der hier mit Gewicht 1 berücksichtigt wird, deutlich schmaler geworden (Teile c und d der Abbildungen zeigen diesen Bereich mit angepaßtem Maßstab). Außerhalb dieses Bereiches wachsen die Fehlerbänder jedoch stark an; dort führt von einem Übergangsbereich abgesehen die Optimierung aus dem letzten Abschnitt zu einer genaueren Bestimmung der Strukturfunktionen. Die beiden weniger genauen Randmessungen bei  $|\vec{q}| = 295.3 \text{ MeV/c}$  und  $|\vec{q}| = 502.1 \text{ MeV/c}$  sind an entsprechenden Einschnürungen der Fehlerbänder zu erkennen; sie “bändigen” die Polynome durch Randbedingungen und tragen damit durchaus zu einer Reduktion der Fehlerbänder in dem hier interessierenden Bereich des Impulsübertrags bei. Sehr deutlich ist auch hier der im letzten Abschnitt erwähnte Effekt zu erkennen, daß die Optimierung die Breite der Fehlerbänder in dem Bereich, der in der totalen Varianz berücksichtigt wird, möglichst gleichmäßig hält.

Beim kritischen Betrachten der Abbildung 5.7 stellt man fest, daß zwar das Fehlerband der extrahierten Strukturfunktion  $\tilde{R}_{TT}$  in Teil d deutlich schmaler als in Teil c ist, die “wahre” Strukturfunktion  $R_{TT}$  aber etwa in der Hälfte des dargestellten  $|\vec{q}|$ -Bereichs außerhalb des Fehlerbandes liegt. Eine solche Abweichung muß aber noch keinen systematischen Fehler des Separationsverfahrens bedeuten, sondern läßt sich auch statistisch erklären. Wir erinnern daran, daß an jedem Punkt  $\zeta \in G$  die Wahrscheinlichkeit 68.2% beträgt, daß der “wahre”

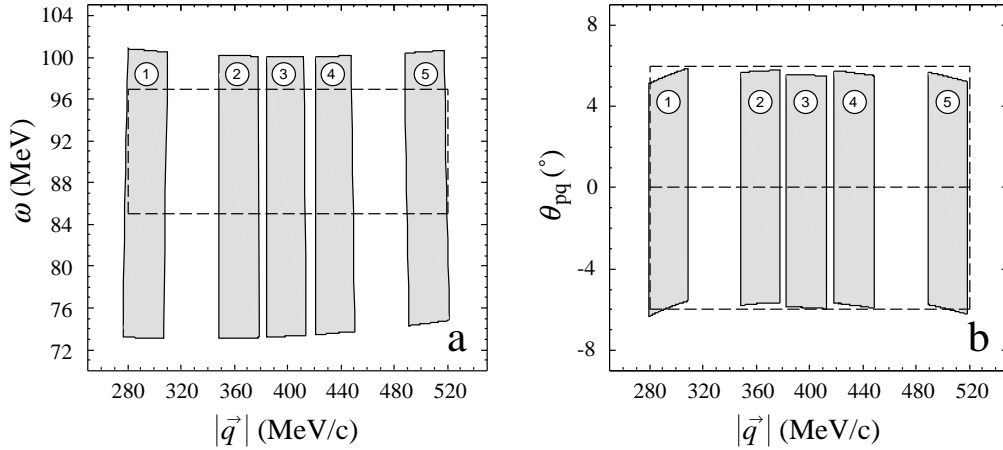


Abbildung 5.5: Die Akzeptanzen im  $\mathcal{P}'$ -Raum bei  $E_m = 15.96$  MeV für den End-Setup  $\mathbf{s}^{(fin)}$ . Teil a zeigt die  $|\vec{q}|$ - $\omega$ -Ebene bei  $\Theta_{pq} = 3^\circ$  und  $\Phi = 0^\circ$ , Teil b die  $|\vec{q}|$ - $\Theta_{pq}$ -Ebene bei  $\omega = 91$  MeV und  $\Phi = 0^\circ$  ( $\Theta_{pq} > 0^\circ$ ) bzw.  $\Phi = 0^\circ$  ( $\Theta_{pq} < 0^\circ$ ).

Wert der Strukturfunktion an dieser Stelle innerhalb des Fehlerbandes liegt. Im statistischen Mittel ist daher zu erwarten, daß in einem Teilgebiet, das 31.8% von  $G$  einnimmt, die “wahre” Strukturfunktion außerhalb des Fehlerbandes liegt. Anscheinend zeigt die in Teil d der Abbildung festgestellte Abweichung gerade einen solchen Teilbereich. Für diese Annahme spricht, daß innerhalb eines  $2\sigma$ -Fehlerbandes die “wahre” Strukturfunktion fast ganz enthalten ist.

Damit ist gezeigt, daß mit dem Instrument der Gewichtsfunktionen der Situation Rechnung getragen werden kann aus Gründen des physikalischen Interesses einzelne Strukturfunktionen mit besonderer Genauigkeit zu bestimmen und daß dies variabel für Teilgebiete des insgesamt ins Auge gefaßten Separationsgebietes  $G$  geschehen kann.

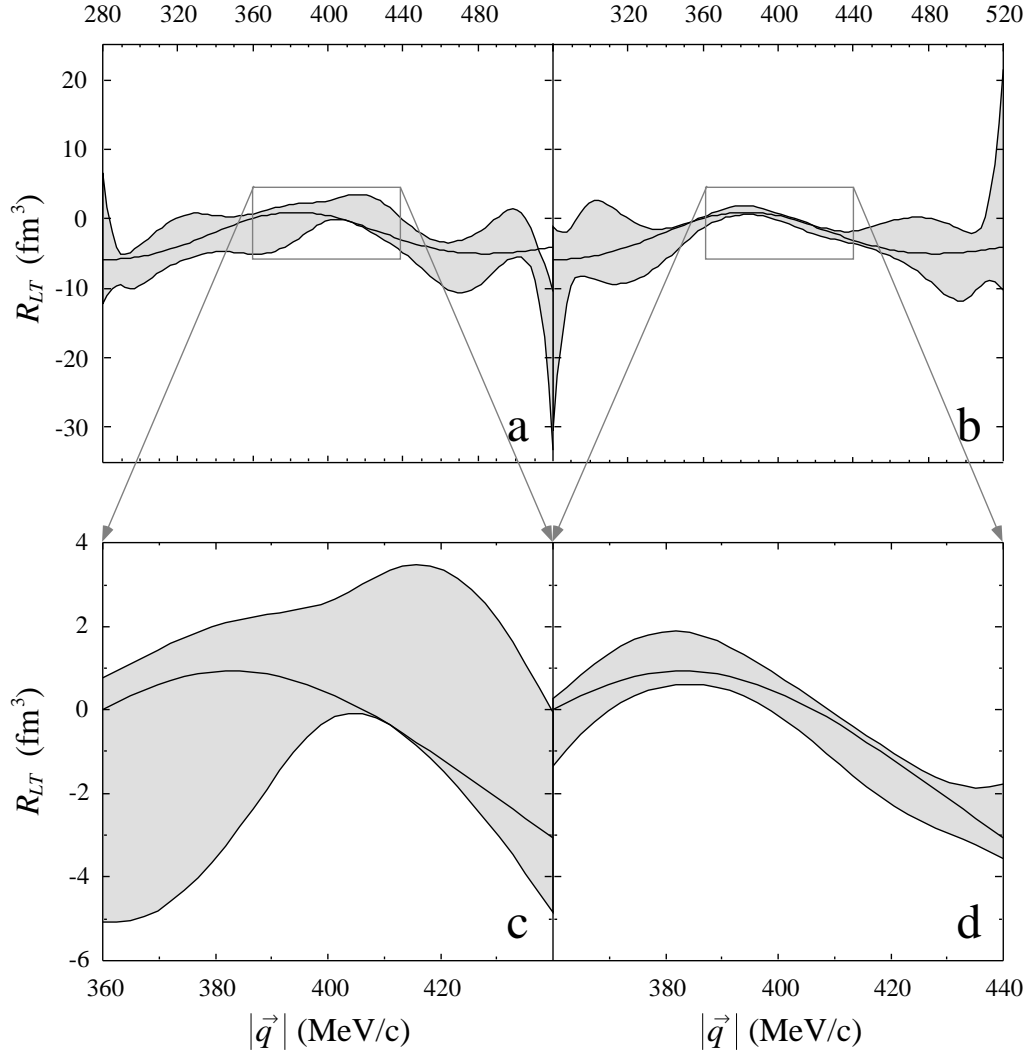


Abbildung 5.6: Die Strukturfunktion  $R_{LT}$  als Fkt. von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91$  MeV,  $\Theta_{pq} = 4^\circ$ . Die durchgezogenen Kurven kennzeichnen die in die Simulation hineingesteckten Strukturfunktionen, die grau schattierten Bereiche geben die Fehlerbänder der separierten Strukturfunktionen wider. Auf der linken Seite der Abb. (Teil a,c) ist das bei ungewichteter Bewertung (vgl. Abschn. 5.2.1), auf der rechten Seite (Teil b,d) das bei gewichteter Bewertung erzielte Ergebnis aufgetragen. Teil c (bzw. d) zeigt den Bereich  $|\vec{q}| \in [360, 440]$  MeV/c des Teils a (bzw. b) mit angepaßtem Maßstab.



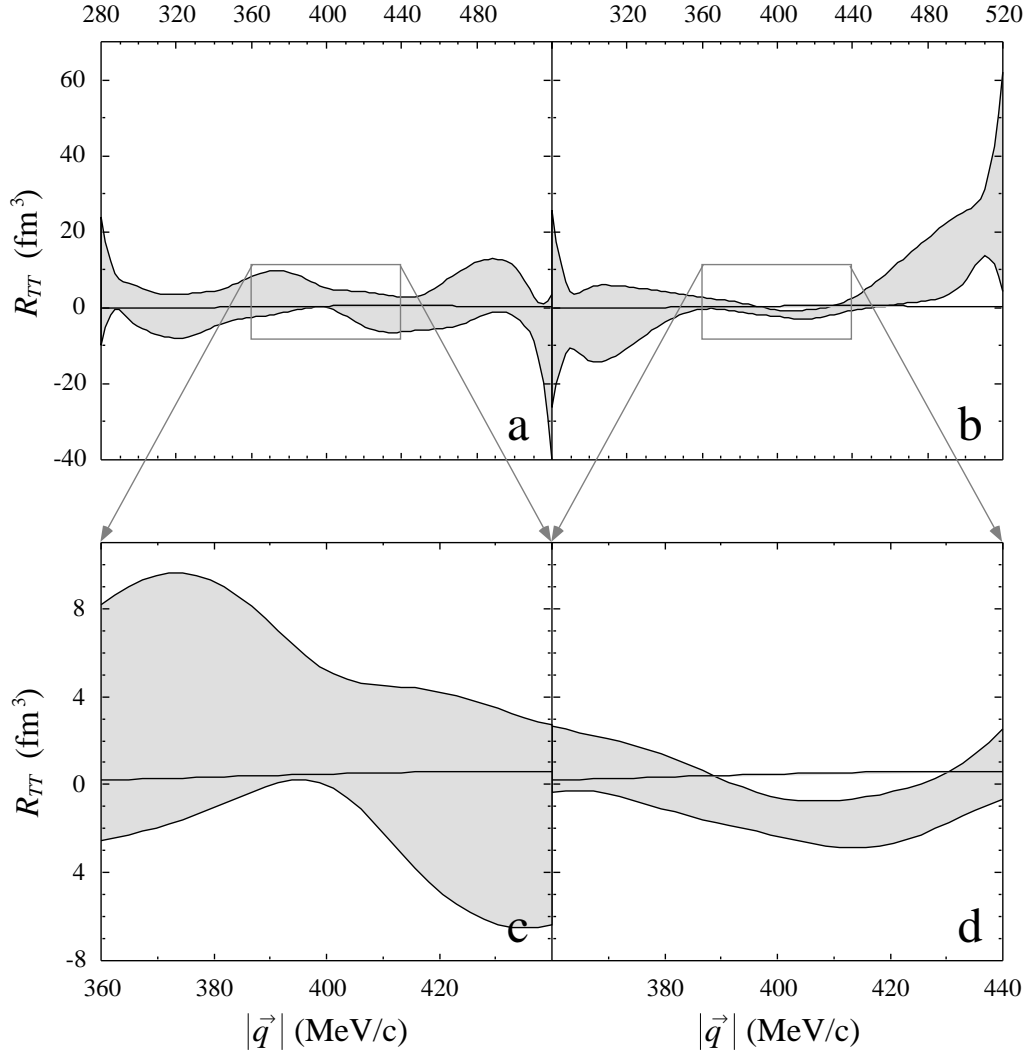


Abbildung 5.7: Die Strukturfunktion  $R_{TT}$  als Fkt. von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91 \text{ MeV}$ ,  $\Theta_{pq} = 4^\circ$ . Die durchgezogenen Kurven kennzeichnen die in die Simulation hineingesteckten Strukturfunktionen, die grau schattierten Bereiche geben die Fehlerbänder der separierten Strukturfunktionen wider. Auf der linken Seite der Abb. (Teil a,c) ist das bei ungewichteter Bewertung (vgl. Abschn. 5.2.1), auf der rechten Seite (Teil b,d) das bei gewichteter Bewertung erzielte Ergebnis aufgetragen. Teil c (bzw. d) zeigt den Bereich  $|\vec{q}| \in [360, 440] \text{ MeV}/c$  des Teils a (bzw. b) mit angepaßtem Maßstab.

## 6. Zusammenfassung

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines Verfahrens, das die modellunabhängige Analyse von  $(e, e'p)$ -Koinzidenzexperimenten erlaubt. Dieses Verfahren sollte in der Lage sein, die physikalisch interessanten Strukturfunktionen  $R_\lambda$  ( $\lambda = L, T, LT, TT$ ), die Information über das hadronische System enthalten, innerhalb eines ausgedehnten kinematischen Gebietes  $G$  als Hyperflächen zu bestimmen. Gegenüber den aus Einarm-Experimenten bekannten modellunabhängigen Analysen [17, 47, 25, 4, 30, 31] bedeutet dies zum einen eine Erweiterung von einer Größe (Formfaktor) auf vier (Strukturfunktionen), zum anderen hängen die Strukturfunktionen nicht nur von der einen Variablen  $|\vec{q}|$  ab, sondern sind bei Übergängen zu diskreten Endzuständen des Restkerns Funktionen der drei Laborkoordinaten  $\zeta = (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq})$ . Das entwickelte Verfahren sollte durch Pseudodaten einer Monte-Carlo-Simulation getestet werden. Das modellunabhängige Separationsverfahren ist in Kapitel 3, der Test durch Simulation eines  $(e, e'p)$ -Experiments in Kapitel 4 beschrieben. Mit den in diesem Teil der Arbeit erzielten Ergebnissen konnte eine weitere Fragestellung in Angriff genommen werden. Dabei geht es um das Problem der Optimierung von  $(e, e'p)$ -Experimenten, d.h. unter welchen Kinematiken einzelne Messungen durchzuführen sind und wie die Strahlzeit auf die Messungen zu verteilen ist, damit bei vorgegebener Gesamtmeßzeit ein maximaler Informationsgewinn über die Strukturfunktionen erzielt wird. Das Verfahren zur Lösung dieses Optimierungsproblems ist im zweiten Teil der Arbeit in Kapitel 5 beschrieben.

Für die Entwicklung des modellunabhängigen Separationsverfahrens wurden zunächst die klassischen, auf den Rosenbluth-Plot [46] gestützten Methoden diskutiert, bei denen die Strukturfunktionen an einem festen Punkt  $\zeta$  aus mehreren, an dieser Stelle im Phasenraum gemessenen  $(e, e'p)$ -Wirkungsquerschnitten extrahiert werden (punktweise Methode). Mit Hilfe eines Matrixformalismus wurde für diese punktweise Methode ein verallgemeinertes Fitverfahren ausgearbeitet, das die Bestimmung der Strukturfunktionen durch  $\chi^2$ -Minimierung ermöglicht. Dieser Formalismus beinhaltet als Spezialfälle die von de Forest [19] bzw. von Donnelly [22] vorgeschlagenen Verfahren, bei denen jeweils ein Satz von vier Messungen die zur Separation benötigte Information auf unterschiedliche Weise enthält.

Das modellunabhängige Verfahren wurde als Erweiterung der punktweisen Methoden entwickelt. Bei dieser Methode werden die Wirkungsquerschnitte durch einen flexiblen Ansatz parametrisiert, den man durch die Entwicklung der Strukturfunktionen in ein vollständiges Basissystem erhält. Um die Strukturfunktionen innerhalb eines ausgedehnten, aber kompakten Gebietes  $G$  mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu beschreiben, reicht bereits eine endliche Zahl der Entwicklungsparameter aus. Diese Parameter werden durch eine  $\chi^2$ -Minimierung bestimmt, bei der der flexible Ansatz mit gemessenen Wirkungsquerschnitten

verglichen wird. Dabei geht es z.B. bei der Separation der vier Strukturfunktionen innerhalb eines Bereiches  $|\vec{q}| \in [280, 520]$  MeV/c,  $\omega \in [85, 97]$  MeV,  $\Theta_{pq} \in [0, 6]^\circ$  um die Bestimmung von 240 Parameter.

Das Verfahren wurde im quasifreien Bereich durch die Auswertung eines simulierten Experiments getestet. Dabei wurden die Kinematiken und Meßzeiten im wesentlichen dem *MAMI*-Proposal [33] entnommen. Der Test hat gezeigt, daß die aus den simulierten Wirkungsquerschnitten (Pseudodaten) mit der modellunabhängigen Methode separierten Strukturfunktionen im Rahmen ihrer Meßfehler die ursprünglich in die Simulation hineingesteckten reproduzieren, das Verfahren also verzerrungsfrei ist. Durch Benutzung zweier Basissysteme ähnlicher Flexibilität (Polynome und Splines) konnte gezeigt werden, daß das Ergebnis der Separation im wesentlichen unabhängig von der speziellen Wahl der Basis ist.

Ausgehend von den im ersten Teil erarbeiteten Ergebnissen behandelt der zweite Teil dieser Arbeit das bei der Planung von  $(e, e'p)$ -Experimenten auftretende Problem, die Kinematiken der einzelnen Messungen und die Verteilung der Strahlzeit auf die einzelnen Messungen so festzulegen, daß ein maximaler Informationsgewinn über die Strukturfunktionen erzielt wird. Zur Lösung dieses Optimierungsproblems wurde ein allgemeines Konzept entwickelt. Bei diesem Konzept wird zunächst das Experiment, dessen Experimentkonfiguration durch den Parametersatz  $\mathbf{s}$  beschrieben wird, simuliert. In einem zweiten Schritt werden die Pseudodaten analysiert und die aus der Analyse gewonnene Information über die Strukturfunktionen bewertet. Diese Bewertung erfolgt über eine Zielfunktion  $\mathcal{Z}(\mathbf{s})$ . Aus dem Minimum bzw. Maximum dieser Zielfunktion ergibt sich schließlich der optimale Parametersatz  $\tilde{\mathbf{s}}$ .

Für die Datenanalyse mit der punktweisen Methode konnte mit der Cramér-Rao-Ungleichung gezeigt werden, daß die über die "wahre" Strukturfunktion  $R_\lambda$  gewonnene Information genau dann maximal ist, wenn die Varianz  $(\Delta \tilde{R}_\lambda)^2$  der extrahierten Strukturfunktion  $\tilde{R}_\lambda$  minimal ist. Als Zielfunktion kann daher eine aus den einzelnen Varianzen  $(\Delta \tilde{R}_\lambda)^2$  aufgebaute Varianzfunktion dienen. Zur Lösung des damit wohldefinierten Optimierungsproblems bei punktweiser Separation der Strukturfunktionen wurde das Programm OPOISEP entwickelt. Mit seiner Hilfe konnte gezeigt werden, daß die Strukturfunktionen bei vorgegebener Gesamtmeßzeit wesentlich genauer durch den von de Forest vorgeschlagenen als durch den von Donnelly angegebenen Satz von Messungen bestimmt werden (Abschn. 5.1.1).

Die Optimierung von  $(e, e'p)$ -Experimenten, die auf die Bestimmung der Strukturfunktionen in einem ausgedehnten Bereich  $G$  abzielen, erfolgt im wesentlichen wie bei der punktweisen Separation. Die Bausteine "Simulation des Experiments" und "Datenanalyse mit der modellunabhängigen Separation" wurden dabei aus dem ersten Teil der Arbeit übernommen. Als Zielfunktion, durch die eine gegebene Experimentkonfiguration bewertet wird, dient eine aus Integralen der Varianzen  $(\Delta \tilde{R}_\lambda)^2$  über den Bereich  $G$  aufgebaute Varianzfunktion. Um die Minimierung dieser Varianzfunktion durchführen zu können, mußten jedoch die sehr langen Rechenzeiten, die sich bei Verwendung des vollen Algorithmus "Simulation und Analyse" in Verbindung mit der großen Zahl der Experiment-

Parameter ergeben würden, reduziert werden. Eine erhebliche Zeiteinsparung wurde durch die Vermeidung wiederholter Neuberechnungen bereits bekannter Daten erzielt; das zur Minimierung der Varianzfunktion entwickelte Programm OPTEEP ist daher in der Lage das Optimierungsproblem in einer akzeptablen Zeit zu lösen. Dabei erfordert z.B. die Optimierung von 40 Experiment-Parametern eine CPU-Zeit von ca. 110 Stunden auf einer RISC-Station. In der Optimierung lassen sich spezielle Zielvorgaben, wie z.B. die besonders genaue Bestimmung einzelner Strukturfunktionen oder die Hervorhebung physikalisch besonders interessanter Teilbereiche innerhalb des gesamten Separationsgebietes  $G$ , berücksichtigen. Dazu werden Gewichtsfunktionen verwendet, durch die der Beitrag der entsprechenden Varianz zur Zielfunktion besonders gewichtet wird (Abschn. 5.2.2).

Mit Hilfe des Programms OPTEEP wurde das im *MAMI*-Proposal [33] vorgeschlagene ( $e, e'p$ )-Experiment unter dem Aspekt optimiert, daß alle Strukturfunktionen gleichermaßen von Interesse sind, d.h. die vier Varianzen wurden in der Zielfunktion mit gleichem Gewicht berücksichtigt (Abschn. 5.2.1). Ausgehend von den im Proposal vorgeschlagenen Kinematiken und Meßzeiten führte das Optimierungsprogramm zu einem neuen Satz von Experiment-Parametern, der bei festgehaltener Gesamtmeßzeit zu einer Reduktion der Varianzfunktion um den Faktor 4.25 führt. Andererseits bedeutet dies, daß die Gesamtmeßzeit gegenüber dem Vorschlag in [33] ohne Informationsverlust um diesen Faktor 4.25 verringert werden kann! In diesem Sinn kann der entwickelte Algorithmus als ein intelligentes Programm bezeichnet werden.

Der Gewinn durch die in dieser Arbeit entwickelte Optimierungsprozedur entspricht einer Steigerung von apparativen Größen wie z.B. Strahlstrom oder Spektrometerakzeptanz um eben diesen Faktor – ein Ziel, das bei dem gerade in dieser Hinsicht ausgereizten *MAMI*-Projekt außerhalb derzeitiger Möglichkeiten liegt. Die apparativen Investitionen des *MAMI*-Projekts werden daher durch die hier entwickelte Prozedur in angemessener Weise ergänzt bzw. vervollständigt.

Die vorliegende Arbeit wurde in der Zeit von Mai 1989 bis Dezember 1992 am Institut für Kernphysik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz angefertigt.

Herrn Professor Dr. J. Friedrich danke ich für die interessante Themenstellung, die ausgezeichnete Betreuung und sein stetiges Interesse am Fortgang dieser Arbeit. Weiterhin danke ich Herrn Dr. E.A.J.M. Offermann für die kritischen Diskussionen und Anregungen und seine Hilfe bei der Verschönerung der graphischen Darstellungen. Für die Einweisung in die Programme PV5FF und DWEE-PY und die Diskussionen über die theoretischen Grundlagen der DWIA danke ich Herrn Prof. S. Boffi, Frau C. Giusti und Herrn Prof. F.D. Pacati.

Die umfangreichen numerischen Rechnungen wurden an den Rechenanlagen des Instituts zum Teil auf der VAX8550, zum Teil auf den RISC-Stationen des UNIX-Clusters durchgeführt.

## A. Analytische Matrixinversion bei der punktweisen Separation

Bei der in Abschnitt 3.1 besprochenen punktweisen Separation wurde das Problem betrachtet, die vier Strukturfunktionen aus vier speziellen Messungen zu bestimmen. Die gemessenen reduzierten Wirkungsquerschnitte und die gesuchten Responsefunktionen sind dabei durch das lineare Gleichungssystem

$$\tilde{\sigma}_{red} = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{R}} \quad (\text{A.1})$$

miteinander verknüpft, wobei der Vektor  $\tilde{\sigma}_{red}$  und die Matrix  $\mathbf{V}$  durch die speziellen Messungen gegeben sind und

$$\tilde{\mathbf{R}} := \begin{pmatrix} \tilde{R}_L \\ \tilde{R}_T \\ \tilde{R}_{LT} \\ \tilde{R}_{TT} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

aus den einzelnen Strukturfunktionen aufgebaut ist.

### A.1 Die Methode von de Forest

Nach dem Vorschlag von de Forest werden zur Bestimmung der Strukturfunktionen drei Messungen unter Vorwärtswinkel bei  $\Phi = 0, \Phi_0, \pi$  und eine Messung unter Rückwärtswinkel bei  $\Phi = 0$  durchgeführt; damit haben  $\tilde{\sigma}_{red}$  und  $\mathbf{V}$  in (A.1) die folgende Form:

$$\tilde{\sigma}_{red} := \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} := \begin{pmatrix} v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} \cos \Phi_0 & v_{TT} \cos 2\Phi_0 \\ v_L & v_T^{(V)} & -v_{LT}^{(V)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(R)} & v_{LT}^{(R)} & v_{TT} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3}) \quad (\text{A.4})$$

Die Fehler an den gemessenen reduzierten Wirkungsquerschnitten fassen wir zur Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_\sigma := \begin{pmatrix} (\Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0))^2 & & & \mathbf{0} \\ & (\Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0))^2 & & \\ & & (\Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi))^2 & \\ \mathbf{0} & & & (\Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0))^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

zusammen. Die Auflösung des Gleichungssystems (A.1) nach  $\tilde{\mathbf{R}}$  erfordert die Inversion der Matrix  $\mathbf{V}$ . Diese  $(4 \times 4)$ -Matrix läßt sich mit Standardmethoden analytisch invertieren. Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V}^{-1})_{11} &= \frac{-2v_{TT}}{\det \mathbf{V}} \left[ (v_T^{(R)} v_{LT}^{(V)} + v_T^{(V)} v_{LT}^{(R)}) \sin^2 \Phi_0 + (v_T^{(V)} - v_T^{(R)}) v_{LT}^{(V)} \cos^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \right] \\
(\mathbf{V}^{-1})_{12} &= \frac{1}{2 v_L \sin^2 \Phi_0} \\
(\mathbf{V}^{-1})_{13} &= \frac{-2v_{TT}}{\det \mathbf{V}} \left[ (v_T^{(R)} v_{LT}^{(V)} - v_T^{(V)} v_{LT}^{(R)}) \sin^2 \Phi_0 + (v_T^{(V)} - v_T^{(R)}) v_{LT}^{(V)} \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \right] \\
(\mathbf{V}^{-1})_{14} &= \frac{v_T^{(V)}}{v_L (v_T^{(V)} - v_T^{(R)})} \\
(\mathbf{V}^{-1})_{21} &= \frac{v_{LT}^{(V)} + v_{LT}^{(R)}}{2 v_{LT}^{(V)} (v_T^{(V)} - v_T^{(R)})} & (\mathbf{V}^{-1})_{22} &= 0 \\
(\mathbf{V}^{-1})_{23} &= \frac{v_{LT}^{(V)} - v_{LT}^{(R)}}{2 v_{LT}^{(V)} (v_T^{(V)} - v_T^{(R)})} & (\mathbf{V}^{-1})_{24} &= \frac{-1}{v_T^{(V)} - v_T^{(R)}} \\
(\mathbf{V}^{-1})_{31} &= \frac{1}{2 v_{LT}^{(V)}} & (\mathbf{V}^{-1})_{32} &= 0 \\
(\mathbf{V}^{-1})_{33} &= \frac{-1}{2 v_{LT}^{(V)}} & (\mathbf{V}^{-1})_{34} &= 0 \\
(\mathbf{V}^{-1})_{41} &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \Phi_0}{2 v_{TT} \sin^2 \Phi_0} & (\mathbf{V}^{-1})_{42} &= \frac{-1}{2 v_{TT} \sin^2 \Phi_0} \\
(\mathbf{V}^{-1})_{43} &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0}{2 v_{TT} \sin^2 \Phi_0} & (\mathbf{V}^{-1})_{44} &= 0
\end{aligned}$$

$$\det \mathbf{V} = 4 v_L (v_T^{(V)} - v_T^{(R)}) v_{LT}^{(V)} v_{TT} \sin^2 \Phi_0 . \quad (\text{A.6})$$

Aus den Wurzeln der Diagonalelemente der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{R}}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}_\sigma (\mathbf{V}^{-1})^T \quad (\text{A.7})$$

erhält man die (korrelierten) Fehler der Responsefunktionen:

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{R}_L &= \left[ \left( (\mathbf{V}^{-1})_{11} \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \right)^2 + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{12} \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{13} \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \right)^2 + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{14} \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \right)^2 \right]^{1/2} \\
\Delta \tilde{R}_T &= \frac{1}{2 v_{LT}^{(V)} |v_T^{(V)} - v_T^{(R)}|} \left[ (v_{LT}^{(V)} + v_{LT}^{(R)})^2 (\Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0))^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( v_{LT}^{(V)} - v_{LT}^{(R)} \right)^2 \left( \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \right)^2 + \left( 2 v_{LT}^{(V)} \right)^2 \left( \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \right)^2 \Big]^{1/2} \\
\Delta \tilde{R}_{LT} &= \frac{1}{2 v_{LT}^{(V)}} \left[ \left( \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \right)^2 + \left( \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \right)^2 \right]^{1/2} \\
\Delta \tilde{R}_{TT} &= \frac{1}{2 v_{TT} \sin^2 \Phi_0} \left[ \cos^4 \frac{1}{2} \Phi_0 \left( \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \right)^2 + \left( \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \sin^4 \frac{1}{2} \Phi_0 \left( \Delta \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\pi) \right)^2 \right]^{1/2} . \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Anhand der Beziehungen (A.8) läßt sich diskutieren, wie genau die Strukturfunktionen unter bestimmten Meßbedingungen extrahiert werden. So läßt sich z.B. insbesondere angeben, in welchen Fällen bestimmte Strukturfunktionen gar nicht separiert werden können, was man daran erkennt daß die entsprechenden statistischen Fehler  $\Delta \tilde{R}_\lambda$  unendlich groß sind. Solche Fälle gibt es genau dann, wenn die Determinante  $\det \mathbf{V}$  verschwindet, d.h. die Matrix  $\mathbf{V}$  singulär wird und deshalb  $\mathbf{V}^{-1}$  nicht existiert. Die von de Forest vorgeschlagenen Messungen sind gerade so gewählt, daß diese Situation nicht eintritt, jedoch steigen bereits in ihrer Nähe ( $\det \mathbf{V} \rightarrow 0$ ) bestimmte Elemente der inversen Matrix  $\mathbf{V}^{-1}$  stark an, was ein entsprechendes Anwachsen einzelner Fehler  $\Delta \tilde{R}_\lambda$  der extrahierten Strukturfunktionen nach sich zieht. Gemäß (A.6) tritt dies in den beiden Fällen  $\sin \Phi_0 \rightarrow 0$  und  $(v_T^{(V)} - v_T^{(R)}) \rightarrow 0$  ein.

1. Fall ( $\Phi_0 \rightarrow 0$  oder  $\pi$ ): Wie man aus (A.8) leicht abliest, gehen in diesem Fall die Fehler  $\Delta \tilde{R}_L$  und  $\Delta \tilde{R}_{TT}$  gegen Unendlich, während die Fehler  $\Delta \tilde{R}_T$  und  $\Delta \tilde{R}_{LT}$  endlich bleiben. Der Teil der Matrix  $\mathbf{V}$ , der zur Bestimmung von  $\tilde{R}_T$  und  $\tilde{R}_{LT}$  benötigt wird, läßt sich also nach wie vor invertieren, obwohl die Matrix  $\mathbf{V}$  als Ganzes singulär wird.

2. Fall ( $v_T^{(V)} \rightarrow v_T^{(R)}$ ): Dieser Fall ist gleichbedeutend mit  $\epsilon^{(V)} \rightarrow \epsilon^{(R)}$  bzw.  $\Theta_e^{(V)} \rightarrow \Theta_e^{(R)}$ , d.h. die Messungen enthalten keine Vorwärts/Rückwärts-Information. Damit gehen die Fehler  $\Delta \tilde{R}_L$  und  $\Delta \tilde{R}_T$  gegen Unendlich, während die Fehler der Interferenz-Strukturfunktionen endlich bleiben. Die Separation von  $\tilde{R}_{LT}$  und  $\tilde{R}_{TT}$  ist also im Fall 2 möglich, obwohl auch diesmal die Matrix  $\mathbf{V}$  singulär wird.

In beiden Fällen kann die Strukturfunktion  $\tilde{R}_{LT}$  bestimmt werden, denn die Links/Rechts-Information ist in den hier gewählten Messungen immer vorhanden. Führt man jedoch die erste und die dritte Messung nicht bei  $\Phi = 0$  und  $\Phi = \pi$  durch, sondern allgemeiner bei  $\Phi_1$  und  $\Phi_3$ , dann gehen die Fehler  $\Delta \tilde{R}_{LT}$  und  $\Delta \tilde{R}_{TT}$  gegen Unendlich, falls die Winkel  $\Phi$  der drei Messungen unter Vorwärtswinkeln zusammenfallen.

## A.2 Die Methode von Donnelly

Der Vorschlag von Donnelly umfaßt drei Messungen bei  $\Phi = 0$ , die unter Variation von  $\Theta_e$  (Vorwärts-, Mitte-, Rückwärtswinkel) durchgeführt werden, und eine Messung bei  $\Phi = \Phi_0$  unter Vorwärtswinkel. Der Vektor  $\tilde{\sigma}_{red}$  und die Matrix  $\mathbf{V}$  in (A.1) haben daher die folgenden Gestalt:

$$\tilde{\sigma}_{red} := \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(M)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \\ \tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} := \begin{pmatrix} v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(M)} & v_{LT}^{(M)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(R)} & v_{LT}^{(R)} & v_{TT} \\ v_L & v_T^{(V)} & v_{LT}^{(V)} \cos \Phi_0 & v_{TT} \cos 2\Phi_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9}) \quad (\text{A.10})$$

Mit Standardmethoden erhält man die Inverse der Matrix  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}^{-1})_{11} &= \frac{-1}{2 v_L \sin^2 \Phi_0} + \frac{2v_{TT}}{\det \mathbf{V}} \left[ \left( v_T^{(R)} v_{LT}^{(M)} - v_T^{(M)} v_{LT}^{(R)} \right) \sin^2 \Phi_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left( v_T^{(M)} - v_T^{(R)} \right) v_{LT}^{(V)} \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \right] \\ (\mathbf{V}^{-1})_{12} &= \frac{2v_{TT}}{\det \mathbf{V}} \left[ \left( v_T^{(V)} v_{LT}^{(R)} - v_T^{(R)} v_{LT}^{(V)} \right) \sin^2 \Phi_0 + \left( v_T^{(R)} - v_T^{(V)} \right) v_{LT}^{(V)} \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \right] \\ (\mathbf{V}^{-1})_{13} &= \frac{2v_{TT}}{\det \mathbf{V}} \left[ \left( v_T^{(M)} v_{LT}^{(V)} - v_T^{(V)} v_{LT}^{(M)} \right) \sin^2 \Phi_0 + \left( v_T^{(V)} - v_T^{(M)} \right) v_{LT}^{(V)} \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \right] \\ (\mathbf{V}^{-1})_{14} &= \frac{1}{2 v_L \sin^2 \Phi_0} \\ (\mathbf{V}^{-1})_{21} &= \frac{v_{LT}^{(M)} - v_{LT}^{(R)}}{\Delta^{(VMR)}} & (\mathbf{V}^{-1})_{22} &= \frac{v_{LT}^{(R)} - v_{LT}^{(V)}}{\Delta^{(VMR)}} \\ (\mathbf{V}^{-1})_{23} &= \frac{v_{LT}^{(V)} - v_{LT}^{(M)}}{\Delta^{(VMR)}} & (\mathbf{V}^{-1})_{24} &= 0 \\ (\mathbf{V}^{-1})_{31} &= \frac{v_T^{(R)} - v_T^{(M)}}{\Delta^{(VMR)}} & (\mathbf{V}^{-1})_{32} &= \frac{v_T^{(V)} - v_T^{(R)}}{\Delta^{(VMR)}} \\ (\mathbf{V}^{-1})_{33} &= \frac{v_T^{(M)} - v_T^{(V)}}{\Delta^{(VMR)}} & (\mathbf{V}^{-1})_{34} &= 0 \\ (\mathbf{V}^{-1})_{41} &= \frac{1}{2 v_{TT} \sin^2 \Phi_0} + \frac{2}{\det \mathbf{V}} \left( v_T^{(R)} - v_T^{(M)} \right) v_{LT}^{(V)} \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \\ (\mathbf{V}^{-1})_{42} &= \frac{2}{\det \mathbf{V}} \left( v_T^{(V)} - v_T^{(R)} \right) v_{LT}^{(V)} \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \\ (\mathbf{V}^{-1})_{43} &= \frac{2}{\det \mathbf{V}} \left( v_T^{(M)} - v_T^{(V)} \right) v_{LT}^{(V)} \sin^2 \frac{1}{2} \Phi_0 \\ (\mathbf{V}^{-1})_{44} &= \frac{-1}{2 v_{TT} \sin^2 \Phi_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{V} &= -2 \Delta^{(VMR)} v_L v_{TT} \sin^2 \Phi_0 \\ \Delta^{(VMR)} &:= v_T^{(V)} \left( v_{LT}^{(M)} - v_{LT}^{(R)} \right) + v_T^{(M)} \left( v_{LT}^{(R)} - v_{LT}^{(V)} \right) + v_T^{(R)} \left( v_{LT}^{(V)} - v_{LT}^{(M)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$



Wie in Anhang A.1 ergeben sich die (korrelierten) Fehler der Strukturfunktionen gemäß (A.7) zu:

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{R}_L &= \left[ \left( (\mathbf{V}^{-1})_{11} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \right)^2 + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{12} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(M)}(0) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{13} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \right)^2 + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{14} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \right)^2 \right]^{1/2} , \\
\Delta\tilde{R}_T &= \frac{1}{|\Delta^{(VMR)}|} \left[ \left( v_{LT}^{(M)} - v_{LT}^{(R)} \right)^2 \left( \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \right)^2 + \left( v_{LT}^{(R)} - v_{LT}^{(V)} \right)^2 \left( \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(M)}(0) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( v_{LT}^{(V)} - v_{LT}^{(M)} \right) \left( \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \right)^2 \right]^{1/2} , \\
\Delta\tilde{R}_{LT} &= \frac{1}{|\Delta^{(VMR)}|} \left[ \left( v_T^{(R)} - v_T^{(M)} \right)^2 \left( \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \right)^2 + \left( v_T^{(V)} - v_T^{(R)} \right)^2 \left( \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(M)}(0) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( v_T^{(M)} - v_T^{(V)} \right) \left( \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \right)^2 \right]^{1/2} , \\
\Delta\tilde{R}_{TT} &= \left[ \left( (\mathbf{V}^{-1})_{41} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(0) \right)^2 + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{42} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(M)}(0) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{43} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(R)}(0) \right)^2 + \left( (\mathbf{V}^{-1})_{44} \Delta\tilde{\sigma}_{red}^{(V)}(\Phi_0) \right)^2 \right]^{1/2} . \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Wieder läßt sich damit z.B. angeben bei welchen Kinematiken bestimmte Strukturfunktionen nicht extrahiert werden können. Aus den Nullstellen der Determinante  $\det \mathbf{V}$  erkennt man, daß zwei kritische Fälle zu unterscheiden sind.

Im ersten Fall verschwindet das ‘‘Dreieck’’:

$$\Delta^{(VMR)} \rightarrow 0 ,$$

d.h. mindestens zwei der drei Messungen bei  $\Phi = 0$  fallen zusammen. Dadurch läßt sich aus dem ‘‘Super-Rosenbluth’’-Plot keine Information über die Krümmung des reduzierten Wirkungsquerschnitts als Funktion von  $\tan^2 \frac{1}{2}\Theta_e$  mehr gewinnen und die ganze Separationsmethode bricht zusammen. Dies ist direkt an den Gleichungen (A.12) zu erkennen: alle Fehler  $\Delta\tilde{R}_\lambda$  gehen gegen Unendlich.

Der zweite Fall:

$$\Phi_0 \rightarrow 0 \text{ oder } \pi ,$$

ist bereits aus Anhang A.1 bekannt; er führt zum Verschwinden der ‘‘out-of-plane’’-Information. In diesem Fall gehen die Fehler  $\Delta\tilde{R}_L$  und  $\Delta\tilde{R}_{TT}$  gegen Unendlich, während die Fehler  $\Delta\tilde{R}_T$  und  $\Delta\tilde{R}_{LT}$  endlich bleiben.

## B. Konstruktion der Basis des flexiblen Ansatzes

### B.1 Tensorprodukt linearer Räume

In Abschnitt 3.2 werden die “wahren” Strukturfunktionen  $R_\lambda$ , die Funktionen von

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (|\vec{q}|, \omega, \Theta_{pq}) \quad (\text{B.1})$$

sind, formal in ein vollständiges Basissystem entwickelt. Innerhalb eines kompakten Gebietes genügt eine (bestimmte) endliche Zahl von Basiselementen, um die “wahren” Strukturfunktionen mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu beschreiben. Im folgenden wird erläutert, wie man ein solches Basissystem durch Tensorproduktbildung aus elementaren Teilsystemem konstruiert.

Dazu betrachten wir zunächst ein vollständiges Basissystem

$$\left\{ b_i(\zeta) \mid i = 1, \dots, \infty \right\}$$

von reellen Funktionen  $b_i(\zeta)$  einer reellen Variablen  $\zeta$ . Dieses elementare System spannt einen linearen Vektorraum auf, dessen Vektoren die reellen Funktionen  $f(\zeta)$  sind. Wenn man nun einen Vektorraum konstruieren möchte, dessen Vektoren die reellen Funktionen  $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  sind (wie z.B. unsere  $R_\lambda(\zeta)$ ), dann bildet man ein Tensorprodukt von drei linearen Räumen der oben genannten Form. Die Basis dieses Produkt-Vektorraums ist dann durch

$$\left\{ \mathcal{B}_i(\zeta) \mid i = 1, \dots, \infty \right\} = \bigotimes_{k=1}^3 \left\{ b_{i_k}(\zeta_k) \mid i_k = 1, \dots, \infty \right\} \quad (\text{B.2})$$

gegeben, wobei das Zeichen  $\otimes$  hier bedeutet, daß alle möglichen Produkte von drei Basisfunktionen aus den drei verschiedenen Mengen auszuführen sind.

Für den Ansatz der Strukturfunktionen genügt ein beschränktes Basissystem, um hinreichend flexibel zu sein. Berücksichtigen wir mit dem zusätzlichen Index  $\lambda$ , daß die Systeme für die vier Strukturfunktionen durchaus unterschiedlich sein können und sei  $n_{k\lambda}$  die Anzahl der Elemente eines beschränkten elementaren Basissystems für die  $k$ -te Koordinate von  $\zeta$ , dann ergibt sich, genau wie oben, die volle Basis für die Strukturfunktion  $R_\lambda$  aus

$$\left\{ \mathcal{B}_{\lambda i}(\zeta) \mid i = 1, \dots, n_\lambda \right\} = \bigotimes_{k=1}^3 \left\{ b_{\lambda i_k}(\zeta_k) \mid i_k = 1, \dots, n_{k\lambda} \right\} . \quad (\text{B.3})$$

Die Gesamtzahl der für die Entwicklung der Strukturfunktion  $R_\lambda$  verwendeten Basiselemente ist dabei gegeben durch

$$n_\lambda = \prod_{k=1}^3 n_{k\lambda} . \quad (\text{B.4})$$

Die Konstruktion der vollen Basis mit Hilfe von (B.3) hat den Vorteil, daß es zur weiteren Diskussion genügt, die elementaren Basiselemente  $b_{\lambda i_k}(\zeta_k)$  zu betrachten. Als solche Elemente werden in dieser Arbeit hauptsächlich *kubische Splines* und *Polynome* verwendet, wobei das Produktschema (B.3) auch eine Kombination der beiden Funktionenklassen erlaubt, z.B. Splines in  $|\vec{q}|$  und Polynome in  $\omega$  und  $\Theta_{pq}$ .

## B.2 Basis für die $\Theta_{pq}$ -Richtung

Die  $\Theta_{pq}$ -Koordinate wird hier gesondert betrachtet, denn sie ist gegenüber den beiden anderen Koordinaten  $|\vec{q}|$  und  $\omega$  in gewissem Sinn ausgezeichnet. Die Auszeichnung beruht darauf, daß die  $\Phi$ -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts explizit bekannt ist und  $\Theta_{pq}$  und  $\Phi$  als Polar- und Azimutalwinkel des emittierten Protons miteinander zusammenhängen. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts sei die Elektronenkinematik  $e_i$ ,  $|\vec{q}|$  und  $\omega$  festgehalten, wodurch der reduzierte Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma_{red}(\Theta_{pq}, \Phi) = & v_L R_L(\Theta_{pq}) + v_T R_T(\Theta_{pq}) + v_{LT} R_{LT}(\Theta_{pq}) \cos \Phi \\ & + v_{TT} R_{TT}(\Theta_{pq}) \cos 2\Phi \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

nur noch als Funktion von  $\Theta_{pq}$  und  $\Phi$  variiert und deshalb als Funktion auf der Einheitskugel  $S_1$  betrachtet werden kann. Solche Funktionen lassen sich in die Kugelflächenfunktionen entwickeln; da  $\sigma_{red}$  außerdem noch reell ist, bieten sich dazu die reellen  $Y_{lm}$  an, welche durch

$$Y_{lm}(\Theta_{pq}, \Phi) := N_{lm} \begin{cases} P_m(\cos \Theta_{pq}) \cos m\Phi & m = 0, 1, \dots, l \\ P_{|m|}(\cos \Theta_{pq}) \sin |m|\Phi & m = -1, -2, \dots, -l \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

definiert sind [14]. Mit

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2\pi(1+\delta_{0m})(l+|m|)!}}$$

ist die Normierung der  $Y_{lm}$  auf 1 (bei Integration über  $S_1$ ) bezeichnet und

$$P_{lm}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

sind die assoziierten Legendre-Polynome. Wie man durch Vergleich der  $\Phi$ -Abhängigkeiten von (B.5) mit (B.6) erkennt, wird für die Entwicklung des Wir-

kungsquerschnitts in die Kugelfunktionen nur  $m \in \{0, 1, 2\}$  benötigt<sup>1</sup>. Bezeichnet man die Parameter dieser Entwicklung mit  $p_{lm}$ , dann gilt also

$$\begin{aligned}\sigma_{red}(\Theta_{pq}, \Phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\min(l,2)} p_{lm} Y_{lm}(\Theta_{pq}, \Phi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} p_{l0} N_{l0} P_{l0}(\cos \Theta_{pq}) + \sum_{l=1}^{\infty} p_{l1} N_{l1} P_{l1}(\cos \Theta_{pq}) \cos \Phi \\ &\quad + \sum_{l=2}^{\infty} p_{l2} N_{l2} P_{l2}(\cos \Theta_{pq}) \cos 2\Phi .\end{aligned}\tag{B.7}$$

Aus der Aufschlüsselung nach den verschiedenen  $m$ -Quantenzahlen erhält man die folgenden Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned}\sigma_{red_{L/T}}(\Theta_{pq}) &:= v_L R_L(\Theta_{pq}) + v_T R_T(\Theta_{pq}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} p_{l0} Q_{l0}(\cos \Theta_{pq}) ,\end{aligned}\tag{B.8}$$

$$R_{LT}(\Theta_{pq}) = \frac{\sin \Theta_{pq}}{v_{LT}} \sum_{l=1}^{\infty} p_{l1} Q_{l1}(\cos \Theta_{pq}) ,\tag{B.9}$$

$$R_{TT}(\Theta_{pq}) = \frac{\sin^2 \Theta_{pq}}{v_{TT}} \sum_{l=2}^{\infty} p_{l2} Q_{l2}(\cos \Theta_{pq}) ,\tag{B.10}$$

wobei die Polynome  $Q_{lm}$  gemäß

$$Q_{l0}(\cos \Theta_{pq}) := N_{l0} P_{l0}(\cos \Theta_{pq}) ,\tag{B.11}$$

$$Q_{l1}(\cos \Theta_{pq}) := N_{l1} \frac{d}{d \cos \Theta_{pq}} P_{l0}(\cos \Theta_{pq}) ,\tag{B.12}$$

$$Q_{l2}(\cos \Theta_{pq}) := N_{l2} \frac{d^2}{d (\cos \Theta_{pq})^2} P_{l0}(\cos \Theta_{pq})\tag{B.13}$$

aus den Legendre–Polynomen  $P_{lm}$  berechenbar sind. Die Reihenentwicklung (B.8) läßt sich hier nicht weiter nach den Strukturfunktionen  $R_L$  und  $R_T$  aufschlüsseln; daran ist wieder zu erkennen, daß bei konstanter Elektronkinematik ( $\epsilon = const$ ) prinzipiell keine L/T–Separation möglich ist. Die beiden folgenden Gleichungen (B.9) und (B.10) zeigen dann explizit, daß die Interferenz–Strukturfunktionen in paralleler Kinematik verschwinden ( $\propto \sin \Theta_{pq}$  bzw.  $\propto \sin^2 \Theta_{pq}$ ). Aus (B.8) – (B.10) läßt sich darüberhinaus die Symmetrie der  $R_\lambda$  als Funktion von  $\Theta_{pq}$  ablesen, denn die Polynome  $Q_{lm}$  sind – genau wie die  $P_{lm}$  – gerade in  $\Theta_{pq}$ . Daher sind  $R_L$ ,  $R_T$  und  $R_{TT}$  ebenfalls gerade in  $\Theta_{pq}$ , während  $R_{LT}$  aufgrund des Vorfaktors  $\sin \Theta_{pq}$  als einzige Strukturfunktion ungerade ist.

Durch die Entwicklung des reduzierten Wirkungsquerschnitts in die Kugelfunktionen ergibt sich ein interessantes Separationsverfahren. Angenommen es wären

---

<sup>1</sup>Bei der Streuung mit polarisierten Elektronen der Helizität  $h = \pm 1$ , käme noch  $m = -1$  hinzu.

$N$  Wirkungsquerschnitte unter konstanter Elektronenkinematik gemessenen, aber mit  $\Theta_{pq}^{(k)}$ ,  $\Phi^{(k)}$  beliebig auf der Einheitskugel verteilt. Aus (B.7) erhält man den Ansatz

$$\sigma_{red}^{(ans)(k)} = \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^{\min(l,2)} p_{lm}^{(ans)} Y_{lm}(\Theta_{pq}^{(k)}, \Phi^{(k)}) \quad (\text{B.14})$$

für den reduzierten Wirkungsquerschnitt der  $k$ -ten Messung. Definiert man die Basismatrix  $\mathbf{B}$  durch ihre Elemente

$$B_{(lm)k} := Y_{lm}(\Theta_{pq}^{(k)}, \Phi^{(k)}) \quad , \quad (\text{B.15})$$

wobei die beiden Indices  $lm$  zum Einzel-Index  $(lm)$  zusammengefaßt sind, dann folgt aus (B.14) das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{\sigma}_{red}^{(ans)} = \mathbf{B}\mathbf{p}^{(ans)} \quad . \quad (\text{B.16})$$

Diese Gleichung ist aus Abschnitt 3.2 wohlbekannt; “least-square”-Lösung, Kovarianzmatrix und Pseudoinverse sind dort bereits mit

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{B}^+ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{red} \quad , \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{p}}} = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{G}_\sigma \mathbf{B} \right)^{-1} \quad , \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{B}^+ = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{G}_\sigma \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{G}_\sigma \quad (\text{B.19})$$

angegeben. Setzt man (B.17) in die Gleichungen (B.8)–(B.10) ein, so erhält man die geschätzten Funktionen  $\tilde{\sigma}_{red_{L/TT}}(\Theta_{pq})$ ,  $\tilde{R}_{LT}(\Theta_{pq})$  und  $\tilde{R}_{TT}(\Theta_{pq})$ , wobei die Fehlerfortpflanzung für diese Größen auf ein Kovarianzmatrixfunktional ähnlich dem in Abschnitt 3.2 angegebenen führt. Das skizzierte Verfahren vereinfacht sich, falls die gemessenen reduzierten Wirkungsquerschnitte auf einem regelmäßigen Gitter auf der Einheitskugel liegen, weil man dann die Koeffizienten  $\tilde{p}_{lm}$  mit einer schnellen Fourier-Transformation (FFT) bestimmen kann [36].

Beschränken sich jedoch die Meßwerte auf einen begrenzten Bereich in  $\Theta_{pq}$ , dann ist die Entwicklung des Wirkungsquerschnitts in die Kugelfunktionen nicht mehr sinnvoll. Betrachtet man aber z.B. Messungen für kleine  $\Theta_{pq}$ , d.h. in annähernd paralleler Kinematik, dann gibt es die Möglichkeit, die auftretenden trigonometrischen Funktionen in Potenzreihen zu entwickeln und man erhält für  $k = 3$  die elementaren Basisfunktionen

$$\left\{ b_{\lambda i}(\Theta_{pq}) \mid i = 1, \dots, n_{3\lambda} \right\} = \begin{cases} \left\{ \Theta_{pq}^{2i-2} \mid i = 1, \dots, n_{3\lambda} \right\} & \lambda = L, T \\ \left\{ \Theta_{pq}^{2i-1} \mid i = 1, \dots, n_{3\lambda} \right\} & \lambda = LT \\ \left\{ \Theta_{pq}^{2i} \mid i = 1, \dots, n_{3\lambda} \right\} & \lambda = TT \quad . \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Bei der Wahl der Maximalzahlen  $n_{3\lambda}$  dieser Basiselemente stößt man auf das folgende Problem: Angenommen man wählt die  $n_{3\lambda}$  für alle vier Strukturfunktionen gleich. Dann tritt der größte Exponent von  $\Theta_{pq}$  immer bei  $R_{TT}$  auf und

der zweitgrößte bei  $R_{LT}$ , während der maximale Exponent von  $R_L$  und  $R_T$  erst an dritter Stelle dieser Hierarchie auftaucht. Um in der Entwicklung konsistent zu bleiben, ist es daher sinnvoll den maximalen Exponenten  $M$  in  $\Theta_{pq}$  vorzugeben und die Zahl  $n_{3\lambda}$  der Basiselemente für die Strukturfunktionen daraus zu berechnen:

$$n_{3\lambda} = \begin{cases} (M \operatorname{div} 2) + 1 & \lambda = L, T \\ ((M - 1) \operatorname{div} 2) + 1 & \lambda = LT \\ (M \operatorname{div} 2) & \lambda = TT \end{cases}, \quad (\text{B.21})$$

wobei mit “div” die ganzzahlige Division ohne Rest bezeichnet ist.

**Beispiel.**  $M = 5$  :

$$n_{3\lambda} = \begin{cases} 3 & \lambda = L, T \\ 3 & \lambda = LT \\ 2 & \lambda = TT \end{cases}$$

$$\left\{ b_{\lambda i}(\Theta_{pq}) \mid i = 1, \dots, n_{3\lambda} \right\} = \begin{cases} \left\{ 1, \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \right\} & \lambda = L, T \\ \left\{ \Theta_{pq}, \Theta_{pq}^3, \Theta_{pq}^5 \right\} & \lambda = LT \\ \left\{ \Theta_{pq}^2, \Theta_{pq}^4 \right\} & \lambda = TT \end{cases} .$$

### B.3 Splines als Basisfunktionen

Splines werden meist zur Interpolation zwischen vorgegebenen Datenpunkten verwendet, dienen in der numerischen Mathematik aber auch als Ansatz zur Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. In dieser Arbeit werden die Splines benutzt, um die  $|\vec{q}|$ -Abhängigkeit der Responsefunktionen beim flexiblen Ansatz zu modellieren (siehe Abschn. 4.4). Bevor wir auf diesen Aspekt näher eingehen, werden die dazu benötigten Grundbegriffe im folgenden kurz erläutert, wobei der interessierte Leser weitere, darüber hinausgehende Details z.B. bei deBoor [18], Prenter [43], Stoer [49] oder Lancaster und Salkauskas [32] findet.

Gegeben sei ein gewisser Definitionsbereich  $[a, b]$  innerhalb dessen eine Funktion z.B. durch vorgegebene Datenpunkte gehen soll (Interpolationsproblem). Damit als Funktionenklasse die Klasse der (noch zu definierenden) Splines benutzt werden kann, wird zunächst das Intervall  $[a, b]$  mit Hilfe von  $n + 1$  Stützstellen  $x_i$  (*Knoten*) in Teilbereiche zerlegt:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b .$$

Zur Lösung des Interpolationsproblems werden die Knoten gerade an die Stellen gesetzt, wo die Daten gegeben sind. Die Splines werden nun mit Hilfe des angegebenen Gitters folgendermaßen definiert: Eine *kubische Splinefunktion*  $S_3(x)$  ist zusammen mit ihren ersten beiden Ableitungen an jedem Punkt  $x$  des Intervalls

$[a, b]$  stetig und reduziert sich in jedem Teilintervall  $[x_i, x_{i+1}]$  auf ein Polynom dritten Grades. Ein solcher Spline hat  $n + 3$  Freiheitsgrade und ist daher z.B. durch  $n+1$  Datenpunkte an den Stellen  $x_i$  zusammen mit zwei Randbedingungen (z.B.  $S_3''(a) = S_3''(b) = 0$ ) eindeutig bestimmt.

Jeder kubische Spline  $S_3(x)$  läßt sich gemäß

$$S_3(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i B_i(x) \quad (\text{B.22})$$

in die Basis der *B-Splines*  $B_i(x)$  zerlegen. Diese Basisfunktionen sind am Gitterpunkt  $x_i$  lokalisiert, wobei für die Zerlegung (B.22) noch zwei weitere Knoten  $x_{-1} < a$  und  $x_{n+1} > b$  benötigt werden. Bei Verwendung eines äquidistanten Gitters mit Gitterkonstante  $h$  sind die B-Splines  $B_i(x)$  explizit gegeben durch

$$B_i(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

der Verlauf dieser Funktion ist in Abbildung B.1 graphisch dargestellt. An (B.23) ist dabei deutlich zu erkennen, daß jeder B-Spline, genauso wie der gesamte Spline  $S(x)$ , in jedem Teilintervall ein Polynom dritten Grades ist.

-bb-error = =

Abbildung B.1: Der B-Spline  $B_i(x)$  bei Verwendung eines äquidistanten Gitters.

Weil jeder B-Spline außerhalb des Intervalls  $]x_{i-2}, x_{i+2}[$  verschwindet (kompakter Träger), sind an einem beliebigen Punkt  $x \in [a, b]$  nur maximal vier dieser

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ \vec{q} _{i-3}$ [MeV/c]	184.0	232.0	280.0	328.0	376.0	424.0	472.0	520.0	568.0	616.0

Tabelle B.1: Das Gitter über dem die zehn B-Splines der Basis B2 definiert sind.

Basiselemente von Null verschieden. Dadurch reduziert sich die Summe (B.22) auf die Addition von höchstens vier Termen, so daß die dabei benötigte Rechenzeit unabhängig von der Gesamtzahl der verwendeten Basiselemente ist.

Damit der Spline  $S_3(x)$  beim Interpolationsproblem eindeutig bestimmt ist, müssen außer den  $n+1$  Datenpunkten an den Stellen  $x_i$  zwei zusätzliche Randbedingungen vorgegeben werden. Bei Verwendung der B-Splines als Basis bieten sich dazu die “not-a-knot”-Randbedingungen an (siehe z.B. [18]), die man dadurch erhält, daß man zwei weitere Knoten  $x_{-2} < x_{-1}$  und  $x_{n+2} > x_{n+1}$  einführt. Die an diesen Knoten lokalisierten B-Splines gehen für  $x \in [a, b]$  zwar nicht in die Summe (B.22) ein, bestimmen aber indirekt das Verhalten des Splines  $S_3(x)$  an den Rändern des Definitionsbereichs.

In dieser Arbeit werden die B-Splines bei der modellunabhängigen Analyse (Abschn. 4.4) als elementare Basis für die  $|\vec{q}|$ -Koordinate der Strukturfunktionen benutzt (Basis B2). Die dabei verwendeten zehn B-Splines sind an den in Tabelle B.1 angegebenen Knoten lokalisiert, wobei dieses äquidistante Gitter ( $h = 48 \text{ MeV/c}$ ) so gewählt ist, daß die “not-a-knot”-Randbedingungen erfüllt sind. Die elementaren Basiselemente  $b_{\lambda_i}(|\vec{q}|)$  sind dann gemäß

$$b_{\lambda_i}(|\vec{q}|) = B_{i-3}(|\vec{q}|) \quad ; \quad i \in \{1, \dots, 10\} \quad (\text{B.24})$$

aus den B-Splines des konstruierten Gitters berechenbar, wobei wir für alle Strukturfunktionen  $R_\lambda$  dieselbe Basis gewählt haben.



## C. Kinematische Beziehungen

### C.1 Transformation von Spektrometerkoordinaten auf physikalische Koordinaten – Modul TRANSPHYS

Bei einem  $(e, e'p)$ -Experiment werden zu jedem registrierten Koinzidenzereignis nach erfolgreicher Bahnrückverfolgung sechs Koordinaten am Target bestimmt, welche die Dreier-Impulse der beiden detektierten Teilchen charakterisieren. Diese sogenannten *Spektrometerkoordinaten*

$$\mathcal{S} = \left( \Theta_e^{(s)}, \Phi_e^{(s)}, |\vec{k}_f|, \Theta_p^{(s)}, \Phi_p^{(s)}, |\vec{p}| \right) \quad (\text{C.1})$$

sind in Abbildung C.1 zu ersehen. Das verwendete Bezugssystem  $K$  ist dabei vollständig durch den experimentellen Aufbau festgelegt;  $\hat{e}_z$  zeigt in Richtung der einlaufenden Elektronen und spannt zusammen mit  $\hat{e}_x$  (Konvention:  $\hat{e}_x \cdot \vec{k}_f > 0$ ) die Hallenebene auf <sup>1</sup>.

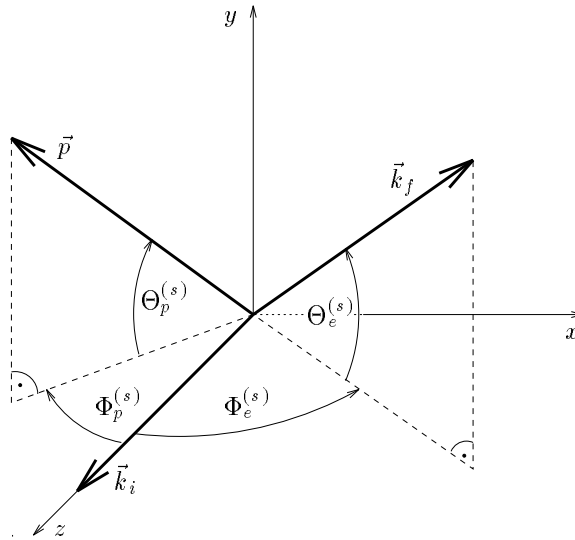


Abbildung C.1: Bezugssystem  $K$  zur Definition der Spektrometerwinkel. Im hier dargestellten Spezialfall sind  $\Theta_e^{(s)}$ ,  $\Phi_e^{(s)}$  und  $\Theta_p^{(s)}$  positiv und  $\Phi_p^{(s)}$  ist negativ.

Aus den (kartesischen) Spektrometerwinkeln  $\Theta_e^{(s)}$ ,  $\Phi_e^{(s)}$ ,  $\Theta_p^{(s)}$  und  $\Phi_p^{(s)}$  erhält man die sphärischen Winkel des Elektron- bzw. Protonvertex gemäß:

$$\Theta_e = \arccos \left( \cos \Theta_e^{(s)} \cos \Phi_e^{(s)} \right), \quad (\text{C.2})$$

<sup>1</sup>Von einem geeigneten Einschub der Elektronen wird hier abgesehen.

$$\Phi_e = \arcsin \left( \sin \Theta_e^{(s)} / \sin \Theta_e \right) , \quad (C.3)$$

$$\Theta_p = \arccos \left( \cos \Theta_p^{(s)} \cos \Phi_p^{(s)} \right) , \quad (C.4)$$

$$\Phi_p = \begin{cases} \arcsin \left( \sin \Theta_p^{(s)} / \sin \Theta_p \right) & \text{falls } \Phi_p^{(s)} > 0 ; \Theta_p^{(s)} \geq 0 \\ 2\pi + \arcsin \left( \sin \Theta_p^{(s)} / \sin \Theta_p \right) & \text{falls } \Phi_p^{(s)} > 0 ; \Theta_p^{(s)} < 0 \\ \pi - \arcsin \left( \sin \Theta_p^{(s)} / \sin \Theta_p \right) & \text{falls } \Phi_p^{(s)} < 0 . \end{cases} \quad (C.5)$$

Aus Symmetriegründen – die Reaktion hängt nicht vom Winkel  $\Phi_e$  zwischen Streuebene und Hallenebene ab – ist die Beschreibung der Kinematik durch die sechs Koordinaten  $\mathcal{S}$  überbestimmt. Bei fester Energie der einlaufenden Elektronen kann der 6-fach differentielle Wirkungsquerschnitt daher als eine Funktion der fünf linear unabhängigen *physikalischen Koordinaten*

$$\mathcal{P} = ( |\vec{q}| , \omega , \Theta_{pq} , \Phi , E_m ) \quad (C.6)$$

betrachtet werden.

Die in Abschnitt 4.3 beschriebene Simulation des  $(e, e'p)$ -Experiments erfordert die Transformation von den Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}$  auf die physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}$ . Der Hauptteil dieser Aufgabe, der aus der Berechnung der beiden Winkel  $\Theta_{pq}$  und  $\Phi$  besteht, kann durch zwei aufeinanderfolgende Drehungen des Bezugssystems erledigt werden. Im ersten Schritt wird das System  $K$  so um die  $z$ -Achse gedreht, daß der Impuls  $\vec{k}_f$  im neuen System  $K'$  (Abb. C.2) keine  $y'$ -Komponente hat. Drehwinkel ist dabei der Azimuthalwinkel  $\Phi_e$  des Elektronenimpulses in  $K$  – die überflüssige Koordinate der Reaktion.

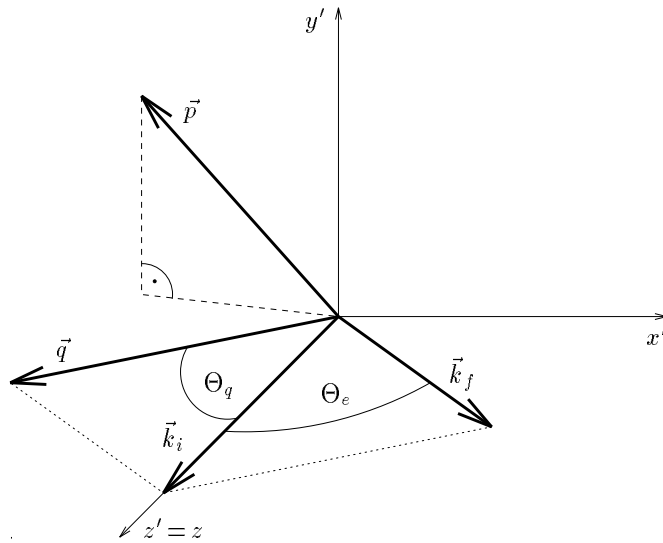


Abbildung C.2: Das Bezugssystem  $K'$ , das sich durch Drehung von  $K$  um die  $z$ -Achse mit Drehwinkel  $\Phi_e$  ergibt.

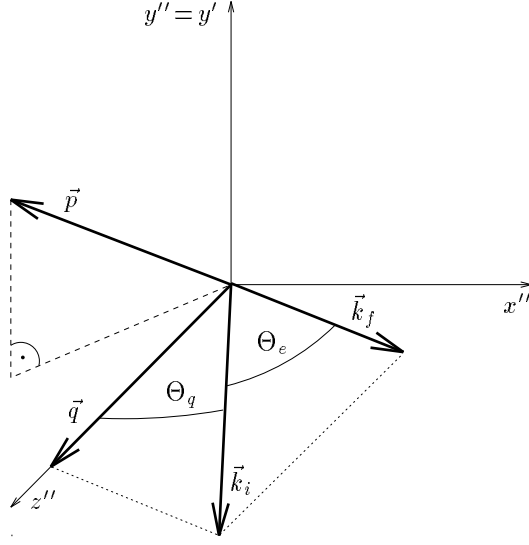


Abbildung C.3: Das Bezugssystem  $K''$ , das sich durch Drehung von  $K'$  um die  $y'$ -Achse mit Drehwinkel  $\Theta_q$  ergibt.

Im zweiten Schritt wird  $K'$  um die  $y'$ -Achse gedreht bis der Impulsübertrag  $\vec{q}$  vollständig in  $z''$ -Richtung zeigt, d.h. Drehwinkel ist der Winkel

$$\Theta_q = \arcsin\left(|\vec{k}_f| \sin \Theta_\epsilon / |\vec{q}|\right) \quad (\text{C.7})$$

zwischen  $\vec{q}$  und  $\vec{k}_i$ . Dieses neue System  $K''$  (Abb. C.3) ist identisch mit der kanonischen Basis, die in Abschnitt 2.1 zur Beschreibung des Reaktionsmechanismus benutzt wurde. In  $K''$  sind die gesuchten Winkel  $\Theta_{pq}$  und  $\Phi$  durch die sphärischen Koordinaten von  $\vec{p}$  gegeben.

Die beschriebenen Drehungen können mit Hilfe von Rotationsmatrizen explizit ausgeführt werden. Die vollständige Transformation  $\mathcal{T}$  von Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}$  auf physikalische Koordinaten  $\mathcal{P}$  ist dann gegeben durch:

$$|\vec{q}| = \left[|\vec{k}_i|^2 + |\vec{k}_f|^2 - 2|\vec{k}_i||\vec{k}_f|\cos \Theta_\epsilon\right]^{1/2}, \quad (\text{C.8})$$

$$\omega = e_i - e_f, \quad (\text{C.9})$$

$$\Theta_{pq} = \arccos[\cos \Theta_q \cos \Theta_p - \sin \Theta_q \sin \Theta_p \cos(\Phi_p - \Phi_\epsilon)], \quad (\text{C.10})$$

$$\Phi = \begin{cases} \arctan(z/n) & \text{falls } n > 0 \text{ und } z \geq 0 \\ 2\pi + \arctan(z/n) & \text{falls } n > 0 \text{ und } z < 0 \\ \pi + \arctan(z/n) & \text{falls } n < 0, \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

$$E_m = e_i - e_f - \sqrt{|\vec{p}_m|^2 + M_B^2} + M_B - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_p^2} + m_p, \quad (\text{C.12})$$

wobei

$$z = \sin \Theta_p \sin(\Phi_p - \Phi_\epsilon), \quad (\text{C.13})$$

$$n = \cos \Theta_q \sin \Theta_p \cos(\Phi_p - \Phi_e) + \sin \Theta_q \cos \Theta_p , \quad (\text{C.14})$$

$$|\vec{p}_m|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \Theta_{pq} . \quad (\text{C.15})$$

Die Transformation  $\mathcal{T}$  unter Berücksichtigung eventuell auftretender numerischer Probleme wird vom Unterprogramm TRANSPHYS durchgeführt. Die Rücktransformation  $\mathcal{T}^{-1}$ , die aus den physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}$  und dem Winkel  $\Phi_e$  wieder die Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}$  berechnet, wird von der Routine TRANSPEC ausgeführt. Die dabei verwendeten Transformationsgleichungen lassen sich unter Benutzung der inversen Rotationsmatrizen leicht ableiten.

## C.2 Berechnung der kinetischen Energie des Protons aus den physikalischen Koordinaten bei festem $E_m$ – Modul KINENERG

Bei Übergängen zum Grundzustand oder einem diskreten Anregungszustand des Restkerns  $B$  liegt die “missing energy” fest ( $E_m = E'_m$ ), wodurch sich die variablen physikalischen Koordinaten auf

$$\mathcal{P}' = ( |\vec{q}| , \omega , \Theta_{pq} , \Phi ) \quad (\text{C.16})$$

reduzieren. Entsprechend gibt es auch für die Spektrometerkoordinaten eine Nebenbedingung, so daß ein Koinzidenzereignis bereits durch die fünf Variablen

$$\mathcal{S}' = ( \Theta_e^{(s)} , \Phi_e^{(s)} , |\vec{k}_f| , \Theta_p^{(s)} , \Phi_p^{(s)} ) \quad (\text{C.17})$$

festgelegt ist. Um aber bei der Simulation eines  $(e, e'p)$ -Experiments entscheiden zu können, ob ein durch  $\mathcal{S}'$  gegebenes Ereignis von den Spektrometern akzeptiert wird, muß auch der Protonenimpuls  $|\vec{p}|$  (die fehlende 6. Spektrometerkoordinate) berechnet werden. Der Protonenimpuls ist zwar implizit durch die Zwangsbedingung

$$T_p = \omega - E'_m - T_B \quad (\text{C.18})$$

festgelegt, die Auflösung von (C.18) nach  $|\vec{p}|$  wird aber dadurch kompliziert, daß die Rückstoßenergie  $T_B$  des auslaufenden Kerns  $B$  eine Funktion von  $\mathcal{S}'$  und  $|\vec{p}|$  bzw. von  $\mathcal{P}'$  und  $E'_m$  ist. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wird der kleine Beitrag des Rückstoßes meistens vernachlässigt, was insbesondere bei schweren Kernen legitim ist. Diese Vernachlässigung ist jedoch unnötig, denn ein analytischer Ausdruck für  $T_B$  läßt sich leicht in folgender Weise ableiten:

Aus  $\vec{p}_m = \vec{p} - \vec{q}$  erhält man die Dreiecksgleichung

$$|\vec{p}_m|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \Theta_{pq} . \quad (\text{C.19})$$

Die verwendeten Impulse  $|\vec{p}_m|$  und  $|\vec{p}|$  werden dabei aus den kinetischen Energien  $T_B$  und  $T_p$  gemäß

$$|\vec{p}_m| = \sqrt{T_B^2 + 2T_B M_B} , \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned}
|\vec{p}| &= \sqrt{T_p^2 + 2 T_p m_p} \\
&= \sqrt{(T_p^{(0)} - T_B) (T_p^{(0)} - T_B + 2 m_p)} , \tag{C.21}
\end{aligned}$$

berechnet; hier bezeichnet

$$T_p^{(0)} = \omega - E'_m \tag{C.22}$$

die kinetische Energie des auslaufenden Protons bei Vernachlässigung von  $T_B$  (0.-te Näherung). Durch Einsetzen von (C.20) und (C.21) in (C.19) erhält man eine quadratische Gleichung für  $T_B$ , deren Lösungen wir unter Verwendung von

$$\alpha = (M_B + m_p + T_p^{(0)})^2 - |\vec{q}|^2 \cos^2 \Theta_{pq} , \tag{C.23}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{2} (M_B + m_p + T_p^{(0)}) (|\vec{q}|^2 + |\vec{p}^{(0)}|^2) - \\
&\quad - (m_p + T_p^{(0)}) |\vec{q}|^2 \cos^2 \Theta_{pq} , \tag{C.24}
\end{aligned}$$

$$\gamma = |\vec{p}^{(0)}|^2 |\vec{q}|^2 \cos^2 \Theta_{pq} - \frac{1}{4} (|\vec{q}|^2 + |\vec{p}^{(0)}|^2)^2 , \tag{C.25}$$

$$|\vec{p}^{(0)}| = \sqrt{(T_p^{(0)})^2 + 2 T_p^{(0)} m_p} \tag{C.26}$$

in der Form

$$T_B = \frac{\beta}{\alpha} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\alpha \gamma}{\beta^2}} \right] \tag{C.27}$$

schreiben können.

Eine dieser Lösungen (die mit dem “+”-Vorzeichen vor der Wurzel) läßt sich aus folgendem Grund ausklammern: Unter der Annahme, daß die Masse  $M_B$  des Restkerns  $B$  groß gegen die beteiligten Impulse ist, können beide Lösungen (C.27) in Potenzreihen von  $1/M_B$  entwickelt werden. In 1.-ter Ordnung in  $1/M_B$  sollte die kinetische Energie  $T_B$  in die bekannte (nicht-relativistische) Form

$$T_B^{(1)} = \frac{|\vec{p}_m^{(0)}|^2}{2M_B} \tag{C.28}$$

übergehen, wobei

$$|\vec{p}_m^{(0)}|^2 = |\vec{p}^{(0)}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}^{(0)}||\vec{q}| \cos \Theta_{pq} \tag{C.29}$$

das “missing momentum” in 0.-ter Näherung bezeichnet. Die Reihenentwicklung der Lösung mit dem “-”-Vorzeichen vor der Wurzel führt tatsächlich auf das erwartete Ergebnis (C.28), die der zweiten Lösung weicht davon ab.

Damit ist der “richtige” Ast der Gleichung (C.27) festgelegt und die kinetische Energie  $T_B$  des Restkerns läßt sich als Funktion von  $\mathcal{P}'$  und  $E'_m$  eindeutig berechnen. Diese Aufgabe übernimmt das Unterprogramm KINENERG, welches außerdem die Größen  $T_p$ ,  $|\vec{p}|$  und  $|\vec{p}_m|$  mit den entsprechenden Gleichungen dieses Anhangs berechnet und eine Probe des Ergebnisses durchführt.

Kinematiken.															
		zentr. Spektrometerkoord. $\mathcal{S}_{zen}$						zentr. physikalische Koord. $\mathcal{P}_{zen}$							
Nr	$e_i$ [MeV]	$\Theta_e^{(s)}$ [°]	$\Phi_e^{(s)}$ [°]	$ \vec{k}_f $ [MeV/c]	$\Theta_p^{(s)}$ [°]	$\Phi_p^{(s)}$ [°]	$ \vec{p} $ [MeV/c]	$ \vec{q} $ [MeV/c]	$\omega$ [MeV]	$\Theta_{pq}$ [°]	$\Phi$ [°]	$E_m$ [MeV]	e/p Spek	T [h]	
1	850.0	0.0	20.3	745.0	0.0	-59.7	369.1	300.0	105.0	0.0	n.def.	34.77	B/A	1.0	
6'	210.0	0.0	142.3	105.0	0.0	-12.4	369.1	300.0	105.0	0.0	n.def.	34.77	A/B	1.5	
6	210.0	0.0	126.0	123.8	0.0	-19.5	369.1	300.0	86.2	0.0	n.def.	15.96	A/B	1.5	

Tabelle C.1: Die Kinematiken 1 und 6' – zwei Beispiele der im Proposal angegebenen Kinematiken –, sowie die Kinematik 6, die aus der Kinematik 6' durch Anpassung an den Grundzustand des Bor-Kerns hervorgeht.

### C.3 Die beiden angepassten Kinematiken des simulierten Experiments

In Abschnitt 4.1 wurde ein  $(e, e'p)$ -Testexperiment an Kohlenstoff beschrieben, dessen Kinematiken aus dem Proposal [33] stammen. Zwei der vorgeschlagenen Messungen bei kleinen Strahlenergien ( $e_i = 210, 235$  MeV) wurden dabei leicht abgeändert; sie sind dem Übergang zum Grundzustand des Bor-Kerns ( $E'_m = 15.96$  MeV) angepaßt worden.

Bei Energien  $e_i \geq 265$  MeV ist auf eine solche Anpassung verzichtet worden, denn hier kommt die schlechte Ausrichtung auf den Grundzustand weniger stark zum Tragen. Zur Erläuterung dieses Sachverhalts ist in Teil a der Abbildung C.4 das Zusammenwirken der beiden Spektrometer am Beispiel der Kinematik 1 (siehe Tab. C.1) graphisch dargestellt. Bei  $e$  ist die  $\omega$ -Akzeptanz des Elektron-Spektrometers aufgetragen, bei  $p$  die des Proton-Spektrometers. Letztere wird unter Verwendung von

$$\omega = T_p + E'_m + T_B \quad (\text{C.30})$$

aus der Impuls-Akzeptanz des Spektrometers berechnet; dabei werden die physikalischen Koordinaten  $|\vec{q}|$ ,  $\Theta_{pq}$  auf den in Tabelle C.1 angegebenen zentralen Werten festgehalten. Der Überlapp der beiden  $\omega$ -Bereiche (27.47 MeV) ist die nutzbare Impuls-Akzeptanz für den betrachteten Übergang. Bei diesem Beispiel mit großem  $e_i$  (850 MeV) wird der Überlapp nur durch die Impuls-Akzeptanz des Proton-Spektrometers beschränkt. Eine perfekte Ausrichtung auf den Übergang zum Grundzustand könnte zwar durch Verkleinern von  $\omega$  bzw. Erhöhen von  $T_p$  erzielt werden – wodurch die Mitten der beiden Akzeptanzen zusammenfallen würden –, jedoch bliebe dabei der gemeinsame Überlapp nahezu gleich groß.

Im Vergleich dazu ist in Teil b der Abbildung C.4 die analoge Darstellung für die ursprüngliche unveränderte Kinematik 6' (siehe Tab. C.1) des Proposals aufgetragen – ein Beispiel für kleines  $e_i$ . Der gemeinsame Überlapp (2.30 MeV) ist nun durch die Grenzen beider Akzeptanzen beschränkt und läßt sich daher durch Anpassung an den betrachteten Übergang erheblich vergrößern. Diese angepaßte Kinematik 6 ist in Teil c der Abbildung C.4 dargestellt; die nutzbare Akzeptanz beträgt nun 20.74 MeV.

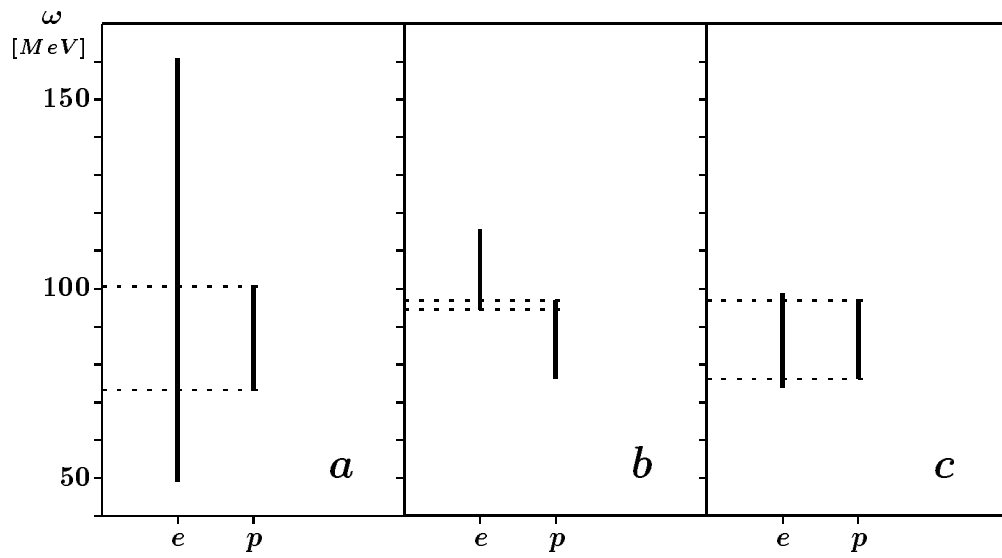


Abbildung C.4: Zusammenspiel der Impuls-Akzeptanzen der verwendeten Spektrometer für den Übergang zum Grundzustand des Bor-Kerns ( $E_m = 15.96$  MeV). In den Teilen a,b,c dieser Abbildung werden die Kinetiken 1, 6', 6 betrachtet, wobei die Koordinaten  $|\vec{q}|$  und  $\Theta_{pq}$  auf den in Tabelle C.1 angegebenen Werten festgehalten sind.

## D. Das Modell für die quasielastische Streuung

Bei der Simulation von  $(e, e'p)$ -Experimenten müssen die unbekanntenen “wahren” Wirkungsquerschnitte (bzw. die entsprechenden Strukturfunktionen) durch die Vorhersagen eines theoretischen Modells ersetzt werden (siehe Abschn. 4.3 und 5.1). Für die quasielastische Streuung, die in den hier betrachteten kinematischen Bereichen dominiert, wurde uns ein solches Modell von S. Boffi, Ch. Giusti und F. Pacati in Gestalt der Programme PV5FF und DWEOPY freundlicherweise zur Verfügung gestellt. Diese beiden Programme behandeln die  $(e, e'p)$ -Reaktion in der “*distorted wave impulse approximation*” (DWIA) [7, 8, 9]. In dieser Näherung wird das virtuelle Photon von einem speziellen, gebundenen Proton absorbiert, das daraufhin den Kern verläßt (“*impulse approximation*”); durch die Wechselwirkung mit dem Restkern – beschrieben durch ein optisches Potential – wird die Wellenfunktion des auslaufenden Protons zu einer nicht-ebenen Welle verzerrt (“*distorted wave*”). Während bei PV5FF ein- und auslaufendes Elektron weiterhin als ebene Welle betrachtet wird, berücksichtigt DWEOPY die Distordierung beider Wellen aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung mit dem Kern in der Eikonalnäherung [27, 28].

Die Distordierung der Elektronenwellen führt dazu, daß die Zerlegung des Wirkungsquerschnitts in Strukturfunktionen gemäß (2.20) prinzipiell zerstört wird. Aus diesem Grund ist ein Test der modellunabhängigen Separation durch Vergleich der extrahierten Strukturfunktionen mit den anfangs in die Simulation hineingesteckten nur bei Verwendung des Programms PV5FF in einfacher Weise möglich. Im Anhang D.1 wird deshalb die Erzeugung eines Datenfiles auf dieses Programm gestützt. Jedoch ist eine Verwendung von DWEOPY im Rahmen einer erweiterten Fragestellung durchaus interessant, was im Anhang D.2 näher erläutert wird.

### D.1 Erzeugung eines Datenfiles der Strukturfunktionen – Programm GENRESP

Zu jeder Kinematik, die bei der Simulation mit dem Random-Generator erzeugt wird, muß jeweils der Wirkungsquerschnitt berechnet werden, was in der Regel etwa  $10^4$ – $10^5$  mal geschieht. Die Programme PV5FF und DWEOPY benötigen aber für eine einzige dieser Berechnungen bereits relativ viel Zeit (9s bzw. 180s auf VAX 8550), so daß eine direkte Einbettung der DWIA-Programme in die Simulation zu zeitaufwendig wird. Da durch die verschiedenen Messungen eines Experiments aber nur ein beschränkter kinematischer Bereich abgedeckt wird (siehe z.B. Tab. 4.3), reicht bereits eine geeignete Anzahl abgespeicherter



Stützstellen aus, um den Wirkungsquerschnitt für jede benötigte Kinematik mit hinreichender Genauigkeit zu interpolieren. Bei Verwendung von PV5FF kann ein Datenfile von solchen Stützstellen besonders effektiv erzeugt werden, denn statt der Wirkungsquerschnitte können direkt die Strukturfunktionen abgespeichert werden. Dadurch werden die beiden Koordinaten  $e_i$  und  $\Phi$  eingespart, so daß die Stützstellen auf einem dreidimensionalen  $\zeta$ -Gitter, das sich über das Separationsgebiet  $G$  erstreckt, liegen können.

Zur Erzeugung des oben genannten Datenfiles dient das Programm GENRESP, welches aus einzelnen Bestandteilen von PV5FF aufgebaut ist. Für GENRESP muß außer den Daten, die auch das Originalprogramm PV5FF benötigt, zusätzlich das Separationsgebiet und die Größe der Gitterzellen angegeben werden. Zu Beginn des Programmablaufs wird ein einziges Mal die Wellenfunktion des gebundenen Protons berechnet (Modul BSTATE); dadurch wird die Gesamtrechenzeit erheblich verkürzt. Danach wird das vorgegebene Gitter durchlaufen und an jedem Gitterpunkt die vollständige Kinematik rekonstruiert. Dazu reichen jedoch die drei Koordinaten  $|\vec{q}|$ ,  $\omega$  und  $\Theta_{pq}$  nicht aus, deshalb wird zum einen die Nebenbedingung  $E_m = E'_m$  benutzt und zum anderen die Energie  $e_i$  der einlaufenden Elektronen auf einen festen, vorgegebenen Wert gesetzt, der größer gewählt werden muß als das maximale  $\omega$  des verwendeten Gitters. Die Berechnung der Strukturfunktionen ist letztendlich unabhängig von der speziellen Wahl von  $e_i$ ; die Strahlenergie wird aber von den verwendeten PV5FF-Bestandteilen zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts benötigt. An jedem Gitterpunkt werden die Parameter des optischen Potentials mit der Parametrisierung von Schwandt et al. [48] berechnet (Modul OPTPOT). Wir weichen dabei vom ursprünglichen Programm PV5FF ab, bei dem diese Parameter nur einmal von außen vorgegeben werden. Im letzten Schritt werden dann die Strukturfunktionen berechnet; dazu dient das Unterprogramm PVMAIN, das aus den restlichen Teilen des Originalprogramms besteht.

Die von PVMAIN berechneten Strukturfunktionen  $f_{00}, f_{11}, f_{01}, f_{1-1}$  unterscheiden sich von unseren Strukturfunktionen  $R_\lambda$  noch in einigen Punkten. Zum einen verwendet das Unterprogramm ein anderes Bezugssystem, als das in dieser Arbeit benutzte, außerdem gelten die Strukturfunktionen  $f_{\rho\rho'}$  für den 6-fach differentiellen Wirkungsquerschnitt, so daß beim Übergang auf die Responsefunktionen  $R_\lambda$  der Recoil-Faktor  $\eta$  mit eingeht. Insgesamt erhält man daher die Umrechnungsformeln

$$R_L(\zeta) = K'' f_{00}(\zeta, E_m = E'_m) , \quad (\text{D.1})$$

$$R_T(\zeta) = K'' f_{11}(\zeta, E_m = E'_m) , \quad (\text{D.2})$$

$$R_{LT}(\zeta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} K'' f_{01}(\zeta, E_m = E'_m) , \quad (\text{D.3})$$

$$R_{TT}(\zeta) = -K'' f_{1-1}(\zeta, E_m = E'_m) , \quad (\text{D.4})$$

wobei der kinematische Faktor

$$K'' = K' E_p |\vec{p}| \eta^{-1} \quad (\text{D.5})$$

aus den in Abschnitt 2.2 angegebenen Faktoren  $K'$  und  $\eta$  hervorgeht.

## D.2 Die Distordierung des Elektrons bei der quasielastischen Streuung

Die Zerlegung des Wirkungsquerschnitts in Strukturfunktionen ist eine Konsequenz des Ein-Photon-Austauschs und daher in Wirklichkeit nur näherungsweise erfüllt. Bei quasielastischer Streuung führt jedoch der direkte Austausch von mehr als einem Photon (Dispersions-Effekte) nur zu kleinen Korrekturen von der Ordnung  $\alpha$ , denn die virtuellen Photonen koppeln nur an ein einzelnes Proton des Kerns. Ein größerer Effekt ist aber durch die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Coulomb-Feld des Kerns zu erwarten, solche Korrekturen sind proportional zu  $Z\alpha$  und daher bei schweren Kernen nicht mehr zu vernachlässigen.

Ein Problem tritt nun auf, wenn man von der Gültigkeit des Ein-Photon-Austauschs ausgeht und die Strukturfunktionen aus experimentellen Daten extrahieren möchte, in Wirklichkeit aber die Elektronenwellen bereits stark distordiert sind. Der systematische Fehler, der bei solchen Analysen auftritt, wurde von Ch. Giusti und F. Pacati untersucht [28]. Dazu wurde die Distordierung in 2. Eikonal-Näherung behandelt (Programm DWEOPY) und die Trennung von  $f_{00}$  und  $f_{11}$  in paralleler Kinematik durch den Rosenbluth-Plot bzw. die Bestimmung von  $f_{01}$  durch die Links/Rechts-Asymmetrie durchgeführt. Bereits für  $^{40}\text{Ca}$  wurde bei der L/T-Separation in paralleler Kinematik eine deutliche Abweichung der extrahierten Strukturfunktionen von den berechneten festgestellt; diese Diskrepanz kann jedoch im wesentlichen durch Verwendung eines effektiven Impulsübertrags  $\vec{q}_{eff}$  korrigiert werden. Dagegen reicht z.B. bei  $^{208}\text{Pb}$  diese kinematische Korrektur allein nicht aus, denn bei schweren Kernen tritt ein zweiter Effekt in den Vordergrund, der als eine Fokussierung der Elektronenwellen interpretiert wird. Aus diesem Grund ist bei  $^{208}\text{Pb}$  auch die Bestimmung von  $f_{01}$  starken systematischen Fehlern unterworfen, während die Separation dieser Strukturfunktion für Kerne bis  $^{40}\text{Ca}$  von den Autoren als unkritisch eingestuft wird.

Eine Untersuchung, wie stark bei einem konkreten  $(e, e'p)$ -Experiment die Separation der Strukturfunktionen durch die Distordierung beeinträchtigt wird, ist durch die in dieser Arbeit beschriebenen Methoden "Experiment-Simulation" (Kap. 4) und "modellunabhängige Separation der Strukturfunktionen" (Abschn. 3.2) im Prinzip möglich geworden. Bei der expliziten Durchführung eines solchen Konzepts ergeben sich jedoch zwei Probleme. Zum einen ist die Erstellung eines Datenfiles, wie in Anhang D.1 beschrieben, wesentlich aufwendiger, denn statt der Strukturfunktionen müssen jetzt die Wirkungsquerschnitte direkt abgespeichert werden, was die Dimension des benötigten Gitters um zwei erhöht. Die zweite Schwierigkeit besteht darin, daß das Programm DWEOPY nur "in-plane"-Berechnungen durchführen kann, eine korrekte Simulation aber auch "out-of-plane"-Ereignisse berücksichtigen muß. Dazu wird eine "out-of-plane"-Version des Eikonalprogramms benötigt, an der wir mit Unterstützung von Ch. Giusti und F. Pacati zur Zeit noch arbeiten.

## E. Monte–Carlo–Algorithmen

### E.1 Phasenraumvolumen und Zählrate beim 6–fach differentiellen Wirkungsquerschnitt

Wie bereits in Anhang C.1 erläutert wurde, ist die unpolarisierte  $(e, e'p)$ –Reaktion invariant gegen Drehungen um den Winkel  $\Phi_e$  zwischen Streuebene und Hallenebene. Aufgrund dieser Symmetrie kann der 6–fach differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\mathcal{P}) := \frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f| d\Omega_e d|\vec{p}| d\Omega_p} \quad (\text{E.1})$$

als Funktion der fünf physikalischen Variablen

$$\mathcal{P} = ( |\vec{q}| , \omega , \Theta_{pq} , \Phi , E_m ) \quad (\text{E.2})$$

betrachtet werden. Um die Struktur des Wirkungsquerschnitts experimentell abzutasten, genügt es daher Bins  $B$  in den oben genannten fünf Koordinaten zur Verfügung zu stellen. Der mittlere Wirkungsquerschnitt in einem solchen Bin wird dann experimentell durch

$$\tilde{\sigma}_B := \frac{1}{T f_N} \frac{\tilde{N}_B}{V_B} \quad (\text{E.3})$$

bestimmt, wobei  $T$  die Meßzeit,  $\tilde{N}_B$  die Zahl der im Bin  $B$  gemessenen Koinzidenzereignisse und  $V_B$  das Phasenraumvolumen des Bins ist. Der Faktor

$$f_N = n_0 j_e \quad (\text{E.4})$$

ist das Produkt aus Stromdichte der einlaufenden Elektronen ( $j_e$ ) und Zahl der Targetkerne ( $n_0$ ).

Während die Zahl  $\tilde{N}_B$  eine Meßgröße ist, muß das Phasenraumvolumen  $V_B$  berechnet werden und hängt sowohl von den Akzeptanzen der Spektrometer, als auch von der gewählten Kinematik ab. Formal erhält man das Phasenraumvolumen aus

$$V_B = \int_{I_B} \epsilon(\mathcal{S}) d\mathcal{S} , \quad (\text{E.5})$$

wobei  $\epsilon(\mathcal{S})$  die Detektor–Effizienz als Funktion der sechs Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}$  ist und

$$d\mathcal{S} := d|\vec{k}_f| d\Omega_e d|\vec{p}| d\Omega_p \quad (\text{E.6})$$

das infinitesimale Volumenelement im  $\mathcal{S}$ –Raum bezeichnet. Der Integrationsbereich  $I_B$  ist, anschaulich gesehen, der Teil der gesamten Spektrometerakzeptanz

$$\Delta\mathcal{S} := \Delta|\vec{k}_f| \Delta\Omega_e \Delta|\vec{p}| \Delta\Omega_p , \quad (\text{E.7})$$

der das Bin  $B$  mit Koinzidenzereignissen beschickt. Unter Verwendung der Transformation  $\mathcal{T}$  aus Anhang C.1, läßt sich dieser Bereich formal durch

$$I_B = \mathcal{T}^{-1}(B) \cap \Delta\mathcal{S} \quad (\text{E.8})$$

beschreiben. Bei Detektor-Effizienz  $\epsilon(\mathcal{S}) = 1$ , was im folgenden vorausgesetzt wird, ist das Phasenraumvolumen  $V_B$  identisch mit dem Integrationsbereich  $I_B$ , so daß das gesamte Phasenraumvolumen, das die Spektrometer erfassen, durch

$$V_{Ph} := \sum_B V_B = \Delta\mathcal{S} \quad (\text{E.9})$$

gegeben ist.

Im Gegensatz zum echten Experiment muß bei einer Simulation auch die Zählrate im Bin  $B$ ,

$$Y_B := \frac{E(\tilde{N}_B)}{T} \quad , \quad (\text{E.10})$$

berechnet werden; hier bezeichnet  $E(\tilde{N}_B)$  den Erwartungswert für die statistische Größe  $\tilde{N}_B$ . Die Zählrate läßt sich durch Vergleich des Erwartungswertes des mittleren Wirkungsquerschnitts

$$E(\tilde{\sigma}_B) = \frac{\int_{I_B} \sigma(\mathcal{P}) d\mathcal{S}}{\int_{I_B} d\mathcal{S}} = \frac{1}{V_B} \int_{I_B} \sigma(\mathcal{P}) d\mathcal{S} \quad (\text{E.11})$$

mit (E.3) direkt ablesen:

$$Y_B = f_N \int_{I_B} \sigma(\mathcal{P}) d\mathcal{S} \quad . \quad (\text{E.12})$$

In der Praxis wird die Berechnung des Phasenraumvolumens (E.5) und der Zählrate (E.12) dadurch erschwert, daß 6-fache Integrationen innerhalb komplizierter Grenzen auszuführen sind. Aus diesem Grund wird hier die Monte-Carlo-Methode (siehe z.B. [29, 42]) gegenüber anderen Integrationsverfahren [52] bevorzugt. Der Algorithmus des verwendeten Verfahrens ist in Abbildung E.1 durch ein Flußdiagramm schematisch dargestellt. Die benötigten Input-Daten des Moduls bestehen aus der Strahlenergie  $e_i$ , den Stellungen und Akzeptanzen der beiden Spektrometer, der Meßzeit  $T$ , dem Faktor  $f_N$ , sowie der Einteilung des  $\mathcal{P}$ -Raums in Bins  $B$ . Für jedes dieser Bins werden drei Zähler ( $Z_B, R_B^{(1)}, R_B^{(2)}$ ) zur Verfügung gestellt, die zu Beginn des Programmablaufs auf Null gesetzt werden. Die Zähler werden später zur Berechnung des Phasenraumvolumens ( $\Leftarrow Z_B$ ), der Zählrate ( $\Leftarrow R_B^{(1)}$ ) und des Fehlers der Zählrate ( $\Leftarrow R_B^{(2)}$ ) benötigt. Die Genauigkeit der gewünschten Integrationen hängt dabei von der vorgegebenen Zahl  $N_{mc}$  ab, die angibt, wie oft der Hauptteil des Moduls durchlaufen werden soll. Bei jedem Durchlauf werden dabei die folgenden Aktionen ausgeführt:

- Die sechs Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}$  werden innerhalb der Akzeptanz  $\Delta\mathcal{S}$  mit einer Gleichverteilung gewürfelt.

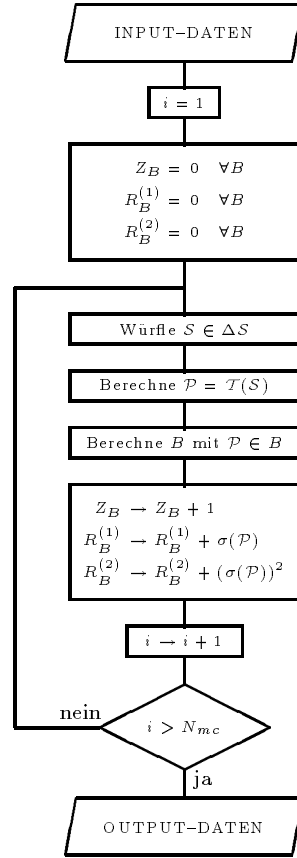


Abbildung E.1: Flußdiagramm zu den Monte-Carlo-Integrationen des Phasenraumvolumens und der Zählrate im Bin  $B$ . Die einzelnen Schritte dieses Verfahrens sind im Text ausführlich erläutert.

- Die fünf physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}$  des gewürfelten Ereignisses werden mit der Transformation  $\mathcal{T}$  aus Anhang C.1 berechnet.
- Das Bin  $B$ , in welches das Ereignis einsortiert werden soll, wird bestimmt.
- Die Zähler des getroffenen Bins werden gemäß

$$\begin{aligned}
 Z_B &\rightarrow Z_B + 1 \\
 R_B^{(1)} &\rightarrow R_B^{(1)} + \sigma(\mathcal{P}) \\
 R_B^{(2)} &\rightarrow R_B^{(2)} + (\sigma(\mathcal{P}))^2
 \end{aligned}$$

erhöht.

Nachdem die Schleife abgearbeitet ist, werden die Output-Daten des Programmteils zusammengestellt. Dazu gehören die Phasenraumvolumina und Zählraten aller getroffenen Bins, welche durch

$$V_B = \frac{\Delta\mathcal{S}}{N_{mc}} Z_B \quad (\text{E.13})$$

$$Y_B = f_N \frac{\Delta\mathcal{S}}{N_{mc}} R_B^{(1)} \quad (\text{E.14})$$

berechnet werden, sowie die Fehler des Monte-Carlo-Verfahrens, die mit

$$\Delta V_B = \frac{V_B}{\sqrt{N_{mc} - 1}} \sqrt{\frac{N_{mc}}{Z_B} - 1} \quad (\text{E.15})$$

$$\Delta Y_B = \frac{Y_B}{\sqrt{N_{mc} - 1}} \sqrt{\frac{N_{mc}}{R_B^{(1)}} \frac{R_B^{(2)}}{R_B^{(1)}} - 1} \quad (\text{E.16})$$

abgeschätzt werden. Die angegebenen Fehler sind für große  $N_{mc}$  umgekehrt proportional zu  $\sqrt{N_{mc}}$  und können daher durch Vergrößern von  $N_{mc}$  im Prinzip beliebig klein gemacht werden.

Bei den Fehlerangaben (E.15), (E.16) ist zu beachten, daß die durchgeführten Berechnungen nicht unabhängig voneinander sind. Zum einen gibt es bei festem Bin  $B$  Kovarianzen zwischen  $V_B$  und  $Y_B$ , weil die Zähler  $Z_B$  und  $R_B^{(1)}$  immer simultan erhöht werden; zum anderen führt die Randbedingung

$$\sum_B Z_B = N_{mc} \quad (\text{E.17})$$

dazu, daß bei verschiedenen Bins  $B_i$  und  $B_j$  auch Kovarianzen zwischen  $V_{B_i}$  und  $V_{B_j}$  bestehen. Entsprechend gibt es auch Kovarianzen zwischen den Zählraten  $Y_{B_i}$  und  $Y_{B_j}$  zweier verschiedener Bins.

Der Erwartungswert des mittleren Wirkungsquerschnitts im Bin  $B$  ist bei dem hier verwendeten Algorithmus direkt aus

$$E(\tilde{\sigma}_B) = \frac{R_B^{(1)}}{Z_B} \quad (\text{E.18})$$

berechenbar, wobei der Fehler der Integrationen durch

$$\Delta(E(\tilde{\sigma}_B)) = \frac{E(\tilde{\sigma}_B)}{\sqrt{Z_B - 1}} \sqrt{\frac{Z_B}{R_B^{(1)}} \frac{R_B^{(2)}}{R_B^{(1)}} - 1} \quad (\text{E.19})$$

abgeschätzt wird und für große  $Z_B$  umgekehrt proportional zu  $\sqrt{Z_B}$  ist.

Der angegebene Algorithmus läßt sich bei einer ‘‘partiellen Blindheit’’ der Spektrometer, aufgrund ausgefallener Drähte der Drahtkammern, leicht durch eine entsprechenden Abfrage erweitern. Ebenso leicht kann das Phasenraumvolumen bei bekannter Effizienz  $\epsilon(\mathcal{S}) \neq 1$  berechnet werden. Dazu wird der Zähler  $Z_B$  in  $Z_B^{(1)}$  umbenannt und ein weiterer Zähler  $Z_B^{(2)}$  eingeführt. Bei getroffenem Bin  $B$  werden diese Zähler gemäß

$$\begin{aligned} Z_B^{(1)} &\rightarrow Z_B^{(1)} + \epsilon(\mathcal{S}) \\ Z_B^{(2)} &\rightarrow Z_B^{(2)} + (\epsilon(\mathcal{S}))^2 \end{aligned}$$

erhöht, am Ende der Schleife gilt dann

$$V_B = \frac{\Delta \mathcal{S}}{N_{mc}} Z_B^{(1)} \quad (\text{E.20})$$

$$\Delta V_B = \frac{V_B}{\sqrt{N_{mc} - 1}} \sqrt{\frac{N_{mc}}{Z_B^{(1)}} \frac{Z_B^{(2)}}{Z_B^{(1)}} - 1} . \quad (\text{E.21})$$

## E.2 Phasenraumvolumen und Zählrate beim 5–fach differentiellen Wirkungsquerschnitt

Im Gegensatz zum Anhang E.1 beschränken wir uns nun wieder auf Reaktionen, bei denen der Restkern  $B$  in einem diskreten Zustand mit  $E_m = E'_m$  bleibt. Solche Übergänge werden durch den 5–fach differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\mathcal{P}') := \frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f| d\Omega_\epsilon d\Omega_p} \quad (\text{E.22})$$

beschrieben (siehe Abschn. 2.2), der als eine Funktion der reduzierten physikalischen Koordinaten

$$\mathcal{P}' = ( |\vec{q}| , \omega , \Theta_{pq} , \Phi ) \quad (\text{E.23})$$

betrachtet werden kann. Daher genügen Bins  $B'$  in diesen vier Koordinaten, um die Struktur des Wirkungsquerschnitts experimentell abzutasten. Analog zu Anhang E.1 wird der Erwartungswert des mittleren Wirkungsquerschnitts in einem solchen Bin durch

$$E(\tilde{\sigma}_{B'}) = \frac{1}{f_N} \frac{Y_{B'}}{V_{B'}} \quad (\text{E.24})$$

bestimmt; zur Simulation des Experiments wird die Berechnung des Phasenraumvolumens  $V_{B'}$  und der Zählrate  $Y_{B'}$  benötigt.

Dabei ist zu beachten, daß die kinematischen Variablen die Nebenbedingung

$$E'_m = \omega - T_p - T_B \quad (\text{E.25})$$

erfüllen müssen, was für die sechs Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}$  bedeutet, daß z.B. der Impuls des detektierten Protons festliegt, wenn die reduzierten Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}'$  zusammen mit  $E'_m$  gegeben sind. Die Berechnung des Impulses

$$|\vec{p}| = f(\mathcal{S}', E'_m) , \quad (\text{E.26})$$

als Funktion der genannten Variablen, ist in Anhang C.2 angegeben, wird aber für die weiteren Überlegungen hier nicht explizit benötigt.

Die Nebenbedingung (E.26) muß im folgenden bei der Berechnung von Phasenraumvolumen und Zählrate berücksichtigt werden. Betrachten wir dazu zuerst einmal das gesamte Phasenraumvolumen  $V_{Ph'}$ , das die Spektrometer bei  $E_m = E'_m$  erfassen. Bei Detektor–Effizienz  $\epsilon(\mathcal{S}) = 1$  erhält man

$$\begin{aligned} V_{Ph'} &= \int_{\Delta\mathcal{S}} \delta(|\vec{p}| - f(\mathcal{S}', E'_m)) d\mathcal{S} \\ &= \int_{\Delta\mathcal{S}'} \int_{\Delta|\vec{p}|} \delta(|\vec{p}| - f(\mathcal{S}', E'_m)) d|\vec{p}| d\mathcal{S}' \\ &= \int_{\Delta\mathcal{S}'} \Theta(f(\mathcal{S}', E'_m)) d\mathcal{S}' , \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

wobei letztendlich über die Spektrometerakzeptanz

$$\Delta\mathcal{S}' := \Delta|\vec{k}_f| \Delta\Omega_\epsilon \Delta\Omega_p \quad (\text{E.28})$$

integriert wird und

$$d\mathcal{S}' := d|\vec{k}_f| d\Omega_\epsilon d\Omega_p \quad (\text{E.29})$$

das dabei benutzte infinitesimale Volumenelement ist. Die Funktion

$$\Theta(|\vec{p}|) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |\vec{p}| \in \Delta|\vec{p}| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{E.30})$$

berücksichtigt, daß beim Ausintegrieren der Delta-Distribution darauf geachtet werden muß, ob der Impuls  $|\vec{p}|$  vom Protonen-Spektrometer akzeptiert wird.

Durch geschicktes Aufteilen des gesamten Integrationsbereiches  $\Delta\mathcal{S}'$  erhält man aus (E.27) das gesuchte Phasenraumvolumen

$$V_{B'} = \int_{I_{B'}} \Theta(f(\mathcal{S}', E'_m)) d\mathcal{S}' \quad (\text{E.31})$$

für ein bestimmtes Bin  $B'$ . Der Integrationsbereich  $I_{B'}$  ist dabei der Teil der Spektrometerakzeptanz  $\Delta\mathcal{S}'$ , der für  $E_m = E'_m$  das Bin  $B'$  mit Koinzidenzereignissen beschickt, was formal durch

$$I_{B'} = \mathcal{T}^{-1}(B', E'_m) \cap \Delta\mathcal{S}' \quad (\text{E.32})$$

ausgedrückt wird. Eine ähnliche Betrachtung, wie in Anhang E.1, liefert dann für die Zählrate im Bin  $B'$  die Gleichung

$$Y_{B'} = f_N \int_{I_{B'}} \Theta(f(\mathcal{S}', E'_m)) \sigma(\mathcal{P}) d\mathcal{S} \quad (\text{E.33})$$

Die Integrale (E.31) und (E.33) werden mit der Monte-Carlo-Methode berechnet; dazu ist in Abbildung E.2 das Flußdiagramm des verwendeten Algorithmus skizziert. Die benötigten Input-Daten wurden bereits in Anhang E.1 beschrieben; die hier verwendeten Zähler  $Z_{B'}$ ,  $R_{B'}^{(1)}$ ,  $R_{B'}^{(2)}$  sind analog zu den dort benutzten. Im Vergleich zum Diagramm E.1 wurden die Anweisungen innerhalb der Schleife in folgender Weise abgeändert:

- Die fünf Spektrometerkoordinaten  $\mathcal{S}'$  werden innerhalb der Akzeptanz  $\Delta\mathcal{S}'$  mit einer Gleichverteilung gewürfelt.
- Der Impuls des Protons wird durch  $|\vec{p}| = f(\mathcal{S}', E'_m)$  berechnet.
- Falls  $|\vec{p}| \in \Delta|\vec{p}|$  gilt, werden die folgenden Anweisungen ausgeführt:
  - Die vier physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}'$  des gewürfelten Ereignisses werden mit der Transformation  $\mathcal{T}$  aus Anhang C.1 berechnet.
  - Das Bin  $B'$ , in welches das Ereignis einsortiert werden soll, wird bestimmt.
  - Die Zähler des getroffenen Bins werden gemäß

$$\begin{aligned} Z_{B'} &\rightarrow Z_{B'} + 1 \\ R_{B'}^{(1)} &\rightarrow R_{B'}^{(1)} + \sigma(\mathcal{P}') \\ R_{B'}^{(2)} &\rightarrow R_{B'}^{(2)} + (\sigma(\mathcal{P}'))^2 \end{aligned}$$

erhöht.



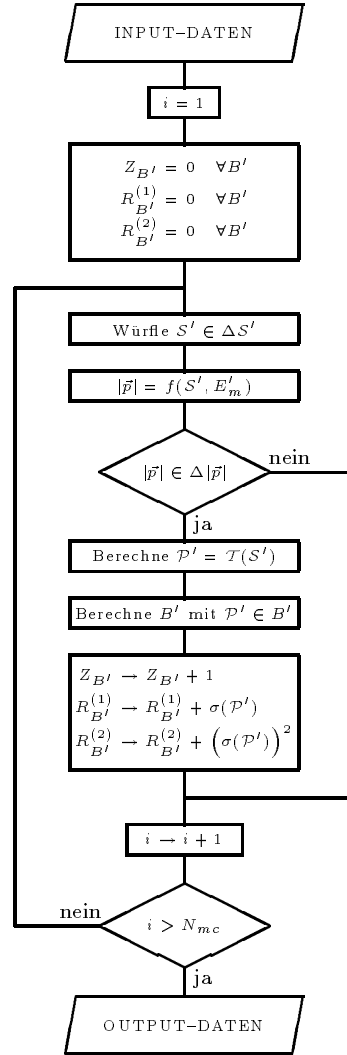


Abbildung E.2: Flußdiagramm zu den Monte-Carlo-Integrationen des Phasenraumvolumens und der Zählrate im Bin  $B'$ . Die einzelnen Schritte dieses Verfahrens sind im Text ausführlich erläutert.

Nachdem die Schleife abgearbeitet ist, werden die Output-Daten des Moduls zusammengestellt. Dazu gehören die Phasenraumvolumina und Zählraten aller getroffenen Bins, die man aus

$$V_{B'} = \frac{\Delta S'}{N_{mc}} Z_{B'} \quad (\text{E.34})$$

$$Y_{B'} = f_N \frac{\Delta S'}{N_{mc}} R_{B'}^{(1)} \quad (\text{E.35})$$

berechnet, sowie die Fehler des Monte-Carlo-Verfahrens, welche man mit

$$\Delta V_{B'} = \frac{V_{B'}}{\sqrt{N_{mc} - 1}} \sqrt{\frac{N_{mc}}{Z_{B'}} - 1} \quad (\text{E.36})$$

$$\Delta Y_{B'} = \frac{Y_{B'}}{\sqrt{N_{mc} - 1}} \sqrt{\frac{N_{mc}}{R_B^{(1)}} \frac{R_B^{(2)}}{R_B^{(1)}} - 1} \quad (\text{E.37})$$

abschätzt.

### E.3 Die Zuordnung der Bins zu physikalischen Koordinaten

Der mittlere 6-fach differentielle Wirkungsquerschnitt  $\tilde{\sigma}_B$ , bzw. sein Erwartungswert  $E(\tilde{\sigma}_B)$  muß bestimmten physikalischen Koordinaten  $\tilde{\mathcal{P}}$  innerhalb des Bins  $B$  zugeordnet werden. Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt – Stetigkeit von  $\sigma(\mathcal{P})$  vorausgesetzt –, daß es mindestens ein  $\tilde{\mathcal{P}} \in B$  gibt mit

$$\sigma(\tilde{\mathcal{P}}) = E(\tilde{\sigma}_B) := \frac{1}{V_B} \int_{I_B} \sigma(\mathcal{P}) d\mathcal{S} . \quad (\text{E.38})$$

Leider hilft beim wirklichen Experiment die Existenz von  $\tilde{\mathcal{P}}$  nicht viel, solange  $\sigma(\mathcal{P})$  als Funktion von  $\mathcal{P}$  nicht bekannt ist und diese funktionale Abhängigkeit soll ja gerade durch das Experiment abgetastet werden. Um sich zu behelfen, wählt man deshalb gerne den geometrischen Mittelpunkt des betrachteten Bins und hofft, daß die systematische Abweichung vom wahren  $\tilde{\mathcal{P}}$  klein sei. Falls  $\sigma(\mathcal{P})$  innerhalb des Bins linear mit  $\mathcal{P}$  geht und die Phasenraumdichte innerhalb  $B$  konstant ist, so stimmt der geometrische Mittelpunkt tatsächlich mit  $\tilde{\mathcal{P}}$  überein. Die erste Bedingung läßt sich durch Verkleinern der Bins immer realisieren, die zweite Bedingung ist jedoch im allgemeinen nicht erfüllt. Denn wie man z.B. am Testexperiment aus Kapitel 4 sieht, sind die Akzeptanzen in den physikalischen Koordinaten durch “krumme” Grenzen beschränkt, so daß es immer Randbins gibt, die nur teilweise belegt werden. Für solche Bins wird daher die Zuweisung des ermittelten Wirkungsquerschnitts zum geometrischen Mittelpunkt des Bins grob falsch.

Sinnvoller ist jedoch die Benutzung der *mittleren physikalischen Koordinaten* des Bins,

$$\mathcal{P}_B := \frac{1}{V_B} \int_{I_B} \mathcal{P} d\mathcal{S} , \quad (\text{E.39})$$

denn für diese Koordinaten gilt das folgende Lemma.

**Lemma E.1.** Der Wirkungsquerschnitt sei eine lineare Funktion von  $\mathcal{P}$  der Form

$$\sigma(\mathcal{P}) = a_0 + (\mathcal{A}, \mathcal{P}) ,$$

wobei

$$\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

ist und  $(, )$  das Skalarprodukt zweier 5-er Tupel bezeichnet. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{P}_B) = \sigma(\tilde{\mathcal{P}})$$

**Bew.** Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt speziell mit  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_B$ :

$$\sigma(\mathcal{P}_B) = a_0 + (\mathcal{A}, \mathcal{P}_B) \quad .$$

Andererseits folgt aus (E.38) durch Einsetzen der Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{\mathcal{P}}) &= \frac{1}{V_B} \int_{I_B} [a_0 + (\mathcal{A}, \mathcal{P})] d\mathcal{S} \\ &= a_0 + \left( \mathcal{A}, \frac{1}{V_B} \int_{I_B} \mathcal{P} d\mathcal{S} \right) \\ &= a_0 + (\mathcal{A}, \mathcal{P}_B) \quad . \end{aligned}$$

Aus beiden Gleichungen zusammen erhält man die Behauptung.  $\square$

Die mittleren physikalischen Koordinaten  $\mathcal{P}_B$  besitzen also gerade die Eigenschaft, die man sich vom geometrischen Mittelpunkt erhofft. Im Gegensatz zu den Mittelpunkten liegen die Zentren  $\mathcal{P}_B$  der Bins aber im allgemeinen nicht mehr auf einem regelmäßigen Gitter. Dadurch wird eine konventionelle Bestimmung der Strukturfunktionen mit den punktweisen Methoden aus Abschnitt 3.1 erschwert, denn die Bedingung  $\zeta = \text{const}$  ist zunächst nicht erfüllt und muß erst durch geeignete Interpolationen wiederhergestellt werden. Bei der modellunabhängigen Separation aus Abschnitt 3.2 braucht man sich jedoch um diese Problematik nicht weiter zu kümmern, denn die Wirkungsquerschnitte brauchen sowieso nur irgendwo in  $G$  gemessen zu werden.

Die Argumentation, die hier für den 6-fach differentiellen Wirkungsquerschnitt geführt wurde, läßt sich genauso auf den 5-fach differentiellen Wirkungsquerschnitt übertragen. In beiden Fällen kann die Berechnung der mittleren physikalischen Koordinaten in die Monte-Carlo-Integrationen von Phasenraumvolumen und Zählrate mit eingebaut werden.

## F. Anwendung der Informationsungleichung auf die punktweise Separation der Strukturfunktionen

Zu Beginn dieses Anhangs werden einige statistische Begriffe eingeführt, wobei Details, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, z.B. bei S. Brandt [13] nachzuschlagen sind.

Eine Schätzung  $S$  eines Parameters  $P$  heißt *erwartungstreu*, *verzerrungsfrei* oder *vorurteilsfrei*, falls das Vorurteil (engl. *bias*) verschwindet:

$$B(P) := E(S) - P = 0 \quad . \quad (\text{F.1})$$

Außer Erwartungstreue sollte eine gute Schätzung noch die Bedingung erfüllen, daß die Varianz

$$\sigma^2(S)$$

möglichst klein ist. Zwischen den beiden Größen “Vorurteil” und “Varianz” besteht dabei ein enger Zusammenhang, der sich in der Cramér–Rao–Informationsungleichung widerspiegelt:

$$\sigma^2(S) \geq \frac{(1 + B'(P))^2}{I(P)} \quad . \quad (\text{F.2})$$

Hier bezeichnet  $B'(P)$  die Ableitung des Vorurteils nach dem Parameter  $P$  und  $I(P)$  die in der Stichprobe enthaltene Information. Die Information wiederum ist definiert als

$$I(P) := E(l'^2) \quad , \quad (\text{F.3})$$

wobei  $l'$  die Ableitung der logarithmischen Likelihood-Funktion nach  $P$  bezeichnet.

Die Ungleichung (F.2) läßt sich direkt auf die punktweise Separation der Strukturfunktionen anwenden, bei der die Parameter  $R_\lambda$  durch die mit dem Separationsverfahren bestimmten Größen  $\tilde{R}_\lambda$  geschätzt werden. Wir ersetzen daher in (F.2):

$$S \longrightarrow \tilde{R}_\lambda \quad , \quad (\text{F.4})$$

$$P \longrightarrow R_\lambda \quad . \quad (\text{F.5})$$

Im folgenden Lemma wird nun das Vorurteil der Schätzung  $\tilde{R}_\lambda$  untersucht.

**Lemma F.1.** Die Schätzung  $\tilde{R}_\lambda$  der Strukturfunktion  $R_\lambda$  ist erwartungstreu, denn es gilt:

$$E(\tilde{R}_\lambda) = R_\lambda \quad . \quad (\text{F.6})$$

**Bew.** Die Strukturfunktion  $\tilde{R}_\lambda$  wird aus den  $N$  gemessenen reduzierten Wirkungsquerschnitten  $\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}$  gemäß

$$\tilde{R}_\lambda = \sum_k (V^+)_{\lambda k} \tilde{\sigma}_{red}^{(k)} \quad (\text{F.7})$$

bestimmt (vgl. (3.26) auf S. 15). Bildet man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Erwartungswert, so folgt:

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_\lambda) &= \sum_k (V^+)_{\lambda k} E(\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}) \\ &= \sum_k (V^+)_{\lambda k} E\left(\frac{1}{K' \sigma_M^{(k)}} \frac{\tilde{N}^{(k)}}{f_N T^{(k)} V_{Ph}^{(k)}}\right) \\ &= \sum_k (V^+)_{\lambda k} \frac{1}{K' \sigma_M^{(k)}} \frac{E(\tilde{N}^{(k)})}{f_N T^{(k)} V_{Ph}^{(k)}} , \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

wobei die hier verwendeten Bezeichnungen bereits aus Abschnitt 5.1 bekannt sind. Durch Einsetzen des Erwartungswertes

$$\begin{aligned} E(\tilde{N}^{(k)}) = N^{(k)} &= f_N T^{(k)} V_{Ph}^{(k)} K' \sigma_M^{(k)} \left( v_L R_L + v_T^{(k)} R_T + v_{LT}^{(k)} R_{LT} \cos \Phi^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + v_{TT} R_{TT} \cos 2\Phi^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

in (F.8) erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} E(\tilde{R}_\lambda) &= \sum_k (V^+)_{\lambda k} \left( v_L R_L + v_T^{(k)} R_T + v_{LT}^{(k)} R_{LT} \cos \Phi + v_{TT} R_{TT} \cos 2\Phi \right) \\ &= \sum_k (V^+)_{\lambda k} (V)_{k\lambda} R_\lambda \\ &= R_\lambda . \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Das abgeleitete Ergebnis ist unabhängig davon, ob die Poisson- oder Gaußverteilung für die Zahl der Koinzidenzereignisse benutzt wird, denn hier geht nur der Erwartungswert  $E(\tilde{N}^{(k)})$  ein, nicht aber die Form der Verteilung.  $\square$

Unter Benutzung von Lemma F.1 vereinfacht sich die Informationsungleichung (F.2) zu:

$$\left( \Delta \tilde{R}_\lambda \right)^2 \equiv \sigma^2(\tilde{R}_\lambda) \geq \frac{1}{I(R_\lambda)} . \quad (\text{F.11})$$

Hier erscheint die Frage interessant, unter welchen Voraussetzungen das Gleichheitszeichen in (F.11) gilt. Theoretisch läßt sich zeigen, daß dies genau dann der Fall ist, falls die Ableitung der logarithmischen Likelihood-Funktion die Form

$$\frac{\partial l}{\partial P} = A(P) (S - E(S)) \quad (\text{F.12})$$

hat, wobei  $A(P)$  nur eine Funktion des Parameters  $P$  ist und nicht mehr von der Schätzung  $S$  abhängt. Falls die Gleichung (F.12) erfüllt ist, nennt man  $S$  eine

*Minimum–Varianz–Schätzung.* Das folgende Lemma gibt die Voraussetzung an, unter der  $\tilde{R}_\lambda$  diese Eigenschaft besitzt.

**Lemma F.2.** Die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Zahl der Koinzidenzereignisse sei durch die Gaußverteilung

$$\rho\left(\tilde{N}^{(k)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N^{(k)}}} \exp\left\{-\frac{\left(\tilde{N}^{(k)} - N^{(k)}\right)^2}{2 N^{(k)}}\right\} \quad (\text{F.13})$$

gegeben. Dann ist die Schätzung der Strukturfunktionen eine Minimum–Varianz–Schätzung.

**Bew.** Aus der Voraussetzung erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho\left(\tilde{\sigma}_{red}^{(k)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta\sigma_{red}^{(k)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}_{red}^{(k)} - \sigma_{red}^{(k)}}{\Delta\sigma_{red}^{(k)}}\right)^2\right\} \quad (\text{F.14})$$

für den reduzierten Wirkungsquerschnitt der  $k$ -ten Messung und daraus wieder die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Strukturfunktion  $\tilde{R}_\lambda$ :

$$\rho\left(\tilde{R}_\lambda\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta\tilde{R}_\lambda} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{R}_\lambda - R_\lambda}{\Delta\tilde{R}_\lambda}\right)^2\right\} . \quad (\text{F.15})$$

Die logarithmische Likelihood–Funktion der Stichprobe ist daher

$$l = \ln\left(\rho\left(\tilde{R}_\lambda\right)\right) = -\ln(\Delta\tilde{R}_\lambda) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{R}_\lambda - R_\lambda}{\Delta\tilde{R}_\lambda}\right)^2 \quad (\text{F.16})$$

und die Ableitung nach  $R_\lambda$  ergibt:

$$\frac{\partial l}{\partial R_\lambda} = \frac{1}{(\Delta\tilde{R}_\lambda)^2} \left(\tilde{R}_\lambda - R_\lambda\right) . \quad (\text{F.17})$$

Der Vergleich mit (F.12) zeigt, daß (F.17) die gesuchte Form hat.  $\square$

Unter der Voraussetzung des Lemmas F.2 besteht zwischen der Varianz  $(\Delta\tilde{R}_\lambda)^2$  der Schätzung  $\tilde{R}_\lambda$  und der in der Stichprobe über  $R_\lambda$  enthaltenen Information  $I(R_\lambda)$  der einfache Zusammenhang:

$$\left(\Delta\tilde{R}_\lambda\right)^2 = \frac{1}{I(R_\lambda)} . \quad (\text{F.18})$$

Diese Gleichung wird als Grundlage für die in Abschnitt 5.1 beschriebene Optimierung von  $(e, e'p)$ -Experimenten bei punktwiser Separation der Strukturfunktionen benutzt, d.h. durch Minimierung der Varianzen  $(\Delta\tilde{R}_\lambda)^2$  werden die Informationsbeiträge  $I(R_\lambda)$  maximiert.

## G. Analytische Optimierung in paralleler Kinematik

Die Optimierung von  $(e, e'p)$ -Experimenten bei punktwieser Separation der Responsefunktionen wurde in Abschnitt 5.1 an Hand von Beispielen erläutert. Wegen der großen Zahl der Parameter ist dieses Problem im allgemeinen zu kompliziert, um analytisch gelöst zu werden, deshalb wurde die Optimierung numerisch mit dem Programm OPOISEP durchgeführt. In paralleler Kinematik vereinfacht sich jedoch die Situation dadurch, daß die Interferenz-Strukturfunktionen verschwinden (siehe Anh. B.2) und deshalb bereits zwei gemessene Wirkungsquerschnitte zur Separation von  $R_L$  und  $R_T$  ausreichen. Die Optimierung dieses einfachen Spezialfalls, d.h. die Bestimmung der beiden optimalen Strahl-Energien und der optimalen Meßzeitverteilung, wird im folgenden analytisch durchgeführt.

Für diese Betrachtung ist es nützlich den Koinzidenz-Wirkungsquerschnitt als Funktion der Polarisation

$$\epsilon = \left[ 1 + 2 \frac{|\vec{q}|^2}{Q^2} \tan^2 \frac{1}{2} \Theta_e \right]^{-1} \quad (\text{G.1})$$

des virtuellen Photons zu schreiben. Man erhält

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f| d\Omega_e d\Omega_p}(\epsilon) = K' \sigma_M(\epsilon) \frac{Q^2}{2 \epsilon |\vec{q}|^2} (\epsilon \kappa R_L + R_T) \quad , \quad (\text{G.2})$$

wobei

$$\kappa = 2 \frac{Q^2}{|\vec{q}|^2} \quad (\text{G.3})$$

ein kinematischer Faktor ist. Damit die Optimierung des Experiments analytisch durchgeführt werden kann, benutzen wir für die weiteren Betrachtungen die “wahren” Wirkungsquerschnitte bzw. die “wahren” Strukturfunktionen, d.h. ein statistisches Verwürfeln muß entfallen.

Zur Bestimmung der Strukturfunktionen in paralleler Kinematik müssen die beiden Messungen unseres Experiments bei festem  $|\vec{q}|$  und  $\omega$  aber unterschiedlichem  $\epsilon$  durchgeführt werden (Rosenbluth-Plot); wir bezeichnen den kleineren der beiden Polarisationsparameter im folgenden mit  $\epsilon^{(R)}$  (“Rückwärtswinkel”) und den größeren mit  $\epsilon^{(V)}$  (“Vorwärtswinkel”). Als Setup-Parameter  $\mathbf{s}$ , durch die das Experiment charakterisiert wird, bieten sich in diesem Fall die Variablen

$$\mathbf{s} = \left( \epsilon^{(V)}, T^{(V)}, \epsilon^{(R)}, T^{(R)} \right) \quad (\text{G.4})$$

an ( $T^{(V)}$  und  $T^{(R)}$  sind die Meßzeiten der beiden Messungen). Zur Bewertung des Informationsgewinns über die Strukturfunktionen dient wieder die in Abschnitt

5.1 definierte totale Varianz. Im hier betrachteten Spezialfall der parallelen Kinematik vereinfacht sie sich zu

$$\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}) = w_L (\Delta R_L)^2 + w_T (\Delta R_T)^2 . \quad (\text{G.5})$$

Um einen analytischen Ausdruck für  $\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s})$  zu erhalten, werden im nächsten Schritt die statistischen Fehler  $\Delta R_L$  und  $\Delta R_T$  berechnet.

Dazu betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{red}^{(V)} \\ \hat{\sigma}_{red}^{(R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \epsilon^{(V)} & 1 \\ \kappa \epsilon^{(R)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_L \\ R_T \end{pmatrix} , \quad (\text{G.6})$$

das die reduzierten Wirkungsquerschnitte

$$\hat{\sigma}_{red}^{(V,R)} \equiv \hat{\sigma}_{red}(\epsilon^{(V,R)}) := \frac{1}{K' \sigma_M(\epsilon^{(V,R)})} \frac{2 \epsilon^{(V,R)} |\vec{q}|^2}{Q^2} \frac{d\sigma}{d|\vec{k}_f| d\Omega_\epsilon d\Omega_p}(\epsilon^{(V,R)}) \quad (\text{G.7})$$

mit den Strukturfunctionen  $R_L$  und  $R_T$  verknüpft. Die Auflösung des Gleichungssystems (G.6) nach den Strukturfunctionen ergibt

$$\begin{pmatrix} R_L \\ R_T \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\kappa \epsilon^{(R)} & \kappa \epsilon^{(V)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{red}^{(V)} \\ \hat{\sigma}_{red}^{(R)} \end{pmatrix} , \quad (\text{G.8})$$

$$\det := \kappa (\epsilon^{(V)} - \epsilon^{(R)}) ; \quad (\text{G.9})$$

durch Fehlerfortpflanzung erhält man

$$\Delta R_L = \frac{1}{\det} \sqrt{(\Delta \hat{\sigma}_{red}^{(V)})^2 + (\Delta \hat{\sigma}_{red}^{(R)})^2} , \quad (\text{G.10})$$

$$\Delta R_T = \frac{\kappa}{\det} \sqrt{(\epsilon^{(R)} \Delta \hat{\sigma}_{red}^{(V)})^2 + (\epsilon^{(V)} \Delta \hat{\sigma}_{red}^{(R)})^2} . \quad (\text{G.11})$$

Die Meßfehler  $\Delta \hat{\sigma}_{red}^{(V,R)} \equiv \Delta \hat{\sigma}_{red}(\epsilon^{(V,R)})$  werden analog zu Abschnitt 5.1 bestimmt. Dabei wird angenommen, daß die beiden Messungen jeweils die vollen Spektrometerakzeptanzen zur Bestimmung eines einzigen Wirkungsquerschnitts ausnutzen, wobei hier das Problem der Kontraktion des Phasenraums auf einen Punkt nicht weiter berücksichtigt wird. Unter dieser Annahme erhält man den experimentellen Wirkungsquerschnitt gemäß

$$\hat{\sigma}_{red}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{K' \sigma_M(\epsilon)} \frac{2 |\vec{q}|^2}{Q^2} \frac{N(\epsilon)}{f_N T V_{Ph}(\epsilon)} \quad (\text{G.12})$$

aus der Gesamtzahl  $N$  der gezählten Ereignisse, der Meßzeit  $T$ , dem gesamten Phasenraumvolumen  $V_{Ph}$  und dem Normierungsfaktor  $f_N$ . Die Poisson-Statistik liefert für  $\hat{\sigma}_{red}(\epsilon)$  schließlich den ‘‘Meßfehler’’

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\sigma}_{red}(\epsilon) &= \frac{\epsilon}{K' \sigma_M(\epsilon)} \frac{2 |\vec{q}|^2}{Q^2} \frac{\sqrt{N(\epsilon)}}{f_N T V_{Ph}(\epsilon)} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{K' \sigma_M(\epsilon)} \frac{2 |\vec{q}|^2}{Q^2} \frac{\hat{\sigma}_{red}(\epsilon)}{f_N T V_{Ph}(\epsilon)}} \\ &= \sqrt{\frac{2 |\vec{q}|^2}{K' Q^2 f_N} \frac{1}{T} F(\epsilon)} . \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$



Die  $\epsilon$ -Abhängigkeit von  $\Delta\hat{\sigma}_{red}$  steckt dabei in der Funktion

$$F(\epsilon) := \frac{\epsilon}{\sigma_M(\epsilon) V_{Ph}(\epsilon)} (\epsilon\kappa R_L + R_T) \quad . \quad (\text{G.14})$$

Mit Hilfe der Gleichungen (G.10) und (G.13) läßt sich die totale Varianz (G.5) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}) &= \frac{1}{\det^2} \left\{ \left[ w_L + w_T (\kappa\epsilon^{(R)})^2 \right] (\Delta\hat{\sigma}_{red}^{(V)})^2 + \left[ w_L + w_T (\kappa\epsilon^{(V)})^2 \right] (\Delta\hat{\sigma}_{red}^{(R)})^2 \right\} \\ &= \frac{2|\vec{q}|^2}{K' Q^2 \kappa^2 f_N} \frac{1}{(\epsilon^{(V)} - \epsilon^{(R)})^2} \left\{ \left[ w_L + w_T (\kappa\epsilon^{(R)})^2 \right] \frac{F(\epsilon^{(V)})}{T^{(V)}} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ w_L + w_T (\kappa\epsilon^{(V)})^2 \right] \frac{F(\epsilon^{(R)})}{T^{(R)}} \right\} \quad . \quad (\text{G.15}) \end{aligned}$$

Um die Abhängigkeit der totalen Varianz von den Parametern  $\epsilon^{(V)}$  und  $\epsilon^{(R)}$  genauer herauszuarbeiten, wird der Mott'sche Wirkungsquerschnitt in der Form

$$\sigma_M(\epsilon) = \frac{2\alpha^2 |\vec{q}|^2}{Q^4} \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \frac{e_f(\epsilon)}{e_i(\epsilon)} \quad (\text{G.16})$$

geschrieben und in (G.15) eingesetzt. Unter Verwendung von

$$f(\epsilon) := \frac{1}{V_{Ph}(\epsilon)} \frac{e_i(\epsilon)}{e_f(\epsilon)} \quad , \quad (\text{G.17})$$

$$g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}) := \frac{w_L + w_T (\kappa\epsilon^{(y)})^2}{(\epsilon^{(x)} - \epsilon^{(y)})^2} (1 - \epsilon^{(x)}) (\epsilon^{(x)} \kappa R_L + R_T) \quad , \quad (\text{G.18})$$

$$C := \frac{Q^2}{K' \kappa^2 \alpha^2 f_N} \quad (\text{G.19})$$

erhält man schließlich:

$$\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s}) = C \left\{ \frac{1}{T^{(V)}} f(\epsilon^{(V)}) g(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) + \frac{1}{T^{(R)}} f(\epsilon^{(R)}) g(\epsilon^{(R)}, \epsilon^{(V)}) \right\} \quad . \quad (\text{G.20})$$

Zur analytischen Minimierung von  $\mathcal{V}_{tot}(\mathbf{s})$  muß der Gradient der totalen Varianz berechnet werden. Aus diesem Grund werden in den beiden folgenden Lemmata die Monotonie-Eigenschaften und die partiellen Ableitungen der Funktionen  $f(\epsilon)$  und  $g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)})$  untersucht.

**Lemma G.1.** Im relevanten kinematischen Bereich  $|\vec{q}| > \omega$  (raum-artige Photonen) gilt

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &> 0 \quad \forall \epsilon \in [0, 1] \quad , \\ f'(\epsilon) &\leq 0 \quad \forall \epsilon \in [0, 1] \quad , \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur bei  $\omega = 0$  auftritt.

**Bew.** Die erste Behauptung ist trivial, denn  $e_i, e_f$  und  $V_{Ph}$  sind positive Größen.

Für den Beweis der zweiten Behauptung betrachten wir zunächst  $V_{Ph}$  als Funktion von  $\epsilon$ . Dabei ist zu beachten, daß das Phasenraumvolumen vom Überlapp der Impulsakzeptanzen der beiden Spektrometer abhängt (vgl. Anh. C.3). Für kleine Energien der einlaufenden Elektronen geht das Phasenraumvolumen zunächst linear mit  $|\vec{k}_f|$  (Fall 1) bis sich die Impulsakzeptanzen genau überdecken. Bei weiterer Vergrößerung von  $e_i$  bleibt das Phasenraumvolumen dann konstant (Fall 2). Man findet daher

$$V_{Ph}(\epsilon) = \begin{cases} V_0 |\vec{k}_f|(\epsilon) & \text{Fall 1} \\ V_0 \Delta k_{max} & \text{Fall 2} \end{cases}, \quad (\text{G.21})$$

$$V_0 = \Delta\Omega_e \Delta\Omega_p. \quad (\text{G.22})$$

Für die Energien und Impulse der Elektronen gilt

$$e_i(\epsilon) = |\vec{k}_i|(\epsilon) = \frac{|\vec{q}|\sqrt{1+\epsilon} + \omega\sqrt{1-\epsilon}}{2\sqrt{1-\epsilon}}, \quad (\text{G.23})$$

$$e_f(\epsilon) = |\vec{k}_f|(\epsilon) = \frac{|\vec{q}|\sqrt{1+\epsilon} - \omega\sqrt{1-\epsilon}}{2\sqrt{1-\epsilon}}, \quad (\text{G.24})$$

so daß man insgesamt für die gesuchte Ableitung der Funktion  $f(\epsilon)$  den Ausdruck

$$f'(\epsilon) = \begin{cases} -\frac{2|\vec{q}|}{V_0} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \frac{|\vec{q}|\sqrt{1+\epsilon} + 3\omega\sqrt{1-\epsilon}}{\left(|\vec{q}|\sqrt{1+\epsilon} - \omega\sqrt{1-\epsilon}\right)^3} & \text{Fall 1} \\ -\frac{1}{V_0 \Delta k_{max}} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \frac{2|\vec{q}|\omega}{\left(|\vec{q}|\sqrt{1+\epsilon} - \omega\sqrt{1-\epsilon}\right)^2} & \text{Fall 2} \end{cases} \quad (\text{G.25})$$

findet. Wie man an dieser Gleichung sieht, ist die Ableitung  $f'(\epsilon)$  in beiden Fällen nicht-positiv und verschwindet nur im Fall 2 bei  $\omega = 0$ .  $\square$

**Lemma G.2.** Für die Funktion  $g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)})$  und ihre partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}) &\geq 0 && \forall \epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)} \in [0, 1], \\ \frac{\partial g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)})}{\partial \epsilon^{(x)}} &< 0 && \text{falls } \epsilon^{(x)} > \epsilon^{(y)}, \\ &> 0 && \text{falls } \epsilon^{(x)} < \epsilon^{(y)}, \\ \frac{\partial g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)})}{\partial \epsilon^{(y)}} &\geq 0 && \text{falls } \epsilon^{(x)} > \epsilon^{(y)}, \\ &< 0 && \text{falls } \epsilon^{(x)} < \epsilon^{(y)}. \end{aligned}$$

**Bew.** Die erste Behauptung ist wieder trivial, denn alle Größen, die in  $g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)})$  eingehen, sind nicht-negativ, wobei  $g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)}) = 0$  nur für  $\epsilon^{(x)} = 1$  gilt.

Die erste der beiden partiellen Ableitungen lautet explizit

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)})}{\partial \epsilon^{(x)}} = & -\frac{w_L + w_T (\kappa \epsilon^{(y)})^2}{(\epsilon^{(x)} - \epsilon^{(y)})^3} \left\{ \kappa R_L \left[ \epsilon^{(x)} (1 - \epsilon^{(y)}) + \epsilon^{(y)} (1 - \epsilon^{(x)}) \right] + \right. \\ & \left. + R_T \left[ (1 - \epsilon^{(y)}) + (1 - \epsilon^{(x)}) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist immer positiv, ebenso der Zähler des Faktors vor der Klammer. Daher ergibt sich das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks aus dem des Nenners zusammen mit dem vorgezogenen Minuszeichen. Daraus erhält man die zweite Behauptung.

Die zweite partielle Ableitung ergibt

$$\frac{\partial g(\epsilon^{(x)}, \epsilon^{(y)})}{\partial \epsilon^{(y)}} = 2 \frac{w_L + w_T \kappa^2 \epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)}}{(\epsilon^{(x)} - \epsilon^{(y)})^3} (1 - \epsilon^{(x)}) (\epsilon^{(x)} \kappa R_L + R_T) , \quad (\text{G.27})$$

wobei das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks diesmal direkt durch das des Nenners festgelegt wird.  $\square$

Im folgenden Satz und dem daran anschließenden Korollar wird die totale Varianz als Funktion der Polarisierungen  $\epsilon^{(V)}$  und  $\epsilon^{(R)}$  betrachtet und ihr Minimum bezüglich dieser beiden Parameter bestimmt. Unabhängig von den gewählten Meßzeiten  $T^{(V)}$  und  $T^{(R)}$  zeigt sich, daß zumindest im Fall  $|\vec{q}| \gg \omega$ , die optimalen Polarisierungen so zu wählen sind, daß ihre Differenz möglichst groß ist.

**Satz G.3.** Bei beliebigen, aber festen, Meßzeiten  $T^{(V)}$ ,  $T^{(R)}$  sei der Definitionsbereich der totalen Varianz  $\mathcal{V}_{tot}(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})$  durch

$$0 \leq \epsilon^{(R)} \leq \epsilon^{(V)} \leq 1$$

gegeben; die Kinematiken der beiden Messungen seien so gewählt, daß  $|\vec{q}| \gg \omega$  ist. Dann gilt:

$$\mathcal{V}_{tot}(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

bei

$$(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) = (1, 0) .$$

**Bew.** Zum Beweis wird der Gradient der totalen Varianz berechnet; seine erste Komponente ergibt dabei

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_{tot}(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(V)}} = & C \left\{ \frac{1}{T^{(V)}} \left[ \frac{\partial f(\epsilon^{(V)})}{\partial \epsilon^{(V)}} g(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) + f(\epsilon^{(V)}) \frac{\partial g(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(V)}} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{T^{(R)}} f(\epsilon^{(R)}) \frac{\partial g(\epsilon^{(R)}, \epsilon^{(V)})}{\partial \epsilon^{(V)}} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{G.28})$$

Mit Lemma G.1 und Lemma G.2 folgt

$$\frac{\partial \mathcal{V}_{tot}(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(V)}} < 0$$

für alle  $\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}$  aus dem oben genannten Definitionsbereich und für jede Wahl der Meßzeiten  $T^{(V)}$  und  $T^{(R)}$ . Für diesen Teil des Beweises braucht die Bedingung  $|\vec{q}| \gg \omega$  nicht erfüllt zu sein; die erste Komponente des Gradienten ist immer negativ.

Für die zweite Komponente des Gradienten erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_{tot}(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(R)}} = C \left\{ \frac{1}{T^{(V)}} f(\epsilon^{(V)}) \frac{\partial g(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(R)}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{T^{(R)}} \left[ \frac{\partial f(\epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(R)}} g(\epsilon^{(R)}, \epsilon^{(V)}) + f(\epsilon^{(R)}) \frac{\partial g(\epsilon^{(R)}, \epsilon^{(V)})}{\partial \epsilon^{(R)}} \right] \right\} ; \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

eine Vorzeichenanalyse mit Lemma G.1 und Lemma G.2 ergibt dann

$$\begin{aligned} h_1 &:= f(\epsilon^{(V)}) \frac{\partial g(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(R)}} \geq 0 , \\ h_2 &:= \frac{\partial f(\epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(R)}} g(\epsilon^{(R)}, \epsilon^{(V)}) \leq 0 , \\ h_3 &:= f(\epsilon^{(R)}) \frac{\partial g(\epsilon^{(R)}, \epsilon^{(V)})}{\partial \epsilon^{(R)}} > 0 . \end{aligned}$$

Weil  $h_2$  ein anderes Vorzeichen als  $h_1$  und  $h_3$  hat, kann die zweite Komponente des Gradienten unter Umständen bei einer bestimmten Polarisation  $\epsilon_0^{(R)}$  verschwinden. Ob es einen solchen Wert gibt und wie groß er in diesem Fall ist, hängt dabei von  $\epsilon^{(V)}, T^{(V)}, T^{(R)}, R_L, R_T, |\vec{q}|$  und  $\omega$  ab. Wegen der vielen Parameter und den komplizierten Funktionen läßt sich  $\epsilon_0^{(R)}$  daher im allgemeinen nur noch numerisch bestimmen oder man benutzt gleich das Optimierungsprogramm OPOISEP (s.u.).

Trotzdem läßt sich der Grenzfall  $|\vec{q}| \gg \omega$  noch weiter analytisch untersuchen. Unter expliziter Benutzung der Formeln, die in den Beweisen der beiden Lemmas auftreten, erhält man für den Fall 1, wo das Phasenraumvolumen linear mit  $|\vec{k}_f|$  geht, daß die Summe

$$\begin{aligned} h_2 + h_3 = h_+ \left\{ \kappa R_L \left[ \epsilon^{(V)} (1 - \epsilon^{(R)}) + \epsilon^{(R)} (1 + 2\epsilon^{(R)}) (1 - \epsilon^{(V)}) \right] + \right. \\ \left. + R_T \left[ 2 (1 - \epsilon^{(V)}) + \epsilon^{(R)} (2 - \epsilon^{(V)} - \epsilon^{(R)}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.30})$$

positiv ist, denn  $h_+$  ist eine positive Funktion. Der Fall 2 des konstanten Phasenraumvolumens ist dagegen trivial: in nullter Ordnung von  $\omega/|\vec{q}|$  liefert  $h_2$  im Gegensatz zu  $h_3$  keinen Beitrag.

Unabhängig vom Phasenraumvolumen (Fall 1 oder Fall 2) gilt daher

$$\frac{\partial \mathcal{V}_{tot}(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)})}{\partial \epsilon^{(R)}} > 0 \quad \text{falls} \quad |\vec{q}| \gg \omega ,$$

für alle  $\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}$  aus dem Definitionsbereich und für jede Wahl der Meßzeiten  $T^{(V)}$  und  $T^{(R)}$ .

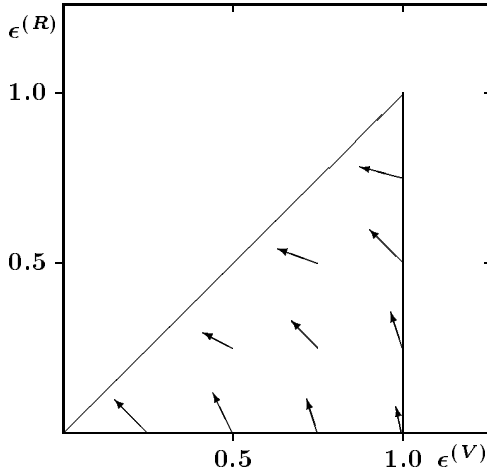


Abbildung G.1: Ein schematisches Beispiel des Gradientenfeldes der totalen Varianz. Wird der volle Definitionsbereich benutzt, dann ist das Minimum der totalen Varianz bei  $(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) = (1, 0)$ .

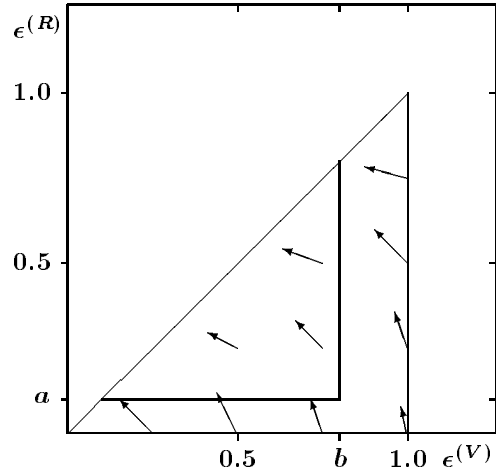


Abbildung G.2: Ein schematisches Beispiel des Gradientenfeldes der totalen Varianz. Wird der Definitionsbereich eingeschränkt, dann ist das Minimum der totalen Varianz bei  $(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) = (b, a)$ .

Das Gradientenfeld zeigt also für  $|\vec{q}| \gg \omega$  ein Verhalten, wie es in Abbildung G.1 skizziert ist. Auf der Suche nach dem Minimum der totalen Varianz folgt man den Flußlinien in umgekehrter Richtung des Gradienten. Entweder gelangt man dadurch direkt zum Punkt  $\epsilon^{(V)} = 1, \epsilon^{(R)} = 0$  oder zu einem der beiden Ränder des Definitionsbereichs d.h.  $\epsilon^{(V)} = 1, \epsilon^{(R)} \neq 0$  oder  $\epsilon^{(V)} \neq 1, \epsilon^{(R)} = 0$ . Am Rand sitzt man jedoch nicht fest, denn der negative Gradient hat weiterhin eine Komponente in Richtung  $\epsilon^{(V)} = 1, \epsilon^{(R)} = 0$ . Also geht der Fluß weiter, bis dieser Punkt erreicht ist.  $\square$

**Korollar G.4.** Angenommen der zugängliche Bereich der Parameter  $\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}$  wird durch den Experimentaufbau eingengt, z.B. durch Beschränkungen im Elektronstreuwinkel und/oder Beschränkungen in der Energie der einlaufenden Elektronen, so daß

$$a \leq \epsilon^{(R)} \leq \epsilon^{(V)} \leq b$$

gilt. Die Meßzeiten  $T^{(V)}, T^{(R)}$  seien wieder beliebig, aber fest; die Kinematiken der beiden Messungen seien so gewählt, daß  $|\vec{q}| \gg \omega$  gilt.

Dann gilt:

$$\mathcal{V}_{tot}(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

bei

$$(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}) = (b, a) .$$

-bb-error = =

Abbildung G.3: Die optimalen Polarisierungen  $\epsilon^{(V)}$  (gestrichelte Kurve) und  $\epsilon^{(R)}$  (durchgezogene Kurve) als Funktion von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91 \text{ MeV}$ ,  $\Theta_{pq} = 0$ . Die maximale Strahlenergie beträgt  $\epsilon_i = 850 \text{ MeV}$ .

**Bew.** Der Gradient der totalen Varianz zeigt innerhalb des eingeschränkten Gebietes

$$a \leq \epsilon^{(R)} \leq \epsilon^{(V)} \leq b$$

das gleiche Verhalten, wie im ganzen Definitionsbereich (Abb. G.2). Daher kann die Argumentation aus Satz G.3 direkt übernommen werden und man “fließt” durch das Gradientenfeld immer zum Punkt  $\epsilon^{(V)} = b$ ,  $\epsilon^{(R)} = a$ .  $\square$

Auch wenn die Bedingung  $|\vec{q}| \gg \omega$  nicht erfüllt ist, so findet man für die optimale Polarisation  $\epsilon^{(V)}$  den Wert 1 bzw.  $b$ , denn die erste Komponente des Gradienten ist immer negativ. Die Schwierigkeit besteht daher einzig in der Berechnung der optimalen Polarisation  $\epsilon^{(R)}$ . Mit Hilfe des Optimierungsprogramms OPOISEP wurden die optimalen Polarisierungen in einem ausgedehnten kinematischen Bereich bestimmt. Das Ergebnis dieser Optimierungen ist in Abbildung G.3 graphisch dargestellt. Hier sind die optimalen Parameter  $\epsilon^{(V)}$  (gestrichelte Kurve) und  $\epsilon^{(R)}$  (durchgezogene Kurve) als Funktion von  $|\vec{q}|$  bei  $\omega = 91 \text{ MeV}$  aufgetragen. Die maximale Energie der einlaufenden Elektronen ist auf  $\epsilon_i = 850 \text{ MeV}$  begrenzt; daher weicht der Verlauf von  $\epsilon^{(V)}$  für große  $|\vec{q}|$  immer weiter von 1 ab. Der Verlauf von  $\epsilon^{(R)}$  gliedert sich in zwei Bereiche: Für  $|\vec{q}| > 125 \text{ MeV}/c$  gilt  $\epsilon^{(R)} = 0$ ; wir befinden uns im Gültigkeitsbereich des Satzes G.3 bzw. des Korollars G.4. Für  $|\vec{q}| < 125 \text{ MeV}/c$  ist  $\epsilon^{(R)}$  von Null verschieden; in diesem Bereich gewinnt der Beitrag  $h_2$  an Bedeutung und die zweite Komponente des Gradienten kann verschwinden.

Nachdem durch Satz G.3 bzw. Korollar G.4 die optimalen Polarisationsparameter im kinematischen Bereich  $|\vec{q}| \gg \omega$  bestimmt sind, wird im folgenden Satz die Optimierung der Meßzeitverteilung behandelt.

**Satz G.5.** Die beiden Polarisationen  $\epsilon^{(V)}$  und  $\epsilon^{(R)}$  seien beliebig, aber fest. Die Gesamtmeßzeit

$$T_{tot} = T^{(V)} + T^{(R)}$$

sei ebenfalls festgehalten.

Dann gilt:

$$\mathcal{V}_{tot}(T^{(V)}, T^{(R)}) \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

bei

$$T^{(V)} = T_{tot} \frac{\sqrt{h^{(V)}}}{\sqrt{h^{(V)}} + \sqrt{h^{(R)}}},$$

$$T^{(R)} = T_{tot} \frac{\sqrt{h^{(R)}}}{\sqrt{h^{(V)}} + \sqrt{h^{(R)}}},$$

wobei

$$h^{(V)} = f(\epsilon^{(V)}) g(\epsilon^{(V)}, \epsilon^{(R)}),$$

$$h^{(R)} = f(\epsilon^{(R)}) g(\epsilon^{(R)}, \epsilon^{(V)}).$$

**Bew.** Die erweiterte totale Varianz

$$\hat{\mathcal{V}}_{tot}(T^{(V)}, T^{(R)}, \lambda) = C \left( \frac{h^{(V)}}{T^{(V)}} + \frac{h^{(R)}}{T^{(R)}} \right) + \lambda (T^{(V)} + T^{(R)} - T_{tot}) \quad (\text{G.31})$$

berücksichtigt die Nebenbedingung an die Meßzeiten mit Hilfe eines Lagrange-Parameters  $\lambda$ . Extremwerte dieser Funktion müssen die notwendige Bedingung erfüllen, daß der Gradient verschwindet; daher erhält man

$$0 \stackrel{!}{=} - \frac{C h^{(V)}}{(T^{(V)})^2} + \lambda, \quad (\text{G.32})$$

$$0 \stackrel{!}{=} - \frac{C h^{(R)}}{(T^{(R)})^2} + \lambda, \quad (\text{G.33})$$

$$0 \stackrel{!}{=} T^{(V)} + T^{(R)} - T_{tot}. \quad (\text{G.34})$$

Durch Einsetzen der drei Gleichungen ineinander ergeben sich die Meßzeiten, die in der Behauptung angegeben sind. Die totale Varianz an dieser Stelle ist minimal, denn die  $(2 \times 2)$ -Hessematrix, in der die zweifachen Ableitungen nach  $T^{(V)}$  und  $T^{(R)}$  stehen, ist positiv definit.  $\square$

## Literaturverzeichnis

- [1] R. Altemus, A. Cafolla, D. Day, J.S. McCarthy et al., Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 965
- [2] P. Barreau, M. Bernheim, M. Brussel, G.P. Capitani et al., Nucl. Phys. A 358 (1981) 287c
- [3] P. Barreau, M. Bernheim, J. Duclos, J.M. Finn et al., Nucl. Phys. A 402 (1983) 515
- [4] J.C. Bergstrom, U. Deutschmann, R. Neuhausen, Nucl. Phys. A 327 (1979) 439
- [5] P.R. Bevington, Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, (McGraw-Hill, New York etc. 1967)
- [6] K.I. Blomqvist, R. Neuhausen, Jahresbericht 1988-1989 Institut für Kernphysik, (Mainz 1989) S. 90
- [7] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati, S. Frullani, Nucl. Phys. A 319 (1979) 461
- [8] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati, Nucl. Phys. A 336 (1980) 416
- [9] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati, Nucl. Phys. A 386 (1982) 599
- [10] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati, Nucl. Phys. A 435 (1985) 697
- [11] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati, M. Radici, Proc. of CEBAF 1986 Summer Workshop, ed. F. Gross, R. Minehart, (CEBAF, 1986) S. 133
- [12] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati, Preprint, eingereicht bei Physics Reports (1992)
- [13] S. Brandt, Datenanalyse, (B.I. – Wissenschaftsverlag 1981)
- [14] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, (Harri Deutsch 1981)
- [15] L. Chinitz, M. Bernheim, G.P. Capitani, A. Catarinella et al., Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 568
- [16] M. Deady, C.F. Williamson, J. Wong et al., Phys. Rev. C 28 (1983) 631
- [17] B. Dreher, J. Friedrich, K. Merle, H. Rothhaas, G. Lührs, Nucl. Phys. A 235 (1974) 219
- [18] C. deBoor, A practical Guide to Splines, (Springer-Verlag, New York 1978)
- [19] T. de Forest Jr., Ann. of Phys. 45 (1967) 365
- [20] T.W. Donnelly, Proc. of CEBAF 1984 Summer Workshop, ed. F. Gross, R.R. Whitney, (CEBAF, 1984) S. 254
- [21] T.W. Donnelly, Progr. Part. Nucl. Phys. 13 (1985) 183



- [22] T.W. Donnelly, Proc. of a NATO Adv. Study Inst. on New Vistas in Elektron–Nucleon Physics, ed. E.L. Tomusiak, H.S. Caplan, E.T. Dressler, (Plenum Press, New York 1986) S. 151
- [23] T.W. Donnelly, A.S. Raskin, Ann. of Phys. 169 (1986) 247
- [24] D. Drechsel, M.M. Giannini, Rep. Prog. Phys. 52 (1989) 1083
- [25] J.L. Friar, J.W. Negele, Nucl. Phys. A212 (1973) 93
- [26] S. Frullani, J. Mougey, Adv. Nucl. Phys. 14, ed. J.W. Negele, E. Vogt (Plenum Press, New York 1984) S. 1
- [27] C. Giusti, F.D. Pacati, Nucl. Phys. A473 (1987) 717
- [28] C. Giusti, F.D. Pacati, Nucl. Phys. A488 (1988) 461
- [29] J.M. Hammersley, D.C. Handscomb, Monte–Carlo–Methods, (Methuen, London 1964)
- [30] J. Heisenberg, Adv. Nucl. Phys. 12, ed. J.W. Negele, E. Vogt (Plenum Press, New York 1981) S. 61
- [31] J. Heisenberg, H.P. Blok, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 33 (1983) 569
- [32] P. Lancaster, K. Saulkauskas, Curve and Surface Fitting, (Academic Press, London etc. 1986)
- [33] Complete measurement of the  $(e, e'p)$  cross section on  $^{12}\text{C}$  and  $^{16}\text{O}$  ( $^{48}\text{Ca}$ ), *MAMI*–Proposal, Kontakt Person: J. Friedrich
- [34] A. Magnon, M. Bernheim, M.K. Brussel, G.P. Capitani et al., Phys. Lett. B 222 (1989) 352
- [35] C. Marchand, P. Barreau, M. Bernheim, P. Bradu et al., Phys. Lett. 153B (1985) 29
- [36] Z. Martinec Comp. Phys. Comm. 64 (1991) 140
- [37] Z.E. Meziani, P. Barreau, M. Bernheim, J. Morgenstern et al., Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 2130
- [38] Z.E. Meziani, P. Barreau, M. Bernheim, J. Morgenstern et al., Phys. Rev. Lett. 12 (1985) 1233
- [39] A. Picklesimer, J.W. Van Orden, Phys. Rev. C 32 (1985) 1312
- [40] A. Picklesimer, J.W. Van Orden, Phys. Rev. C 35 (1987) 266
- [41] A. Picklesimer, J.W. Van Orden, Phys. Rev. C 40 (1989) 290
- [42] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing, (Cambridge University Press, Cambridge etc. 1986)
- [43] P.M. Prenter, Splines and Variational Methods, (John Wiley & Sons, New York etc. 1975)

- [44] A.S. Raskin, T.W. Donnelly, *Ann. of Phys.* 191 (1989) 78
- [45] D. Reffay–Pikeroen, M. Bernheim, S. Boffi, G.P. Capitani et al., *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 776
- [46] M.N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* 79 (1950) 615
- [47] H. Rothhaas, J. Friedrich, K. Merle, B. Dreher, *Phys. Lett.* 51B (1974) 23
- [48] P. Schwandt, H.O. Meyer, W.W. Jacobs et al., *Phys. Rev. C* 26 (1982) 55
- [49] J. Stoer, *Einführung in die Numerische Mathematik I*, (Springer–Verlag, Berlin etc. 1983)
- [50] T. Tamae, H. Kawahara, A. Tanaka, M. Nomura et al., *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 2919
- [51] P.E. Ulmer, H. Baghaei, W. Bertozzi, K.I. Blomqvist et al., *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 2259
- [52] P.E. Ulmer, J.M. Finn, *Research Program at CEBAF (III)*, ed. F. Gross, (CEBAF, 1988) S. 342
- [53] M. van der Schaar, *Dissertation*, Amsterdam 1991
- [54] G. van der Steenhoven, H.P. Blok, J.F.J. van den Brand et al., *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 182
- [55] G. van der Steenhoven, A.M. van den Berg, H.P. Blok et al., *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 1727
- [56] G. van der Steenhoven, *Dissertation*, Amsterdam 1987
- [57] R.R. Whitney, I. Sick, J.R. Ficenece et al. *Phys. Rev. C* 9 (1974) 2230