Kapitel 2
Über die Variation zwei Variablen involvierender Differentialformeln

Leonhard Euler

Theorem 1

§37 *Die Variation eines Differentials ist immer gleich dem Differential der Variation oder es ist* $\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V$, *was für eine Größe auch immer* V *war, die, während sie durch die Differentiale wächst, auch eine Variation erhält.*

Beweis

Die variable Größe V kann als Ordinate einer gewissen Kurve betrachtet werden, die bei ihren Differentialen durch die selbe Kurve hindurch fortschreitet, in ihren Variationen hingegen auf eine andere jener sehr nahe Kurve überspringt. Während sie aber zum nächsten Punkt derselben Kurve vorwärts bewegt wird, wird ihr Wert gleich $V + \mathrm{d}V$, der gleich V' sei, und daher ist dann $\mathrm{d}V = V' - V$; aber aus der Variation von $\mathrm{d}V$, das heißt $\delta \mathrm{d}V$, wird gleich $\delta V' - \delta V$ sein. Aber $\delta V'$ ist der nächste Wert, in welchen δV um sein Differential vermehrt übergeht, sodass $\delta V' = \delta V + \mathrm{d}\delta V$ oder $\delta V' - \delta V = \mathrm{d}\delta V$ ist, woher ersichtlich ist, dass $\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V$ sein wird oder die Variation des Differentials gleich dem Differential der Variation ist, genauso wie das Theorem versichert.

KOROLLAR 1

§38 Daher wird die Variation des zweiten Differentials $\mathrm{dd}V$ so bestimmt, dass gilt

$$\delta\mathrm{dd}V = \mathrm{d}\delta.\mathrm{d}V,$$

aber weil $\delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V$ ist, wird Gleichheit zwischen diesen Formeln bestehen

$$\delta\mathrm{dd}V = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}V = \mathrm{dd}\delta V.$$

KOROLLAR 2

§39 Auf die gleiche Weise wird für die Differentiale dritter Ordnung gelten

$$\delta\mathrm{d}^3V = \mathrm{d}\delta\mathrm{dd}V = \mathrm{dd}\delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\delta V,$$

und für Differentiale vierter Ordnung wird sich die Variation so verhalten, dass gilt

$$\delta\mathrm{d}^4V = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}^3V = \mathrm{dd}\delta\mathrm{dd}V = \mathrm{d}^3\delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}^4\delta V,$$

und auf die gleiche Weise für höhere Grade.

KOROLLAR 3

§40 Wenn also die Variation eines Differentials irgendeines Grades verlangt wird, kann das Zeichen der Variation δ, wo auch immer es beliebt, zwischen die Differentiationszeichen d eingefügt werden; aber an die letzte Stelle gesetzt zeigt es auf, dass die Variation des Differentials eines gewissen Grades gleich dem Differential desselben Grades der Variation selbst ist.

KOROLLAR 4

§41 Weil also $\delta\mathrm{d}^nV = \mathrm{d}^n\delta V$ ist, wird die Sache immer darauf zurückgeführt, das Differentiale jeden Grades der Variation der Größe V oder von δV genommen werden können, und in dieser besonderen Reduktion ist das Vermögen dieses neuen Kalküls festzulegen.

§42 Die Kraft dieses Beweises besteht hauptsächlich darin, dass δV in $\delta V'$ übergeht, wenn V um sein Differential wächst, was freilich aus der Natur der Differentiale per se klar ist; dennoch wird es wiederum förderlich sein, es durch die Geometrie illustriert zu haben. Für irgendeine Kurve EF (Fig. 3) seien die Koordinaten $AX = x$ und $XY = y$; wenn wir auf dieser durch das unendlich kleine Intervall YY' hindurch fortschreiten, wird in den Differentialen gelten

$$AX' = x + \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad X'Y' = y + \mathrm{d}y$$

und daher

$$\mathrm{d}x = AX' - AX \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = X'Y' - XY.$$

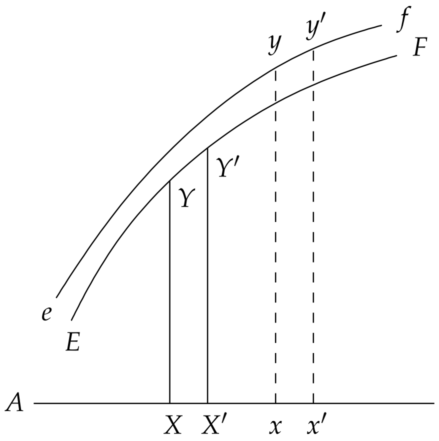

FIG. 3

Nun wollen wir uns eine andere jener sehr nahe Kurve ef vorstellen, deren Punkte y und y' mit den Punkten Y und Y' jener verglichen werden, zu welchen deshalb durch die Variationen der Übergang entstehe, und, nachdem auf die gleiche Weise Koordinaten genommen wurden, wird sein

$$Ax = x + \delta x \quad \text{und} \quad xy = y + \delta y$$

und

$$\delta x = Ax - AX \quad \text{und} \quad \delta y = xy - XY;$$

dann wird aber sein

$$Ax' = x + \mathrm{d}x + \delta(x + \mathrm{d}x) \quad \text{und} \quad x'y' = y + \mathrm{d}y + \delta(y + \mathrm{d}y),$$

sofern wir von Punkt Y' durch die Variation zum Punkt y' herüber springen. Aber zu demselben Punkt y' gelangen wird auch vom Punkt y aus durch Differentiation, woher dann berechnet wird

$$Ax' = x + \delta x + \mathrm{d}(x + \delta x) \quad \text{und} \quad x'y' = y + \delta y + \mathrm{d}(y + \delta y).$$

Nachdem diese Werte mit jenen zusammengebracht worden sind, geht hervor

$$x + \mathrm{d}x + \delta x + \delta \mathrm{d}x = x + \delta x + \mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x$$

und

$$y + \mathrm{d}y + \delta y + \delta \mathrm{d}y = y + \delta y + \mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y,$$

woher natürlich folgt, dass gelten wird

$$\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x \quad \text{und} \quad \delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y.$$

Wenn wir dies aufmerksamer betrachten, erfahren wir, dass das Prinzip, auf welches der Beweis gestützt ist, darauf zurückgeht, dass, wenn die variable Größe zuerst durch Differentiation, darauf aber durch eine Variation vorwärts getragen wird, dasselbe hervorgeht, als wenn sie in umgekehrter Reihenfolge zuerst durch eine Variation, dann aber durch eine Differentiation vorwärts bewegt werden würde. Wie beispielsweise in der Figur vom Punkt Y aus zuerst durch Differentiation zu Y' gelangt wird, von da aus aber durch Variation zu y'; aber in umgekehrter Reihenfolge wird zuerst vom Punkt Y aus durch Variation zu y gelangt, von da aus aber durch Differentiation zum Punkt y', dasselbe wie zuvor.

Bemerkung 2

§43 Dieses Theorem erstreckt sich sehr weit; denn es ist nämlich nicht auf den Fall von zwei nur Variablen beschränkt, sondern ist auch mit der Wahrheit verträglich, wie viele Variablen auch immer in die Rechnung eingehen, weil ja im Beweis allein jener einen Variable, deren Differential wie eine Variation betrachtet wird, Rechnung getragen wird, ohne jegliche Beachtung der übrigen Variablen. Damit aber hier jeglichem Zweifel kein Platz eingeräumt wird, wollen wir irgendeine Oberfläche betrachten, von welcher ein gewisser Punkt Z (Fig. 4) durch die drei Koordinaten $AX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ bestimmt wird; wenn wir von diesem aus zu einem anderen sehr nahen Punkt Z' in derselben Oberfläche fortschreiten, werden diese Größen um ihre Differentiale anwachsen. Dann aber wollen wir eine andere sehr nahe Oberfläche auffassen, deren Punkte z und z' mit jenen Z und Z' verglichen werden, was durch eine Variation geschieht. Nach Festlegen von diesen ist klar, dass auf zweifache Weise zum Punkt z' gelangt werden kann, auf die eine durch die Variation vom Punkt Z' aus, auf die andere durch das Differential vom Punkt z aus, und so ist evident, dass gelten wird

$$\begin{aligned} Ax' &= AX' + \delta.AX' &&= Ax + \mathrm{d}.Ax, \\ x'y' &= X'Y' + \delta.X'Y' &&= xy + \mathrm{d}.xy, \\ y'z' &= Y'Z' + \delta.Y'Z' &&= yz + \mathrm{d}.yz, \end{aligned}$$

was auch über alle anderen auf diese Punkte zu beziehenden variablen Größen gilt.

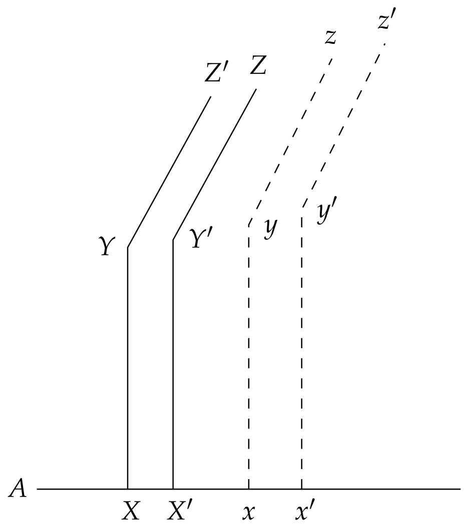

Fig. 4

Daher folgt aber ganz klar ersichtlich, dass gelten wird

$$\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x, \quad \delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y, \quad \delta \mathrm{d}z = \mathrm{d}\delta z.$$

Bemerkung 3

§44 Es ist vollkommen bemerkenswert, dass im Fall Differentiale höherer Ordnung das Variationszeichen δ nach Belieben zwischen den Differentiationszeichen d geschrieben werden kann, und daher lässt sich einsehen, dass diese Vertauschbarkeit auch Geltung haben wird, auch wenn das Variationszeichen δ genauso wie das Differentiationszeichen d einige Male wiederholt wird, was vielleicht bei anderen Betrachtungen von Nutzen sein könnte. Aber beim gegenwärtigen Unterfangen kann die Wiederholung des Variationszeichen δ in keiner Weise auftreten, weil wir ja eine Linie oder Oberfläche nur mit einer einzigen anderen ihr sehr nahen vergleichen; auch wenn diese nämlich sehr allgemein betrachtet werden, dass sie alle möglichen ebenso sehr nahen in sich umfasst, wird sie dennoch wie eine einzige betrachtet und nicht, nachdem wir von der anfänglichen zur sehr nahen hinübergesprungen sind, ein neuer Übergang gestattet. Daher werden also Betrachtungen solcher Art, in welchen Variationen von Variationen zu suchen wären, ganz und gar ausgeschlossen. Umgekehrt aber müssen Differentiale jeder Ordnung von Variationen hier zugelassen werden, und weil in Differentialformeln, die freilich eine endliche Bedeutung haben, nur das Verhältnis der Differentiale betrachtet wird, die, wenn die zwei Variablen x und y sind, mit Festlegungen dieser Art

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

auf endliche Formen zurückgeführt zu werden pflegen, ist es hauptsächlich von Nöten, dass die Variationen dieser Größen p, q, r etc. angegeben werden.

Problem 1

§45 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variation der Differentialformel $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zu bestimmen.*

Lösung

Weil $\delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y$ und $\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x$ ist, wird die gesuchte Variation δp durch die bekannten Differentiationsregeln gefunden, solange anstelle des Differentiationszeichen d das Variationszeichen δ geschrieben wird; weil daher entspringt

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}x\delta\mathrm{d}y - \mathrm{d}y\delta\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x^2},$$

wird durch die zuvor bewiesene Umwandlung sein

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}x\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2};$$

weil dort δx und δy die Variationen von x und y sind und daher $\delta x + \mathrm{d}\delta x$ und $\delta y + \mathrm{d}\delta y$ die Variationen von $x + \mathrm{d}x$ und $y + \mathrm{d}y$, ist zu bemerken, dass gelten wird, wie wir schon bemerkt haben [§37],

$$\mathrm{d}\delta x = \delta(x + \mathrm{d}x) - \delta x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\delta y = \delta(y + \mathrm{d}y) - \delta y.$$

Dasselbe wird aus den ersten Prinzipien gefunden; weil nämlich $p + \delta p$ der variierte Wert von p ist und er hervorgeht, wenn anstelle von x und y deren variierten Werte, die $x + \delta x$ und $y + \delta y$ sind, eingesetzt werden, wird gelten

$$p + \delta p = \frac{\mathrm{d}(y + \delta y)}{\mathrm{d}(x + \delta x)} = \frac{\mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x},$$

woher wegen $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ wird

$$\delta p = \delta \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}y\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2},$$

weil im Nenner das Stück $\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta x$ in Bezug auf $\mathrm{d}x^2$ verschwindet.

Korollar 1

§46 Wenn, während wir durch die Differentiale hindurch fortschreiten, wir die ununterbrochen vermehrten Variablen x und y durch x', x'', x''' etc., y', y'', y''' etc. bezeichnen, dass gilt

$$x' = x + \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad y' = y + \mathrm{d}y,$$

dann wird

$$\mathrm{d}\delta x = \delta x' - \delta x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\delta y = \delta y' - \delta y$$

sein, und daher

$$\delta p = \delta \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x(\delta y' - \delta y) - \mathrm{d}y(\delta x' - \delta x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

Korollar 2

§47 Weil ja die Variationen der beiden Variablen x und y in keinster Weise voneinander abhängen, sondern völlig unserem Belieben überlassen sind, wird, wenn wir x keine Variationen zuteilen, sodass gilt

$$\delta x = 0 \quad \text{und} \quad \delta x' = 0,$$

sein

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} = \frac{\delta y' - \delta y}{\mathrm{d}x}.$$

Korollar 3

§48 Wenn wir außerdem der einen Variable y die Variation δy zuteilen, dass $\delta y' = 0$ ist, wird $\delta p = -\frac{\delta y}{\mathrm{d}x}$ sein, welche Annahme keineswegs der Natur widerstrebt, weil sich die sehr nahe Kurve so mit der anfänglichen übereinstimmend annehmen lässt, dass sie nur in einem einzigen Punkt von ihr abweicht.

Bemerkung

§49 Für gewöhnlich pflegt bei der Lösung isoperimetrischer und anderer sich auf diese Art beziehender Probleme die variierte Kurve so übereinstimmend festgelegt zu werden, dass sie quasi nur in einem einzigen Element abweicht.

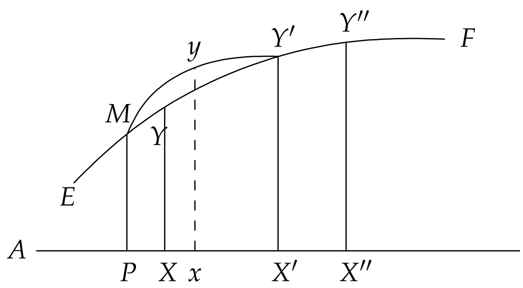

Fig. 5

Wenn so beispielsweise die Kurve EF (Fig. 5) ist, die sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut, pflegt ein einziger Punkt Y zu einem sehr nahen Ort y bewegt zu werden, dass die variierte Kurve $EMyY'F$ nur im sehr kleinen Intervall MY' von der gesuchten abweicht, sodass nach Setzen von $AX = x$ und $XY = y$ für die variierte Kurve gilt

$$Ax = x + \delta x \quad \text{und} \quad xy - y + \delta y$$

oder

$$\delta x = Ax - AX \quad \text{und} \quad \delta y = xy - XY,$$

für die folgenden Punkte aber, zu welchen die Differentiale hinführen, überall gilt

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0 \quad \text{etc.},$$

und genauso für die vorhergehenden. Ja sogar es kann zum Vorteil der Rechnung keine Variation $Xx = \delta x$ genommen werden, dass die ganze Variation allein zum Element δy geführt wird, in welchen Fall man natürlich $\delta p = -\frac{\delta y}{\mathrm{d}x}$ haben wird, und diese einzige Variation genügt natürlich, um Probleme dieser Art, die freilich behandelt worden sind, aufzulösen.

Aber wenn, wie wir es hier unternehmen, diese Probleme weiter ausdehnen, dass die gesuchte Kurve um den Anfang und das Ende herum gewisse Bestimmungen erhalten kann, ist es natürlich notwendig, das Variationskalkül möglichst allgemein auszuführen und in allen Punkten der Kurve den Koordinaten unbestimmte Variationen zuzuteilen. Dies ist auch besonders notwendig, wenn wir Untersuchungen dieser Art auf nicht stetige gekrümmte Linien anwenden wollen.

PROBLEM 2

§50 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben worden sind, wenn $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$ gesetzt wird, die Variation der Größe q oder der Wert von δq zu finden.*

Lösung

Weil $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ ist, wird für den variierten Wert sein

$$q + \delta q = \frac{\mathrm{d}(p + \delta p)}{\mathrm{d}(x + \delta x)} = \frac{\mathrm{d}p + \mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x},$$

woher durch Hinfortschaffen der Größe q übrig bleibt

$$\delta q = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta p - \mathrm{d}p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2},$$

welche Variation also auch aus der Differentiation der Formel $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ entsteht, wenn die Differentiation auf gewohnte Weise unternommen wird, anstelle des Differentiationszeichen d aber das Variationszeichen δ geschrieben wird; dort wird es zu erinnern förderlich sein, dass gilt

$$\delta\mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x \quad \text{und} \quad \delta\mathrm{d}p = \mathrm{d}\delta p.$$

Oben haben wir aber gefunden, dass wegen $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}y\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2}$$

ist, woher weiter durch eine übliche Differentiation der Wert von $\mathrm{d}\delta p$, natürlich das Differential von δp, berechnet wird.

Korollar 1

§51 Weil $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ und $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q$ ist, wird zuerst sein

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x},$$

dann aber

$$\delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} - \frac{q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.$$

Für den zukünftigen Gebrauch ist es aber besser, dass hier das Stück $\mathrm{d}\delta p$ beibehalten wird, als dass sein Wert aus der vorhergehenden Formel gefunden wird.

Korollar 2

§52 Weil dennoch die erste durch Differentiation gibt

$$\mathrm{d}\delta p = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{p\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x} - q\mathrm{d}\delta x + \frac{p\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2},$$

geht nach Einsetzen dieses Wertes hervor

$$\delta q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^3} - \frac{p\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} + \frac{p\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^3}.$$

Korollar 3

§53 Wenn daher allein der Variable y Variationen zugeteilt werden, dass die Stücke δx und die, die daher deriviert werden, verschwinden, werden wir haben

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^3},$$

und wenn das Differential $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wird, wird $\delta q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}$ sein.

Bemerkung 1

§54 Damit diese Dinge leichter verstanden werden, wollen wir in der Kurve EF (Fig. 5), die durch die Relation zwischen den Variablen $AX = x$ und $XY = y$ beschrieben wurde, mehrere Punkte Y, Y', Y'' etc. gemäß der Differentiale ununterbrochen nach vorne bewegt betrachten, dass gilt

$$AX = x, \quad AX' = x + \mathrm{d}x, \quad AX'' = x + 2\mathrm{d}x + \mathrm{dd}x,$$
$$AX''' = x + 3\mathrm{d}x + 3\mathrm{dd}x + \mathrm{d}^3x,$$

$$XY = y, \quad X'Y' = y + \mathrm{d}y, \quad X''Y'' = y + 2\mathrm{d}y + \mathrm{dd}y,$$
$$X'''Y''' = y + 3\mathrm{d}y + 3\mathrm{dd}y + \mathrm{d}^3y,$$

welche Differentiale jeder Ordnung anzeigenden so kürzer dargestellt werden

$$\begin{array}{lllll} AX = x, & AX' = x', & AX'' = x'', & AX''' = x''' & \text{etc.}, \\ XY = y, & X'Y' = y', & X''Y'' = y'', & X'''Y''' = y''' & \text{etc.}, \end{array}$$

welchen einzelnen ihre auf keine Weise voneinander abhängenden Variationen zugeteilt zu werden aufgefasst werden, sodass alle diese Variationen

$$\begin{array}{lllll} \delta x, & \delta x', & \delta x'', & \delta x''' & \text{etc.}, \\ \delta y, & \delta y', & \delta y'', & \delta y''' & \text{etc.}, \end{array}$$

die von unserem Belieben abhängen, als bekannt betrachtet werden können. Nachdem diese Dinge so festgelegt wurden, werden die Differentiale jeder Ordnung der Variationen auf diese Weise dargestellt werden, dass gilt

$$\begin{array}{lll} \mathrm{d}\delta x = \delta x' - \delta x, & \mathrm{dd}\delta x = \delta x'' - 2\delta x' + \delta x, & \mathrm{d}^3\delta x = \delta x''' - 3\delta x'' + 3\delta x' - \delta x, \\ \mathrm{d}\delta y = \delta y' - \delta y, & \mathrm{dd}\delta y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y, & \mathrm{d}^3\delta y = \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y. \end{array}$$

Wenn wir daher nun einen einzigen Punkt Y der Kurve annehmen variiert zu werden, wird gelten

$$\begin{array}{llll} \mathrm{d}\delta x = -\delta x, & \mathrm{dd}\delta x = +\delta x, & \mathrm{d}^3\delta x = -\delta x & \text{etc.}, \\ \mathrm{d}\delta y = -\delta y, & \mathrm{dd}\delta y = +\delta y, & \mathrm{d}^3\delta y = -\delta y & \text{etc.}, \end{array}$$

und daher

$$\delta p = -\frac{\delta y}{\mathrm{d}x} + \frac{p\delta x}{\mathrm{d}x}$$

und

$$\delta q = \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{dd}x\delta y}{\mathrm{d}x^3} - \frac{p\delta x}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2q\delta x}{\mathrm{d}x} - \frac{p\mathrm{dd}x\delta x}{\mathrm{d}x^3},$$

wo nach Weglassen aller in Bezug auf die übrigen verschwindenden Anteile sein wird

$$\delta q = \delta y \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x^2} - \delta x \cdot \frac{p}{\mathrm{d}x^2}.$$

Wenn schließlich allein der Ordinate $XY = y$ eine Variation zugeteilt wird, wird man haben

$$\delta p = -\frac{1}{\mathrm{d}x}\delta y \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{1}{\mathrm{d}x^2}\delta y.$$

Bemerkung 2

§55 Daher ist klar, wenn die Variation in einem einzigen Punkt der Kurve festgelegt wird, dass im großen Maße gegen die gebräuchlichen Prinzipien der Differentiale verstoßen wird, weil die oberen Differentiale von Variationen in Bezug auf die unteren keinesfalls verschwinden, sondern ununterbrochen denselben Wert beibehalten und daher die Variation der Größen p und q ins Unendliche wachsen, wenn freilich unendlich kleine δx und δy aus derselben Ordnung wie die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ angenommen werden. Ja es ist daher sogar in der Rechnung besonders dafür zu sorgen, dass wir nicht in riesige Fehler gestürzt werden, weil die Vorschriften des Kalküls auf das Gesetz der Fortsetzung gestützt ist, nach welchem gekrümmte Linien durch einen ununterbrochenen Fluss des Punktes beschrieben zu werden aufgefasst werden, sodass in deren Krümmung niemals ein Sprung erkannt wird. Wenn daher aber ein Punkt Y der Kurve (Fig. 5) nach y geführt wird, wobei der übrige Verlauf der Kurve außer den quasi zwei Elementen My und yY' unverändert gelassen wurde, ist es ersichtlich, dass der Krümmung eine riesige Unregelmäßigkeit aufgeprägt wird, wodurch die gewöhnlichen Rechenregeln nicht weiter verwendet werden können. Um diesen Umstand entgegenzuwirken, wird es ein sehr sicheres Hilfsmittel sein, dass den einzelnen Punkten zumindest im Geiste Variationen zugeteilt werden, die in einem gewissen Gesetz der Fortsetzung enthalten sind, und nicht zuvor eine Unregelmäßigkeit in der Rechnung zugelassen wird, wie alle Differentiationen und Integrationen durchgeführt worden sind, und auf diese Weise zumindest eine Gattung der Kontinuität in der Rechnung beibehalten wird. Obwohl sich also die Differentiale der Variationen

$$\mathrm{d}\delta y, \quad \mathrm{dd}\delta y, \quad \mathrm{d}^3\delta y \quad \text{etc.},$$

genauso

$$\mathrm{d}\delta x, \quad \mathrm{dd}\delta x, \quad \mathrm{d}^3\delta x \quad \text{etc.}$$

unter Umständen in der gemachten Annahme auf einfachere Variationen zurückfahren lassen, hilft es dennoch, dass jene Formen beibehalten werden und sie auf die folgenden Integrationen angewendet werden; und darauf gehen auch die Operationen zurück, die ich einst, nachdem ich denselben Gegenstand über das Finden mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehener Kurven behandelt hatte, zu erledigen gelehrt hatte.

PROBLEM 3

§56 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variationen der Verhältnisse zwischen Differentialen irgendeines Grades zu finden.*

LÖSUNG

Die Frage geht darauf zurück, dass nachdem ununterbrochen festgelegt wurde

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.},$$

die Variationen der Größen p, q, r, s etc. angegeben werden, weil auf diese Größen alle Verhältnisse von Differentialen irgendeiner Ordnung, die freilich in endlichen Werten enthalten sind, zurückgeführt werden. Und über die zwei ersten von diesen haben wir freilich schon gesehen, dass gilt

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} - \frac{q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.$$

Weil also weiter ist

$$r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad s = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.},$$

werden deren Variationen auf gleiche Weise durch die Differentiationsregeln gefunden

$$\delta r = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}x} - \frac{r\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}x} - \frac{s\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.},$$

wo, wenn es beliebt, anstelle von $\mathrm{d}\delta p$, $\mathrm{d}\delta q$, $\mathrm{d}\delta r$ etc. die Differentiale der Variationen δp, δq, δr etc., die zuvor gefunden worden, eingesetzt werden. Dies würde aber nicht nur zu allzu langen Formeln führen, sondern ist auch, wie aus dem Folgenden klar werden wird, nicht einmal nötig, weil daher um vieles leichter alle Reduktionen, die von Nöten sein werden, durchgeführt werden können.

Korollar 1

§57 Wenn allein der Variable y Variationen zugeteilt werden oder, während die Abszissen x dieselben bleiben, nur die Ordinaten y um ihre Variationen vermehrt werden, werden wir haben

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x}, \quad \delta r = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}x}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.}$$

Korollar 2

§58 Wenn daher außerdem alle Zuwächse $\mathrm{d}x$ von x gleich angenommen werden oder das Element $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt wird, wird nach Einsetzen der Differentiale der vorhergehenden Formeln in den Folgenden, erhalten werden

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \delta r = \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^4} \quad \text{etc.}$$

Korollar 3

§59 Wenn allein den Abszissen x Variationen zugeteilt werden, dass die Variation δy mit allen derivierten verschwindet, und zugleich das Element $\mathrm{d}x$ konstant genommen wird, werden sich die einzelnen Variationen so verhalten

$$\begin{aligned}
\delta p &= -\frac{p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \\
\delta q &= -\frac{p\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \\
\delta r &= -\frac{p\mathrm{d}^3\delta x}{\mathrm{d}x^3} - \frac{3q\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{3r\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \\
\delta s &= -\frac{p\mathrm{d}^4\delta x}{\mathrm{d}x^4} - \frac{4q\mathrm{d}^3\delta x}{\mathrm{d}x^3} - \frac{6r\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{4s\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

etc.

KOROLLAR 4

§60 Auch wenn also in diesem Fall das Element $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wird, tauchen hier dennoch Differentiale jeder Ordnung der Variation δx auf; die Begründung von dieser Sache ist die, dass die Variationen der ununterbrochen weiter vorwärts bewegten Werte von x, also x', x'' etc. in keinster Weise von den Differentialen abzuhängen festgelegt werden.

BEMERKUNG

§61 Wann immer es aber gefiel, allein der Variable x Variationen zuzuteilen, dann ist es insgesamt besser, dass die Variablen x und y miteinander vertauscht werden und besser Festlegungen dieser Art zu gebrauchen

$$\mathrm{d}x = p\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}y \quad \text{etc.},$$

mit welchen die Gattungen der Differentiale beseitigt werden; dann aber, nach Annahme eines konstanten Elements $\mathrm{d}y$, werden die gleichen, aber einfachere, Formeln für die Variationen der Größen p, q, r etc. gefunden wie in Korollar 2. Damit im Übrigen die Rechnung auf alle Fälle immer angewendet werden kann, ist es immer förderlich, dass jeder der beiden Variablen ihre Variationen zugeteilt werden; auch wenn nämlich dann um vieles komplexere Formeln hervorgehen, besonders wenn sie entwickelt werden, bringen sie dennoch beim Durchführen der Rechnung so außerordentliche Vorteile und Verkürzungen mit sich, dass am Ende die Rechnung kaum aufwendiger wird und keinen Überdruss an Länge schafft. Wir wollen also zu allgemeineren sich auf dieses Kapitel beziehenden Problemen fortschreiten.

PROBLEM 4

§62 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variation einer endlichen Formel V, so aus jenen Variablen selbst wie deren Differentialen irgendeiner Ordnung zusammengesetzt, zu finden.*

Lösung

Weil V eine Größe ist, die einen endlichen Wert hat, werden durch Festlegen von

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

die Differentiale daher beseitigt werden und es wird für V eine aus den endlichen Größen x, y, p, q, r, s etc. gebildete Funktion hervorgehen. Wie auch immer also die Art der Zusammensetzung ist, ihr Differential wird immer eine Form dieser Art haben

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + \text{etc.},$$

während die Anzahl dieser Glieder umso größer wird, umso höhere Differentiale in V eingehen. Wenn daher aber die Variation δV dieser Formel V zu suchen war, wird sie erhalten, wenn anstelle der variablen Größen x, y, p, q, r etc. dieselben um ihre Variationen vermehrt eingesetzt werden und von der resultierenden Form selbst die Größe V weggenommen wird, woher eingesehen wird, dass die Variation mit Hilfe der üblichen Differentiation gefunden wird, nachdem nur das Differentialzeichen d in das Variationszeichen δ verwandelt wurde. Daher, weil das Differential schon oben dargeboten wurde, werden wir die gesuchte Variation erhalten

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.};$$

wie aber die Variationen δp, δq, δr, δs, etc. durch die angenommenen Variationen δx und δy bestimmt werden, ist schon oben [§56] gezeigt worden.

Korollar 1

§63 Wenn wir hier die zuvor gefundenen Werte einsetzen, werden wir die gesuchte Variation so ausgedrückt erhalten

$$\begin{aligned}\delta V = M\delta x + N\delta y + \frac{1}{\mathrm{d}x}\left(P\mathrm{d}\delta y + Q\mathrm{d}\delta p + R\mathrm{d}\delta q + S\mathrm{d}\delta r + \text{etc.}\right)\\ - \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\left(Pp + Qq + Rr + Ss + \text{etc.}\right).\end{aligned}$$

KOROLLAR 2

§64 Wenn der Variable x überhaupt keine Variation zugeteilt wird und darüber hinaus das Element $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wird, dann wird die Variation der vorgelegten Größe V so ausgedrückt hervorgehen

$$\delta V = N\delta y + \frac{P\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} + \frac{S\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc.}$$

BEMERKUNG

§65 In diesen Formen wird zumindest eine Gattung der Homogenität in den Differentialen erblickt, wenn freilich δx und δy zur Ordnung der Differentiale gezählt werden; dies würde sich weit anders ereignen, wenn wir in dem Fall, in dem ein einziger Punkt der Kurve variiert wird, sofort anstelle der Differentiale der Variationen die oben [§54] dargebotenen Werte einsetzen wollten, auf welche Weise natürlich die Idee der Integration, welcher diese Formeln darauf bedürfen, ausgeschlossen werden würde. Im Übrigen ist klar, wie der Fund von Variationen auf die übliche Differentiation zurückgeführt wird, während der ganze Unterschied nur darin gelegen ist, dass anstelle der Variationen δp, δq, δr etc. die schon zuvor angegebenen Werte, welche selbst wir freilich durch die übliche Differentiation gefunden haben, eingesetzt werden. Es wird aber gefällig sein, dass diese Operation an einigen Beispielen illustriert wird, damit umso deutlicher die Gestalt dieser ganzen Behandlung erkannt wird.

BEISPIEL 1

§66 *Die Variation der Formel $\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, die die Subtangente ausdrückt, ist zu finden.*

Wegen $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ wird diese Formel $\frac{y}{p}$, woher ihre Variation $\frac{\delta y}{p} - \frac{y\delta p}{pp}$ ist, wo sie, nach Einsetzen des Wertes anstelle von δp, wird

$$\frac{\delta y}{p} - \frac{y\mathrm{d}\delta y}{pp\mathrm{d}x} + \frac{y\mathrm{d}\delta x}{p\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\delta y - \frac{y\mathrm{d}x}{\delta y^2}\mathrm{d}\delta y + \frac{y}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}\delta x,$$

welche letzte Formel unmittelbar aus der Differentiation der vorgelegten Formel entsteht.

Beispiel 2

§67 *Die Variation der Formel, die die Tangente selbst ausdrückt,* $\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$*, ist zu finden.*

Für die Festlegung $dy = pdx$ liefert diese endliche Form $\frac{y}{p}\sqrt{1+pp}$, woher die gesuchte Variation diese ist

$$\frac{\delta y}{p}\sqrt{1+pp} - \frac{y\delta p}{pp\sqrt{1+pp}},$$

die in diese verwandelt wird

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\delta y - \frac{ydx}{dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}\left(dxd\delta y - dyd\delta x\right).$$

Beispiel 3

§68 *Die Variation der Formel, die den Krümmungsradius ausdrückt,* $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$*, ist zu bestimmen.*

Für $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt geht diese Formel in diese über $\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$, deren Variation deshalb ist

$$\frac{3p\delta p}{q}\sqrt{1+pp} - \frac{\delta q}{qq}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

wo ich mich freilich mit der Substitution der zuvor gefundenen Werte nicht weiter aufhalte.

Problem 5

§69 *Nachdem von den zwei variablen Größen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variation der Formel, so aus jenen Variablen wie deren Differentialen irgendeiner Ordnung zusammengesetzt, ob sie unendlich oder unendlich klein war, ausfindig zu machen.*

Lösung

Nachdem wie bisher $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$, etc. gesetzt wurde, wird die Formel immer auf eine Form dieser Art $V\mathrm{d}x^n$ zurückgeführt werden, wo V eine endliche Funktion der Größen x, y, p, q, r, etc. ist, der Exponent n aber entweder positiv oder negativ ist, sodass im ersten Fall die Formel unendlich klein ist, im zweiten hingegen unendlich groß. Wir wollen also festlegen, dass die gewöhnliche Differentiation gegeben ist

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

woher man zugleich ihre Variation hat. Weil also die Variation der vorgelegten Form diese ist

$$nV\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x^n\delta V,$$

wird diese Variation, die wir suchen, natürlich sein

$$nV\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x^n \left(M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right),$$

wo aus dem Oberen [§56] diese Werte eingesetzt werden müssen

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y - p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p - q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x},$$
$$\delta r = \frac{\mathrm{d}\delta q - r\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}\delta r - s\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x},$$
$$\text{etc.}$$

Weil diese Dinge per se ersichtlich sind, bedürfen sie keiner weiteren Erklärung und zugleich scheint dieses Kapitel vollkommen abgeschlossen.