

DIE METHODE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER GRADE ZU INTEGRIEREN WEITER ENTWICKELT*

Leonhard Euler

§1 Ich habe im 7. Band der „Miscellaneorum Berolinensium“ eine leichte Methode angegeben Differentialgleichungen jeden Grades, in denen die eine Variable überall eine Dimension erhält, die andere nur als Differential (welches konstant angenommen wird) auftaucht, zu integrieren und sogar eine endliche Gleichung zu finden, die das vorgelegte Differential völlig ausschöpft. Und es waren nämlich nicht, wenn die vorgelegte Differentialgleichung den ersten Grad übersteigt, viele wiederholte Integrationen nötig, sondern wie mit einem Schlag liefert die dort erörterte Methode für eine Differentialgleichung jeden Grades dieselbe endliche Gleichung, die hervorgehen würde, wenn nacheinander so viele Integrationen ausgeführt werden würden, wie Differentiale Grade in sich enthalten. Wenn so die vorgelegte Gleichung vom vierten Grad ist, pflegt sie auf gewohnte Weise durch eine Integration auf den dritten Grades zurückgeführt zu werden, dann würde aber erneut eine Integration unternommen werden müssen, dass sie auf den zweiten Grad zurückgeführt wird; dadurch wären noch zwei auszuführende Integrationen nötig, bevor man auf eine durch endliche Größen ausgedrückten Ausdruck

*Originaltitel: „Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota“, erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 3, 1753, pp. 3-35“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 22, pp. 181 - 213“, Eneström-Nummer E188, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

gelangen würde. Ich vermeide also diese Vielfachheit dieser meistens sehr schweren Operationen durch meine Methode vollkommen, während ich durch eine einzige Operation sofort die wahre Integralgleichung finde.

§2 Wie sehr wir aber der gewöhnlichen sooft zu wiederholenden Integrationsweise, wie Differentiale in der Gleichung enthalten sind, folgend in aufwendigste Berechnungen stoßen, so wird es förderlich sein, es an einem einzigen Beispiel gezeigt zu haben. Es sei also diese Differentialgleichung dritten Grades vorgelegt

$$d^3y = ydx^3,$$

in welcher das Element dx konstant gesetzt wird. Diese Gleichung, auch wenn sie mit meiner Methode sehr leicht dreimal integriert wird, wird dennoch nicht einmal die Art sie nur einmal zu integrieren erkannt. Sooft ist freilich klar, weil die Variable x fehlt, dass sie auf den zweiten Grad herabgesetzt werden kann. Wenn nämlich $dx = pdy$ gesetzt wird, wird wegen des konstanten dx

$$0 = pddy + dpdy$$

und wiederum nach dem Differentieren

$$0 = pd^3y + 2dpddy + dyddp.$$

Daher wird

$$ddy = -\frac{dpdy}{p}$$

und

$$d^3y = -\frac{2dpddy}{p} - \frac{dyddp}{p} = \frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p},$$

sein, welche Werte in die vorgelegte Gleichung

$$d^3y = ydx^3$$

eingesetzt

$$\frac{2dp^2dy}{pp} - \frac{dyddp}{p} = yp^3dy^3$$

oder

$$yp^5dy^2 = 2dp^2 - pddp$$

geben werden. Weil daher weder dp noch dy konstant ist, sondern das Verhältnis der Konstanten aus der Gleichung

$$ddy = -\frac{dpdy}{p}$$

bestimmt wird, kann sie durch die gewohnten Methoden kaum weiter behandelt werden. Die Gleichung kann freilich auch in eine andere Form verwandelt werden, in welcher kein konstantes Differential enthalten ist. Man setze $dp = qdy$; es wird

$$ddp = qddy + dqdy$$

sein, aber

$$ddy = -\frac{dpdy}{p}$$

wird

$$ddy = -\frac{qdy^2}{p}$$

geben, woher

$$ddp = -\frac{qqdy^2}{p} + dqdy$$

ist und so wird die gefundene Gleichung diese Form annehmen

$$yp^5dy = 2qqdy + qqdy - pdq = 3qqdy - pdq.$$

In dieser lässt sich nach Belieben ein Differential konstant annehmen. Es sei dy konstant, wegen $q = \frac{dp}{dy}$ wird $dq = \frac{ddp}{dy}$ sein; man wird also

$$yp^5dy^2 = 3dp^2 - pddp$$

haben. Aber wenn man $p = \frac{1}{r}$ setzt, wird

$$ydy^2 = rdr^2 + rrddr$$

werden, welche Gleichung, weil beide Variablen überall gleich viele, natürlich drei, Dimensionen haben, mit Hilfe meiner in „Tomo Commentariorum“ erklärten Methode behandelt werden kann. Man setze natürlich

$$y = e^{\int zdu} \quad \text{und} \quad r = e^{\int zdu} u,$$

während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus gleich 1 ist, es wird

$$dy = e^{\int z du} z du$$

und

$$ddy = 0 = e^{\int z du} (z ddu + du dz + z z du^2)$$

sein. Darauf ist

$$dr = e^{\int z du} (du + z u du)$$

und wegen $r = uy$ wird

$$ddr = 2du dy + y ddu = e^{\int z du} (ddu + 2z du^2)$$

sein. Aber es ist $ddu = -\frac{du dz}{z} - z du^2$, woher

$$ddr = e^{\int z du} \left(z du^2 - \frac{du dz}{z} \right)$$

wird. Diese Werte werden in die Gleichung

$$y dy^2 = r dr^2 + r r ddr$$

eingesetzt

$$z z du = u(1 + zu)^2 du + u u z du - \frac{u u dz}{z}$$

geben, auch wenn diese Gleichung eine differentiale ersten Grades ist, dennoch um Vieles schwerer behandelt wird als die vorgelegte Gleichung selbst; sie kann aber ein wenig einfacher gemacht werden, indem man $z = tu$ setzt, es wird nämlich

$$\frac{dt}{t} = t t u^3 du + 3 t u du - t t du$$

werden. Weil ja die vorgelegte Gleichung leicht erledigt werden wird, scheint die Integration dieser Gleichung daher hergeholt worden zu sein. Man setze weiter $t = \frac{1}{s}$, und die gefundene Gleichung wird in diese übergehen

$$s ds + 3 s u du = du(1 - u^3),$$

welche Gleichung sofort aus der vorgelegten gefunden wird, indem man

$$dx = \frac{du}{s} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{u du}{s}$$

setzt, es wird nämlich wegen des konstanten $\frac{du}{s}$

$$sddu = dsdu \quad \text{und} \quad \frac{ddy}{y} = \frac{u^2 du^2}{ss} + \frac{du^2}{s}$$

werden und

$$\frac{d^3y}{y} = \frac{u^3 du^3}{s^3} + \frac{3udu^3}{ss} + \frac{duddu}{s} = \frac{u^3 du^3}{s^3} + \frac{3udu^3}{ss} + \frac{du^2 ds}{ss},$$

welche Werte in die Gleichung $d^3y = ydx^3$ eingesetzt die gefundene Gleichung liefern werden

$$sds + 3sudu = du(1 - u^3).$$

§3 Die ganze Aufgabe wird auf die Integration dieser Gleichung zurückgeführt; dass diese integrierbar ist, ist auch daher klar, weil die Differentialgleichung dritten Grades, aus welcher sie entstanden ist, eine Integration zulässt. Wie aber diese Arbeit zu erledigen ist, wird in der sich weiter erstreckenden Gleichung gezeigt, die durch dieselbe Substitution aus dieser Differentialgleichung dritten Grades entsteht

$$A y dx^3 + B dx^2 dy + C dx ddy + D d^3 y = 0.$$

Es wird aber durch Setzen von

$$dx = \frac{du}{s} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{udu}{s}$$

diese Differentialgleichung ersten Grades hervorgehen

$$Dsds + sdu(C + 3Du) + du(A + Bu + Cuu + Du^3) = 0,$$

bei welcher ich zuerst bemerke, dass sie einen Wert dieser Art für $\alpha + \beta u + \gamma uu$ zulassen. Es wird nämlich $ds = \beta du + 2\gamma u du$ sein. Daher wird

$$\begin{array}{rcccc} \frac{Dsds}{du} & = D\alpha\beta & + 2D\alpha\gamma u & + 2D\beta\gamma u^2 & + 2D\gamma^2 u^3 \\ & & + D\beta\beta u & + D\beta\gamma u^2 & \\ s(C + 3Du) & = C\alpha & + C\beta u & + C\gamma uu & \\ & & + 3D\alpha u & + 3D\beta u^2 & + D\gamma u^3 \\ A + Bu + Cu^2 + Du^3 & = A & + Bu & + Cu^2 & + Du^3 \end{array}$$

Man setze nun die einzelnen homologen Terme gleich 0, und es wird zuerst $1 + 3\gamma + 2\gamma^2 = 0$ werden. Daher wird entweder $1 + \gamma = 0$ oder $1 + 2\gamma = 0$. Darauf ist

$$3D\beta(\gamma + 1) + C(\gamma + 1) = 0,$$

welcher Gleichung auch $\gamma + 1 = 0$ genügt, es wird also $\gamma = -1$ sein. Weiter wird

$$D\alpha = -B - C\beta - D\beta^2 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{-B - C\beta - D\beta^2}{D}$$

werden. Man setze diesen Wert in die Gleichung

$$D\alpha\beta + C\alpha + A = 0 \quad \text{oder} \quad D^2\alpha\beta + CD\alpha + AD = 0$$

ein und es wird

$$\begin{aligned} & -BD\beta - CD\beta^2 - DD\beta^3 = 0 \\ & -BC - CC\beta - CD\beta^2 \\ & +AD \end{aligned}$$

sein. Um also β zu finden, muss diese kubische Gleichung aufgelöst werden. Wenn aber α gesucht wird, wird

$$D^2\alpha^3 + BD\alpha^2 + AC\alpha + A^2 = 0$$

sein. Es sei $\alpha = \frac{A\omega}{D}$, es wird

$$A\omega^3 + B\omega^2 + C\omega + D = 0$$

werden. Es sei also ω eine Wurzel dieser kubischen Gleichung, es wird

$$\alpha = \frac{A\omega}{D}, \quad \beta = \frac{-D - C\omega}{D\omega} \quad \text{und} \quad \gamma = -1$$

werden und

$$s = \frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega},$$

weiter wird

$$x = \int \frac{du}{s} = \int \frac{D\omega du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}$$

werden und

$$\ln y = \int \frac{u du}{s} = \int \frac{D\omega u du}{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}.$$

Auch wenn wir aber die Arbeit diese Formeln zu integrieren aufbringen würden, würden wir dennoch nur ein partikuläres Integral erhalten und daher wäre die ganze Aufgabe immer noch nicht erledigt. Denn der hier gefundene Wert von s schöpft die Gleichung nicht aus, weil in ihm keine neue Konstante auftaucht, die in der Gleichung selbst nicht enthalten ist. Aber nachdem ein partikulärer Wert von s bekannt geworden ist, wird aus ihm der vollständige Wert auf die folgende Weise gefunden werden. Man setze den schon gefundenen Wert

$$\frac{A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2}{D\omega} = V$$

und man setze $s = V + z$, sodass

$$ds = dV + dz$$

ist, und es wird

$$\left. \begin{array}{l} DVdV + DVdz + Dz dV + Dz dz \\ + CVdu + Cz du \\ + 3DVudu + 3Duz du \\ + (A + Bu + Cuu + Du^3) du \end{array} \right\} = 0$$

hervorgehen. Weil aber per Annahme

$$DVdV + Vdu(C + 3Du) + du(A + Bu + Cu^2 + Du^3) = 0$$

ist, wird

$$Dz dz + z(Cdu + 3Dudu + DdV) + DVdz = 0$$

sein. Aber wegen

$$V = \frac{A\omega}{D} - \frac{u}{\omega} - \frac{Cu}{D} - uu$$

wird

$$dV = -\frac{du}{\omega} - \frac{Cdu}{D} - 2udu$$

sein und

$$Dz dz + z \left(-\frac{Ddu}{\omega} + Dudu \right) + \frac{dz}{\omega} (A\omega^2 - (D + C\omega)u - D\omega u^2) = 0$$

oder

$$zdz + zdu \left(u - \frac{1}{\omega} \right) + dz \left(\frac{A\omega}{D} - \frac{(D + C\omega)u}{D\omega} - uu \right) = 0;$$

wenn diese Gleichung nicht richtig behandelt wird, wird sie schwer auf die Trennung der Variablen geführt. Dennoch ist sie wiederum in dieser allgemeinen Form enthalten, die die Trennung der Variablen zulässt:

$$zdz + zdu(u + a) = dz(uu + 2bu + c).$$

Um diese zu trennen, setze ich $dz = pdu$ und es wird

$$z = \frac{(uu + 2bu + c)p}{p + u + a}$$

werden und durch Differentieren

$$dz = pdu = \frac{(u + a)(uu + 2bu + c)dp + pdu(2p(u + b) + uu + 2au + 2ab - c)}{(p + u + a)^2}$$

oder

$$pdu(pp + 2ap + 2bp + aa - 2ab + c) = (u + a)(uu + 2bu + c)dp,$$

in welcher die Variablen von selbst voneinander getrennt werden; es wird nämlich

$$\frac{dp}{p(pp + 2(a - b)p + aa - 2ab + c)} = \frac{du}{(u + a)(uu + 2bu + c)}$$

sein. Die Arbeit würde aber höchst aufwendig werden, wenn wir diese Gleichung integrieren und daher das Integral der Differentialgleichung dritten Grades finden wollten.

§4 Es ist daher klar mit wie großer Arbeit, indem man Regeln dieser Art folgt, schließlich das Integral dieser Differentialgleichung dritten Grades gefunden werden kann, woher die Nützlichkeit meiner im 7. Band der „Miscellaneorum“ erörterten Methode nicht unwesentlich erkannt wird. Umso mehr wird ihre Nützlichkeit ins Auge springen, wenn anstelle der Differentialgleichung dritten Grades eine andere, die vierten oder höheren Grades sei, auf die gewohnte Weise behandelt wird; dann werden nämlich die hier verwendeten Substitutionen nicht eine Differentialgleichung ersten Grades, sondern zweiten oder

höheren Grades liefern, deren Integral durch irgendwelche Kunstgriffe gefunden werden können wird. Und obwohl man schließlich auch das Integral dieser Gleichung fände, wäre es dennoch meistens nur partikulär und liefert nach aufwendigsten Substitutionen das Integral der vorgelegten Gleichung selbst, und zwar nur ein partikuläres, während meine Methode fast ohne irgendeine Arbeit sofort das vollständige Integral liefert. Damit das besser verstanden wird, wollen wir die zuvor angegebene Substitution in dieser Differentialgleichung vierten Grades benutzen

$$Aydx^4 + Bdx^3dy + Cdx^2ddy + Ddx^3y + Ed^4y = 0,$$

in welcher dx konstant gesetzt wird. Es sei also

$$dx = \frac{du}{s} \quad \text{oder} \quad du = sdx \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{udu}{s} = udx,$$

es wird wegen des konstanten dx

$$\frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2} = dxdu = sdx^2$$

sein, und daher

$$\frac{ddy}{y} = u^2dx^2 + sdx^2.$$

Daher wird weiter

$$\frac{d^3y}{y} - \frac{dyddy}{y^2} = 2usdx^3 + dsdx^2 \quad \text{und} \quad \frac{d^3y}{y} = u^3dx^3 + 3usdx^3 + dsdx^2$$

werden und wiederum wird durch Differentieren

$$\frac{d^4y}{y} - \frac{dyd^3y}{yy} = 3uusdx^4 + 3udx^3ds + 3ssdx^4 + dx^2dds$$

hervorgehen und daher

$$\frac{d^4y}{y} = u^4dx^4 + 6uusdx^4 + 4udx^3ds + 3ssdx^4 + dx^2dds.$$

Nach Einsetzen dieser Werte in diese Gleichung

$$Adx^2 + \frac{Bdx^3dy}{y} + \frac{Cddy}{y} + \frac{Dd^3y}{ydx} + \frac{Ed^4y}{ydx^2} = 0$$

wird diese Gleichung hervorgehen

$$A dx^2 + B u dx^2 + C u^2 dx^2 + C s dx^2 + D u^3 dx^2 + 3 D u s dx^2 + D dx ds + E u^4 dx^2 + 6 E u u s dx^2 + 4 E u dx ds + 3 E s s dx^2 + E d d s = 0.$$

Weil aber $dx = \frac{du}{s}$ ist, wird

$$du^2(A + B u + C u^2 + D u^3 + E u^4) + s du^2(C + 3 D u + 6 E u u) + 3 E s s du^2 + s du ds(D + 4 E u) + E s s d d s = 0$$

sein. Es ist freilich klar, dass dieser Gleichung genügt wird, wenn $s = 0$ ist und u eine Wurzel dieser Gleichung

$$A + B u + C u^2 + D u^3 + E u^4 = 0.$$

Es sei also α eine von den Wurzeln dieser Gleichung und indem man $u = \alpha$ nimmt, wird $\frac{dy}{y} = \alpha dx$ und $y = e^{\alpha x}$ sein, welcher Wert auch immer dieser vorgelegten Differentialgleichung vierten Grades genügen wird. Das Integral wird aber nur besonders partikulär sein; auch wenn aber die vier Wurzeln der Gleichung

$$A + B u + C u u + D u^3 + E u^4 = 0,$$

die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sein, den Wert

$$y = \mathfrak{A} e^{\alpha x} + \mathfrak{B} e^{\beta x} + \mathfrak{C} e^{\gamma x} + \mathfrak{D} e^{\delta x}$$

liefern, welcher das vollständige Integral ist, ist dennoch nicht leicht klar, wie der Wert von y beschaffen sein wird, wenn gewisse der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ imaginär waren oder einander gleich. Aber es wird im Gegenteil aus dem bekannten Wert von y das Integral der oberen Differenzen-Differentialgleichung zwischen u und s angegeben werden. Es wird nämlich

$$u = \frac{dy}{y dx} \quad \text{und} \quad s = \frac{du}{dx}$$

sein, und daher

$$u = \frac{\mathfrak{A} \alpha e^{\alpha x} + \mathfrak{B} \beta e^{\beta x} + \mathfrak{C} \gamma e^{\gamma x} + \mathfrak{D} \delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A} \alpha e^{\alpha x} + \mathfrak{B} \beta e^{\beta x} + \mathfrak{C} \gamma e^{\gamma x} + \mathfrak{D} \delta e^{\delta x}}$$

und

$$s = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha - \beta)^2 e^{(\alpha+\beta)x} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha - \gamma)^2 e^{(\alpha+\gamma)x}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x})^2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{D}(\alpha - \delta)^2 e^{(\alpha+\delta)x} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}(\beta - \gamma)^2 e^{(\beta+\gamma)x} + \text{etc}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x})^2}.$$

Daher folgert man, dass

$$s + uu = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{A}^2 \alpha^2 e^{2\alpha x} + \mathfrak{B}^2 \beta^2 e^{2\beta x} + \mathfrak{C}^2 \gamma^2 e^{2\gamma x} + \mathfrak{D}^2 \delta^2 e^{2\delta x}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x})^2} \\ + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2 + \beta^2) e^{(\alpha+\beta)x} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}(\alpha^2 + \gamma^2) e^{(\alpha+\gamma)x}}{(\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x})^2} + \text{etc} \end{array} \right.$$

sein wird, welcher Bruch gekürzt werden kann, und es wird

$$s + uu = \frac{\mathfrak{A}\alpha^2 e^{\alpha x} + \mathfrak{B}\beta^2 e^{\beta x} + \mathfrak{C}\gamma^2 e^{\gamma x} + \mathfrak{D}\delta^2 e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

sein. Weil nun

$$u = \frac{\mathfrak{A}\alpha e^{\alpha x} + \mathfrak{B}\beta e^{\beta x} + \mathfrak{C}\gamma e^{\gamma x} + \mathfrak{D}\delta e^{\delta x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x}}$$

ist, wenn daher x , was aber tatsächlich nicht gemacht werden kann, eliminiert wird, wird eine Gleichung zwischen s und u hervorgehen. Wenn natürlich $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{D} = 0$ gesetzt wird, wird diese partikuläre Integralgleichung hervorgehen

$$s + uu - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta = 0.$$

Wenn daher α und β zwei Wurzeln dieser Gleichung waren

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 = 0,$$

wird dieser Differenzen-Differentialgleichung zwischen s und u dieser Wert genügen

$$s = -\alpha\beta + (\alpha + \beta)u - uu.$$

In jener Gleichung ist aber nicht du , sondern $\frac{du}{s}$ konstant gesetzt, welche Betrachtung sich durch Setzen von $ds = qdu$ erkennen lässt; es wird nämlich $\frac{ds}{qs}$ konstant sein und daher

$$qsdds = qds^2 + sdsdq \quad \text{und} \quad dds = \frac{ds^2}{s} + \frac{dsdq}{q};$$

man setze nun du konstant, es wird

$$dq = \frac{dds}{du} \quad \text{und} \quad \frac{dq}{q} = \frac{dds}{ds}$$

sein, woher

$$dds = \frac{ds^2}{s} + dds$$

wird. Es wird also diese Gleichung hervorgehen

$$\begin{aligned} du^2(A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4) + sdu^2(C + 3Du + 6Eu^2) + 3Essdu^2 \\ + sdu ds(D + 4Eu) + Esds^2 + Essdds = 0, \end{aligned}$$

in welcher das Differential du konstant angenommen wurde. Wenn daher nun der trinomiale Faktor der Formel

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4$$

gleich

$$L + Mu + Nu^2$$

ist, wird das partikuläre Integral

$$L + Mu + Nu^2 + Ns = 0$$

sein.

§5 Weil ich aber hier beschlossen habe, meine Methode Differentialgleichungen höherer Grade zu integrieren weiter zu erstrecken, möchte ich die Regel, die ich an erwähnter Stelle gegeben habe, ein wenig wiederholen. Meine Methode erstreckt sich aber auf alle Gleichungen, die in dieser allgemeinen enthalten sind

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc},$$

wo das Differential dx konstant gesetzt ist. Um das Integral dieser Gleichung in endlichen Termen ausgedrückt zu finden, bilde man aus ihr die folgende algebraische Form

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \text{etc},$$

von welcher man alle einfachen wie trinomiale reelle Faktoren suche, unter welchen, wenn sie einander gleich waren, sie zusammengefasst darstelle. Aus einem beliebigen Faktor wird aber ein Teil des Integrals entstehen, und, wenn diese aus den einzelnen Faktoren zu entstehende Teile zu einer Summe zusammengefasst werden, wird man das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung haben. Aus der folgenden Tabelle werden die aus den einzelnen Faktoren zu entstehenden Teile des Integrals ausgesucht werden:

Faktoren	Teile des Integrals
$z - k$	αe^{kx}
$(z - k)^2$	$(\alpha + \beta x) e^{kx}$
$(z - k)^3$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) e^{kx}$
$(z - k)^4$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) e^{kx}$
etc	etc
$zz - 2kz \cos \phi + kk$	$\alpha e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi +$ $\mathfrak{A} e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi$
$(zz - 2kz \cos \phi + kk)^2$	$(\alpha + \beta x) e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi +$ $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x) e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi$
$(zz - 2kz \cos \phi + kk)^3$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi +$ $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x + \mathfrak{C} x^2) e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi$
$(zz - 2kz \cos \phi + kk)^4$	$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi +$ $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x + \mathfrak{C} x^2 + \mathfrak{D} x^3) e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi$
etc	etc

In diesen Formeln bezeichnen die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \text{etc}$ beliebige konstante Größen. Daher ist beim Sammeln der Teile des Integrals dafür zu sorgen, dass man nicht denselben dieser Buchstaben zweimal schreibt, weil andernfalls die Weite des Integrals eingeschränkt werden würde. Es wird also nötig sein, dass diese Konstanten immer mit neuen Buchstaben bezeichnet werden, und auf diese Weise werden in die Integralgleichung so viele beliebige Konstanten eingehen, von welchem Grad die vorgelegte Differentialgleichung war. Dies ist ein sicheres Zeichen, dass das auf diese Weise gefundene Integral

vollständig ist und in der Differentialgleichung nichts enthalten ist, was nicht auch zugleich in dieser Differentialgleichung enthalten ist. Im Übrigen habe ich an dieser Stelle, wo ich diese Methode genauer erörtert habe, sie an vielen Beispielen illustriert, sodass ihre Anwendungen keine Schwierigkeiten machen kann.

§6 Die allgemeinere Gleichung, deren Integration ich hier angeben werde, während X irgendeine Funktion von x bezeichnet, verhält sich so

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc},$$

in welcher wiederum das Differential dx konstant angenommen wurde. Aus wie vielen Termen diese Gleichung besteht, oder bis zu welchem Grad von Differentialen sie auch immer ansteigt, ich versichere, dass sie immer durch endliche Größen integriert werden kann, genauso wie die zuvor erwähnte Gleichung, die als bestimmter Fall aus dieser entsteht, wenn $X = 0$ war. Und zuerst ist freilich klar, dass die Sache keine Schwierigkeiten machen wird, wenn X eine ganze rationale Funktion war, oder wenn sie eine Form dieser Art hat

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc}.$$

Wenn daher nämlich die Funktion X so beschaffen ist, wende man eine Substitution von dieser Art an

$$y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc} + v,$$

und es wird

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + \text{etc} + \frac{dv}{dx} \\ \frac{ddy}{dx^2} &= 2\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D}x + \text{etc} + \frac{ddv}{dx^2} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= 6\mathfrak{D} + \text{etc} + \frac{d^3v}{dx^3} \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \text{etc} + \frac{d^4v}{dx^4} \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

sein. Wir wollen aber setzen, dass

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

ist und im Wert von y werden alle Terme nach $\mathfrak{D}x^3$ verschwindend zu setzen sein. Nach diese Substitution wird man also haben

$$\begin{aligned} & \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = \\ & \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}Ax + \mathfrak{C}Ax^2 + \mathfrak{D}Ax^3 + Av + \frac{Bdv}{dx} + \frac{Cddv}{dx^2} + \frac{Dd^3v}{dx^3} + \frac{Ed^4v}{dx^4} + \text{etc} \\ & + \mathfrak{B}B + 2\mathfrak{C}Bx + 3\mathfrak{D}Bx^2 \\ & + 2\mathfrak{C}C + 6\mathfrak{D}Cx \\ & + 6\mathfrak{D}D. \end{aligned}$$

Diese Koeffizienten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} werden nun so bestimmt werden können, dass alle Terme, in denen v oder sein Differential nicht enthalten ist, verschwinden; es wird nämlich werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{\delta}{A} \\ \mathfrak{C} &= \frac{\gamma}{A} - \frac{3\mathfrak{D}B}{A} = \frac{\gamma}{A} - \frac{3\delta B}{AA} \\ \mathfrak{B} &= \frac{\beta}{A} - \frac{2\mathfrak{C}B}{A} - \frac{6\mathfrak{D}C}{A} = \frac{\beta}{A} - \frac{2\gamma B}{A^2} + \frac{6\delta B^2}{A^3} - \frac{6\delta C}{AA} \\ \mathfrak{A} &= \frac{\alpha}{A} - \frac{\mathfrak{B}B}{A} - \frac{2\mathfrak{C}C}{A} - \frac{6\mathfrak{D}D}{A} \\ &= \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta B}{A^2} + \frac{2\gamma B^2}{A^3} + \frac{12\delta BC}{A^3} - \frac{6\delta B^3}{A^4} - \frac{2\gamma C}{A^2} - \frac{6\delta D}{A^2} \end{aligned}$$

Nachdem also diese Werte für \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} angenommen worden sind, wird

$$0 = Av + \frac{Bdv}{dx} + \frac{Cddv}{dx^2} + \frac{Dd^3v}{dx^3} + \frac{Ed^4v}{dx^4} + \text{etc}$$

sein, welche Gleichung mit Hilfe der obigen Methode integriert werden wird.

§7 Damit wir aber leicht das Integral der vorgelegten Gleichung finden, was auch immer X für eine Funktion von x war, wollen wir mit den einfachen Fällen beginnen, und es sei freilich zuerst die Differentialgleichung nur von erstem Grad

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx},$$

welche klar ist integrierbar gemacht werden zu können, wenn die nur mit einer Form dieser Art $e^{ax}dx$ multipliziert wird, während e die ganze Zahl

bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus gleich 1 ist. Es wird nämlich

$$e^{\alpha x} X dx = Ae^{\alpha x} y dx - Be^{\alpha x} dy$$

werden. Und α muss so beschaffen sein, dass der zweite Teil das Differential einer bestimmten endlichen Größe ist, die aus dem letzten Term keine andere sein kann als $Be^{\alpha x} y$; weil deren Differential gleich

$$Be^{\alpha x} dy + \alpha Be^{\alpha x} y dx$$

ist, ist es nötig, dass $A = \alpha B$ ist und $\alpha = \frac{A}{B}$. Nachdem also dieser Wert für α genommen wurde, wird

$$\int e^{\alpha x} X dx = Be^{\alpha x} y \quad \text{und} \quad y = \frac{\alpha}{A} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx$$

sein.

§8 Es sei also die vorgelegte Differentialgleichung vom zweiten Grad

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}.$$

Man multipliziere sie mit $e^{\alpha x} dx$ und bestimme α so, dass die Integration gelingt. Man wird also

$$e^{\alpha x} X dx = Ae^{\alpha x} y dx + Be^{\alpha x} dy + \frac{Ce^{\alpha x} ddy}{dx}$$

haben, deren Integral

$$\int e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x} \left(A'y + \frac{B'dy}{dx} \right)$$

sei. Nach Differenzieren wird man

$$e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x} \left(\alpha A'y dx + A'dy + \frac{B'ddy}{dx} + \alpha B'dy \right)$$

haben. Nach Anstellung eines Vergleiches wird also

$$B' = C, \quad A' = B - \alpha C \quad \text{und} \quad A = \alpha B - \alpha^2 C$$

werden, es muss also α eine Wurzel dieser Gleichung

$$0 = A - \alpha B + \alpha^2 C$$

sein; weil diese zwei Wurzeln hat, lässt sich eine beliebige der beiden annehmen und es wird $A' = B - \alpha C$ und $B' = C$ sein. Man ist also zu dieser Differentialgleichung ersten Grades gelangt

$$e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx = A'y + \frac{B'dy}{dx}.$$

Um diese erneut zu integrieren, multipliziere man mit $e^{\beta x} dx$, sodass man

$$e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = A'e^{\beta x} y dx + B'e^{\beta x} dy$$

hat; damit diese integrierbar ist, muss

$$\beta = \frac{A'}{B'} = \frac{B - \alpha C}{C} \quad \text{oder} \quad \alpha + \beta = \frac{B}{C}$$

sein, woher klar ist, dass β die eine Wurzel der Gleichung

$$0 = A - \alpha B + \alpha^2 C$$

sein muss und das Integral wird

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = B'e^{\beta x} y = Ce^{\beta x} y$$

sein. Es ist aber

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta - \alpha} \int e^{\alpha x} X dx - \frac{1}{\beta - \alpha} \int e^{\beta x} X dx,$$

also

$$Cy = \frac{e^{-\alpha x}}{\beta - \alpha} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha - \beta} \int e^{\beta x} X dx.$$

In dieser Integralgleichung sind also die beiden Wurzeln α und β der quadratischen Gleichung

$$0 = A - Bz + Cz^2$$

in gleicher Weise enthalten und deswegen, wenn die Wurzeln dieser Gleichung bekannt sind, wird aus ihnen sofort die Integralgleichung gebildet. Aber diese Gleichung

$$0 = A - Bz + Cz^2$$

wird aus der vorgelegten Gleichung

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$$

natürlich sehr leicht auf die gleiche Weise gebildet werden, die wir im Fall $X = 0$ benutzt haben. Man setze nämlich

$$1 \text{ für } y, z \text{ für } \frac{dy}{dx} \text{ und } z^2 \text{ für } \frac{ddy}{dx^2},$$

sodass dieser Ausdruck $A + Bz + Cz^2$ hervorgeht; wenn dessen Faktoren $C(z + \alpha)(z + \beta)$ waren, werden α und β die Buchstaben selbst sein, die erfordert sind, um die Integralgleichung zu bilden.

§9 Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, wird der Zugang zur Integration der Integralgleichung nicht so schwer sein. Es sei also diese Gleichung vorgelegt

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc},$$

deren letzter Term $\frac{\Delta d^n y}{dx^n}$ sei. Man bilde daher diesen Ausdruck auf die zuvor angegebene Weise

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots + \Delta z^n = P,$$

welche in einfache Faktoren aufgelöst werden sei

$$P = \Delta(z + \alpha)(z + \beta)(z + \gamma)(z + \delta)\text{etc}.$$

Ich sage nun, wenn die vorgelegte Differentialgleichung mit $e^{\alpha x} dx$ multipliziert wird, dass sie integrierbar wird. Es wird nämlich

$$e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x} dx \left(Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \dots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n} \right)$$

sein, deren Integral wir setzen wollen

$$\int e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x} \left(A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'ddy}{dx^2} + \frac{D'd^3y}{dx^3} + \dots + \frac{\Delta d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right)$$

zu sein. Nach Nehmen des Differentials wird man aber

$$e^{\alpha x} X dx = e^{\alpha x} dx \left(\alpha A' y + \frac{A' dy}{dx} + \frac{B' ddy}{dx^2} + \frac{C' d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n} \right) \\ + \frac{\alpha B' dy}{dx} + \frac{\alpha C' ddy}{dx^2} + \dots$$

haben, und wenn diese mit der vorgelegten verglichen wird,

$$A' = \frac{A}{\alpha} \\ B' = \frac{B}{\alpha} - \frac{A}{\alpha^2} \\ C' = \frac{C}{\alpha} - \frac{B}{\alpha^2} + \frac{A}{\alpha^3} \\ D' = \frac{D}{\alpha} - \frac{C}{\alpha^2} + \frac{B}{\alpha^3} - \frac{A}{\alpha^4}$$

sein wird; nachdem diese Werte bis hin zum letzten fortgesetzt worden sind, wird man zu dieser Gleichung gelangen

$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + E\alpha^4 - \dots \pm \Delta\alpha^n = 0;$$

weil also α eine Wurzel dieser Gleichung ist, wird $z + \alpha$ ein Faktor dieses Ausdruckes sein

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots + \Delta z^n,$$

während $P = \Delta(z + \alpha)(z + \beta)(z + \gamma)(z + \delta)$ etc ist.

§10 Nachdem also die erste Integration ausgeführt worden ist, wird

$$e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx = A' y + \frac{B' dy}{dx} + \frac{C' ddy}{dx^2} + \frac{D' d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{\Delta d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

sein. Man bilde daher wiederum auf die zuvor erwähnte Art diesen Ausdruck

$$P' = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \dots + \Delta z^{n-1}.$$

Weil nun

$$A = \alpha A' \\ B = \alpha B' + A' \\ C = \alpha C' + B' \\ D = \alpha D' + C' \\ \text{etc}$$

ist, ist klar, dass $P = (\alpha + z)P'$ sein wird und daher

$$P' = \frac{P}{z + \alpha} \quad \text{und}$$

$$P' = \Delta(z + \beta)(z + \gamma)(z + \delta)(z + \varepsilon)\text{etc.}$$

Auf die gleiche Weise, die wir oben benutzt haben, findet man also, dass diese Gleichung erneut integrierbar gemacht wird, wenn sie mit $e^{\beta x} dx$ multipliziert wird. Es sei also die daher zu entstehende Integralgleichung

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = e^{\beta x} \left(A'' y + \frac{B'' dy}{dx} + \frac{C'' ddy}{dx^2} + \dots + \frac{\Delta d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \right)$$

und es wird nach Anstellung eines Vergleiches

$$\begin{aligned} A' &= \beta A'' \\ B' &= \beta B'' + A'' \\ C' &= \beta C'' + B'' \\ D' &= \beta D'' + C'' \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

werden. Wenn also

$$P'' = A'' + B'' z + C'' z^2 + D'' z^3 + \dots + \Delta z^{n-2}$$

gesetzt wird, wird $P' = (\beta + z)P''$ und

$$P'' = \frac{P'}{z + \beta} = \frac{P}{(z + \alpha)(z + \beta)}$$

sein, woher

$$P'' = \Delta(z + \gamma)(z + \delta)(z + \varepsilon)\text{etc}$$

wird; daher sind nun natürlich die zwei Faktoren $z + \alpha$ und $z + \beta$ eingegangen. Es ist aber

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta - \alpha} \int e^{\alpha x} X dx - \frac{1}{\beta - \alpha} \int e^{\beta x} X dx,$$

woher die Gleichung zweimal integriert auf diese Form zurückgeführt wird

$$\begin{aligned} &\frac{e^{-\alpha x}}{\beta - \alpha} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\alpha - \beta} \int e^{\beta x} X dx \\ &= A'' y + \frac{B'' dy}{dx} + \frac{C'' ddy}{dx^2} + \frac{D'' d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{\Delta d^{n-2} y}{dx^{n-2}}. \end{aligned}$$

§11 Weil daher weiter, nachdem 1 für y und z für $\frac{dy}{dx}$ etc gesetzt wurde, dieser Ausdruck hervorgeht

$$P'' = A'' + B''z + C''z^2 + \dots + \Delta z^{n-2}$$

und

$$P'' = \Delta(z + \gamma)(z + \delta)(z + \varepsilon)\text{etc}$$

ist, ist es klar, dass die zuletzt gefundene Gleichung erneut integrierbar gemacht wird, wenn sie mit $e^{\gamma x} dx$ multipliziert wird. Es sei also die daher zu entstehende Integralgleichung diese

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^{(\gamma-\alpha)x} dx}{\beta - \alpha} \int e^{\alpha x} X dx + \int \frac{e^{(\gamma-\beta)x} dx}{\alpha - \beta} \int e^{\beta x} X dx \\ & = e^{\gamma x} \left(A''' y + \frac{B''' dy}{dx} + \frac{C''' ddy}{dx^2} + \dots + \frac{\Delta d^{n-3} y}{dx^{n-3}} \right), \end{aligned}$$

und es wird aus dem Vergleich der homogenen Terme

$$\begin{aligned} A'' &= \gamma A''' \\ B'' &= \gamma B''' + A''' \\ C'' &= \gamma C''' + B''' \\ D'' &= \gamma D''' + C''' \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

sein. Wenn daher

$$P''' = A''' + B'''z + C'''z^2 + D'''z^3 + \dots + \Delta z^{n-3}$$

gesetzt wird, wird

$$P'' = (\gamma + z)P''' \quad \text{und} \quad P''' = \frac{P''}{z + \gamma} = \frac{P}{(z + \alpha)(z + \beta)(z + \gamma)}$$

sein, woher folgt, dass

$$P''' = \Delta(z + \delta)(z + \varepsilon)(z + \zeta)\text{etc}$$

sein wird. Weil aber allgemein

$$\int e^{(\mu-\nu)x} dx \int e^{\nu x} X dx = \frac{e^{(\mu-\nu)x}}{\mu - \nu} \int e^{\nu x} X dx + \frac{1}{\nu - \mu} \int e^{\mu x} X dx$$

ist, wird man, wenn daher die Integrale zurückgeführt werden,

$$\frac{e^{-\alpha x}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} \int e^{\beta x} X dx + \frac{e^{-\gamma x}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \int e^{\gamma x} X dx$$

$$= A''' y + \frac{B''' dy}{dx} + \frac{C''' ddy}{dx^2} + \frac{D''' d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{\Delta d^{n-3} y}{dx^{n-3}}$$

finden.

§12 Wenn wir nun auf diese Weise bis dorthin fortschreiten, bis weiter keine Differentiale von y übrig sind, dann wird man aus dem anderen Teil der Gleichung den einzigen Term $\frac{\Delta d^0 y}{dx^0} = \Delta y$ haben, was passieren wird, wenn die Integration sooft ausgeführt wurde, wie der größte Exponent n Einheiten enthält. Um also dieses letzte Integral angenehm auszudrücken, weil

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + \Delta z^n = \Delta(z + \alpha)(z + \beta)(z + \gamma) \text{etc}$$

ist, bilde man aus den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc}$ die folgenden Werte

$$\mathfrak{A} = \Delta(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)(\varepsilon - \alpha) \text{etc}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(\delta - \beta)(\varepsilon - \beta) \text{etc}$$

$$\mathfrak{C} = \Delta(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\delta - \gamma)(\varepsilon - \gamma) \text{etc}$$

$$\mathfrak{D} = \Delta(\alpha - \delta)(\beta - \delta)(\gamma - \delta)(\varepsilon - \delta) \text{etc}$$

$$\mathfrak{E} = \Delta(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)(\delta - \varepsilon) \text{etc}$$

etc,

nach Termen welcher Werte die letzte gesuchte Integralgleichung

$$y = \frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\mathfrak{B}} \int e^{\beta x} X dx + \frac{e^{-\gamma x}}{\mathfrak{C}} \int e^{\gamma x} X dx + \text{etc}$$

sein wird; weil diese so viele Terme enthält, von welchem Grad die vorgelegte Differentialgleichung

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{\Delta d^n y}{dx^n}$$

war, wird sie genauso viele beliebige Konstanten involvieren, und daher wird das die vollständige Integralgleichung sein.

§13 Die Werte der Größen \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , etc können aber auf andere Weise ausgedrückt werden, die meistens um Vieles gefälliger die Aufgabe erledigt. Ich sage nämlich, dass $\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz}$ sein wird, wenn überall $-\alpha$ für z eingesetzt wird, oder wenn $z + \alpha = 0$ gesetzt wird. Weil nämlich

$$P = \Delta(z + \alpha)(z + \beta)(z + \gamma)(z + \delta)\text{etc}$$

ist, wird durch Differentieren

$$\frac{dP}{dz} = \Delta(z + \beta)(z + \gamma)(z + \delta)\text{etc} + \frac{\Delta(z + \alpha)}{dz}d(z + \beta)(z + \gamma)(z + \delta)\text{etc}$$

sein. Wenn nun $z = -\alpha$ gesetzt wird, wird das letzte Glied verschwinden, und das erste wird

$$\frac{dP}{dz} = \Delta(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)\text{etc} = \mathfrak{A}$$

geben. Weil aber $P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + \Delta z^n$ ist, wird

$$\frac{dP}{dz} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \dots + n\Delta z^{n-1}$$

sein; man setze also $z = -\alpha$, oder es sei $z + \alpha = 0$, es wird

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \text{etc} + \dots \pm n\Delta\alpha^{n-1}$$

sein, auf die gleiche Weise wird man finden, dass

$$\mathfrak{B} = B - 2C\beta + 3D\beta^2 - 4E\beta^3 + \dots \pm n\Delta\beta^{n-1}$$

$$\mathfrak{C} = B - 2C\gamma + 3D\gamma^2 - 4E\gamma^3 + \dots \pm n\Delta\gamma^{n-1}$$

etc

sein wird.

§14 Wenn also eine Gleichung dieser Art vorgelegt wird:

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc},$$

die integriert werden muss, bilde man vor allem aus ihr diesen algebraischen Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc},$$

von welchem man alle einfachen Faktoren suche, wovon einer $z + \alpha$ sei, und ein beliebiger Faktor wird den Teil des Integrals so geben, dass alle Teile, die auf diese Weise aus den einzelnen Faktoren gefunden werden, zusammen genommen den vollständigen endlichen Wert von y beschaffen. Wenn natürlich ein einfacher Faktor $z + \alpha$ gefunden wurde, dann suche die Größe \mathfrak{A} , sodass

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \text{etc}$$

ist, nach dem Fund von welcher der aus diesem Faktor $z + \alpha$ zu entstehende Teil des Integrals dieser sein wird

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\mathfrak{A}} = \int e^{\alpha x} X dx.$$

Daher erkennt man, wenn $z - \alpha$ der einfache Faktor der Form P war, dass dann

$$\mathfrak{A} = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \text{etc}$$

sein wird und der daher zu entstehende Teil des Integrals

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{-\alpha x} X dx$$

ist.

§15 Es ist aber übrig, dass wir zeigen, wie diese Teile des Integrals beschaffen sind, wenn einige der einfachen Faktoren entweder einander gleich oder imaginär waren. Aus Obigem ist nämlich klar, dass in jedem der beiden Fälle die Teile des Integrals auf eine spezielle Weise ausgeschmückt werden müssen, dass sie eine endliche und reelle Form erhalten. Es seien also zuerst die zwei Faktoren $z - \alpha$ und $z - \beta$ einander gleich oder $\beta = \alpha$, und es wird $\mathfrak{A} = 0$ wie $\mathfrak{B} = 0$ sein; und jeder der beiden Teile des Integrals wird unendlich werden; der eine freilich positiv, der andere negativ, sodass die Differenz endlich wird. Um diese zu finden, wollen wir $\beta = \alpha + \omega$ setzen, während ω eine verschwindende Größe bezeichnet. Weil also

$$\mathfrak{A} = \Delta(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)\text{etc} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon)\text{etc}$$

ist, wird, nachdem die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc negativ genommen wurden,

$$\mathfrak{A} = -\Delta\omega(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)\text{etc} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{B} = \Delta\omega(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)\text{etc}$$

sein. Dann wird aber

$$e^{\beta x} = e^{\alpha x + \omega x} = e^{\alpha x}(1 + \omega x) \quad \text{und} \quad e^{-\beta x} = e^{-\alpha x}(1 + \omega x)$$

sein. Daher wird der aus den beiden Faktoren $z - \alpha$ und $z - \beta$ zu entstehende Teil des Integrals

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{-\alpha x} X dx + \frac{e^{\alpha x}(1 + \omega x)}{\mathfrak{B}} \int e^{-\alpha x}(1 - \omega x) X dx$$

sein. Man setze

$$\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)\text{etc},$$

es wird

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'\omega \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\omega$$

sein, woher dieser Teil

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega} \left((1 + \omega x) \int e^{-\alpha x}(1 - \omega x) X dx - \int e^{-\alpha x} X dx \right) \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'\omega} \left(\omega x \int e^{-\alpha x} X dx - \omega \int e^{-\alpha x} X x dx \right) \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'} \left(x \int e^{-\alpha x} X dx - \int e^{-\alpha x} X x dx \right) \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'} \int dx \int e^{-\alpha x} X dx \end{aligned}$$

werden wird, welcher der aus dem quadratische Faktor $(z - \alpha)^2$ des Faktors P entstehende Teil ist.

§16 Der Wert von \mathfrak{A}' wird aber auf die folgende Weise gefälliger beschafft werden können. Wegen $\beta = \alpha$, weil

$$P = \Delta(z - \alpha)^2(z - \gamma)(z - \delta)(z - \varepsilon)\text{etc} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc}$$

ist, setze man

$$\Delta(z - \gamma)(z - \delta)(z - \varepsilon)\text{etc} = Q,$$

sodass der Wert von $Q \mathfrak{A}'$ liefert, wenn α anstelle von z gesetzt wird. Es wird also

$$P = (z - \alpha)^2 Q$$

sein und durch Differentieren

$$\frac{dP}{dz} = (z - \alpha)^2 \frac{dQ}{dz} + 2(z - \alpha)Q$$

und

$$\frac{ddP}{dz^2} = (z - \alpha)^2 \frac{ddQ}{dz^2} + 4(z - \alpha) \frac{dQ}{dz} + 2Q;$$

für $z = \alpha$ gesetzt wird nun

$$Q = \frac{ddP}{2dz^2} = \mathfrak{A}'$$

werden, und es wird \mathfrak{A}' entstehen, wenn $z = \alpha$ in $\frac{ddP}{2dz^2}$ gesetzt wird. Es ist aber

$$\frac{ddP}{dz^2} = C + 3Dz + 6Ez^2 + 10Fz^3 + 15Gz^4 + \text{etc},$$

woher

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc}$$

wird. Wenn daher in der vorgelegten Gleichung

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc}$$

der der daher gebildete Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc}$$

einen quadratischen Faktor $(z - \alpha)^2$ hat, nehme man

$$\mathfrak{A}' = C + 3D\alpha + 6E\alpha^2 + 10F\alpha^3 + 15G\alpha^4 + \text{etc}$$

und es wird der daher zu entstehende Teil des Integrals

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'} \int dx \int e^{-\alpha x} X dx$$

sein. Wenn aber die übrigen Faktoren der Formel P bekannt waren, natürlich

$$P = \Delta(z - \alpha)^2(z - \gamma)(z - \delta)(z - \varepsilon)\text{etc}, \quad \text{es wird}$$

$$\mathfrak{A}' = \Delta(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)\text{etc}$$

sein.

§17 Wir wollen nun setzen, dass drei Faktoren einander gleich sind, oder es sei darüber hinaus $\gamma = \alpha$; aber wegen der oben erörterten Gründe wollen wir $\gamma = \alpha + \omega$ setzen, es wird

$$\mathfrak{A}' = -\Delta\omega(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)(\alpha - \zeta)\text{etc} \quad \text{und} \\ \mathfrak{C} = \Delta(\gamma - \alpha)^2(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon)(\gamma - \zeta)\text{etc}$$

sein oder

$$\mathfrak{C} = \Delta\omega^2(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)(\alpha - \zeta)\text{etc.}$$

Es sei $\mathfrak{A}'' = \Delta(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)(\alpha - \zeta)\text{etc}$, es wird $\mathfrak{A}' = -\mathfrak{A}''\omega$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}''\omega^2$ sein. Nach diesen Substitutionen wird man schließlich diesen aus dem kubischen Faktor $(z - \alpha)^3$ zu entstehenden Teil des Integrals finden

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''} \int dx \int dx \int e^{-\alpha x} X dx,$$

während

$$\mathfrak{A}'' = D + 4E\alpha + 10F\alpha^2 + 20G\alpha^3 + \text{etc}$$

wird. Leichter wird dies aber sofort aus der Gleichheit der drei Faktoren gezeigt: Es seien nämlich irgendwelche drei Faktoren $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$, und für

$$\mathfrak{A} = \Delta(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)\text{etc} \\ \mathfrak{B} = \Delta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon)\text{etc} \\ \mathfrak{C} = \Delta(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon)\text{etc}$$

gesetzt werden die daher zu entstehenden Teile des Integrals

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{-\alpha x} X dx + \frac{e^{\beta x}}{\mathfrak{B}} \int e^{-\beta x} X dx + \frac{e^{\gamma x}}{\mathfrak{C}} \int e^{-\gamma x} X dx$$

sein. Man setze nun

$$\beta = \alpha + \omega \quad \text{und} \quad \gamma = \alpha + \phi,$$

während ω und ϕ verschwindende Größen werden, und für

$$\mathfrak{A}'' = \Delta(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)(\alpha - \zeta)\text{etc}$$

gesetzt wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''\omega\phi, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}''\omega(\omega - \phi) \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A}''\phi(\phi - \omega)$$

sein; dann wird aber

$$e^{\beta x} = e^{\alpha x} \left(1 + \omega x + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right), \quad e^{-\beta x} = e^{-\alpha x} \left(1 - \omega x + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right)$$

und

$$e^{\gamma x} = e^{\alpha x} \left(1 + \phi x + \frac{1}{2} \phi^2 x^2 \right), \quad e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x} \left(1 - \phi x - \frac{1}{2} \phi^2 x^2 \right)$$

sein. Nach Einsetzen dieser Werte gehen die drei Teile des Integrals über in

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}'' \omega \phi (\omega - \phi)} \left\{ \begin{array}{l} \int e^{-\alpha x} X dx (\omega - \phi + \phi + \omega \phi x + \frac{1}{2} \omega^2 \phi x^2 - \omega - \omega \phi x - \frac{1}{2} \omega \phi^2 x^2) \\ + \int e^{-\alpha x} X dx (-\omega \phi - \omega \omega \phi x + \omega \phi + \omega \phi \phi x) \\ + \int e^{-\alpha x} X x^2 dx (\frac{1}{2} \omega \omega \phi - \frac{1}{2} \omega \phi \phi); \end{array} \right.$$

nachdem hier durch Teilung die verschwindenden Buchstaben ω und ϕ weggeschafft wurden, wird der kubische Faktor $(z - \alpha)^3$ diesen Teil des Integrals geben

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''} \left(\frac{1}{2} x x \int e^{-\alpha x} X dx - x \int e^{-\alpha x} X x dx + \frac{1}{2} \int e^{-\alpha x} X x x dx \right),$$

welcher auf diese einfachere Form zurückgeführt wird

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}''} \int dx \int dx \int e^{-\alpha x} X dx,$$

während $\mathfrak{A}'' = D + 4E\alpha + 10F\alpha^2 + 20G\alpha^3 + \text{etc}$ wird, der Wert von \mathfrak{A}'' natürlich aus der Formel $\frac{d^3 P}{6dz^3}$ für $z = \alpha$ gesetzt entsteht.

§18 Indem man auf die gleiche Weise weiter fortschreitet, wird klar werden, dass vier einander gleiche Faktoren oder der Faktor $(z - \alpha)^4$ der Formel

$$P = A + Bz + Cz^2 + \text{etc}$$

diesen Teil des Integrals liefern wird:

$$\frac{e^{\alpha x} \int dx \int dx \int dx \int e^{-\alpha x} X dx}{E + 5F\alpha + 15G\alpha^2 + 35H\alpha^3 + \text{etc}'}$$

welcher Nenner aus der Formel $\frac{d^4 P}{24dz^4}$ entsteht, indem man $z = \alpha$ setzt. Es wäre überflüssig, für mehrere einfache einander gleiche Faktoren hier die

Teile des Integrals zu beschaffen, die aus selben gebildet werden, weil das Gesetz, nach welchem diese Teile gebildet werden, per se klar ist. Im Übrigen bereitet das Zusammenfallen mehrerer Integralzeichen in diesen Formeln keine Schwierigkeit, weil sie sehr leicht auf einfache Integrale zurückgeführt werden. Es ist nämlich

$$\int dx \int e^{-ax} X dx = \frac{x \int e^{-ax} X dx - \int e^{-ax} X dx}{1}$$

$$\int dx \int dx \int e^{-ax} X dx = \frac{x^2 \int e^{-ax} X dx - 2x \int e^{-ax} X dx + \int e^{-ax} X dx}{1 \cdot 2}$$

$$\int dx \int dx \int dx \int e^{-ax} X dx =$$

$$\frac{x^3 \int e^{-ax} X dx - 3x^2 \int e^{-ax} X dx + 3x \int e^{-ax} X dx - \int e^{-ax} X dx}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

etc.

§19 Nachdem diese gleichen Faktoren abgehandelt worden sind, gehe ich zu imaginären Faktoren über: Es seien also zwei Faktoren $z - \alpha$ und $z - \beta$ der Formel

$$P = \Delta(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)(z - \epsilon) \text{etc}$$

$$= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc}$$

imaginär, welche, weil nichts im Wege steht, multipliziert das reelle Produkt

$$zz - 2kz \cos \phi + kk$$

liefern; es wird also

$$\alpha = k \cos \phi + k\sqrt{-1} \sin \phi \quad \text{und}$$

$$\beta = k \cos \phi - k\sqrt{-1} \sin \phi$$

sein und irgendwelche Potenzen dieser Buchstaben werden sich so verhalten:

$$\alpha^n = k^n \cos n\phi + k^n \sqrt{-1} \sin n\phi$$

$$\beta^n = k^n \cos n\phi - k^n \sqrt{-1} \sin n\phi.$$

Nun wird zuerst

$$e^{\alpha x} = e^{kx \cos \phi} \left(1 + \frac{k\sqrt{-1}}{1} x \sin \phi - \frac{kk}{1 \cdot 2} x^2 \sin^2 \phi - \frac{k^3 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \sin^3 \phi + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \sin^4 \phi - \text{etc} \right)$$

sein und daher

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= e^{kx \cos \phi} (\cos kx \sin \phi + \sqrt{-1} \sin kx \sin \phi) \\ e^{\beta x} &= e^{kx \cos \phi} (\cos kx \sin \phi - \sqrt{-1} \sin kx \sin \phi) \\ e^{-\alpha x} &= e^{-kx \cos \phi} (\cos kx \sin \phi - \sqrt{-1} \sin kx \sin \phi) \\ e^{-\beta x} &= e^{-kx \cos \phi} (\cos kx \sin \phi + \sqrt{-1} \sin kx \sin \phi). \end{aligned}$$

Weil darauf

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + 5F\alpha^4 + \text{etc} \quad \text{und} \\ \mathfrak{B} &= B + 2C\beta + 3D\beta^2 + 4E\beta^3 + 5F\beta^4 + \text{etc} \end{aligned}$$

ist, wird man nach Einsetzen der oberen Wert für α und β

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= B + 2Ck \cos \phi + 3Dk^2 \cos 2\phi + 4Ek^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ &\quad + (2Ck \sin \phi + 3Dk^2 \sin 2\phi + 4Ek^3 \sin 3\phi + \text{etc}) \sqrt{-1} \\ \mathfrak{B} &= B + 2Ck \cos \phi + 3Dk^2 \cos 2\phi + 4Ek^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ &\quad - (2Ck \sin \phi + 3Dk^2 \sin 2\phi + 4Ek^3 \sin 3\phi + \text{etc}) \sqrt{-1} \end{aligned}$$

haben.

§20 Weil aber $z - \alpha$ und $z - \beta$ Faktoren der Formel

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc}$$

sind, wird

$$A + Bk \cos \phi + Ck^2 \cos 2\phi + Dk^3 \cos 3\phi + Ek^4 \cos 4\phi + \text{etc} = 0$$

und

$$Bk \sin \phi + Ck^2 \sin 2\phi + Dk^3 \sin 3\phi + Ek^4 \sin 4\phi + \text{etc} = 0$$

sein. Man setze nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= B + 2Ck \cos \phi + 3Dk^2 \cos 2\phi + 4Ek^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ \mathfrak{N} &= + 2Ck \sin \phi + 3Dk^2 \sin 2\phi + 4Ek^3 \sin 3\phi + \text{etc},\end{aligned}$$

und es wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}$$

werden und so werden die imaginären Anteile von den reellen getrennt sein. Weil nun aus beiden Faktoren $z - \alpha$ und $z - \beta$ diese Teile des Integrals entstehen

$$\frac{e^{\alpha x}}{\mathfrak{A}} \int e^{-\alpha x} X dx + \frac{e^{-\beta x}}{\mathfrak{B}} \int e^{-\beta x} X dx,$$

werden diese in diese Form übergehen

$$\frac{(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1})e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} X dx + (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1})e^{\beta x} \int e^{-\beta x} X dx}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}.$$

Aber es ist

$$e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} X dx = \begin{cases} +e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ -\sqrt{-1}e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \\ +\sqrt{-1}e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ +e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \end{cases}$$

$$e^{\beta x} \int e^{-\beta x} X dx = \begin{cases} +e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ +\sqrt{-1}e^{kx \cos \phi} \cos kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \\ +\sqrt{-1}e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ +e^{kx \cos \phi} \sin kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \end{cases}$$

Die beiden Integralanteile werden also, nachdem die imaginären Anteile sich gegenseitig aufgehoben haben, in diese Form übergehen

$$\begin{aligned}& \frac{2\mathfrak{M}e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} \left(\cos kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \right. \\ & \quad \left. + \sin kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \right) \\ & + \frac{2\mathfrak{N}e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} \left(\sin kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \right. \\ & \quad \left. - \cos kx \sin \phi \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \right),\end{aligned}$$

die auch auf diese Weise ausgedrückt werden kann

$$\frac{2e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{M} \cos kx \sin \phi + \mathfrak{N} \sin kx \sin \phi) \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ + (\mathfrak{M} \sin kx \sin \phi - \mathfrak{N} \cos kx \sin \phi) \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi. \end{array} \right.$$

Dieser Teil des Integrals entsteht aus dem trinomialen Faktor

$$zz - 2kz \cos \phi + kk$$

der Formel

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

§21 Wenn auf die gleiche Weise zwei trinomiale Faktoren einander gleich waren, oder wenn die Formel

$$P = A + Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc}$$

den Faktor $(zz - 2kz \cos \phi + kk)^2$ hatte, wird man den daher zu entstehenden Teil des Integrals aus den für gleiche einfache Faktoren der oben gefundenen Formeln finden. Man setze nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= C + 3Dk \cos \phi + 6Ek^2 \cos 2\phi + 10Fk^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ \mathfrak{N}' &= + 3Dk \sin \phi + 6Ek^2 \sin 2\phi + 10Fk^3 \sin 3\phi + \text{etc} \end{aligned}$$

und es wird der daher entstehende Teil des Integrals

$$\frac{2e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}'^2 + \mathfrak{N}'^2} \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{M}' \cos kx \sin \phi + \mathfrak{N}' \sin kx \sin \phi) \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ + (\mathfrak{M}' \sin kx \sin \phi - \mathfrak{N}' \cos kx \sin \phi) \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \end{array} \right.$$

sein. Wenn aber drei trinomiale Faktoren, die imaginäre Wurzeln enthalten, einander gleich waren, oder wenn ein Faktor der Formel

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc}$$

$(zz - 2kz \cos \phi + kk)^3$ war, setze man

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}'' &= D + 4Ek \cos \phi + 10Fk^2 \cos 2\phi + 20Gk^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ \mathfrak{N}'' &= 4Ek \sin \phi + 10Fk^2 \sin 2\phi + 20Gk^3 \sin 3\phi + \text{etc} \end{aligned}$$

und der aus diesem Faktor zu entstehende Teil des Integrals wird

$$\frac{2e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}''\mathfrak{M}'' + \mathfrak{N}''\mathfrak{N}''} \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{M}'' \cos kx \sin \phi + \mathfrak{N}'' \sin kx \sin \phi) \cdots \\ \cdots \int dx \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ + (\mathfrak{M}'' \sin kx \sin \phi - \mathfrak{N}'' \cos kx \sin \phi) \\ \cdots \int dx \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \cos \phi \end{array} \right.$$

sein. Daher erkennt man also schon das Gesetz, nach welchem diese Teile des Integrals gebildet werden müssen, wenn eine größere Potenz der Formel $zz - 2kz \cos \phi + kk$ ein Faktor von P war; und daher werden alle Fälle, die irgendwie auftauchen können, erledigt werden können.

§22 Daraus wird also auf die folgende Weise dieses Problem aufgelöst werden können.

PROBLEM

Es ist der Wert von y in endlichen Größen ausgedrückt zu finden, der dem Differential aus dieser Gleichung irgendeines Grades genügt

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc},$$

wo das Differential dx konstant gesetzt wird und X irgendeine Funktion von x bezeichnet.

LÖSUNG

Aus der vorgelegten Gleichung bildet man also die folgende Gleichung

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc},$$

von welcher man alle reellen einfachen wie trinomialen Faktoren suche, die natürlich die Plätze der imaginären einfachen Faktoren einnehmen; und wenn diese Faktoren einander gleich waren, stelle man sie zusammengenommen dar. Danach suche man für die einzelnen Faktoren die entsprechenden Teile des Integrals und alle diese aus den übrigen Faktoren zu entstehenden Teile werden, wenn sie zu einer Summe zusammengefasst werden, den gesuchten Wert von y geben, welcher das vollständige Integral der gesuchten Gleichung sein wird. Auf die folgende Weise aber wird man aus den Faktoren der Formel P die Teile des Integrals finden:

I. Wenn $z - k$ ein Faktor der Formel P ist

Man setze $\mathfrak{R} = B + 2Ck + 3Dk^2 + 4Ek^3 + 5Fk^4 + \text{etc}$ und es wird der diesem Faktor $z - k$ entsprechende Teil des Integrals

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int e^{-kx} X dx$$

sein.

II. Wenn $(z - k)^2$ ein Faktor der Formel P ist

Man setze $\mathfrak{R} = C + 3Dk + 6Ek^2 + 10Fk^3 + 15Gk^4 + \text{etc}$ und es wird der dem Faktor $(z - k)^2$ entsprechende Teil des Integrals

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int e^{-kx} X dx$$

sein.

III. Wenn $(z - k)^3$ ein Faktor der Formel P ist

Man setze $\mathfrak{R} = D + 4Ek + 10Fk^2 + 20Gk^3 + 35Hk^4 + \text{etc}$ und es wird der dem Faktor $(z - k)^3$ entsprechende Teil des Integrals

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int e^{-kx} X dx$$

sein.

IV. Wenn $(z - k)^4$ ein Faktor der Formel P ist

Man setze $\mathfrak{R} = E + 5Fk + 15Gk^2 + 35Hk^3 + 70Ik^4 + \text{etc}$ und es wird der dem Faktor $(z - k)^4$ entsprechende Teil des Integrals

$$\frac{e^{kx}}{\mathfrak{R}} \int dx \int dx \int dx \int e^{-kx} X dx$$

sein.

V. Wenn ein $zz - 2kz \cos \phi + kk$ Faktor der Formel P ist

Man setze

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= B + 2Ck \cos \phi + 3Dk^2 \cos 2\phi + 4Ek^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ \mathfrak{N} &= + 2Ck \sin \phi + 3Dk^2 \sin 2\phi + 4Ek^3 \sin 3\phi + \text{etc},\end{aligned}$$

es wird der dem Faktor $zz - 2kz \cos \phi + kk$ entsprechende Teil

$$\frac{2e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} \left\{ \begin{aligned} &(\mathfrak{M} \cos kx \sin \phi + \mathfrak{N} \sin kx \sin \phi) \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ &+ (\mathfrak{M} \sin kx \sin \phi - \mathfrak{N} \cos kx \sin \phi) \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \end{aligned} \right\}$$

sein.

VI. Wenn $(zz - 2kz \cos \phi + kk)^2$ ein Faktor der Formel P ist

Man setze

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= C + 3Dk \cos \phi + 6Ek^2 \cos 2\phi + 10Fk^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ \mathfrak{N} &= + 3Dk \sin \phi + 6Ek^2 \sin 2\phi + 10Fk^3 \sin 3\phi + \text{etc},\end{aligned}$$

es wird der dem Faktor $(zz - 2kz \cos \phi + kk)^2$ entsprechende Teil des Integrals

$$\frac{2e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} \left\{ \begin{aligned} &(\mathfrak{M} \cos kx \sin \phi + \mathfrak{N} \sin kx \sin \phi) \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ &+ (\mathfrak{M} \sin kx \sin \phi - \mathfrak{N} \cos kx \sin \phi) \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \end{aligned} \right\}$$

sein.

VII. Wenn $(zz - 2kz \cos \phi + kk)^3$ ein Faktor der Formel P ist

Man setze

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= D + 4Ek \cos \phi + 10Fk^2 \cos 2\phi + 20Gk^3 \cos 3\phi + \text{etc} \\ \mathfrak{N} &= + 4Ek \sin \phi + 10Fk^2 \sin 2\phi + 20Gk^3 \sin 3\phi + \text{etc},\end{aligned}$$

es wird der dem Faktor $(zz - 2kz \cos \phi + kk)^3$ entsprechende Teil des Integrals

$$\frac{2e^{kx \cos \phi}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} \left\{ \begin{aligned} &(\mathfrak{M} \cos kx \sin \phi + \mathfrak{N} \sin kx \sin \phi) \cdots \\ &\quad \cdots \int dx \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \cos kx \sin \phi \\ &+ (\mathfrak{M} \sin kx \sin \phi - \mathfrak{N} \cos kx \sin \phi) \cdots \\ &\quad \cdots \int dx \int dx \int e^{-kx \cos \phi} X dx \sin kx \sin \phi \end{aligned} \right\}$$

und so weiter.

All diese Teile, die den einzelnen Faktoren der Formel P entsprechen, werden also zu einer Summe zusammengefasst den gesuchten Wert von y geben.

Q.E.I.

§23 Nachdem diese Regel erklärt worden ist, mit deren Hilfe man alle Differentialgleichungen, die in der allgemeinen Form enthalten sind, integriert werden können, möchte ich einige Beispiele beifügen, aus denen der Gebrauch dieser Regel leichter erkannt werden wird:

BEISPIEL 1

Es sei diese Differentialgleichung zweiten Grades vorgelegt

$$X = y - \frac{ddy}{dx^2}.$$

Daher wird also die algebraische Formel $P = 1 - zz$ sein, deren Faktoren $z + 1$ und $z - 1$ sind und aus der ersten Formel wird

$$\mathfrak{R} = \frac{dP}{dz} = -2z$$

sein. Für den Faktor $z + 1$ wird also wegen $k = -1$ $\mathfrak{R} = 2$ sein und der Teil des Integrals gleich

$$\frac{e^x}{2} \int e^x X dx.$$

Für den anderen Faktor ist $k = 1$ und $\mathfrak{R} = -2$, welchen dieser Teil des Integrals entsprechen wird

$$-\frac{e^x}{2} \int e^{-x} X dx,$$

nach Zusammenfassen welcher Teiler das gesuchte Integral

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \int e^x X dx - \frac{1}{2} e^x \int e^{-x} X dx$$

sein wird.

BEISPIEL 2

Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$X = y - \frac{3ady}{dx} + \frac{3aaddy}{dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}.$$

Es wird also

$$P = 1 - 3az + 3aazz - a^3 z^3 = (1 - az)^3$$

sein. Es ist also die dritte Formel zu nehmen und es wird

$$k = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = \frac{d^3 P}{6dz^3} = -a^3$$

sein, woher das gesuchte Integral

$$y = -\frac{1}{a^3} e^{x:a} \int dx \int dx \int e^{-x:a} X dx$$

hervorgeht oder

$$y = -\frac{1}{a^3} e^{x:a} \left(x \int dx \int e^{-x:a} X dx - \int x dx \int e^{-x:a} X dx \right)$$

oder

$$y = -\frac{1}{a^3} e^{x:a} \left(\frac{1}{2} x x \int e^{-x:a} X dx - x \int e^{-x:a} X x dx + \frac{1}{2} \int e^{-x:a} X x x dx \right).$$

BEISPIEL 3

Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$X = y + \frac{aaddy}{dx^2}.$$

Es wird also

$$P = 1 + aazz$$

sein, welche sich auf Formel V erstreckt. Es wird nämlich

$$\cos \phi = 0, \quad \sin \phi = 1 \quad \text{und} \quad k = \frac{1}{a}$$

sein. Weiter wird wegen

$$A = 1, \quad B = 0 \quad \text{und} \quad C = aa$$

$$\mathfrak{M} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = 2a$$

sein, woher das Integral

$$y = \frac{1}{a} \sin \frac{x}{a} \int X dx \cos \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \cos \frac{x}{a} \int X dx \sin \frac{x}{a}$$

sein wird.

BEISPIEL 4

Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$X = y + \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}.$$

Es wird also $P = 1 + a^3 z^3$ sein, von welcher zwei Faktoren

$$1 + az \quad \text{und} \quad 1 - az + aazz$$

sind. Der erste gibt auf die Form $z - k$ zurückgeführt $k = -\frac{1}{a}$ und wegen $A = 1, B = 0, C = 0$ und $D = a^3$ wird aus der ersten Formel $\mathfrak{R} = 3a$ sein und der Teil des Integrals

$$\frac{1}{3a} e^{-x:a} \int e^{x:a} X dx.$$

Der andere Faktor

$$1 - az + aazz \quad \text{oder} \quad zz - \frac{z}{a} + \frac{1}{aa}$$

gibt mit Formel V verglichen

$$k = \frac{1}{a}, \quad \cos \phi = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \phi = 60^\circ.$$

Darauf ist

$$\mathfrak{M} = 3a \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}a \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = 3a \sin 120^\circ = \frac{3a\sqrt{3}}{2},$$

woher

$$\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = 9aa \quad \text{und} \quad \frac{2\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = -\frac{1}{3a} \quad \text{und} \quad \frac{2\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3a}$$

ist. Der daher zu entstehende Teil des Integrals ist also

$$\frac{1}{3a}e^{x:2a} \left(-\cos \frac{x\sqrt{3}}{2a} + \sqrt{3} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2a} \right) \int e^{-x:2a} X dx \cos \frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

$$+ \frac{1}{3a}e^{x:2a} \left(-\sin \frac{x\sqrt{3}}{2a} - \sqrt{3} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2a} \right) \int e^{-x:2a} X dx \sin \frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

oder

$$- \frac{3a}{2}e^{x:2a} \cos \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ \right) \int e^{-x:2a} X dx \cos \frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

$$- \frac{2}{3a}e^{x:2a} \sin \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ \right) \int e^{-x:2a} X dx \sin \frac{x\sqrt{3}}{2a}.$$

Daher wird also das gesuchte Integral

$$y = \frac{1}{3a}e^{-x:a} \int e^{x:a} X dx - \frac{2}{3a}e^{x:2a} \cos \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ \right) \int e^{-x:2a} X dx \cos \frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

$$- \frac{2}{3a}e^{x:2a} \sin \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + 60^\circ \right) \int e^{-x:2a} X dx \sin \frac{x\sqrt{3}}{2a}$$

sein.

Diese Beispiele genügen also, um die Regel für jeden sich ergebenden Fall anzuwenden.