Eine Methode sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuende gekrümmte Linien zu finden, oder die Lösung des im weitesten Sinne aufgefassten isoperimetrischen Problems

Leonhard Euler
Professor im Königreich und Mitglied
der königlichen Akademie der Wissenschaften von St. Petersburg.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Über die auf das Finden von gekrümmten Linien angewandte Methode der Maxima und Minima im Allgemeinen

DEFINITION I

1. Die auf gekrümmte Linien angewandte Methode der Maxima und Minima ist eine Methode gekrümmte Linien zu finden, die sich einer gewissen vorgelegten Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen.

KOROLLAR I

2. Man findet also mit dieser Methode gekrümmte Linien, in denen eine gewisse vorgelegte Größe einen maximalen oder minimalen Wert erhält.

KOROLLAR II

3. Weil aber dieselbe Kurve sich auf unendlich viele Weisen gleich gemacht werden kann, wäre ein Problem, wenn nicht eine gewisse Einschränkung gemacht wird, in höchstem Maße unbestimmt und bis dahin keines. Denn was für eine mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehene Kurve auch immer angeboten wird, es könnte immer eine andere, jener freilich entweder gleich oder ungleich, dargeboten werden, die jene Eigenschaft, entweder größere oder kleinere, in sich enthielte.

KOROLLAR III

4. Weil ja also eine angemessene Erkenntnis der Kurven erfordert, dass sie auf eine bestimmte von der Lage her gegebene Achse und gewisse ihrer Anteile, die Abszissen genannt werden, bezogen werden, wird die erste und grundlegende Einschränkung aus der Größe der Abszisse zu entnehmen sein.

KOROLLAR IV

5. Probleme, die sich auf diese Methode erstrecken, müssen also so vorgelegt werden, dass die gekrümmten Linien gesucht werden, die auf eine von der Lage her gegebene Achse bezogen wurden und die zwischen allen anderen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sind.

BEMERKUNG 1

6. Diese Methode der Maxima und Minima unterscheidet sich deshalb in höchstem Maße von jener, die wir anderen Ortes erläutert haben. Dort nämlich, für eine gegebene und bestimmte gekrümmte Linie, haben wir den Ort bestimmt, wo eine gewisse vorgelegte variable Größe, die sich auf die Kurve bezieht, maximal oder minimal wird. Hier aber wird die gekrümmte Linie selbst gesucht, in welcher eine gewisse vorgelegte Größe maximal oder minimal wird. Diese Methode ist im vorherigen Jahrhundert, sogleich nach dem Fund Analysis des Unendlichen, von den hochgeehrten Brüdern BERNOULLI zu entwickeln begonnen worden, und hat aus dieser Zeit die größten Zuwächse erfahren. Das erste Problem freilich, welches von dieser Art behandelt worden ist, bezog sich auf die Mechanik, und in diesem wurde die gekrümmte Linie gesucht, über welcher ein herabsinkender schwerer Körper am schnellsten herabgleitet, welcher der Name Brachistochrone oder Kurve des schnellsten Herabsinkens gegeben worden war. In diesem Problem ist es schon offenkundig, dass es, ohne eine beigefügte Bedingung, nicht einmal den Namen einer Frage beibehalten kann: Es ist nämlich klar, dass, eine umso kürzere und mehr an eine vertikale Lage herangehende Linie genommen wird, umso kürzer die Zeit des Herabsinkens über ihr sein wird. Deswegen kann nicht uneingeschränkt eine Linie gesucht werden, über welcher ein herabsinkender schwerer Körper am schnellsten oder in kürzester Zeit herabgleitet; sondern es musste die Größe der Abszisse, welcher die zu findende Kurve entspricht, zugleich bestimmt werden; sodass, unter allen Kurven, die derselben Abszisse, die auf der von der Lage her gegebenen Achse genommen wurde, entsprechen, die gesucht wurde, über welcher ein schwerer Körper am schnellsten herabsinken würde. Und in der Tat genügte bei diesem Problem diese Bedingung nicht, um es bestimmt zu machen: Sondern es war darüber hinaus nötig, diese Bedingung hinzuzufügen, dass die zu findende Kurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht; und dieses Problem musste durch diese Bedingungen so eingeschränkt werden, damit es bestimmt werden würde, natürlich unter allen gekrümmten Linien, die durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen, die zu bestimmen, über welcher ein herabsinkender Körper einen der gegebenen Abszisse entsprechenden Bogen in kürzester Zeit passiert. Dennoch ist hier wiederum zu bemerken, dass die Bedingung des Durchlaufens durch die zwei gegebenen Punkte nicht absolut notwendig ist, sondern bei diesem Problem durch die Lösung selbst eingebracht worden ist. Bei der Lösung dieses Problems gelangt man nämlich sofort zu einer Differentialgleichung zweiten Grades, die zweimal integriert zwei beliebige Konstanten erhält, zur Bestimmung welcher man zwei Punkte, durch die die Kurve hindurchgezogen wird, oder andere ähnliche Eigenschaften braucht: Und diese selbe Bedingung, gleichsam von selbst, kommt zu allen

Problemen dieser Art hinzu, deren Lösung sofort auf eine Differentialgleichung zweiten Grades führt. In Problemen aber, die durch eine Differentialgleichung vierter oder höherer Ordnung aufgelöst werden, sind nicht einmal zwei Punkte, um die Kurve zu bestimmen, hinreichend, sondern es sind so viele Punkte von Nöten, wie die Differentiale Grade erhalten. Andernfalls aber, wenn die Lösung unmittelbar auf eine algebraische Gleichung führt, dann wird ohne eine Bedingung dieser Art das Problem vollständig bestimmt sein; solange die Länge der Abszisse bestimmt wird. Aber all diese Dinge werden besser erkannt werden, wann immer wir unten zu Lösungen von Problemen gelangen werden: Und dort werden wir diese Beschreibungen gründlicher erklären. Es scheint nämlich ratsam, diese Dinge hier am Anfang nur mitzuteilen, um absurde Anschauungsweisen bezüglich der Bestimmung von Problemen dieser Art zu beseitigen.

DEFINITION II

7. Die absolute Methode der Maxima und Minima lehrt, unter ganz und gar allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden, die zu bestimmen, in welcher eine gewisse vorgelegte variable Größe einen maximalen oder minimalen Wert erhält.

KOROLLAR I

8. In Problemen, die sich auf diese Methode beziehen, ist also die Achse von der Lage her gegeben; und unter allen Kurven, die auf diese Achse und einen bestimmten Anteil von ihr bezogen werden können, wird die bestimmt, in welcher eine gewisse variable Größe maximal oder minimal wird.

BEMERKUNG 1

9. Eine andere Bedingung zur Bestimmung des Maximums oder Minimums außer der Größe der Abszisse fügen wir hier im Allgemeinen nicht hinzu. Es sind nämlich Probleme gegeben, die auf diese Weise vollständig bestimmt sind; so wie unten noch deutlicher klar werden wird. Auch wenn nämlich Probleme solcher Art auftauchen, zur Bestimmung welcher darüber hinaus zwei oder mehrere Punkte vorgeschrieben werden können, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen soll, wird dies dennoch erst aus der Lösung des entsprechenden Problems selbst erkannt werden. Denn wenn man zu einer Gleichung solcher Art für die gesuchte Kurve gelangt, in welcher durch Integration neue konstante Größen eingegangen sind, die in der Frage selbst nicht enthalten waren, dann wird die Lösung als mehrdeutig und vage anzusehen sein; umso mehr weil sie unzählige gekrümmte Linien, die aus der Bestimmung jener konstanten und beliebigen Größen entstehen können, in sich umfasst. In diesen Fällen wird also zu schließen sein, dass das Problem aus seiner Natur nicht völlig bestimmt ist, sondern zu seiner vollständigen Bestimmung, außer der Größe der Abszisse, so viele Bedingungen hinzugefügt werden müssen, durch welche jene beliebigen Konstanten auf bestimmte Werte zurückgeführt werden. Für Bedingungen dieser Art werden aber am angenehmsten Punkte angenommen, durch welche die gesuchte Kurve dann hindurchzulaufen hat; in der Tat werden so viele Punkte, wie in der gefundenen Gleichung beliebige Größen enthalten sind, jene Gleichung selbst bestimmt machen. Anstelle von Punkten aber, um die gesuchte Kurve vollkommen

zu bestimmen, können auch genauso viele Tangenten verwendet werden, die die gesuchte Kurve berühren und, wenn die Berührung in einem gegebenen Punkt der Tangente geschehen soll, wird diese Bedingung zwei Punkten gleichwertig sein. Ja es können sogar anstelle von Punkten irgendwelche andere Bedingungen eingesetzt werden, solange sie so beschaffen sind, dass durch sie die beliebigen in der gefundenen Gleichungen enthaltenen Größen bestimmt werden. Und in der Tat ist es vorher nicht nötig, die Lösung zu Ende zu führen, ehe diese Entscheidung getroffen wird; aber unten werden gewisse Kriterien angegeben werden, mit deren Hilfe sofort aus jener variablen Größe, die ein Maximum oder ein Minimum sein muss, entschieden werden können wird, welche neuen Konstanten in die Gleichung für die Kurve eingehen, die in der Frage nicht enthalten waren. Es entstehen aber diese beliebigen Konstanten aus dem Grad der Differentiale, zu welchem die Gleichung für die gesuchte Kurve aufsteigt; wie vielten Grades nämlich die Differentialgleichung für die gesuchte Kurve hervorgeht, so viele beliebige Konstanten sind in jener potentiell enthalten zu sein anzusehen; und daher werden genauso viele Bedingungen nötig sein, um die Kurve zu bestimmen. Dasselbe geschieht in der Tat auch bei der Lösung aller Probleme, wann immer eine Differentialgleichung entweder ersten oder höheren Grades gefunden wird; sodass daher beim gegenwärtigen Unterfangen keine besondere Schwierigkeit enthalten zu sein anzusehen ist.

DEFINITION III

10. Die relative Methode der Maxima und Minima lehrt, nicht unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, sondern nur unter denen, die eine gewisse vorgeschriebene gemeinsame Eigenschaft haben, die zu bestimmen, die sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut.

KOROLLAR I

11. Um also Probleme dieser Art zu lösen, sind zuerst aus ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die herauszusondern, welchen dieselbe vorgeschriebene Eigenschaft zufällt; und erst dann wird aus diesen herausgesonderten die, die gesucht wird, bestimmt werden müssen.

KOROLLAR II

12. Obwohl aber mit einer solchen Bedingung die Anzahl aller Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden, sehr stark eingeschränkt wird, wird sie dennoch immer noch unendlich bleiben. Ja sogar, wenn nicht eine, sondern mehrere Eigenschaften vorgeschrieben werden, mit denen allen Kurven, aus denen die gesuchte zu bestimmen ist, versehen sein müssen, wird dennoch ununterbrochen die Anzahl der Kurven unendlich bleiben.

KOROLLAR III

13. Umso mehr Eigenschaften also vorgelegt werden, die den Kurven, aus denen die gesuchte bestimmt werden muss, gemein sein müssen, umso mehr wird die Anzahhl der Kurven, zwischen welchen die Auswahl der gesuchten zu treffen ist, eingeschränkt werden, auch wenn sie unendlich bleibt.

BEMERKUNG 1

14. Aus dieser Art, in welcher wir die relative Methode der Maxima und Minima

festgelegt haben, ist, zu Beginn dieses Jahrhunderts, zuerst von Jakob Bernoulli jenes berühmte isoperimetrische Problem vorgelegt worden; in diesem wurde die Kurve gesucht, die mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist, nicht unter ganz und gar allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden, sondern nur unter denen, die von derselben Länge waren; aus diesem Problem heraus sind diese Kurven, aus denen die gesuchte gefunden werden musste, isoperimetrische genannt worden. Wenn deshalb unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen und die von gleicher Länge sind, die gesucht wird, die mit der Abszisse und der Ordinate die größte Fläche einschließt, findet man, dass dem Gefragten eine Kreislinie genügt; dies war freilich schon lange vor dem Fund dieser Methode den Geometern bekannt geworden und auch bewiesen worden. Aber in diesem Fall wiederum, aus der Natur der Probleme selbst, kommen neue Bedingungen hinzu; wie bei diesen, die sich auf die absolute Methode der Maxima und Minima beziehen, die aus den beliebigen Konstanten heraus, welche die Lösung einführt, einzuschätzen sind. So gehen in der Lösung des Problems, in dem eine Kurve gesucht wird, die zwischen allen derselben Länge mit der Abszisse eine maximale Fläche erfasst, zwei neue Konstanten ein; daher, um das Problem bestimmt zu machen, ist es so vorzulegen, dass unter allen Kurven derselben Länge, die nicht nur derselben Abszisse entsprechen, sondern auch durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen, die gesucht wird, die mit der gegebenen Abszisse die größte Fläche darstellt. Und auf die gleiche Weise kann es passieren, dass vier Punkte, und manchmal auch mehrere, nach Belieben angenommen werden müssen, damit das Problem bestimmt wird: die Beurteilung welcher Tatsache aus der Natur der Probleme selbst zu entnehmen ist. Wie aber in einem isoperimetrischen Problem alle Kurven, aus denen die gesuchte bestimmt werden muss, von derselben Länge vorgelegt werden, so kann anstelle dieser Eigenschaft irgendeine andere vorgelegt werden, die allen gemein sein muss. So sind schon Kurven, die mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sind, gesucht worden, nur unter allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden und die um diese Abszisse rotiert alle gleiche Oberflächen erzeugten; und auf die gleiche Weise können irgendwelche anderen Eigenschaften vorgelegt werden. Des Weiteren kann sogar nicht nur eine, sondern es können mehrere Eigenschaften dieser Art vorgelegt werden, die allen Kurven, unter welchen die, die ein gewisses anderes Maximum oder Minimum enthält, zu bestimmen ist, gemein sein müssen. Ein Beispiel hierfür wäre, wenn eine Kurve, die mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist, unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen und die so alle von gleicher Länge wären wie auch gleiche Flächen einschlössen, gesucht werden würde.

BEMERKUNG 2

15. Dieses Unterschiedes zwischen der absoluten und relativen Methode der Maxima und Minima wegen wird unsere Behandlung zweigeteilt sein. Zuerst werden wir natürlich die Methode angeben, unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu bestimmen, die mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist. Darauf werden wir zu Problemen solcher Art voranschreiten, in denen eine Kurve, die sich der Eigenschaft des

Maximums oder Minimums erfreut, unter allen Kurven verlangt wird, die eine oder mehrere gemeinsame Eigenschaften haben; und aus der Anzahl dieser Eigenschaften wird erneut eine Unterteilung dieser Behandlung entspringen. Dennoch wird es nicht von Nöten sein, in dieser Unterteilung weiter fortzuschreiten, weil bald eine Methode gefunden wird, wie viele Eigenschaften auch immer vorgelegt waren, die Probleme leicht aufzulösen. Denn die Lösungen auf den ersten Blick in höchstem Maße verzwickter Probleme werden wider der Erwartung sehr bequem und mit leichter Rechnung erledigt werden.

ANNAHME I

16. In dieser Behandlung werden wir die Abszisse, auf welche wir alle Kurven beziehen, ununterbrochen mit dem Buchstaben x, die Ordinate hingegen mit dem Buchstaben y bezeichnen. Dann aber, nachdem gleiche Elemente der Abszisse genommen wurden, wird immer $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$ etc. sein.

KOROLLAR I

17. Mit diesen Substitutionen werden also alle Differentiale von y welchen Grades auch immer aus den Ausdrücken beseitigt werden und außer dem Differential dx werden keine anderen Differentiale zurückgelassen werden. Obwohl aber auf diese Weise alle Differentiale außer dx nur scheinbar, und nicht in Wirklichkeit beseitigt werden, werden diese Substitutionen uns beim gegenwärtigen Unterfangen einen riesigen Nutzen verschaffen.

KOROLLAR II

18. Ja sogar die Annahme eines konstanten Differentials wird mit Substitutionen dieser Art völlig aus der Rechnung beseitigt werden: Welches Differential nämlich auch immer als konstant angenommen wird, nach diesen Substitutionen muss immer dieselbe Formel hervorgehen. Dennoch, wegen der unten zu verwendenden Methode, wird es nötig sein, das Differential dx als konstant anzunehmen.

KOROLLAR III

19. Damit aber leichter klar wird, wie durch diese Substitutionen die Differentiale jedes Grades von y verschwinden, wird es förderlich sein, die folgende Tabelle beigefügt zu haben:

$$\begin{array}{lll}
d\ y & = p\ dx & \\
ddy & = dpdx & = qdx^2 \\
d^3y & = dqdx^2 & = rdx^3 \\
d^4y & = drdx^3 & = sdx^4 \\
d^5y & = dsdx^4 & = t\,dx^5 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

KOROLLAR IV

20. Wenn daher auch der Bogen der Kurve, der der Abszisse x entspricht, mit

seinen Differentialen welchen Grades auch immer auftaucht, werden sie durch diese Buchstaben so ausgedrückt werden können, dass keine anderen Differentiale außer dx vorhanden sind. Nachdem nämlich der Bogen $= w$ gesetzt wurde, wird gelten:

$$\begin{aligned} w &= \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx\sqrt{1+pp} \\ dw &= dx\sqrt{1+pp} \\ ddw &= \frac{pqdx^2}{\sqrt{1+pp}} \\ d^3w &= \frac{prdx^3}{\sqrt{1+pp}} + \frac{qqdx^3}{(1+pp)^{3/2}} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

KOROLLAR V

21. Auf die gleiche Weise wird aus diesen der Krümmungsradius oder die Krümmung der Kurve, an jeder Stelle, durch zumindest dem Anschein nach endliche Größen ausgedrückt werden können. Weil nämlich, nachdem das Element dx konstant gesetzt wurde, die Länge des Krümmungsradius $= -\frac{dw^3}{dxddy}$ ist, wird sie $= -\frac{(1+pp)^{3/2}}{q}$ werden.

KOROLLAR VI

22. Weiter wird es aus denselben Substitutionen sein wie folgt:

$$\begin{aligned} &\text{Subtangens} &&= \frac{ydx}{dy} = \frac{y}{p}, \\ &\text{Subnormale} &&= \frac{ydy}{dx} = py, \\ &\text{Tangens} &&= \frac{ydw}{dy} = \frac{y\sqrt{1+pp}}{p}, \\ &\text{Normale} &&= \frac{ydw}{dx} = y\sqrt{1+pp}. \end{aligned}$$

Und, in gleicher Weise, werden alle endlichen Größen, die sich auf die Kurve beziehen, wenn sie keine Integrale involvieren, durch endliche Größen dieser Art so ausgedrückt werden können, dass weiter keine Differentiale enthalten zu sein scheinen.

DEFINITION IV

23.Die Formel des Maximums oder Minimums, für jedes Problem, wird für uns die Größe sein, die in der gesuchten Kurve einen maximalen oder minimalen Wert erhalten muss.

KOROLLAR I

24. Weil ja bei allen Problemen, auf die diese Methode angewandt worden ist, die Kurve gesucht wird, die entweder unter allen oder nur unter unzähligen

Kurven, die auf eine gewisse Weise bestimmt wurden, sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut, wird diese Eigenschaft selbst, die in der gesuchten kurve maximal oder minimal sein muss, eine Größe sein und sie wird mit der Formel ausgedrückt werden, welche wir hier die Formel des Maximums oder Minimums nennen.

KOROLLAR II

25. Weil aber die Eigenschaft des Maximums oder Minimums so vorgelegt werden muss, dass sie auf eine gegebene und bestimmte Abszisse bezogen wird, muss die Formel des Maximums oder Minimums auch auf jene bestimmte Abszisse bezogen werden.

KOROLLAR III

26. Es wird also die Formel des Maximums oder Minimums eine variable Größe sein, die von der Länge irgendeiner Abszisse, welcher sie entspricht, abhängt. Und in jedem Problem wird die Kurve gesucht, für welche, zu einer gegebenen Abszisse, jene Formel des Maximums oder Minimums einen maximalen oder minimalen Wert erhält.

KOROLLAR IV

27. Aber die Formel des Maximums oder Minimums kann nicht allein von der Abszisse abhängen: Wenn dies nämlich der Fall wäre, erhielte sie für alle Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, denselben Wert und deshalb daher genügten alle gleichermaßen.

KOROLLAR V

28. Dieser Sache wegen muss auch die Formel des Maximums oder Minimums außer der allen Kurven, die in Betracht kommen, gemeinsamen Abszisse von einer beliebigen Kurve speziell abhängen; so dass es eine ist, für welche sie den maximalen oder minimalen Wert annehmen kann.

BEMERKUNG 1

29. Damit all diese Dinge besser eingesehen werden und der Zustand der im Folgenden zu behandelnden Fragen besser erfasst wird, wollen wir festlegen, dass entweder unter ganz und gar allen Kurven oder nur unzähligen, die eine gewisse gemeinsame Eigenschaft haben und die derselben Abszisse AZ entsprechen, die bestimmt werden muss, für welche der Wert der Formel W maximal oder minimal ist. Wir wollen festlegen, dass dieser Frage (Fig.1) die Kurve amz genügt, sodass, welche andere Kurve auch immer auf die bestimmte Abszisse AZ bezogen wird, der Wert der Formel W entweder größer als der für diese Formel oder kleiner wird: je nachdem ob in der genügenden Kurve W entweder ein Maximum oder ein Minimum sein muss. Bei dieser sich sehr weit erstreckenden Frage haben wir also zuerst eine Abszisse bestimmter Länge AZ; darauf ist die Kurve zu suchen, entweder unter ganz und gar allen Kurven, die auf diese selbe Achse bezogen wurden, oder nur unter unzähligen, denen eine oder mehrere Eigenschaften gemein sind, je nachdem ob die Frage entweder auf die absolute oder die relative Methode der Maxima und Minima angewandt worden ist; drittens haben wir die Größe W, deren Wert in der gesuchten Kurve amz maximal oder

minimal sein muss; und es wird also die Größe W die Formel des Maximums oder Minimums sein, so wie sie bestimmt worden ist.

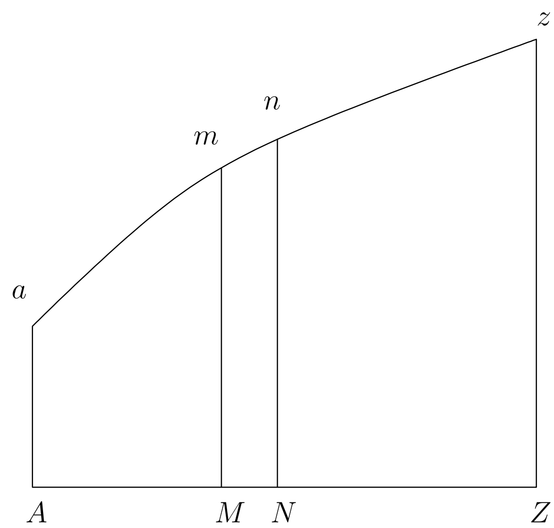

FIG. 1

Nun ist also sofort klar, dass diese Formel W so beschaffen sein muss, dass sie auf alle Kurven, die sich freilich vorgestellt werden können, angewendet werden kann. Zuerst wird sie natürlich von der Größe der bestimmten Abszisse AZ abhängen müssen, sodass sie verändert wird, nachdem der Wert von AZ geändert worden ist. Darauf muss sie auch von der Natur jeder Kurve, die sich freilich vorgestellt werden kann, auf bestimmte Weise abhängen; wenn sie nämlich nicht so beschaffen wäre, erhielte sie für alle Kurven denselben Wert und die Frage wäre keine. Deswegen wird die Größe W auch in sich Größen umfassen müssen, die sich auf die Kurve an sich beziehen. Weil also jede Kurve durch eine Relation zwischen der Abszisse und Ordinate bestimmt wird, muss die Größe W aus der Abszisse und der Ordinate und unabhängigen Größen bestehen. Das heißt, wenn die unbestimmte Abszisse $= x$ und die entsprechende unbestimmte Ordinate $= y$ gesetzt wird, muss die Größe W eine Funktion der zwei Variablen x und y sein. Weil das so ist, wenn sich irgendeine bestimmte Kurve vorgestellt wird und aus ihrer Natur die Relation zwischen y und x in der Formel W eingesetzt wird, wird sie einen bestimmten Wert erhalten, der sich auf jene gegebene Kurve und ihre bestimmte Abszisse bezieht. Weil ja nun, für die einen und die anderen Kurven, die Formel W verschiedene Werte annimmt, auch wenn bei allen dieselbe Abszisse genommen wird, ist es offenkundig, dass unter jenen unzähligen Kurven eine sein muss, in welcher der Wert der Formel W maximal oder minimal wird; und um diese Kurve für irgendeine bestimmte Frage zu bestimmen, ist die anzugebende Methode bereitet worden.

KOROLLAR VI

30. Es wird also die Formel des Maximums oder Minimums W eine gewisse

Funktion der zwei Variablen x und y sein; deren eine x bezeichnet die Abszisse, die andere y die Ordinate. In W werden also nicht nur die Variablen x und y enthalten sein können, sondern auch alle von ihnen abhängenden Größen, von welcher Art p, q, r, s etc. sind, deren Bedeutungen wir oben angegeben haben. Sogar irgendwelche aus ihnen entstandene Integralformeln können in W enthalten sein, ja müssen es sogar, wenn freilich die Frage bestimmt sein muss, wie wir bald zeigen werden.

KOROLLAR VII

31. Nachdem also eine Formel W oder Funktion von x und y solcher Art vorgelegt wurde, wenn die Frage sich auf die absolute Methode der Maxima und Minima bezieht, wird eine Gleichung solcher Art zwischen x und y verlangt, dass, wenn in W ein durch x bestimmter Wert von y eingesetzt wird und x ein bestimmter Wert zugeteilt wird, die Größe für W entweder größer oder kleiner hervorgeht, als wenn eine andere Gleichung zwischen x und y angenommen worden wäre.

KOROLLAR VIII

32. Auf diese Weise können also Fragen, die sich auf die Lehre von gekrümmten Linien beziehen, auf die reine Analysis zurückgeführt werden. Und umgekehrt, wenn eine Frage dieser Art in der reinen Analysis vorgelegt worden ist, wird sie auf die Lehre von gekrümmten Linien übertragen und aufgelöst werden können.

BEMERKUNG 2

33. Obwohl Fragen dieser Art auf die reine Analysis reduziert werden können, ist es dennoch von Vorteil, sie mit der Lehre der gekrümmten Linien zu vereinigen. Wenn wir daher nämlich den Geist von gekrümmten Linien lösen und allein auf absolute Größen richten wollen, würden die Fragen an sich zuerst sehr schwierig und ausgesprochen unelegant und deren Nutzen sowie Wert weniger erkannt werden. Des Weiteren wäre auch die Methode, Fragen dieser Art aufzulösen, wenn sie allein in abstrakten Größen vorgelegt werden würde, allzu beschwerlich und aufwendig; obwohl sie dennoch, durch Betrachtung von Figuren und lineare Darstellung der Größen, auf wunderbare Weise Hilfe erfährt und leichter verständlich gemacht wird. Dieses Grundes wegen, auch wenn Fragen dieser Art sowohl an abstrakte als auch konkrete Größen angepasst werden können, werden wir sie dennoch sehr angenehm auf gekrümmte Linien übertragen und dann auflösen. Natürlich, sooft eine Gleichung solcher Art zwischen x und y gesucht wird, dass eine gewisse vorgelegte und aus x und y zusammengesetzte Formel, wenn aus jener gesuchten Gleichung der Wert von y suggeriert wird und x ein bestimmter Wert zugeteilt wird, maximal oder minimal wird, werden wir die Frage dann immer auf das Finden einer gekrümmten Linie übertragen, deren Abszisse x und Ordinate y sei, für welche jene Formel W maximal oder minimal wird, wenn die Abszisse x von gegebener Größe genommen wird. Nachdem diese Dinge bemerkt wurden, wird die Natur von Fragen dieser Art ziemlich deutlich erkannt, wenn nicht unter Umständen das zweideutige Reden über Maximum und Minimum zugleich bei jemandem Zweifel aufkommen lässt. Aber nicht einmal diese eine Zweideutigkeit ist vorhanden; denn auch wenn die Methode an

sich gleichermaßen Maxima und Minima zeigt, wird es dennoch in jedem Fall leicht sein zu erkennen, ob die Lösung ein Maximum oder ein Minimum liefert. Oftmals kann es aber geschehen, dass in einer gegebenen Frage so ein Maximum wie ein Minimum auftritt, und in diesen Fällen wird die Lösung eine zweifache sein, während die eine das Minimum, die andere das Maximum zeigt. Meistens aber pflegt das eine der beiden, natürlich entweder das Maximum oder das Minimum, unmöglich zu sein; dies tritt auf, wenn die Formel des Maximums oder Minimums ins Unendliche entweder wachsen oder schrumpfen kann; in diesen Fällen wird nämlich weder ein Maximum noch ein Minimum gegeben sein. Es kann auch eintreten, dass die Formel W ins Unendliche so wachsen wie schrumpfen kann, und in diesen Fällen wird überhaupt keine Lösung Geltung haben. All diese Unterschiede wird aber die Rechnung selbst nach der Lösung immer zeigen.

PROPOSITION I THEOREM

34. Damit durch die Formel des Maximums oder Minimums W die Kurve amz bestimmt wird, die in Bezug auf alle übrigen genügt, muss die Formel W eine unbestimmte Integralgröße sein, die, wenn nicht die gegebene Relation zwischen x und y angenommen wird, nicht integriert werden kann.

BEWEIS. Wir wollen nämlich festlegen, dass die Formel W keine unbestimmten Integrale involviert; sie wird entweder eine algebraische oder solche transzendente, die ohne die angenommene Relation zwischen x und y dargeboten werden kann, Funktion der Größen x und y und der davon abhängenden p, q, r, s etc. sein; dies geschieht, wenn entweder Logarithmen dieser Größen oder Kreisbögen oder andere bestimmte transzendente Größen dieser Art eingehen, die algebraischen gleichwertig anzusehen sind. Wenn daher nun W als eine solche Funktion nur von x und y festgelegt wird, ist es klar, dass der Wert der Formel W, welchen sie für die gegebene Kurve amz, die auf die gegebene Abszisse AZ bezogen wurde, erhält, nur von der letzten Ordinate Zz abhängt und für alle Kurven, die in Z dieselbe Ordinate Zz haben, derselbe sein wird; und daher wir mit einer solchen Formel W nicht die Gestalt der ganzen Kurve bestimmt, sondern nur die Lage ihres äußersten Punktes z; wenn in W außer x und y auch die Größe p enthalten ist, dann wird außer der Länge der Ordinate Zz die Lage der Tangente der Kurve in z oder die Lage des letzten Elements in z bestimmt werden. Wenn aber darüber hinaus q eingeht, dann wird die Lage von zwei benachbarten Elementen der Kurve in z bestimmt werden, und so weiter. Aus diesen folgt, wenn W eine bestimmte Funktion von x, y, p, q, r etc. war, dass dann durch jene nur ein unendlich kleiner Anteil der Kurve um die Extremität z herum bestimmt wird und für alle Kurven, die in derselben Extremität aufhören, derselbe Wert von W hervorgehen wird. Damit deshalb durch die Formel W die ganze Kurve amz, sofern sie der ganzen Abszisse AZ entspricht, bestimmt wird, muss die Formel W so beschaffen sein, dass ein auf die bestimmte Kurve amz angewandter Wert von ihr von der Lage der einzelnen Punkte dieser Kurve, die innerhalb der Grenzen a und z gelegen sind, abhängt. Dies kann aber nicht gesehen, wenn nicht die Größe W eine unbestimmte Integralformel ist, die allgemein ohne die angenommene Gleichung zwischen x und y keine Integration zulässt. Q.E.D.

KOROLLAR I

35. Wenn daher also die Formel des Maximums oder Minimums W keine unbestimmte Integralgröße ist, wird nicht einmal die gekrümmte Linie, in welcher der Wert von W maximal oder minimal ist, bestimmt werden; und bis dahin wird die Frage über die zu findende Kurve, in welcher W ein Maximum oder Minimum wäre, keine sein.

KOROLLAR II

36. Damit also die Kurve angegeben werden kann, in welcher der Wert von W in Bezug auf die anderen maximal oder minimal ist, muss die Formel W eine solche Form $\int Zdx$ haben und die Größe Z muss so beschaffen sein, dass das Differential Zdx, wenn nicht eine Gleichung zwischen x und y festgelegt wird, nicht integriert werden kann.

BEMERKUNG 1

37. Weil ja die Formel des Maximums oder Minimums W ein Integral einer Differentialformel ersten Grades sein muss, das heißt, deren Integral soll eine endlich Größe werden, wird die Differentialformel immer auf eine Form dieser Art Zdx mit Hilfe der Buchstaben p, q, r etc. zurückgeführt werden können. Und dieser Sache wegen wird im Folgenden die Formel des Maximums oder Minimums von uns immer durch $\int Zdx$ gekennzeichnet werden. Z wird aber nicht nur eine Funktion der Größen x und y sein, sondern auch die Buchstaben p, q, r etc. enthalten. Wenn so beispielsweise die Fläche $AazZ$ maximal oder minimal sein muss, wird die Formel W in $\int ydx$ übergehen; und, wenn die Oberfläche des Rotationskörpers, welcher durch Rotation der Kurve amz um die Achse AZ herum entsteht, maximal oder minimal sein muss, wird $W = \int ydx\sqrt{1+pp}$ sein; und so weiter, welche Formel auch immer in der gesuchten Kurve maximal oder minimal sein muss, sie wird immer von dieser Form $\int Zdx$ sein, natürlich ein Integral einer gewissen endlichen Größe Z, die mit dem Differential dx multipliziert wurde. Es muss aber Z eine Größe solcher Art sein, dass, wenn eine Gleichung zwischen x und y festgelegt wird, das Integral $\int Zdx$ einen bestimmten Wert erhält; daher wird Z eine entweder algebraische oder bestimmte Funktion von x, y und den davon abhängenden p, q, r etc. sein und außerdem in sich unbestimmte Integralformeln umfassen; dieser Unterschied ist sorgfältig festzuhalten. Wenn so zum Beispiel die Formel des Maximums oder Minimums W $\int ydx$ oder $\int ydx\sqrt{1+pp}$ war, wird die Größe Z algebraisch sein, aber wenn $W = \int yxdx \int ydx$ ist, dann wird $Z = yx \int ydx$ sein, das heißt die Größe Z wird selbst unbestimmt sein, deren Wert, wenn nicht eine Relation zwischen x und y gegeben ist, nicht dargeboten werden kann. Ja es kann sogar passieren, dass ein Wert von Z dieser Art nach der Entwicklung der Formel nicht ausgedrückt werden kann, sondern zuerst nur durch eine Differentialgleichung gefunden werden muss, wie wenn $Z = ydx + ZZdx$ war; aus dieser Gleichung kann der Wert von Z durch x und y nicht einmal dargeboten werden. Daher entstehen also drei Arten an Formeln $\int Zdx$, die in den gesuchten Kurven maximal oder minimal werden müssen. Deren erste umfasst die Formeln, in denen Z eine algebraische oder bestimmte Funktion von x, y und p, q, r etc. ist. Zur zweiten Art wollen wir die Formeln zählen, in denen die Größe Z darüber hinaus Integralformeln

involviert. In der dritten Art sind aber die Formeln enthalten, in denen der Wert von Z durch eine Differentialgleichung, deren Integration nicht bekannt ist, bestimmt wird.

PROPOSITION II THEOREM

38. Wenn amz die Kurve war, in welcher der Wert der Formel $\int Zdx$ maximal oder minimal wird, und Z eine algebraische oder bestimmte Funktion von x, y, p, q etc. ist, dann wird irgendein Anteil mn derselben Kurve sich derselben Beschaffenheit erfreuen, dass für ihn, der auf seine Abszisse MN bezogen wurde, der Wert von $\int Zdx$ in gleicher Weise maximal oder minimal ist.

BEWEIS. Der Wert der Formel $\int Zdx$ für die Abszisse AZ ist das Aggregat aller Werte derselben Formel, die den einzelnen Anteilen der Abszisse AZ entsprechen. Wenn daher also die Abszisse AZ in wie viele Teile auch immer, von denen einer MN sei, geteilt aufgefasst wird und für diese einzelnen Teile der Wert der Formel $\int Zdx$ dargeboten wird, wird die Summe all dieser Werte den Wert der Formel $\int Zdx$ liefern, der der ganzen Abszisse AZ entspricht und der maximal oder minimal sein wird. Weil ja aber Z als eine algebraische Funktion von x, y, p, q etc. festgelegt wird, wird der Wert der Formel $\int Zdx$, der dem Anteil MN der Abszisse entspricht, allein von der Gestalt des entsprechenden Anteils mn der Kurve abhängen und wird derselbe bleiben, wie auch immer die übrigen Anteile am und nz variiert werden; die Werte der einzelnen Buchstaben x, y, p, q werden nämlich allein durch den Anteil mn der Kurve bestimmt. Wenn also die Werte der Formel $\int Zdx$, die den Anteilen AM, MN, NZ der Abszisse entsprechen, P, Q und R gesetzt werden, werden diese Größen P, Q und R nicht voneinander abhängen. Daher, weil deren Aggregat $P + Q + R$ maximal oder minimal ist, ist es auch notwendig, dass jeder einzelne mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist. Deswegen, wenn in der Kurve amz die Formel $\int Zdx$ einen maximalen oder minimalen Wert hat und die Größe Z eine algebraische Funktion von x, y, p, q etc. ist, dann wird sich auch für einen beliebigen Anteil jener Kurve dieselbe Formel $\int Zdx$ der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen. Q.E.D.

KOROLLAR I

39. Wenn daher also die Kurve amz gefunden worden ist, die für die gegebene Abszisse AZ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat, und Z eine algebraische oder bestimmte Funktion ist, dann wird sich auch ein beliebiger Anteil derselben Kurve, in Anbetracht seiner entsprechenden Abszisse, derselben Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen.

KOROLLAR II

40. Bei Problemen dieser Art, wo ein solches Maximum oder Minimum gesucht wird, ist es also nicht von Nöten, die Größe der Abszisse, welcher das Maximum oder Minimum entspricht, zu bestimmen; sondern, wenn für irgendeine Abszisse die Formel $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, dann wird sich dieselbe für irgendeine andere Abszisse derselben Eigenschaft erfreuen.

KOROLLAR III

41. Probleme dieser Art werden also aufgelöst, wenn die einzelnen Anteile der gesuchten Kurve so bestimmt werden, dass für sie der Wert der Formel $\int Zdx$ maximal oder minimal wird. Dann wird nämlich zugleich die ganze Kurve und irgendein Teil von ihr mit derselben Eigenschaft des Maximums oder Minimums behaftet sein.

BEMERKUNG 1

42. Diese Eigenschaft, welcher sich die Kurven erfreuen, in welchen Formeln dieser Art $\int Zdx$, wo Z eine algebraische oder bestimmte Funktion von x, y, p, q etc. ist, ein Maximum oder Minimum sind, ist von größter Bedeutung; auf sie ist nämlich die ganze Methode, Probleme dieser Art aufzulösen, gestützt. Es schien aber hauptsächlich daher ratsam, diese Proposition anzuführen, damit diese Eigenschaft nicht, die nur diesen Formeln $\int Zdx$, wo Z eine algebraische oder bestimmte Funktion ist, zu eigen ist, ganz und gar allen Formeln, die vorgelegt werden können, gemein zu sein angesehen wird; in der folgenden Proposition werden wir nämlich beweisen, wenn in Z Integralformeln enthalten sind, dass dann dieselbe Eigenschaft nicht weiter Geltung hat; daraus wird zugleich die Natur von Fragen dieser Art besser verstanden werden. Der Beweis dieser gegenwärtigen Proposition ist aber aus dem Fundament entnommen worden, dass der Wert der Formel $\int Zdx$, wenn freilich Z eine entweder algebraische oder bestimmte Funktion von x, y, p, q etc. ist, der irgendeinem Anteil MN der Abszisse entspricht, allein vom entsprechenden Anteil mn der Kurve abhängt und nicht von der entweder vorherigen am oder der nachfolgenden nz beeinflusst wird; diese Eigenschaft geht aber verloren, wenn in Z unbestimmte Integralformeln enthalten sind. Denn die Werte der Größen x, y, p, q, r etc., die sie für den Kurvenbogen am erhalten, hängen nur von der Lage der Elemente dieses Bogens mn und einigen benachbarten Elementen, die keinen Bogen endlicher Größe festlegen, ab; daher wird auch eine aus diesen Buchstaben wie auch immer zusammengesetzte Größe allein durch die Gestalt des Bogens mn bestimmt werden, wenn keine Integralgrößen vorhanden waren, von welcher Art $\int ydx$, die die ganze vorherige Fläche $AamM$ einführen würde, oder $\int dx\sqrt{1+pp}$ sind, die den ganzen vorherigen Bogen am involvieren würde. Daher versteht man also noch klarer, was wir durch eine bestimmte Funktion von x, y, p, q, r etc. bezeichnen wollen: Eine bestimmte Funktion ist natürlich so beschaffen, dass sie für jeden Punkt nur von den gegenwärtigen Werten der Buchstaben x, y, p, q etc. abhängt und nicht deren vorherige Werte in sich umfasst. Eine unbestimmte Funktion ist aber eine solche, deren Wert an jeder Stelle nicht allein aus den Werten, welche diese Buchstaben x, y, p, q etc. an dieser Stelle erhalten, bestimmt werden kann, sondern darüber hinaus alle Werte zu ihrer Bestimmung verlangt, welche diese Buchstaben an allen vorherigen Stellen erhalten haben. So ist klar, dass alle algebraischen Funktionen zugleich bestimmte sind; außerdem aber sind alle transzendenten Funktionen, die nicht von einer Relation zwischen x und y abhängen, bestimmte, von welcher Art $\log\sqrt{xx+yy}$, e^{py} ,A $\sin\frac{py}{q}$ sind; deren Werte können an jeder Stelle aus den Werten der Buchstaben, welche sie allein an dieser Stelle erhalten, angegeben werden. Wann immer aber in einer

gewissen Funktion unbestimmte Integralformeln enthalten sind, die von einer gegenseitigen Relation zwischen x und y, die sie überall haben, abhängen, kann dann deren Wert an jeder Stelle nicht aus den Werten, welche diese Buchstaben an dieser Stelle haben, erkannt werden, sondern es ist darüber hinaus von Nöten, alle Werte an gewissen vorherigen Stellen zu kennen; das heißt die allgemeine Relation zwischen den Koordinaten x und y; und solche Funktionen nennen wir unbestimmte, die natürlich von denen, welche wir bestimmte genannt haben, gänzlich verschieden sind.

PROPOSITION III THEOREM

43. Wenn amz die Kurve war, die der Abszisse AZ entspricht und in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, in Z aber unbestimmte Integralformeln enthalten sind, dann trifft dieselbe Eigenschaft des Maximums oder Minimums nicht auf einen beliebigen Anteil der Kurve zu, sondern wird nur der ganzen Kurve, die der Abszisse AZ entspricht, zu eigen sein.

BEWEIS. Man fasse die ganze Kurve amz, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, durch die Ordinate Mm in zwei bestimmte Teile aufgeteilt auf und es sei der Wert der Formel $\int Zdx$, der dem Anteil am entspricht, $= P$, der Wert derselben Formel für den anderen Anteil mz sei aber $= Q$; für die ganze Kurve amz wird also der Wert der Formel $\int Zdx = P + Q$ sein, welchen wir festlegen, ein Maximum oder Minimum zu sein. Damit wir aber jede Zweideutigkeit beseitigen und die ganze Angelegenheit sorgfältiger vorlegen können, wollen wir $P + Q$ festlegen, ein Maximum zu sein; dasselbe, was nämlich über das Maximum bewiesen werden wird, wird über das Minimum leicht eingesehen werden. Wenn daher nun der Wert von Q vom Wert von P nicht abhinge, dann könnte das Aggregat $P + Q$ kein Maximum sein, wenn nicht zugleich jeder der beiden Werte P und Q einzeln maximal ist. Aber in unserem Fall, in dem sie Größe Z in sich unbestimmte Integralformeln umfasst, wird der Wert von Q nicht nur vom Anteil am der Kurve, auf den er bezogen wird, abhängen, sondern zugleich von der ganzen vorherigen Kurve am und sogar vom Wert von P. Nun sagen wir, dass dafür, dass $P + Q$ ein Maximum ist, nicht verlangt wird, dass der Wert von P maximal ist. Wir wollen nämlich festlegen, dass der Anteil am der Kurve so beschaffen ist, dass für ihn P ein Maximum ist, und es werde der Anteil am der Kurve aufgefasst, ein wenig verändert zu werden, sodass der Wert der Formel $\int Zdx$ kleiner wird, beispielsweise $= P - p$; es wird natürlich geschehen können, dass aus dieser Veränderung heraus der Wert von Q wächst, welche Zunahme q gesetzt werde, und es wird, nachdem der Anteil am ein wenig geändert wurde, sodass für ihn $\int Zdx$ nicht weiter ein Maximum ist, der Wert der Formel $\int Zdx$ für die ganze Kurve $amz = P - p + Q + q$ sein. Weil es also passieren kann, dass $q > p$ ist, sieht man ein, dass die Formel $\int Zdx$ für die ganze Kurve amz maximal sein kann, auch wenn sie nicht für einen beliebigen Anteil am maximal ist. Q.E.D.

KOROLLAR I

44. Wann immer also die Kurve gefunden worden ist, die, für die gegebene Abszisse AZ, den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat, und

Z eine unbestimmte Funktion ist, dann folgt nicht, dass ein beliebiger Anteil der gefundenen Kurve mit derselben Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sein wird.

KOROLLAR II

45. Bei der Auflösung von Problemen dieser Art, in denen eine Kurve gesucht wird, die für die gegebene Abszisse AZ ein maximales oder minimales $\int Zdx$ hat, wird immer auf die Größe der ganzen vorgelegten Abszisse zu achten sein, und das Maximum oder Minimum wird nur an die, nicht aber an irgendeinen Anteil von ihr, angepasst werden müssen.

KOROLLAR III

46. Daher wird also der riesige Unterschied klar, welcher zwischen den Formeln $\int Zdx$, in denen Z bestimmt oder unbestimmt ist, einhergeht; und zugleich wird aber die Verschiedenheit der Methoden eingesehen, die es nötig sein wird, bei den Auflösungen von Fragen, in denen maximale oder minimale Werte von Formeln dieser Art verlangt werden, zu gebrauchen.

BEMERKUNG 1

47. Aus dem Beweis dieser Proposition folgt freilich nicht notwendigerweise, wenn für die gegebene Abszisse AZ die Kurve eine maximale oder minimale Formel $\int Zdx$ hat, dass sich dann ihre einzelnen Anteile dieser selben Beschaffenheit erfreuen; aber dennoch wird es zur Genüge eingesehen, sooft dieselbe Eigenschaft den einzelnen Teilen zufällt, in dem Fall zu passieren. Und daher ist nichtsdestoweniger in höchstem Maße notwendig, die Lösung immer an die ganze vorgelegte Abszisse anzupassen. Dennoch kann es in Problemen, die sich auf die relative Methode beziehen, passieren, dass die Formeln $\int Zdx$, in denen Z eine unbestimmte Funktion sei, sich gleichsam behandeln lassen, als wären sie bestimmt. Dies ereignet sich natürlich, wenn nur unter allen Kurven, in denen jene unbestimmten Integralformeln, die in Z enthalten sind, gleiche Werte erhalten, nur die verlangt wird, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder ein Minimum ist; in diesem Fall sind nämlich jene unbestimmten Integralformeln anzusehen bestimmte zu werden. Wenn daher unter allen Kurven derselben Länge die zu bestimmen ist, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, und in Z außer bestimmten Größen der Kurvenbogen $\int dx\sqrt{1+pp}$ enthalten ist, wird sie hier, weil sie in allen Kurven, aus denen die gesuchte bestimmt werden muss, denselben Wert erhält, genauso wie eine bestimmte Funktion behandelt werden können. All diese Dinge werden im Folgenden deutlicher erklärt werden.

ANNAHME II

48. Wenn die Abszisse AZ der Kurve (Fig. 2) in unzählige unendlich kleine und einander gleiche Elemente aufgeteilt wird, von welcher Art IK, KL, LM etc. sind, und irgendein Anteil AM x genannt wird, welchem irgendeine variable Funktion F entspricht, werden wir dieselbe Funktion F, sofern sie auf entweder die folgenden Punkte N, O, P, Q etc. oder die vorhergehenden Punkte L, K, I etc. der Abszisse bezogen wird,

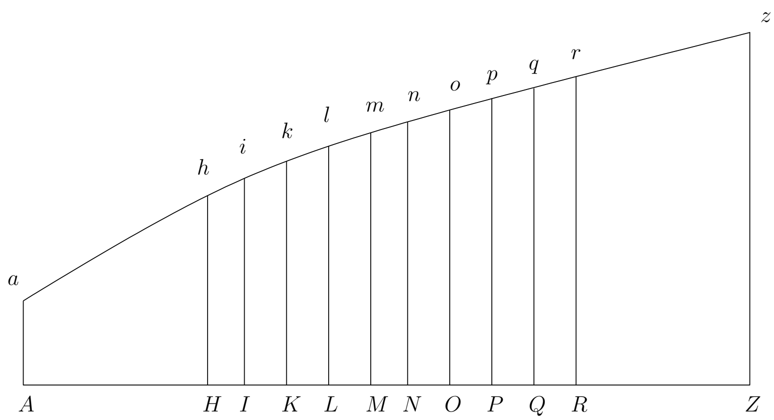

FIG. 2

so bezeichnen, dass er Wert dieser Funktion, der für den Punkt $M = F$ ist, ist wie folgt

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für} & N & = F' \\ \text{für} & O & = F'' \\ \text{für} & P & = F''' \\ \text{für} & Q & = F^{IV} \\ \text{für} & R & = F^{V} \\ \quad\text{etc.} & & \end{array}\right\} \text{für die folgenden Abszissen}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für} & L & = F_{\prime} \\ \text{für} & O & = F_{\prime\prime} \\ \text{für} & P & = F_{\prime\prime\prime} \\ \text{für} & Q & = F_{IV} \\ \quad\text{etc.} & & \end{array}\right\} \text{für die vorausgehenden Abszissen}$$

Und auf diese Weise, ohne den langen Schriftzug für Differentiale, wird der Wert welcher einer variablen Funktion auch immer, der an einem Punkt der Abszisse angenommen wird, angenehm gekennzeichnet werden.

KOROLLAR I

49. Weil also der Wert einer Funktion an irgendeiner Stelle gleich ihrem Wert an der vorhergehenden Stelle um ihr Differential vermehrt ist, wird sein:

$$\begin{array}{llll} F' = F + dF & \qquad & F = F_{\prime} + dF_{\prime} \\ F'' = F' + dF' & & F_{\prime} = F_{\prime\prime} + dF_{\prime\prime} \\ F''' = F'' + dF'' & & F_{\prime\prime} = F_{\prime\prime\prime} + dF_{\prime\prime\prime} \\ F^{IV} = F''' + dF''' & & F_{\prime\prime\prime} = F_{IV} + dF_{IV} \\ \quad\text{etc.} & & \quad\text{etc.} \end{array}$$

KOROLLAR II

50. Wenn von den einzelnen Teilungsstellen der Abszisse aus Ordinaten gezogen werden und die, die der Abszisse $AM = x$ entspricht, natürlich $Mm, = y$ gesetzt wird, werden die übrigen so folgenden wie vorhergehenden so bezeichnet werden:

$$\begin{array}{llcll} Mm &= y & \qquad & Mm &= y \\ Nn &= y' & & Ll &= y_{\prime} \\ Oo &= y'' & & Kk &= y_{\prime\prime} \\ Pp &= y''' & & Ii &= y_{\prime\prime\prime} \\ Qq &= y^{IV} & & Hh &= y_{IV} \\ & \text{etc.} & & & \text{etc.} \end{array}$$

KOROLLAR III

51. Weil darauf der Wert von $p = \frac{dy}{dx} = \frac{Nn - Mm}{dx}$, ist, wird $p = \frac{y' - y}{dx}$ sein; die folgenden in gleicher Weise wie die vorhergehenden Werte von p werden sich aber so verhalten:

$$\begin{array}{llcll} p &= \dfrac{y' - y}{dx} & \qquad & p &= \dfrac{y' - y}{dx} \\ p' &= \dfrac{y'' - y'}{dx} & & p_{\prime} &= \dfrac{y - y_{\prime}}{dx} \\ p'' &= \dfrac{y''' - y''}{dx} & & p_{\prime\prime} &= \dfrac{y_{\prime} - y_{\prime\prime}}{dx} \\ p''' &= \dfrac{y^{IV} - y'''}{dx} & & p_{\prime\prime\prime} &= \dfrac{y_{\prime\prime} - y_{\prime\prime\prime}}{dx} \\ & \text{etc.} & & & \text{etc.} \end{array}$$

KOROLLAR IV

52. Darauf, weil $q = \frac{dp}{dx} = \frac{p' - p}{dx}$ ist, wird $q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$ sein; daher werden sich die Werte der Größe q, sowohl die folgenden also auch die vorhergehenden, so verhalten:

$$\begin{array}{llcll} q &= \dfrac{y'' - 2y' + y}{dx^2} & \qquad & q &= \dfrac{y'' - 2y' + y}{dx^2} \\[2ex] q' &= \dfrac{y''' - 2y'' + y'}{dx^2} & & q_{\prime} &= \dfrac{y' - 2y + y_{\prime}}{dx^2} \\[2ex] q'' &= \dfrac{y^{IV} - 2y''' + y''}{dx^2} & & q_{\prime\prime} &= \dfrac{y - 2y_{\prime} + y_{\prime\prime}}{dx^2} \\[2ex] & \text{etc.} & & & \text{etc.} \end{array}$$

KOROLLAR V

53. Auf die gleiche Weise werden also durch diese Bezeichnungen der Ordinaten die Werte der Größen r, s, t etc., wie wir es oben gemacht haben, festgelegt

werden und aus der Figur bestimmt werden können. Es wird natürlich

$$r = \frac{y''' - 3y'' + 3y' - y}{dx^3}$$
$$s = \frac{y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y}{dx^4}$$
$$t = \frac{y^{V} - 5y^{IV} + 10y''' - 10y'' + 5y' - y}{dx^5}$$
etc.,

sein, woher so die vorhergehenden wie nachfolgenden Werte dieser Buchstaben gebildet werden können.

KOROLLAR VI

54. Wenn daher aber die Formel $\int Zdx$ auf die Abszisse $AM = x$ bezogen worden ist, wird ihr Wert, der dem folgenden Element $MN = dx$ der Abszisse entspricht, $= Zdx$ sein. Und daher werden auf gleiche Weise die Werte der Formel $\int Zdx$, die den einzelnen Elementen der Abszisse entsprechen, bezeichnet werden, wie folgt:

für	$MN = Zdx$	für	$MN = Zdx$
für	$NO = Z'dx$	für	$LM = Z_{\prime}dx$
für	$OP = Z''dx$	für	$KL = Z_{\prime\prime}dx$
für	$PQ = Z'''dx$	für	$IK = Z_{\prime\prime\prime}dx$
	etc.		etc.

KOROLLAR VII

55. Wenn also der Ausdruck $\int Zdx$ sich auf die Abszisse $AM = x$ der Kurve bezieht, wird der Wert desselben Ausdrucks, der der vorgelegten Abszisse AZ entsprechen wird,

$$= \int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx + \text{etc.}$$

bis ins Unendliche, bis schließlich zum letzten Punkt Z gelangt wird, sein.

KOROLLAR VIII

56. Wenn also die Kurve gefunden werden muss, die für die gegebene Abszisse AZ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat, dann ist, nachdem irgendeine unbestimmte Abszisse $AM = x$ gesetzt wurde, zu bewirken, dass dieser Ausdruck $\int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx+$ etc. bis hin zu Z maximal oder minimal wird.

BEMERKUNG 1

57. Obwohl diese Annahme nur nach Belieben gemacht worden ist, werden diese Bezeichnungen den größten Nutzen dafür verschaffen, Probleme, die sich auf diese Methode der Maxima und Minima beziehen, unumständlich aufzulösen.

Denn bei Aufgaben dieser Art hat eine angenehme Auswahl der Bezeichnungen sehr großen positiven Einfluss und mit ihrer Hilfe kann die Rechnung nicht nur zusammengefasst, sondern auch um Vieles leichter und bequemer gemacht werden. Es wird aber diese Bezeichnungsweise der anderen gebräuchlichen, in welcher durch die Differentiale unmittelbar folgende Werte von variablen Funktionen ausgedrückt zu werden pflegen, aus dem Grunde vorstehen, weil bei der Auflösungsmethode Differentiale anderer Art auftauchen werden, die mit den natürlichen Differentialen variabler Größen leicht vermischt werden könnten, wenn nicht mit dieser Bezeichnungsweise die natürlichen Differentiale zumindest hinsichtlich der Notation beseitigt werden würden.

PROPOSITION IV THEOREM

58. Wenn amnoz eine die Kurve (Fig. 3) war, die auf die gegebene Abszisse AZ bezogen wurde und in welcher die Formel $\int Zdx$ einen maximalen oder minimalen Wert erhält, und eine andere Kurve amvoz aufgefasst wird, die sich von dieser unendlich wenig unterscheidet, dann wird der Wert der Formel $\int Zdx$ für jede der beiden Kurven derselbe sein.

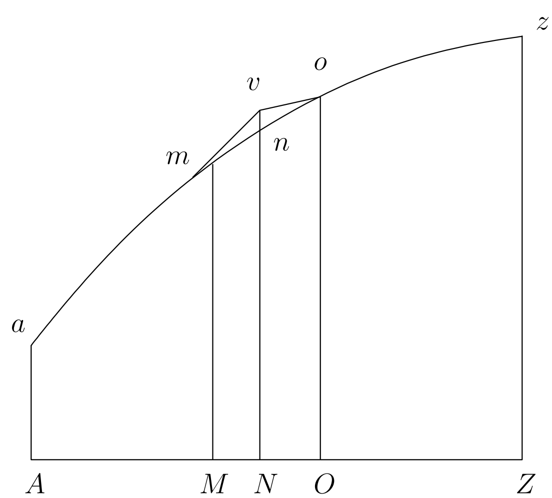

Fig. 3

BEWEIS. Wann immer in der Analysis eine gewisse variable Formel maximal wird, dann kommt sie zu erst durch ununterbrochenes Zunehmen immer näher an den maximalen Wert heran, darauf aber, wenn sie diesen erreicht hat, entfernt sie sich durch Abnahme wiederum von diesem. Aber dieses Herangehen zum maximalen Wert und das Entfernen von selbigem sei so, dass, während die Größe sich unmittelbar um das Maximum herum bewegt, dann ihre momentanen Zuwächse und Abnahmen verschwinden; und dieses selbe ist über das Minimum zu verstehen. Es sind freilich auch Maxima und Minima solcher Art gegeben, um welche herum die Zuwächse und Abnahmen unendlich groß werden; aber Maxima und Minima dieser Art finden beim gegenwärtigen Unternehmen selten einen Platz, und wenn sie auftreten, wird es leicht sein, sie zu bestimmen. Es soll daher genügen, bemerkt zu haben, dass um das Maximum und Minimum herum endliche momentane Änderungen nicht gegeben sein können. Wenn daher also in der Kurve *amnoz* der Ausdruck $\int Zdx$ einen maximalen oder minimalen Wert hat, wird sich für eine andere Kurve der Wert desselben Ausdrucks umso mehr vom Maximum oder Minimum entfernen, umso mehr diese andere Kurve von jener abweicht. Wenn aber die andere Kurve unendlich wenig von jener genügenden abweicht, dann wird für jede von beiden die Formel $\int Zdx$ denselben Wert erhalten. Eine in geringstem Maße abweichende Kurve dieser Art werden wir aber darunter auffassen, wenn wir festlegen, dass ein nur unendlich kleiner Bogen *mno* unendlich wenig variiert wird und an seiner Stelle der Bogen *mvo* eingesetzt wird. Deswegen wollen wir verstehen, dass aus der Kurve *az*, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, ein unendlich kleiner Teil *mno* herausgeschnitten wird und an seiner Stelle ein anderer *mvo*, der sich von jenem unendlich wenig unterscheidet, eingefügt wird; dann wird der Wert der Formel $\int Zdx$, der der Kurve *amnoz* entspricht, gleich dem Wert sein, der der Kurve *amvoz* entspricht. Q.E.D.

KOROLLAR I

59.Weil ja die Veränderung möglichst klein festgelegt werden muss, wird es nicht genügen, den Bogen *mno*, der festgelegt wird, nicht verändert zu werden, unendlich klein anzunehmen, sondern auch die Abweichung *nv* in Bezug auf die Länge des Bogens *mno* muss unendlich klein sein.

KOROLLAR II

60.Nachdem also eine solche Veränderung in der Kurve festgelegt worden ist, wird daher auch eine Veränderung im Wert der Formel $\int Zdx$ entstehen, die aber durch den Beweis verschwindend sein wird. Und auf diese Weise wird aus einer solchen angenommenen Veränderung eine Gleichung entstehen, die zugleich die Natur der gesuchten Kurve liefern wird.

BEMERKUNG 1

61. In diesen Propositionen ist also die gesamte Methode enthalten, Probleme aufzulösen, in denen die Kurve verlangt wird, in welcher der Wert einer gewissen unbestimmten Formel, wie $\int Zdx$, maximal oder minimal sein soll. Es wird nämlich immer ein unendlich kleiner Anteil der Kurve, wie *mno*, aufgefasst, ein wenig zu *mvo* variiert zu werden, und dann wird die Differenz der Werte gesucht, welche die Formel $\int Zdx$ sowohl für die wahre Kurve *amnoz* wie für die erdachte *amvoz* erhält, und diese Differenz gibt gleich Null gesetzt die Natur der gesuchten Kurve. Aber diese Veränderung muss an einer unbestimmten Stelle geschehen, damit sie sich auf die ganze Kurve bezieht und sich auf die einzelnen Stellen erstreckt. Diese Veränderung kann aber wie auch immer vollzogen werden, solange sie unendlich klein ist, und entweder auf zwei oder auf mehrere Elemente der Kurve ausgedehnt werden: Es muss nämlich immer dieselbe endgültige Gleichung resultieren. Dennoch erfordert es die Bequemlichkeit der Rechnung, dass die Veränderung in so wenigen Elementen vorgenommen wird, dass sie genügt, um die Lösung auszuführen. Wenn so beispielsweise unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die bestimmt werden

muss, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, dann wird es genügen, nur zwei Elemente der Kurve verändert aufzufassen. Aber wenn nicht unter allen Kurven, sondern nur denen, die einen oder mehrere Ausdrücke gemein haben, die bestimmt werden muss, in welcher eine gewisse Größe maximal oder minimal ist, dann wird sich nicht irgendeine Veränderung mvo annehmen lassen, sondern es muss eine solche festgelegt werden, dass jene allen Kurven gemeinsamen Eigenschaften bewahrt werden. In diesen Fällen werden also zwei Elemente nicht genügen, sondern es werden mehrere angenommen werden müssen, dass allen Bedingungen genügt werden kann.

DEFINITION V

62. Der Differentialwert, der der gegebenen Formel des Maximums oder Minimums entspricht, ist die Differenz zwischen den Werten, welche diese Formel sowohl in der gesuchten Kurve selbst als auch in derselben, nachdem sie unendlich wenig verändert wurde, erhält.

KOROLLAR I

63. In der Kurve, für welche eine gegebene Formel, beispielsweise $\int Zdx$, ein Maximum oder Minimum sein muss, wird der entsprechende Differentialwert dieser Formel verschwinden. Und deswegen, wenn der Differentialwert gleich Null gesetzt wird, wird man die Gleichung haben, mit welcher die Natur der gesuchten Kurve ausgedrückt werden wird.

KOROLLAR II

64. Aus dem gefundenen Differentialwert, der der vorgelegten Formel des Maximums oder Minimums entspricht, wird man unmittelbar eine Gleichung haben, der die Natur der Kurve ausdrückt, in welcher jene vorgelegte Formel einen maximalen oder minimalen Wert hat.

KOROLLAR III

65. Die ganze Aufgabe, Kurven zu finden, die sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen, ist daher darauf reduziert worden, dass für eine Formel des Maximums oder Minimums ihr entsprechender Differentialwert gefunden wird.

BEMERKUNG 1

66. Weil also im Allgemeinen die Vorstellung nicht nur von der Natur der Fragen, in denen mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehene Kurven gesucht werden, sondern auch der Methode, die, um sie aufzulösen, zu gebrauchen ist, erläutert worden ist, werden wir zur Behandlung selbst fortschreiten. Und zuerst werden wir freilich die absolute Methode, mit welcher Kurven gesucht werden, die unter ganz und gar allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden, mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sind, angeben. Darauf werden wir zur relativen Methode der Maxima und Minima übergehen, auf welche sich Fragen beziehen, die nicht unter allen Kurven, die einer gegebenen Abszisse entsprechen, sondern nur denen, die sich einer gewissen oder gleich mehreren gemeinsamen Eigenschaften erfreuen, die zu bestimmen befehlen, welcher eine gewisse Beschaffenheit des

Maximums oder Minimums zufällt. In diese Behandlungen wird aber die Natur der Formel $\int Zdx$, die ein Maximum oder Minimum sein muss, einen gewaltigen Unterschied einbringen, je nachdem ob Z entweder eine bestimmte oder unbestimmte Funktion war, wie wir schon bemerkt haben.

Kapitel II

Über die absolute Methode der Maxima und Minima, um gekrümmte Linien zu finden

PROPOSITION I PROBLEM

1. Wenn in irgendeiner Kurve amz die Ordinate Nn um das unendlich kleine Stück nv vermehrt wird, die Zuwächse oder Abnahmen zu finden, die die einzelnen bestimmten Größen, die sich auf die Kurve beziehen, daher erhalten werden.

LÖSUNG. Bestimmte Größen, die sich auf die vorgelegte Kurve beziehen, sind, außer der Abszisse x, die nicht betroffen ist, diese y, p, q, r, s etc. mit ihren abgeleiteten Werten, welche sie an entweder vorhergehenden oder folgenden Stellen erhalten. Wenn wir daher nun $AM = x$ und $Mm = y$ setzen, wird $Nn = y'$ sein, und dessen Wert wird durch Translation des Punktes n nach v um das Stück nv vermehrt werden, die übrigen Ordinaten y'', y''' etc. in gleicher Weise wie die vorhergehenden $y_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime\prime}$, y_{IV} etc. werden aber nicht betroffen sein. Weil also allein die Ordinate y' um das Stück nv wächst, wird man aus den Paragraphen 51 und ff. des vorhergehenden Kapitels berechnen, einen wie großen Zuwachs alle Größen aus der Zunahme der Ordinate y' allein erfahren. Alle Größen, deren Wert nicht von y' abhängt, werden eine Veränderung eingehen, die übrigen aber, die nicht von y' abhängen, werden unverändert bleiben. Weil daher $p = \frac{y'-y}{dx}$ ist, wird diese Größe p um das Stück $\frac{nv}{dx}$ wachsen; aber weil $p' = \frac{y''-y'}{dx}$ ist, wird diese Größe p' um das Stück $\frac{nv}{dx}$ schrumpfen. Und auf die gleiche Weise werden die Zuwächse oder Abnahmen der übrigen Größen gefunden werden, indem man in deren oben dargebotenen Werten alle Werte von y, außer diesen y', streicht und an dessen Stelle nv schreibt. Auf diese Weise haben wir die Zuwächse aller bestimmten Größen, die freilich eine Veränderung erfahren, in der folgenden Tabelle zusammengetragen:

Größe	Zuwachs	Größe	Zuwachs
y'	$+nv$	$s_{,,,}$	$+\frac{nv}{dx^4}$
p	$+\frac{nv}{dx}$	$s_{,,}$	$-\frac{4nv}{dx^4}$
p'	$-\frac{nv}{dx}$	$s_{,}$	$+\frac{6nv}{dx^4}$
$q_{,}$	$+\frac{nv}{dx^2}$	s	$-\frac{4nv}{dx^4}$
q	$-\frac{2nv}{dx^2}$	s'	$+\frac{nv}{dx^4}$
q'	$+\frac{nv}{dx^2}$	t_{IV}	$+\frac{nv}{dx^5}$
$r_{,,}$	$+\frac{nv}{dx^3}$	$t_{,,,}$	$-\frac{5nv}{dx^5}$
$r_{,}$	$-\frac{3nv}{dx^3}$	$t_{,,}$	$+\frac{10nv}{dx^5}$
r	$+\frac{3nv}{dx^3}$	$t_{,}$	$-\frac{10nv}{dx^5}$
r'	$-\frac{nv}{dx^3}$	t	$+\frac{5nv}{dx^5}$
		t'	$-\frac{nv}{dx^5}$

Und aus dieser Tabelle werden sogar die Zuwächse oder Abnahmen weiterer Größen, wenn diese auftauchen, leicht erkannt werden können. Q.E.I.

KOROLLAR I

2. Nachdem also die Zuwächse dieser ersten sich auf die Kurve beziehenden Größen bekannt geworden sind, werden daraus die Zunahmen aller aus ihnen zusammengesetzten Größen, die aus der vermehrten Ordinate y' entstehen, bestimmt werden können, wenn die Art der Zusammensetzung betrachtet wird.

KOROLLAR II

3. Die dargebotenen Zunahmen dieser Größen werden natürlich als deren Differentiale betrachtet werden können. Und wenn irgendeine aus jenen zusammengesetzte Größe vorgelegt war, wird ihr entsprechender Zuwachs, der aus der Translation des Punktes n nach v entspringt, gefunden werden, indem man jene Größe differenziert und anstelle der Differentiale der einzelnen Größen die Zuwächse schreibt, die diesen Größen zugeschrieben worden sind.

KOROLLAR III

4. Wenn man also diese Funktion $y'\sqrt{1+pp}$ hat, deren Zuwachs, der aus der Translation des Punktes n nach v entsteht, zu bestimmen ist, werde die Funktion

zuerst differenziert; daher wird hervorgehen

$$dy'\sqrt{1+pp}+\frac{y'pdp}{\sqrt{1+pp}};$$

und daher schreibe man anstelle von dy' und dp die Zuwächse, die den Größen y' und p entsprechen, natürlich $+nv$ et $+\frac{nv}{dx}$; und es wird der Zuwachs der vorgelegten Funktion sein

$$=+nv\sqrt{1+pp}+\frac{y'p\cdot nv}{dx\sqrt{1+pp}}.$$

KOROLLAR IV

5. Angenehm kann also durch Differentiation welcher Funktion auch immer der Zuwachs, welcher aus der Zunahme nv der Ordinate y' entsteht, angegeben werden; das kann aus Betrachtung einer Figur nur schwer und keineswegs allgemein geschehen.

BEMERKUNG 1

6. Sorgfältig ist es natürlich zu bemerken, dass diese Art, Zuwächse von Funktionen oder Größen, die aus x, y, p, q etc. und deren Derivaten y', y'', p', p'' etc. gegeben sind, zu finden, sich nur auf bestimmte Funktionen erstreckt, keinesfalls aber auf unbestimmte ausgedehnt werden kann. Wenn daher nämlich eine vorgelegte Funktion unbestimmt oder eine unbestimmte Integralformel war, die eine Integration weder algebraisch noch transzendent zulässt, dann erhalten wir aus ihrer Differentiation nichts, um die Zunahme zu finden. Im Folgenden aber, wo wir Formeln des Maximums und Minimums $\int Zdx$ solcher Art betrachten werden, in denen Z eine solche unbestimmte Funktion ist, werden wir Zuwächse von Funktionen dieser Art untersuchen. Wenn aber Z eine bestimmte Funktion war, kann die Lösung des vorgelegten Problems genügen, um Lösungen sich hierauf beziehender Probleme auszuführen.

PROPOSITION II PROBLEM

7. Wenn (Fig. 4) Z eine bestimmte Funktion nur vonx und y war, die Kurve az zu finden, in welcher der Wert der Formel $\int Zdx$ maximal oder minimal ist.

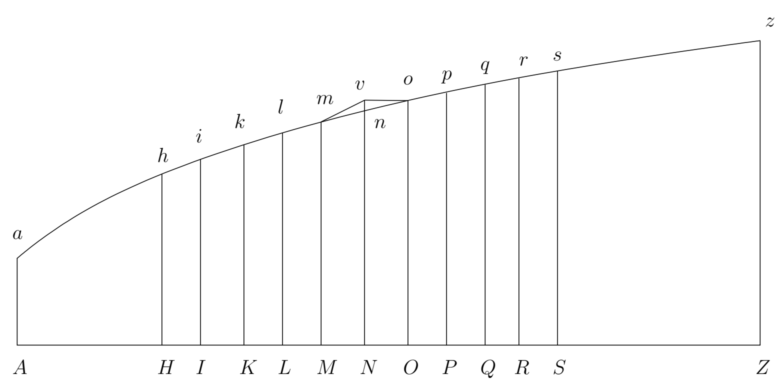

FIG. 4

LÖSUNG. Man fasse die Abszisse AZ, welcher das Maximum oder Minimum der Formel $\int Zdx$ entsprechen muss, in unzählige gleiche Elemente aufgeteilt auf, welche einzelnen durch dx zu bezeichnen sind; und nachdem die unbestimmte Abszisse $AM = x$ und Ordinate $Mm = y$ gesetzt worden sind, wird aus der Formel $\int Zdx$ dem Element MN Zdx entsprechen; und gemäß der gebrauchten Bezeichnungsweise wird dem folgenden Element NO $Z'dx$ entsprechen und den folgenden Elementen OP, PQ etc. werden die Werte $Z''dx$, $Z'''dx$ etc. entsprechen, den vorhergehenden Elementen LM,KL,IK etc. werden aber die Werte $Z_{\prime}dx$, $Z_{\prime\prime}dx$,$Z_{\prime\prime\prime}dx$ etc. entsprechen. Daher, wenn die Kurve az die selbst ist, die gesucht wird, wird $Zdx + Z'dx + Z''dx+$ etc., zusammen mit $Z_{\prime}dx + Z_{\prime\prime}dx + Z_{\prime\prime\prime}dx+$ etc. ein Maximum oder Minimum sein müssen. Wenn daher also die eine Ordinate $Nn = y'$ um das Stück nv vermehrt wird, muss jener Ausdruck denselben Wert beibehalten und daher muss der Wert der Differentialformel $\int Zdx$ oder die Summe der Terme $Zdx+Z'dx+Z''dx+$ etc. zusammen mit $Z_{\prime}dx+Z_{\prime\prime}dx+Z_{\prime\prime\prime}dx+$ etc. verschwinden. Die Differentialwerte dieser einzelnen Terme, die aus der Translation des Punktes n nach v entspringen, werden also gefunden werden müssen und deren Aggregat wird der Differentialwert sein, der der Formel $\int Zdx$ entspricht und der $= 0$ gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve liefern wird. Weil ja aber Z als eine bestimmte Funktion von x und y festgelegt wird, wird das Differential dZ selbiger eine Form dieser Art haben $Mdx + Ndy$; sodass $dZ = Mdx + Ndy$ ist. Die Differentiale der derivierten Werte von Z werden sich also so verhalten:

$$\begin{array}{ll} dZ' = M'dx + N'dy' & dZ_{\prime} = M_{\prime}dx + N_{\prime}dy_{\prime} \\ dZ'' = M''dx + N''dy'' & dZ_{\prime\prime} = M_{\prime\prime}dx + N_{\prime\prime}dy_{\prime\prime} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Weil nun die Differentialwerte der Terme Zdx, $Z'dx$, $Z''dx$ etc. und ebenso von $Z_{\prime}dx$, $Z_{\prime\prime}dx$ etc. gefunden werden, wenn diese Terme differenziert werden und anstelle von dy' in den Differentialen nv, anstelle aller übrigen Differentiale aber 0 geschrieben wird, ist klar, dass allein der Term $Z'dx$ einen Differentialwert haben wird, weil ja lediglich in seinem Differential dy' auftaucht. Nachdem deshalb nv anstelle von dy' geschrieben worden ist, wird der Differentialwert des Terms $Z'dx = N'dx{\cdot}nv$ sein, der zugleich der Differentialwert der ganzen Formel $\int Zdx$ sein wird, weil die übrigen Terme außer $Z'dx$ keine Veränderung erfahren. Anstelle von N' werden wir aber auch N setzen können, weil $N' = N + dN$ ist und dN in Bezug auf N verschwindet. Für die gesuchte Kurve, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, hat man also diese Gleichung $Ndx \cdot nv = 0$ oder $N = 0$; während $dZ = Mdx + Ndy$ ist. Q.E.I.

KOROLLAR I

8. Wenn also die Kurve bestimmt werden muss, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder ein Minimum ist und Z eine bestimmte Funktion nur von x und y ist, dann muss die Größe Z differenziert werden; weil diese eine Form dieser Art haben wird $dZ = Mdx + Ndy$, wird daher die Gleichung für die gesuchte Kurve gebildet werden, die $N = 0$ sein wird.

KOROLLAR II

9. Weil also N eine bestimmte Funktion von x und y ist, wird in der Gleichung für die Kurve $N = 0$ keine konstante Größe enthalten sein, die nicht in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ enthalten war; und dieser Sache wegen wird die gefundene Kurve eine einzige und vollkommen bestimmte sein.

KOROLLAR III

10. In Fragen, die in diesem Problem erfasst worden sind, wird also die genügende Kurve allein aus der Formel des Maximums oder Minimums bestimmt; und es werden sich nicht darüber hinaus irgendwelche anderen Punkte vorschreiben lassen, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen soll.

KOROLLAR IV

11. Wenn daher Z eine Funktion nur von x war, sodass sie y nicht involviert, dann wird $\int Zdx$ eine bestimmte Funktion in gleicher Weise nur von x sein und ihr werden daher alle Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, gleichermaßen genügen. Dieses selbe zeigt in der Tat die Rechnung; in diesem Fall, in dem in Z y nicht enthalten ist, wird $N = 0$ werden; und daher geht keine Gleichung für die gesuchte Kurve hervor.

KOROLLAR V

12. Sofort kann auch eingesehen werden, ob eine Kurve gegeben ist, in welcher eine Formel $\int Zdx$ dieser Art ein Maximum oder Minimum ist. Wenn nämlich aus der Differentiation von Z ein Wert solcher Art für N gefunden wird, dass durch die Gleichung $N = 0$ keine Kurve ausgedrückt wird, dann existiert auch keine Kurve, in welcher die vorgelegte Formel $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum wird.

KOROLLAR VI

13. Schließlich wird auch erkannt, dass diese Eigenschaft des Maximums oder Minimums nicht auf eine einzige Abszisse beschränkt ist, sondern, wenn die Kurve für eine Abszisse die Formel $\int Zdx$ zum Maximum oder Minimum macht, dieselbe für irgendeine andere Abszisse gleichermaßen einen maximalen oder minimalen Wert haben wird.

BEMERKUNG 1

14. Wir haben also eine leichte Methode erlangt, unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu bestimmen, in welcher die Formel $\int Zdx$ einen maximalen oder minimalen Wert festlegt, wenn freilich Z eine bestimmte Funktion nur von x und y ist. Zugleich ist aber auch klar, dass die genügende Kurve immer algebraisch sein wird, wenn freilich Z eine algebraische Funktion nur von x und y war. Eine Eigenschaft einer auf diese Weise gefundenen Kurve wird also diese sein, dass, wenn für dieselbe Abszisse irgendeine andere gekrümmte Linie festgelegt wird, dann für sie der Wert der Formel $\int Zdx$ gewiss entweder kleiner oder größer hervorgehen wird als der für die gefundene Kurve, je nachdem ob in der gefundenen die Formel $\int Zdx$ entweder maximal oder minimal war. Obwohl aber noch Zweifel darüber besteht, ob in der gefundenen Kurve der Wert der Formel $\int Zdx$ maximal oder minimal sein wird, wird die Entscheidung darüber

in jedem speziellen Fall leicht getroffen werden; im Allgemeinen kann aber ganz und gar nichts entschieden werden. Dennoch ist es wiederum gewiss, wenn eine einzige Gleichung hervorgeht, dass dann entweder nur ein Maximum oder nur ein Minimum Geltung haben kann; das heißt, wenn die gefundene Kurve für ein Maximum ist, kein Minimum gegeben ist, sondern der Wert der Formel $\int Zdx$ bis ins Unendliche vermindert werden kann. Auf die gleiche Weise, wenn eine einzige Kurve gefunden worden ist und in ihr die Formel $\int Zdx$ minimal wird, dann der Wert $\int Zdx$ ins Unendliche vermehrt werden kann. Wenn daher aber die Lösung überhaupt keine genügende Kurve liefert, wird das ein Anzeichen sein, dass der Wert der Formel $\int Zdx$ für was für eine Abszisse auch immer so ins Unendliche wachsen wie abnehmen kann.

BEMERKUNG 2

15. Aus derselben Lösung werden auch jene Kurven, die mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sind, der anderen oben erwähnten Art gefunden werden können, zu welchen nicht durch verschwindende Differentialwerte, sondern unendlich große, gelangt wird; diese Art von Maxima und Minima weicht von jener in höchstem Maße ab. Es werden aber diese Kurven gefunden werden, wenn der Differentialwert $Ndx \cdot nv$ nicht null, sondern unendlich gleichgesetzt wird. Sooft also diese Gleichung $N = \infty$ eine gewisse Kurve suggeriert, dann wird in ihr gleichermaßen die Formel $\int Zdx$ einen maximalen oder minimalen Wert erhalten: Dies wird natürlich geschehen, wann immer für N ein Bruch hervorgeht, dessen Nenner gleich Null gesetzt die Gleichung für eine gekrümmte Linie liefert. Deshalb können auf diese Weise mehrere Kurven gefunden werden, die derselben Frage genügen, von denen die einen die Maxima enthalten werden, die anderen die Minima. Es kann aber geschehen, dass mehr als zwei dem Problem genügende Kurven gefunden werden, auch wenn nur zwei Gleichungen entspringen können, natürlich $N = 0$ und $N = \infty$. Wenn freilich N eine aus Faktoren zusammengesetzte Größe war, dann wird ein beliebiger Faktor entweder null oder unendlich gleichgesetzt eine Gleichung für eine genügende Kurve geben; es ist nämlich bekannt, dass oftmals mehrere Maxima und Minima auftreten können. All diese Dinge werden aber umso besser in den folgenden in diesem Problem enthaltenen Beispielen erklärt werden.

BEISPIEL I

16. Die Kurve zu finden, die unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, $\int XYdx$ zum Maximum oder Minimum haben, während X eine Funktion nur von x und Y eine nur von y bezeichnet.

In diesem Fall wird also $Z = XY$ und daher $dZ = YdX + XdY = Mdx + Ndy$ werden. Es wird also

$$M = \frac{YdX}{dx} \quad \text{und} \quad N = \frac{XdY}{dy}$$

sein, wegen X einer Funktion nur von x und Y einer Funktion nur von y. Für die gesuchte Kurve wird also gelten

$$N = \frac{XdY}{dy} = 0;$$

weil ja aber Y eine Funktion von y ist, werde $dY = \Theta dy$ gesetzt; es wird Θ in gleicher Weise eine Funktion von y sein; und daher hat man für die gesuchte Kurve, wenn diese genügt, diese Gleichung $X\Theta = 0$, und daher entweder $X = 0$ oder $\Theta = 0$; weil keine von beiden eine gekrümmte Linie liefert, wird daher klar, dass dieser Frage überhaupt keine Kurve genügt, sondern der vorgelegte Wert $\int XY dx$ ins Unendliche sowohl vermehrt als auch vermindert werden kann. Aus der Gleichung $\Theta = 0$, weil Θ eine Funktion nur von y ist, folgt $y =$ Konst., welche Gleichung eine der Abszisse AZ parallele gerade Linie liefert, deren Distanz so groß ist, dass Y eine maximale oder minimale Funktion wird. Es ist nämlich klar, wenn die Größe Y einen maximalen oder minimalen Wert erhält, dass dann auch die Formel $\int XY dx$ ein Maximum oder Minimum wird. Die andere Gleichung $X = 0$ aber, weil sie $x =$ Konst. liefert, bietet nicht einmal eine der Frage genügende gerade Linie dar, weil sie eine zur Abszisse normale gerade Linie liefert, die deshalb nicht einer gewissen gegebenen Abszisse, sondern nur einem ihrer Punkte entsprechen wird.

BEISPIEL II

17. Eine Kurve zu finden, die unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int(ax - yy)ydx$ hat.

Wenn diese Formel mit der allgemeinen $\int Zdx$ verglichen wird, wird $Z = axy - y^3$ und daher $dZ = aydx + (ax - 3yy)dy$ werden; sodass $M = ay$ und $N = ax - 3yy$ wird; daher wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben $ax - 3yy = 0$ oder $yy = \frac{1}{3}ax$, welche die für eine Parabel ist, die den Scheitel in A, die Achse AZ und den Parameter $= \frac{1}{3}a$ hat. In dieser Parabel wird also der Wert der Formel $\int(ax - yy)ydx$ maximal oder minimal sein. Ob er aber maximal oder minimal ist, wird entdeckt werden, wenn wir irgendeine andere Linie anstelle der Parabel einsetzen und untersuchen, ob für sie der Wert der vorgelegten Formel größer oder kleiner ist als der für die Parabel. Wir wollen also die mit der Achse selbst übereinstimmende gerade Linie nehmen, für welche $y = 0$ sein wird. Für diese wird deshalb der Wert der Formel $\int(ax - yy)ydx$ in gleicher Weise $= 0$ werden, für die Parabel wird aber derselbe Wert positiv und daher > 0 sein; daraus folgt, dass in der Parabel der Wert der vorgelegten Formel kein Minimum ist, sondern ein Maximum: Wir werden aber auch algebraisch angeben können, wie groß der Wert der vorgelegten Formel für die Parabel sein wird; weil nämlich $yy = \frac{1}{3}ax$ ist, wird die vorgelegte Formel in diese übergehen

$$\int \frac{2}{3}axdx\sqrt{\frac{1}{3}ax} = \frac{4}{15}ax^2\sqrt{\frac{1}{3}dx}.$$

Wenn wir daher aber eine andere Gleichung festlegen, beispielsweise $y = nx$, wird die vorgelegte Formel in diese übergehen

$$\int dx(naxx - n^3x^3) = \frac{1}{3}nax^3 - \frac{1}{4}n^3x^4,$$

welche immer kleiner ist als der Wert der Formel, der für die gefundene Parabel hervorgegangen ist, was jeder leicht durch Einsetzen bestimmter Werte anstelle von x leicht sehen wird.

BEISPIEL III

18. Die Kurve zu finden, in welcher unter ganz und gar allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden, der Wert dieser Formel

$$\int (15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)dx$$

maximal oder minimal ist.

Es wird also $Z = 15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5$ sein, wenn welcher differenziert wird, nachdem X konstant gesetzt wurde, wird

$$Ndy = 15a^2x^2dy - 15a^3xdy + 15a^2y^2dy - 15y^4dy;$$

und daher wird $N = 15(a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4)$ hervorgehen; dieser Wert wird $= 0$ gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben; es wird deshalb gelten

$$aaxx - a^3x + a^2y^2 - y^4 = 0 = (ax - yy)(ax + yy - aa).$$

Wegen dieser zwei Faktoren gehen aber zwei genügende Kurven hervor, deren eine mit dieser Gleichung $yy = ax$, die andere mit dieser $yy = aa - ax$ ausgedrückt werden wird; jede von beiden ist eine für eine Parabel. Damit nun klar wird, welche der beiden für das Maximum oder Minimum ist, wollen festlegen, dass die Abszisse sehr klein ist, und die erste Gleichung $yy = ax$ wird in der Formel eingesetzt geben

$$\int -10a^3x\sqrt{ax}dx.$$

Aber die andere Formel $yy = aa - ax$ oder $y = a$ wird eingesetzt $\int 2a^5dx$ geben. Wenn daher aber y irgendein anderer Wert zugeteilt wird, beispielsweise $y = 0$, dann geht die vorgelegte Formel in $\int 0dx = 0$ über. Daraus ist klar, dass die eine der gefundenen Kurven $yy = aa - ax$ für das Maximum, die andere $yy = ax$ aber für das Minimum, natürlich ein negatives Maximum, ist. Sehr leicht wird aber immer diese Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum in der gefundenen Kurve Geltung hat, getroffen werden, wenn freilich die Abszisse x unendlich klein festgelegt wird; dann wird nämlich eine Integration nicht von Nöten sein, sondern die Formel Zdx selbst wird in diesem Fall den Wert der Formel $\int Zdx$ zeigen.

BEISPIEL IV

19. Unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu bestimmen, in welcher der Wert der Formel

$$\int (3ax - 3xx - yy)(ax - xx - \frac{4}{3}xy + yy)dx$$

maximal oder minimal ist.

Aus dieser Formel geht also der folgende entwickelte Wert von Z hervor:

$$\begin{aligned} Z = &+ 3a^2x^2 - 4ax^2y + 2axyy + \frac{4}{3}xy^3 - y^4 \\ &- 6ax^3 \ + 4x^3y \ - 2xxyy \\ &+ 3x^4 \end{aligned}$$

diese wird für konstant gesetztes x differenziert und durch dy geteilt den folgenden Wert für N geben

$$N = -4ax^2 + 4axy + 4xyy - 4y^3 + 4x^3 - 4xxy,$$

welcher Ausdruck gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben wird. Es wird deshalb gelten

$$y^3 - xyy + xxy + axx - axy - x^3 = 0,$$

welche zwei Faktoren hat, die freilich genauso viele Gleichungen liefern, und zwar diese

I.	$y - x = 0$	für eine gerade Linie,
II.	$yy - ax + xx = 0$	für einen Kreis.

Es werde x unendlich klein festgelegt und es wird aus der Gleichung $y = x$ der Wert von $Z = 3a^2x^2$ sein; aber aus der Gleichung $yy = ax - xx$ oder $y = \sqrt{a}x$ wird $Z = 4aaxx$ sein. Wenn daher aber $y = a$ gesetzt wird, geht $Z = -a^4$ hervor, woher klar ist, dass jede von beiden gefundenen Linien für ein Maximum ist.

BEMERKUNG 3

20. Probleme können auch durch die gewöhnliche Methode der Maxima und Minima aufgelöst werden. Wann immer nämlich eine Kurve gesucht wird, für welche der Wert von $\int Zdx$ maximal oder minimal ist und das für eine beliebige Abszisse, ist klar, wenn freilich Z eine bestimmte Funktion von x und y ist, dass die Formel $\int Zdx$ kein Maximum oder Minimum sein kann, wenn nicht ihr Element Zdx und daher Z ein solches ist. Deswegen wird der Frage genügt werden, wenn die Größe Z für konstant gesetztes x differenziert wird und ihr Differential $= 0$ gesetzt wird. Dann wird nämlich Z immer einen maximalen oder minimalen Wert haben, und daher auch Zdx und auch die Formel $\int Zdx$ selbst. Wenn daher aber die Funktion Z für konstant gesetztes x differenziert wird, wird Ndy hervorgehen, weil wir ja durch allgemeines Differenzieren $dZ = Mdx + Ndy$ hervorzugehen festgesetzt haben; und es wird durch Setzen von $N = 0$ genügt werden, welches freilich dieselbe Lösung ist, die wir durch die angegebene Methode gefunden haben. Obwohl aber daher diese Fragen erscheinen, auf gleiche Weise aufgelöst werden zu können, wie in der gewöhnlichen Methode der Maxima und Minima, passiert dies dennoch nur, wenn Z eine Funktion nur von x und y war; denn, wenn in Z außerdem die aus den Differentialen entstandenen Größen p, q, r etc. enthalten sind, dann kann die gewöhnliche Methode

von keinem weiteren Nutzen sein. Auch wenn nämlich dann die Funktion Z für konstant gesetztes x differenziert wird, gingen dann in das Differential auch die Differentiale dp, dq, dr etc. ein, weil deren Relation zu dy nicht bekannt ist, wird daher keine zur Bestimmung des Maximums oder Minimums geeignete Gleichung abgeleitet werden können. In diesen Fällen wird also die Nützlichkeit und Notwendigkeit unserer Methode besonders erkannt werden.

PROPOSITION III PROBLEM

21. Wenn Z (Fig. 4) eine bestimmte Funktion von x, y und p war, sodass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp,$$

unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu finden, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist.

LÖSUNG. Es sei amz die der Frage genügende Kurve und irgendeine Ordinate $Nn = y'$ werde aufgefasst, um das Stück nv vermehrt zu werden, der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ oder einer dieser gleichwertigen Größe, beispielsweise $Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx+$ etc. zusammen mit $Z_{\prime}dx + Z_{\prime\prime}dx + Z_{\prime\prime\prime}dx+$ etc. wird $= 0$ sein müssen. Den Differentialwert der ganzen Größe $\int Zdx$ aus der Translation des Punktes n nach v wird man also haben, wenn die man Differentialwerte jener einzelnen Größen, die freilich von dieser Translation betroffen werden, sucht und zu einer Summe zusammenaddiert. Aus der Translation des Punktes n nach v gehen aber nur jene Terme eine Veränderung ein, in denen die Größen y', p und p' und daher nur die Terme Zdx und $Z'dx$ enthalten sind; denn wie Z eine Funktion von y und p außer x ist, so ist Z' die gleiche Funktion von y' und p'. Deswegen werden diese Terme differenziert werden müssen, und in deren Differentialen müssen anstelle von dy', dp und dp' die oben angegeben Werte $+nv$, $+\frac{nv}{dx}$ und $-\frac{nv}{dx}$ geschrieben werden. So wie aber $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ ist, so wird $dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'$ sein. Daher wird deshalb der Differentialwert von Z $P \cdot \frac{nv}{dx}$ sein und der von Z' wird $N' \cdot nv - P' \cdot \frac{nv}{dx}$ sein; daher wird der Differentialwert jeder der beiden Terme $Zdx + Z'dx$ und daher der der ganzen Formel $\int Zdx = nv \cdot (P + N'dx - P')$ sein. Aber es ist $P' - P = dP$ und anstelle von N' kann N geschrieben werden; daher wird der Differentialwert $= nv \cdot (Ndx - dP)$ sein. Daher, weil der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve liefert, wird diese $0 = Ndx - dP$ vel $N - \frac{dP}{dx} = 0$ sein, mit welcher Gleichung die Natur der gesuchten Kurve ausgedrückt werden wird. Q.E.I.

KOROLLAR I

22. Wenn daher also Z irgendeine Funktion von x, y und ebenso von deren Differentialen dx und dy oder anstelle von deren Differentialen von p war, während $dy = pdx$ ist, wird das Differential von Z eine Form dieser Art haben, dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ ist. Und daher wird die Kurve gefunden werden, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, indem diese Gleichung $N - \frac{dP}{dx} = 0$ oder $Ndx = dP$ gebildet wird.

KOROLLAR II

23. Diese Gleichung wird also immer eine differentiale zweiten Grades sein, wenn in P p enthalten ist. Denn wenn p in P enthalten ist, dann wird in dP dp enthalten sein, welches wegen $p = \frac{dy}{dx}$ Differentiale zweiten Grades involvieren wird.

KOROLLAR III

24. Wann immer also im Differential von $dZ = Mdz + Ndy + Pdp$ die Größe P immer noch p in sich umfasst, werden dann wegen der Differentialgleichung zweiten Grades für die gesuchte Kurve zwei neue beliebige Konstanten durch Integration eingehen. Daher werden zur Bestimmung dieser Konstanten zwei Punkte der Kurve vorgeschrieben werden können; andernfalls würden nämlich nicht eine, sondern unzählige Kurven gefunden werden.

KOROLLAR IV

25. Damit deshalb Probleme dieser Art bestimmt vorgelegt werden, sind sie so zu formulieren, dass die Kurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgeführt werden muss, die unter allen anderen Kurven, die durch dieselben Punkte hindurchgehen, für dieselbe Abszisse x den maximalen oder minimalen Wert $\int Zdx$ umfasst.

KOROLLAR V

26. In P wird aber die Größe p nicht enthalten sein, wenn Z eine Funktion nur von x und y war, die mit p oder mit $n + p$, während n eine konstante Zahl bezeichnet, multipliziert wurde. Es sei nämlich V eine Funktion von x und y, sodass $dV = Mdx + Ndy$ und $Z = V(n + p)$ ist, es wird gelten

$$dZ = (n + p)Mdx + (n + p)Ndy + V dp.$$

Und daher wird die Gleichung für die gesuchte Kurve sein

$$0 = (n + p)N - \frac{dV}{dx} \quad \text{oder} \quad (n + p)Ndx = dV = Mdx + Ndy.$$

KOROLLAR VI

27. In diesen Fällen, in denen $Z = V(n + p)$ ist, während V eine Funktion nur von x und y ist, wird nicht zu einer Differentialgleichung zweiten Grades gelangt, weil dp in ihr überhaupt nicht enthalten ist. Aber nicht einmal zu einer Differentialgleichung ersten Grades wird gelangt, sondern sogar zu einer algebraischen. Denn weil $pdx = dy$ ist, wird $(n + p)Ndx = nNdx + Ndy$ sein; dies wird $Mdx + Ndy$ gleich gesetzt eine durch dx teilbare und daher diese algebraische Gleichung geben $nN = M$, wenn freilich V eine algebraische Funktion war.

KOROLLAR VII

28. Sooft dies aber passiert, wird die Formel des Maximums oder Minimums, die $\int Zdx$ ist, von solcher Form $\int(V ndx + V dy)$ oder für $n = 0$ gesetzt von solcher $\int V dy$ sein. Formeln des Maximums oder Minimums von dieser Art leiten also in gleicher Weise für die gesuchte Kurve eine bestimmte Gleichung ab, so dass

es nicht möglich ist, einen oder mehrere Punkte vorzuschreiben, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen soll.

KOROLLAR VIII

29. Nachdem also V als eine Funktion von x und y festgelegt wurde, wird diese Formel des Maximums oder Minimums $\int Vdy$ in gleicher Weise behandelt, wie $\int Vdx$. Denn für $dV = Mdx + Ndy$ gesetzt entspricht der Formel $\int Vdx$ diese Gleichung für die Kurve $N = 0$, sodass der anderen Formel $\int Vdy$ die Gleichung $M = 0$ entspricht. Daraus ist es ersichtlich, dass die Koordinaten x und y untereinander vertauscht werden können.

BEMERKUNG 1

30. Es ist deshalb klar, dass bei der Lösung von Problemen dieser Art, in denen die Kurve gesucht wird, die den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat, während Z eine Funktion von x, y, und p ist, zu einer Differentialgleichung zweiten Grades gelangt wird, wenn nicht in Z die Größe p nur eine einzige Dimension hat. Oftmals lässt aber diese Differentialgleichung zweiten Grades eine Integration zu, worüber in den einzelnen Fällen ein Urteil zu bilden sein wird. Dennoch wird es wiederum förderlich sein, hier angemerkt zu haben, dass die Integration allgemein gelingt, wenn in der Funktion Z x überhaupt nicht enthalten ist, das heißt, wenn in ihrem Differential $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ der Wert M verschwindet, sodass nur $dZ = Ndy + Pdp$ ist. Weil nämlich für die Kurve diese Gleichung $N - \frac{dP}{dx} = 0$ gefunden worden ist, werde sie mit dy multipliziert, und weil $dy = pdx$ ist, wird sie in diese übergehen $Ndy - pdP = 0$, welcher diese gleichwertig ist $Ndy + Pdp = Pdp + pdP = dZ$, deren Integral $Z + C = Pp$ ist, welche Gleichung nur eine differentiale ersten Grades ist. Sooft also unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die gesucht wird, in welcher der Wert der Formel $\int Zdx$ maximal oder minimal ist und Z eine Funktion nur von y und p ist, sodass $dZ = Ndy + Pdp$ ist, wird dann für die genügende Kurve sofort diese Differentialgleichung ersten Grades dargeboten werden können $Z+C = Pp$. Darauf wird dann aber auch, wenn Z eine Funktion nur von x und y und $dZ = Mdx + Pdp$ war, während der Term Ndy verschwindet, für die Kurve eine Differentialgleichung ersten Grades hervorgehen. Denn wegen $dP = 0$ wird $P = C$ sein, welche für die gesuchte Kurve eine Differentialgleichung nur ersten Grades geben wird. Wenn daher aber darüber hinaus M verschwindet oder Z eine Funktion nur von p und $dZ = Pdp$ ist, wird die gefundene Gleichung $P = C$ in diese verwandelt werden $Pdp = Cdp = dZ$, die erneut integriert $Z + D = Cp$ gibt. In diesem Fall, weil Z und P Funktionen nur von p sind, wird jede der beiden Gleichungen $P = C$ und $Z + D = Cp$ für p einen konstanten Wert und daher eine Gleichung dieser Form liefern $dy = ndx$ liefern, die aufzeigt, dass Problemen dieser Art gerade und freilich wie es beliebt gezogene Linien genügen. Denn in der Gleichung $P = C$, weil C eine beliebige Konstante ist, wird der Wert von p nicht nur konstant, sondern auch beliebig werden; daraus wird irgendeine gerade Linie resultieren. Deswegen, wenn eine Kurve durch zwei beliebige Punkte hindurchgeführt werden muss, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, und Z eine Funktion nur von p ist,wird dann eine Gerade genügen, die durch jene zwei gegebenen Punkte hindurchgeführt wurde.

BEMERKUNG 2

31. Weil wir ja schon oben gesehen haben, dass in Problemen dieser Art die Koordinaten x und y miteinander vertauscht werden können und, wenn es von Vorteil scheint, die Ordinate y als Abszisse behandelt werden kann, wird es förderlich sein, dass dasselbe auch in diesem Fall bestätigt wird. Es sei also die Kurve zu finden, in welcher $\int Zdy$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z eine Funktion nur von x, y und p ist und gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp.$$

Aber diese Formel $\int Zdx$ geht auf unsere zurückgeführt in $\int Zpdx$ über, in welcher gelten wird

$$d \cdot Zp = Mpdx + Npdy + (Z + Pp)dp,$$

aus welcher der entsprechende Differentialwert der vorgelegten Formel

$$(Npdx - dZ - Pdp - pdP)nv = (-Mdx - 2Pdp - pdP)nv$$

sein wird und die Gleichung für die gesuchte Kurve diese sein wird

$$0 = -Mdx - 2Pdp - pdP \quad \text{seu} \quad 0 = -Mdy - d \cdot Pp^2.$$

Wenn wir daher nun, um die Ähnlichkeit aufzuzeigen, weil wir hier y als Abszisse betrachten, $dx = \pi dy$ setzen, wird gelten

$$p = \frac{1}{\pi} \quad \text{und} \quad dp = -\frac{d\pi}{\pi\pi} = -ppd\pi;$$

es wird

$$dZ = Mdx + Ndy - Pppd\pi = Mdx + Ndy + \Pi d\pi$$

sein, indem $\Pi = -Ppp$ gesetzt wird, damit die Ähnlichkeit der Terme bewahrt wird. Deswegen wird die Gleichung für die Kurve $0 = -Mdy + d\Pi$ sein; diese selbe Gleichung wäre hervorgegangen, wenn in der Formel $\int Zdy$ die Ordinate y und umgekehrt die Abszisse in die Ordinate verwandelt wird. Nachdem also irgendeine unbestimmte aus x und y und deren Differentialen zusammengesetzte Formel vorgelegt worden ist, die maximal oder minimal sein muss, wird sich jeder der beiden Koordinaten x und y als Abszisse behandeln lassen und an diese das Maximum oder Minimum anpassen lassen.

BEISPIEL I

32. Unter allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen worden sind, die zu bestimmen, in welcher $\int(Zdx+[Z]dy)$ ein Maximum oder Minimum ist; während Z und $[Z]$ irgendwelche Funktionen von x und y sind, so dass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy \quad et \quad d[Z] = [M]dx + [N]dy.$$

Damit diese Formel $\int(Zdx+[Z]dy)$ auf die nun gebräuchliche Form zurückgeführt wird, werde pdx anstelle von dy gesetzt und man wird diese Formel $\int(Z+[Z]p)dx$ maximal oder minimal zu machen haben. Es werde also der Wert $Z+[Z]p$ differenziert und es wird sein Differentialwert dieser sein

$$= +Mdx + Ndy + [M]pdx + [N]pdy + [Z]dp.$$

Nun wird durch die gefundene Regel daher für die gesuchte Kurve diese Gleichung hervorgehen

$$0 = (N+[N]p)dx - d[Z] = (N+[N]p)dx - [M]dx - [N]dy,$$

die, wegen $[N]pdx = [N]dy$, durch dx geteilt diese algebraische oder endliche Gleichung für die gesuchte Kurve geben wird $N-[M]=0$ oder $N=[M]$. Daher wird eingesehen, wenn die vorgelegte Formel $\int(Zdx+[Z]dy)$ bestimmt oder das Differential $Zdx+[Z]dy$ so beschaffen war, dass es eine Integration zulässt, dass dann keine Linie dem Verlangten genügen wird, oder eher alle Linien gleichermaßen genügen. Denn wenn $Zdx+[Z]dy$ eine Integration zulässt, wird per se $N=[M]$ sein, wie wir schon anderenorts über bestimmte Differentialformeln zweier Variablen bewiesen haben; und daher geht in diesen Fällen die identische Gleichung $0=0$ hervor. Und daher wird glänzend verstanden, was wir schon zuvor bemerkt haben, dass die Formel des Maximums oder Minimums eine unbestimmte Formel sein muss; andernfalls würden nämlich alle gekrümmten Linien gleichermaßen genügen.

BEISPIEL II

33. Unter allen Linien, die auf dieselbe Abszisse bezogen worden sind, die zu bestimmen, deren Länge minimal ist oder in welcher $\int dx\sqrt{1+pp}$ ein Minimum ist.

Zuerst ist freilich klar, dass in dieser Frage kein Maximum gegeben ist, weil die Länge von Linien ins Unendliche vermehrt werden kann, während die Abszisse dieselbe bleibt. So wird nur ein Minimum Geltung haben können, was aus aus der elementaren Geometrie bekannt ist, in welcher bewiesen wird, dass die gerade Linie unter allen anderen Linien, die innerhalb derselben Grenzen gelegen sind, die kürzeste ist. Es scheint also ratsam, dieses Beispiel angeführt zu haben, damit sowohl die Übereinstimmung unserer Methode mit einer anderswoher schon bekannten Wahrheit eingesehen wird, als auch, damit die Umstände über die zwei beliebigen Punkte, die zu Fragen dieser Art hinzugefügt werden müssen, besser erkannt werden. Es wird also, nachdem die Formel $\int dx\sqrt{1+pp}$ mit der Formel $\int Zdx$ verglichen worden ist, gelten

$$Z = \sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad dZ = \frac{pdp}{\sqrt{1+pp}};$$

woher $M=0$, $N=0$ und $P=\frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ wird. Daher, weil im Allgemeinen die Gleichung für die gesuchte Linie $N-\frac{dP}{dx}=0$ ist, werden wir in diesem Fall

$dP = 0$ und daher auch folgende Gleichung haben

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = Const.,$$

aus welcher Gleichung $p = Const. = n$ oder $dy = ndx$ entspringt, die erneut integriert $y = a + nx$ gibt. Es ist also nicht nur klar, dass die gesuchte Linie eine Gerade ist, sondern auch, wegen der zwei beliebigen Konstanten a und n, eine irgendwie gezogene Gerade. Daher, wenn durch zwei gegebene Punkte die kürzeste Linie gezogen zu werden verlangt wird, wird jene eine Gerade sein. In gleicher Weise wird aber eingesehen, wenn die Linie gefunden werden muss, in welcher $\int Zdx$, wo Z eine Funktion nur von p ist, ein Maximum oder Minimum ist, dass dann nur eine gerade Linie genügt; wie wir schon zuvor bemerkt haben.

BEISPIEL III

34. Unter allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen worden sind, die zu bestimmen, in welcher

$$\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

Diese Formel entspringt, wenn die Linie des schnellsten Herabsinkens in Annahme gleichmäßiger Schwerkraft gesucht wird, indem die Achse, in welcher die Abszissen genommen werden, vertikal festgelegt wird. Es wird also gelten

$$Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad dZ = -\frac{dx\sqrt{1+pp}}{2x\sqrt{x}} + \frac{pdp}{\sqrt{x(1+pp)}};$$

daher wird

$$M = -\frac{\sqrt{1+pp}}{2x\sqrt{x}}, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}}.$$

Weil aber nun die gesuchte Kurve mit dieser Gleichung ausgedrückt wird $N - \frac{dP}{dx} = 0$, wird $dP = 0$ sein und es wird gelten

$$P = \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}} = Konst. = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

diese Gleichung liefert reduziert $ap^2 = x + p^2x$ und $p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ oder $y = \int dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, welche Gleichung aufzeigt, dass die gesuchte Kurve eine Zykloide ist, die über der horizontalen Basis entstanden ist und die eine Spitze im obersten Bereich der Achse hat und welche deswegen durch irgendwelche zwei Punkte hindurchgeführt werden können wird.

BEISPIEL IV

35. Unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu bestimmen, in welcher $\int y^n dx\sqrt{1+pp}$ ein Maximum oder ein Minimum ist.

Für diese vorgelegte Formel wird also gelten

$$Z = y^n\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad dZ = ny^{n-1}dy\sqrt{1+pp} + \frac{y^n pdp}{\sqrt{1+pp}};$$

so dass wird

$$M = 0 \quad \text{und} \quad N = ny^{n-1}\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad P = \frac{y^n p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Weil ja also $M = 0$ ist, wird man sofort für die gesuchte Kurve diese einmal integrierte Gleichung haben $Z + C = Pp$ (§ 30), die in unserem Fall die folgende wird

$$y^n\sqrt{1+pp} + ma^n = \frac{y^n pp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Wenn daher nun die Konstante $a = 0$ gesetzt wird, wird $1 + pp = pp$ oder $p = \infty$ hervorgehen und es wird eine zur Achse normale gerade Linie genügen. Allgemein werden aber genügende Linien aus der Gleichung gefunden werden, die in folgende übergeht

$$y^n + ma^n\sqrt{1+pp} = 0 \quad \text{oder} \quad y^{2n} = m^2a^{2n} + m^2a^{2n}p^2;$$

diese gibt

$$p\left(= \frac{dy}{dx}\right) = \frac{\sqrt{y^{2n} - m^2a^{2n}}}{ma^n} \quad \text{und} \quad x = \int \frac{ma^n dy}{\sqrt{y^{2n} - m^2a^{2n}}};$$

diese Linie kann durch zwei gegebene Punkte hindurchgeführt werden. Wenn $n = -\frac{1}{2}$ war, sodass $\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$ ein Maximum oder Minimum sein muss, muss in gleicher Weise eine Brachistochrone, die auf die horizontale Achse bezogen wurde, hervorgehen und es wird für sie $x = \int dy\sqrt{\frac{y}{a-y}}$ sein; diese stimmt mit der vorhergehenden ganz und gar überein, solange die Koordinaten x und y untereinander vertauscht werden. Es wird natürlich, wie zuvor, die genügende Kurve eine Zykloide, die über der horizontalen Basis durch Rollen erzeugt worden ist, sein, welche sich durch irgendwelche zwei Punkte hindurchführen lässt.

BEISPIEL V

36. Unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu bestimmen, in welcher $\int \frac{ydy^3}{dx^2+dy^2}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Diese Formel geht mit Hilfe der Substitution $dy = pdx$ auf die gewöhnliche zurückgeführt in diese über

$$\int \frac{yp^3dx}{1+pp};$$

und diese pflegt gefunden zu werden, wenn man den Rotationskörper sucht, der durch Rotation um die Achse herum entsteht und welcher gemäß der Richtung der Achse in einer Flüssigkeit bewegt den geringsten Widerstand erfährt; denn der Widerstand wird in diesem Fall der Formel $\int \frac{ydy^3}{dx^2}$ oder $\int \frac{yp^3dx}{1+pp}$ proportional angesehen. Es wird also gelten

$$Z = \frac{yp^3}{1+pp} \quad \text{und} \quad dZ = \frac{p^3dy}{1+pp} + \frac{ydp(3pp+p^4)}{(1+pp)^2};$$

sodass wird

$$M = 0, \quad N = \frac{p^3}{1+pp} \quad \text{und} \quad P = \frac{p^2y(3+pp)}{(1+pp)}.$$

Weil also $M = 0$ ist, gelingt eine Integration allgemein und die Gleichung für die gesuchte Kurve wird $Z + C = Pp$ sein oder es wird gelten

$$\frac{yp^3}{1+pp} + a = \frac{p^3y(3+pp)}{(1+pp)^2},$$

welche in diese übergeht $a(1+pp)^2 = 2p^3y$. Aber die Entwicklung dieser Gleichung kann nicht so unternommen werden, dass p eliminiert wird; daher wird es gefällig sein, jede der beiden Koordinaten x und y durch die Variable p zu definieren. Und zuerst ist freilich

$$y = \frac{a(1+pp)^2}{2p^3}.$$

Darauf wird wegen $dy = pdx$ gelten

$$dx = \frac{dy}{p} \quad \text{und} \quad x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{pp}.$$

Wenn daher also anstelle von y der gefundene Wert eingesetzt wird, wird folgendes hervorgehen

$$x = \frac{a(1+pp)^2}{2p^4} + a\int \frac{dp(1+pp)^2}{2p^5} = \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{pp} + 1 + lp\right),$$

aus welchen die Konstruktion der Kurve erledigt werden können wird, indem Logarithmen zur Hilfe genommen werden.

BEISPIEL VI

37. Die Kurve zu finden, in welcher diese Formel $\int yxdx\sqrt{1+pp}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Es wird also $Z = yx\sqrt{1+pp}$ sein und es wird gelten

$$dZ = ydx\sqrt{1+pp} + xdy\sqrt{1+pp} + \frac{yxpdp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Dieser Sache wegen wird man haben

$$M = y\sqrt{1+pp}, \quad N = x\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad P = \frac{yxp}{\sqrt{1+pp}};$$

daher wird diese Gleichung für die Kurve gebildet werden $Ndx = dP$, die diese suggeriert

$$xdx\sqrt{1+pp} = \frac{p^2xdx + ypdx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{yxdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$xdx - ydy = \frac{yxdp}{1+pp},$$

wegen $dy = pdx$. Diese ist eine Differentialgleichung zweiten Grades, obwohl sie mit Hilfe geeigneter Substitutionen auf eine einfache Differentialgleichung zurückgeführt werden kann, weil die Variablen x und y überall dieselbe Anzahl an Dimensionen festlegen, ist diese Differentialgleichung dennoch so beschaffen, dass sie weder integriert noch separiert werden kann; sie kann natürlich auf eine Gleichung von dieser Form geführt werden.

$$\frac{du}{u^3} + \frac{dv}{v^3} = \frac{vdv(1+u^3)}{u^3}.$$

Weil dies so ist, kann auch die gefundene Gleichung $xdx - ydy = \frac{yxdp}{1+pp}$ nicht auf eine entweder einfachere oder gefälligere Form zurückgeführt werden; und daher lässt sich noch nichts über die Natur der gefundenen Kurve beurteilen. Dennoch involviert jene Gleichung potentiell zwei beliebige Konstanten, weshalb die genügende Kurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgeführt werden kann.

BEISPIEL VII

38. Die Kurve zu finden, in welcher $\int (xx+yy)^n dx\sqrt{(1+pp)}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Weil hier $Z = (xx+yy)^n\sqrt{1+pp}$ ist, wird gelten

$$dZ = 2n(xx+yy)^{n-1}(xdx+ydy)\sqrt{1+pp} + \frac{(xx+yy)^n pdp}{\sqrt{1+pp}},$$

also

$$N = 2n(xx+yy)^{n-1}y\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad P = \frac{(xx+yy)^n p}{\sqrt{1+pp}};$$

daher wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$\begin{aligned} 2n(xx+yy)^{n-1}ydx\sqrt{1+pp} &= d\frac{(xx+yy)^n p}{\sqrt{1+pp}} \\ &= \frac{2n(xx+yy)^{n-1}p(xdx+ydy)}{\sqrt{1+pp}} + \frac{dp(xx+yy)^n}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

die durch $(xx+yy)^{n-1}$ geteilt und mit $\sqrt{1+pp}$ multipliziert in diese übergeht

$$2nydx = 2nxdy + \frac{(xx+yy)dp}{(1+pp)} \quad \text{oder} \quad \frac{2n(ydx-xdy)}{xx+yy} = \frac{dp}{1+pp}.$$

Jede der beiden Seiten dieser Gleichung ist durch die Quadratur des Kreises integrierbar, und das Integral wird

$$2n \operatorname{Atang} \frac{x}{y} = \operatorname{Atang} p + \operatorname{Atang} k = \operatorname{Atang} \frac{p+k}{1-pk},$$

woher werden wird

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tang} \frac{1}{2n} \operatorname{Atang} \frac{k+p}{1-kp} = T;$$

und T wird eine algebraische Funktion von p sein, solange die Zahl $2n$ rational ist. Weil also $x = Ty$ oder $y = \frac{x}{T}$ ist, wird $dy = pdx = \frac{dx}{T} - \frac{xdT}{TT}$ sein oder

$$xdT = Tdx - pTTdx;$$

und daher

$$\frac{dx}{x} = \frac{dT}{T - pTT} + \frac{Tdp}{1-pT} - \frac{Tdp}{1-pT};$$

daher geht diese hervor

$$lx = l\frac{T}{1-pT} - \int \frac{Tdp}{1-pT},$$

welche freilich, um die Kurve zu konstruieren, mehr als genügen. Aber damit die Natur dieser Kurven, die für bestimmte Werte des Exponenten n hervorgehen, besser erkannt wird, werden wir einige Fälle betrachten.

I. Es sei $n = \frac{1}{2}$ und $2n = 1$; es wird $\operatorname{Atang} \frac{x}{y} = \operatorname{Atang} \frac{k+p}{1-kp}$ sein, und daher

$$\frac{x}{y} = \frac{k+p}{1-kp} = \frac{kdx + dy}{dx - kdy},$$

oder

$$xdx - kxdy = kydx + ydy;$$

welche integriert diese liefert

$$x^2 - y^2 = 2kxy + C;$$

welches die Gleichung für die äquilaterale Hyperbel ist.

II. Es sei $n = 1$ und $2n = 2$; es wird $2 \operatorname{Atang} \frac{x}{y} = \operatorname{Atang} \frac{k+p}{1-kp}$ sein oder

$$\operatorname{Atang} \frac{2xy}{yy - xx} = \operatorname{Atang} \frac{k+p}{1-kp};$$

woher $\frac{2xy}{yy-xx} = \frac{kdx+dy}{dx-kdy}$ wird oder auch

$$2xydx - 2kxydy = kyydx - kxxdx + yydy - xxdy;$$

diese gibt integriert

$$yx^2 = ky^2x - \frac{1}{3}kx^3 + \frac{1}{3}y^3 + C \quad \text{oder} \quad y^3 + 3ky^2x - 3yx^2 - kx^3 = C.$$

III. Es sei $n = \frac{3}{2}$ und $2n = 3$; es wird gelten

$$3\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y} = \mathrm{Atang}\,\frac{3y^2x - x^3}{y^3 - 3yx^2} = \mathrm{Atang}\,\frac{kdx + dy}{dx - kdy};$$

und daher

$$3y^2xdx - 3ky^2xdy - x^3dx + kx^3dy = ky^3dx + y^3dy - 3kyx^2dx - 3yx^2dy;$$

diese gibt integriert

$$\frac{3}{2}y^2x^2 - ky^3x - \frac{1}{4}x^4 + kyx^3 - \frac{1}{4}y^4 = C$$

oder

$$y^4 + 4ky^3x - 6y^2x^2 - 4kyx^3 + x^4 = C.$$

Aus diesen Fällen wird schon die Integralgleichung für irgendeinen Wert von n berechnet werden können. Weil nämlich gilt

$$\begin{aligned} 2n\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y} &= \mathrm{Atang}\,\frac{2ny^{2n-1}x - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^{2n-3}x^3 + \text{etc.}}{y^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}y^{2n-2}x^2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}y^{2n-4}x^4 - \text{etc.}} \\ &= \mathrm{Atang}\,\frac{(y + x\sqrt{-1})^{2n} - (y - x\sqrt{-1})^{2n}}{(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

wird auch gelten

$$\frac{kdx + dy}{dx - kdy} = \frac{(y + x\sqrt{-1})^{2n} - (y - x\sqrt{-1})^{2n}}{(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}};$$

diese liefert reduziert

$$\begin{aligned} &kdx(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + kdx(y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} \\ &\quad + kdy(y + x\sqrt{-1})^{2n} - kdy(y - x\sqrt{-1})^{2n} \\ &= -\,dy(y + x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} - dy(y - x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} \\ &\quad + dx(y + x\sqrt{-1})^{2n} - dx(y - x\sqrt{-1})^{2n}, \end{aligned}$$

deren Integral diese ist

$$\begin{aligned} k(y + x\sqrt{-1})^{2n+1} - k(y - x\sqrt{-1})^{2n+1} &= -\frac{1}{\sqrt{-1}}(y + x\sqrt{-1})^{2n+1} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-1}}(y - x\sqrt{-1})^{2n+1} + C \end{aligned}$$

oder

$$C = (y + x\sqrt{-1})^{2n+1}(k\sqrt{-1} + 1) + (y - x\sqrt{-1})^{2n+1}(1 - k\sqrt{-1}).$$

Aber es ist allgemein

$$(y+x\sqrt{-1})^{2n+1}+(y-x\sqrt{-1})^{2n+1}=2(yy+xx)^{(2n+1):2}\cos(2n+1)\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y}$$

und

$$\frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n+1}-(y-x\sqrt{-1})^{2n+1}}{\sqrt{-1}}=2(yy+xx)^{(2n+1):2}\sin(2n+1)\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y}.$$

Nachdem diese Werte eingesetzt worden sind, wird diese von imaginären Größen freie Integralgleichung hervorgehen

$$\begin{aligned}&2k(yy+xx)^{(2n+1):2}\sin(2n+1)\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y}\\&\qquad=2(yy+xx)^{(2n+1):2}\cos(2n+1)\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y}-C\end{aligned}$$

oder, wegen der beliebigen Konstanten k und C, diese

$$C=(yy+xx)^{(2n+1):2}(k\sin(2n+1)\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y}+h\cos(2n+1)\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y}),$$

diese Gleichung ist immer algebraisch, solange n eine rationale Zahl war. Oder wenn ein gewisser beliebiger Kreisbogen $= g$ gesetzt wird, kann die gesuchte Kurve mit einer Gleichung dieser Art

$$C=(yy+xx)^{(2n+1):2}\sin(g+(2n+1)\,\mathrm{Atang}\,\frac{x}{y})$$

ausgedrückt werden, nachdem der Radius des Kreises, den wir hier betrachten wollen, $= 1$ gesetzt worden ist.

BEMERKUNG 3

39. Wenn also unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die gefunden werden muss, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z eine Funktion von x, y und p ist, sodass gilt

$$dZ=Mdx+Ndy+Pdp,$$

wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben $N-\frac{dP}{dx}=0$. Weil wir ja aber im vorhergehenden Problem angemerkt haben, wenn Z eine Funktion nur von x und y war, dass dann mit der gewöhnlichen Methode die Lösung ausgeführt werden kann: Denn damit $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, muss auch Zdx und daher Z ein solches sein, natürlich in Bezug auf x; und deswegen wird das Differential von dZ, für konstant genommenes x, gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben. Die gleiche Methode würde im gegenwärtigen Problem zum Erfolg führen, wenn nur im Differential von Z, was für konstant gesetztes x entsteht und $Ndy+Pdp$ ist, die Relation zwischen den Differentialen dy und dp klar wäre, dass die Teilung durch dy durchgeführt werden und der gleich null zu setzende endliche Wert gefunden werden könnte.

Obwohl aber diese Relation zwischen dy und dp, ohne welche die gewöhnliche Methode der Maxima und Minima nicht verwendet werden kann, sich a priori immer noch nicht bestimmen lässt, werden wir diese a posteriori nun angeben können: Weil nämlich diese Gleichung für die gesuchte Kurve gefunden worden ist

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

wird eingesehen, dass diese aus jener $Ndy + Pdp$ oder $N + \frac{Pdp}{dy}$ entstehen konnte, wenn es bekannt gewesen wäre, dass

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{Pdp}{dy} \quad \text{seu} \quad 0 = dP + \frac{Pdp}{p}$$

ist, und zwar wegen $dy = pdx$. Deshalb wird jene Relation zwischen den Differentialen dy und dp so beschaffen sein, dass sie in dieser Gleichung enthalten ist

$$pdP + Pdp = 0;$$

diese Eigenschaft geht auf diese zurück, dass Pp als Konstante betrachtet werden muss. Daher, um Probleme aufzulösen, in denen eine Kurve gesucht wird, die den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat, während $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ ist, muss der Wert von Z differenziert werden und im Differential $Mdx + Ndy + Pdp$ muss anstelle von Mdx 0 gesetzt werden, Ndy aber unverändert gelassen werden, dann aber anstelle vonPdp $-pdP$ geschrieben werden und das, was hervorgeht, gleich null gesetzt werden. Auf diese Weise wird nämlich $Ndy - pdP = 0$ erhalten werden; diese Gleichung, wegen $dy = pdx$, geht in diese über $N - \frac{dP}{dx} = 0$, welche die selbst ist, die wir gefunden haben. Es wird deshalb eine von der geometrischen und linearen Auflösung losgelöste Methode vermisst, mit welcher klar wird, dass in einer solchen Untersuchung des Maximums oder Minimums anstelle von Pdp $-pdP$ geschrieben werden muss.

PROPOSITION IV PROBLEM

40. Wenn Z eine Funktion von x, y, p und q war, sodass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq,$$

unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu finden, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist.

LÖSUNG. Der Wert der Integralformel $\int Zdx$ wird in diese zwei Reihen entwickelt

$$Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx + \text{ etc. und } Z_{\prime}dx + Z_{\prime\prime}dx + Z_{\prime\prime\prime}dx + \text{ etc.},$$

deren Aggregat ein Maximum oder Minimum sein wird, wenn die Differentialwerte der einzelnen Terme, die entstehen, indem die Ordinate y' um das Stück nv vermehrt wird, gesammelt werden und gleich null gesetzt werden. Durch einen solchen Zuwachs der Ordinate y' erfahren die Buchstaben y'; p, p'; $q_{\prime}$, q,

q' und nur die Terme eine Veränderung, in denen diese Buchstaben enthalten sind, das heißt die Terme $Z_{\prime}dx$, Zdx et $Z'dx$. Um die Zunahmen dieser Terme, die aus der Translation des Punktes n nach v entstehen, zu finden, differenziere man sie und es wird gelten

$$\begin{aligned}
d \cdot Z' dx &= dx(M' dx + N' dy' + P' dp' + Q' dq'), \\
d \cdot Z\ dx &= dx(M\ dx + N\ dy\ + P\ dp\ + Q\ dq\ ), \\
d \cdot Z_{\prime} dx &= dx(M_{\prime} dx + N_{\prime} dy_{\prime} + P_{\prime} dp_{\prime} + Q_{\prime} dq_{\prime}).
\end{aligned}$$

Nun ist aber, weil die Abszisse x von jener Translation nicht betroffen ist, überall $dx = 0$ zu setzen, darauf werden sich aber die Werte der übrigen Differentiale, die aus der Translation des Punktes n nach v entstehen, durch die erste Proposition dieses Kapitels so verhalten:

$$\begin{array}{lll}
dy' = +nv & dp' = -\dfrac{nv}{dx} & dq' = +\dfrac{nv}{dx^2} \\
dy\ = 0 & dp\ = +\dfrac{nv}{dx} & dq\ = -\dfrac{2nv}{dx^2} \\
dy_{\prime} = 0 & dp_{\prime} = 0 & dq_{\prime} = +\dfrac{nv}{dx^2}
\end{array}$$

Nachdem diese Werte der durch nv ausgedrückten Differentiale eingesetzt worden sind, wird der folgende Differentialwert hervorgehen

$$\begin{aligned}
&nv \cdot dx \left(N' - \frac{P'}{dx} + \frac{P}{dx} + \frac{Q'}{dx^2} - \frac{2Q}{dx^2} + \frac{Q_{\prime}}{dx^2} \right) \\
&\qquad = nv \cdot dx \left(N' - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ_{\prime}}{dx^2} \right) = nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \right)
\end{aligned}$$

wegen $ddQ_{\prime} = ddQ$. Deswegen wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0.$$

Q.E.I.

KOROLLAR I

41. Wenn daher also in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ auch Differentiale zweiten Grades enthalten sind oder, was dasselbe ist, wenn Z eine Funktion x, y, p und q ist, so dass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq,$$

wird die Gleichung für die gesuchte Kurve diese sein

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0;$$

welche leicht aus dem Differential von Z gebildet werden wird.

KOROLLAR II

42. Wenn die Größe Q selbst q oder das Differenzen-Differential von y involviert, dann wird ddQ Differentiale vierter Ordnung enthalten, und in dieser Art wird die Gleichung für die gefundene Kurve sein. Daher wird die genügende Kurve durch vier Punkte hindurchgeführt werden können.

KOROLLAR III

43. Wenn also in Q q enthalten ist, dann wird das Problem so bestimmt vorzulegen sein, dass unter allen Kurven, die durch vier gegebene Punkte hindurchgeführt worden sind, die bestimmt wird, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist.

BEMERKUNG 1

44. Wir wollen festlegen, dass in Q q nicht enthalten ist, um zu untersuchen, von welchem Grad die resultierende Differentialgleichung sein wird. Dies tritt aber ein, wenn die vorgelegte Formel des Maximums oder Minimums von dieser Form war $\int Zqdx$, während Z eine Funktion von x, y und p war, sodass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp.$$

Daher wird also gelten

$$d \cdot Zq = Mqdx + Nqdy + Pqdp + Zdq,$$

woher für die gesuchte Kurve diese Gleichung entstehen wird

$$0 = Nq - \frac{Pdq + qdP}{dx} + \frac{dMdx + dNdy + Nddy + Pddp + dPdp}{dx^2}$$

oder

$$0 = 2Nq + \frac{dM + pdN}{dx}$$

oder auch

$$0 = 2Ndp + dM + pdN,$$

welche wegen $dp = \frac{ddy}{dx}$, was enthalten ist, nur einer Differentialgleichung zweiten Grades gleichwertig ist. Wenn also die Kurve verlangt wird, in welcher $\int Zqdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z eine Funktion von x, y und p ist und außerdem gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp,$$

wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$0 = dM + 2Ndp + pdN.$$

KOROLLAR IV

45. Damit wir zur gefundenen Gleichung zurückkehren

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,$$

es ist klar, dass sie allgemein integrierbar sein wird, wenn $N = 0$ ist, das heißt wenn in Z y nicht enthalten ist; es wird nämlich durch Integrieren diese hervorgehen

$$C - P + \frac{dQ}{dx} = 0.$$

Wenn darüber hinaus $P = 0$ ist, gelingt eine weitere Integration, nach welcher dann diese Gleichung hervorgeht

$$Cx + D - Q = 0.$$

KOROLLAR V

46. Wenn $M = 0$ ist, gelingt eine Integration in gleicher Weise im Allgemeinen; weil nämlich gilt

$$dZ = Ndy + Pdp + Qdq,$$

werde die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$$

mit dy oder pdx multipliziert, man wird dann haben

$$Ndy - pdP + \frac{pddQ}{dx} = 0.$$

Man addiere

$$dZ - Ndy - Pdp - Qdq = 0,$$

es wird diese entstehen

$$dZ - pdP - Pdp + \frac{pddQ}{dx} - Qdq = 0;$$

deren Integral diese Gleichung ist

$$Z - Pp + \frac{pdQ}{dx} - Qq = C.$$

KOROLLAR VI

47. Wenn sowohl $M = 0$ als auch $N = 0$ war, wird zuerst wegen $N = 0$ wie oben gelten

$$C - P + \frac{dQ}{dx} = 0.$$

Darauf, weil gilt

$$dZ = Pdp + Qdq,$$

werde jene Gleichung mit dp oder qdx multipliziert, es wird dann gelten

$$Cdp - Pdp + qdQ = 0,$$

man addiere $Pdp + qdQ - dZ = 0$, es wird hervorgehen

$$Cdp + Qdq + qdQ - dZ = 0,$$

deren Integral diese ist

$$Cp + D + Qq - Z = 0.$$

BEMERKUNG 2

48. Wenn wir den Zusammenhang der gefundenen Gleichung für die gesuchte Kurve, die $\int Zdx$ zum Maximum oder Minimum hat, mit dem Differential von Z betrachten, wird sich die Relation zwischen den Differentialen dy, dp und dq bestimmen lassen, dass das Differential von Z gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve liefert. Weil nämlich gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq,$$

werde mit dieser die Gleichung für die Kurve verglichen

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,$$

oder diese mit $dy = pdx$ multiplizierte, die diese sein wird

$$Ndy - pdP + \frac{pddQ}{dx} = 0;$$

daher ist klar, dass im Differential von Z anstelle von Mdx 0 geschrieben werden muss, aber der Term Ndy unverändert gelassen werden muss, weiter, dass anstelle von Pdp $-pdP$ zu schreiben ist und anstelle von Qdq $\frac{pddQ}{dx}$ gesetzt werden muss. Aber bis diese Dinge a priori klar werden, wird es helfen, die Form der gefundenen Gleichung beizubehalten, die natürlich leicht in Erinnerung behalten werden kann. Im Übrigen ist zu bemerken, dass sich hierauf beziehende Probleme ganz und gar neu sind und bis jetzt noch nicht von denen, die ansonsten über diesen Gegenstand geschrieben haben, behandelt worden sind. Ansonsten pflegten die Autoren nämlich nur Formeln des Maximums oder Minimums zu betrachten, in denen höchstens Differentiale der Koordinaten ersten Grades enthalten waren. Deswegen wird es umso mehr der Mühe wert sein, die Natur von Problemen dieser Art genauer zu erforschen und besonders zu zeigen, wie genügende Kurven vier Punkte, durch die sie hindurchgehen sollen, zur ihrer Bestimmung zulassen. Für dieses Ziel scheint es ratsam, die folgenden Beispiele hinzuzufügen und in den einzelnen all das aufzuzeigen, was zu einer größeren Illustration beitragen können wird.

BEISPIEL I

49. Die Kurve zu finden, in welcher

$$\int \frac{y^n ddy}{x^m dy}$$

ein Maximum oder Minimum ist.

Diese Formel des Maximums oder Minimums geht mit Hilfe er Substitutionen

$$dy = pdx \qquad \text{und} \qquad ddy = qdx^2$$

in diese über

$$\int \frac{y^n qqdx}{x^m p};$$

weil diese der in Paragraph 44 behandelten Formel $\int Zqdx$ gleich ist, wo wir festgelegt haben, dass in Z nur x, y und p enthalten sind, wird, nach Anstellen eines Vergleiches, werden

$$Z = \frac{y^n}{x^m p} \qquad \text{und} \qquad dZ = -\frac{my^n dx}{x^{m+1}p} + \frac{ny^{n-1}dx}{x^m p} - \frac{y^n dx}{x^m p^2};$$

daher wird sein

$$M = -\frac{my^n}{x^{m+1}p} \qquad \text{und} N = \frac{ny^{n-1}}{x^m p};$$

und daher

$$Np = \frac{ny^{n-1}}{x^m}.$$

Weil also für die gesuchte Kurve diese Gleichung gefunden worden ist

$$0 = dM + 2Ndp + pdN = dM + Ndp + d \cdot Np,$$

werden wir für unseren Fall diese Gleichung haben

$$0 = \frac{m(m+1)y^n dx}{x^{m+2}p} - \frac{mny^{n-1}dy}{x^{m+1}p} + \frac{my^n dp}{x^{m+1}pp} + \frac{ny^{n-1}dp}{x^m p} + \frac{n(n-1)y^{n-2}dy}{x^m} - \frac{mny^{n-1}dx}{x^{m+1}},$$

die mit $\frac{x^{m+2}p^2}{y^{n-1}}$ multipliziert in diese verwandelt wird

$$0 = m(m+1)ydy - mnxpdy + mxydp + nx^2pdp + \frac{n(n-1)x^2p^2dy}{y} - mnxpdy$$

oder

$$0 = m(m+1)y^2dy - 2mnxypdy + n(n-1)x^2p^2dy + mxy^2dp + nx^2ypdp,$$

welche eine Differentialgleichung zweiten Grades ist, die für

$$y = e^{\int vdx}$$

gesetzt auf diese zurückgeführt werden wird

$$m(m+1)vdx + mxdv - m(2n-1)xv^2dx + nx^2vdv + n^2x^2v^3dx = 0.$$

Wenn wir daher aber $m = 0$ setzen, sodass $\int \frac{y^n ddy}{dy}$ ein Maximum oder Minimum sein muss, wird man diese Gleichung haben

$$(n-1)pdy + ydp = 0,$$

diese wird integriert geben

$$y^{n-1}p = C \qquad \text{oder} \qquad y^{n-1}dy = Cdx;$$

und diese erneut integriert liefert $y^n = Cx + D$. Wenn wir aber $n = 0$ setzen, sodass diese Formel ein Maximum oder Minimum sein muss $\int \frac{ddy}{x^m dy}$, wird sein

$$(m+1)dy + xdp = 0 \qquad \text{oder} \qquad (m+1)pdx + xdp = 0,$$

deren Integral ist

$$x^{m+1}p = C \qquad \text{oder} \qquad dy = Cx^{-m-1}dx,$$

die erneut integriert gibt

$$y = \frac{C}{x^m} + D.$$

Es ist aber klar, dass in diesen gefundenen Kurven die vorgelegte Formel ein Maximum wird, nicht aber ein Minimum; denn wenn eine gerade Linie genommen wird, ist wegen $ddy = 0$ klar, dass der Wert der vorgelegten Formel für die gerade Linie kleiner sein wird als für die gefundenen Kurven.

BEMERKUNG 3

50. Es kann hier der Grund angegeben werden, warum Fragen dieser Art, in denen $\int Zqdx$ ein Maximum oder Minimum sein muss, nur auf eine Differentialgleichung zweiten Grades führen und daher eher zu den Fragen des vorhergehenden Problems zu zählen sind, wenn freilich Z ein Funktion von x und y und p war. Denn durch Reduktion der Integrale kann die Formel $\int Zqdx$ oder $\frac{Zddy}{dx}$ auf eine solche Form $Y + \int Vdx$ zurückgeführt werden, in welcher Y und V Funktionen nur von x, y und p sind, die q nicht weiter involvieren. Weil also Y eine absolute Größe ist und deshalb nicht in die Untersuchung des Maximums oder Minimums eingeht, wird die Formel $\int Zqdx$ maximal oder minimal werden, wenn $\int Vdx$ zu einer solchen gemacht wird; so dass daher Formeln dieser Art $\int Zqdx$ auf den Zustand des vorhergehenden Problem zurückgeführt werden können; daher ist es nicht verwunderlich, dass für die genügenden Kurven höchstens eine Differentialgleichung zweiten Grades gefunden wird. Damit aber die erwähnte Reduktion der Formel $\int Zqdx$ oder $\int Zdp$ zu

$$Y + \int Vdx$$

besser erkannt wird, wollen wir festlegen, weil Y eine Funktion von x, y und p ist, dass ist

$$dY = \varrho dx + \sigma dy + \tau dp = (\varrho + \sigma p)dx + \tau dp;$$

und aus der Gleichheit $\int Zdp = Y + \int Vdx$ wird sein

$$Zdp = (\varrho + \sigma p)dx + \tau dp + Vdx;$$

woher man folgert

$$\tau = Z \qquad \text{und} \qquad V = -\varrho - \sigma p.$$

Deswegen wird diese Reduktion selbst auf die folgende Weise unternommen werden; die Formel Zdp werde für konstant gesetzte x und y integriert und das

Integral wird eine Funktion von x, y und p sein, die Y genannt werde. Darauf werde die Funktion Y differenziert, indem p konstant festgelegt wird, und das Differential wird negativ genommen Vdx geben, und V wird eine Funktion von x, y und p sein, die q nicht enthält. Sooft also eine Formel dieser Art $\int Zqdx$ zum Maximum oder Minimum gemacht werden muss und Z eine Funktion von x und y und p ist, dann wird die Frage, auch wenn sie sich auf das gegenwärtige Problem zu beziehen scheint, dennoch sofort auf das vorhergehende Problem zurückgeführt werden. Wenn wir deshalb die Formel $\int \frac{y^n ddy}{dy}$ oder $\int \frac{y^n dp}{p}$ nehmen, wird diese leicht in diese verwandelt

$$y^n lp - n\int y^{n-1} dylp,$$

woher diese Formel ein Maximum oder Minimum sein müssen wird

$$\int y^{n-1} dylp \qquad \text{oder} \qquad \int y^{n-1} pdxlp,$$

welche durch das vorhergehende Problem behandelt geben wird

$$Z = y^{n-1} plp \qquad \text{und} \qquad dZ = (n-1)y^{n-2} dyplp + y^{n-1} dp(1 + lp);$$

und es wird sein

$$M = 0, \quad N = (n-1)y^{n-2} plp \quad \text{und} \quad P = y^{n-1}(1 + lp).$$

Aber wegen $M = 0$ ist oben in Paragraph 30 für die gesuchte Kurve diese Gleichung gefunden worden $Z + C = Pp$, die auf unseren Fall angewendet dann liefert

$$y^{n-1} plp + C = y^{n-1} p + y^{n-1} plp \qquad \text{oder} \qquad y^{n-1} p = C;$$

diese ist die Gleichung selbst, die wir zuvor für denselben Fall in der Lösung des Beispiels gefunden haben. Deswegen wollen wir zu diesem Problem zu eigenen Beispielen fortschreiten.

BEISPIEL II

51. Die Kurve Am (Fig. 5) zu finden, die mit ihrer Evolute AR und dem Krümmungsradius in mR an jeder Stelle angewandt den minimalen Raum ARm einschließt.

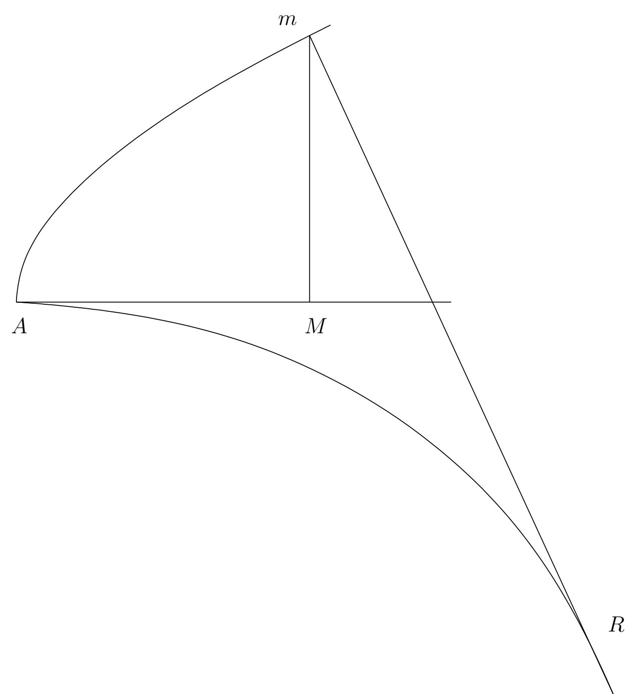

Fig. 5

Nachdem die Abszisse $AM = x$, die Ordinate $Mm = y$ gesetzt worden sind, wird der Krümmungsradius sein

$$mR = -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q};$$

die Fläche ARm ist aber

$$= \int \frac{1}{2} mR \cdot dx\sqrt{1+pp};$$

aus dieser muss diese Formel ein Minimum sein

$$\int \frac{(1+pp)^2 dx}{q}.$$

Es wird deshalb sein

$$Z = \frac{(1+pp)^2}{q} \qquad \text{und} \qquad dZ = \frac{4(1+pp)pdp}{q} - \frac{(1+pp)^2 dq}{qq};$$

woher wird

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad P = \frac{4(1+pp)p}{q} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{(1+pp)^2}{qq}.$$

Weil nun $M = 0$ und $N = 0$ ist, wird durch Korollar 6 die Gleichung für die Kurve diese sein

$$Z = D + Cp + Qq \qquad \text{seu} \qquad \frac{(1+pp)^2}{q} = D + Cp - \frac{(1+pp)^2}{q},$$

das heißt

$$2(1+pp)^2 = Dq + Cpq.$$

Weil ja weiter $dp = qdx$ oder $q = \frac{dp}{dx}$ ist, wird sein

$$2dx = \frac{(D+Cp)dp}{(1+pp)^2},$$

deren Integral ist

$$x = -\frac{a}{1+pp} + 2b\int\frac{dp}{(1+pp)^2} = \frac{a+bp}{1+pp} + b\int\frac{dp}{1+pp} + c;$$

nachdem die Konstanten nach Belieben geändert worden sind, wird man haben

$$x = \frac{a+bp+cpp}{1+pp} + b\,\mathrm{Atang}\,p.$$

Weil darauf $dy = pdx$ ist, wird sein

$$y = \int pdx = px - \int xdp$$

und daher

$$\begin{aligned} y &= \frac{ap+b^2p+cp^3}{1+pp} + bp\,\mathrm{Atang}\,p - \int\frac{(a+bp+cpp)dp}{1+pp} - b\int dp\,\mathrm{Atang}\,p \\ &= \frac{ap+bp^2+cp^3}{1+pp} - \int\frac{(a+cpp)dp}{1+pp}, \end{aligned}$$

wegen

$$b\int dp\,\mathrm{Atang}\,p = bp\,\mathrm{Atang}\,p - b\int\frac{pdp}{1+pp}.$$

Daher wird sein

$$\begin{aligned} y &= f + \frac{ap+bp^2+cp^3}{1+pp} + (c-a)\,\mathrm{Atang}\,p - cp \\ &= \frac{f+(c-a)p+(b+f)pp}{1+pp} + (c-a)\,\mathrm{Atang}\,p. \end{aligned}$$

Und aus diesen durch p gefundenen Werten von x und y kann freilich die gesuchte Kurve durch vier gegebene Punkte hindurchgeführt werden und konstruiert werden. Aber, damit die Kurve selbst als solche erkannt wird, werde $\mathrm{Atang}\,p$ eliminiert; und es wird sein

$$\mathrm{Atang}\,p = \frac{x}{b} - \frac{\frac{a}{b}+p+\frac{c}{b}pp}{1+pp} = \frac{y}{c-a} - \frac{\frac{f}{c-a}-p+\frac{(b+f)}{c-a}pp}{1+pp};$$

und daher

$$(c-a)x - by = \frac{(ac-aa-bf) + 2b(c-a)p + (cc-ac-bb-bf)pp}{1+pp}.$$

Weil ja aber die Kurve selbst nicht verändert wird, auch wenn die Koordinaten um eine konstante Größe entweder vermehrt oder vermindert werden, wird sein

$$(c-a)x - by = \frac{bb-(c-a)^2 + 2b(c-a)p}{1+pp};$$

und für a anstelle von $c-a$ gesetzt wird man haben

$$ax - by = \frac{bb-aa+2abp}{1+pp};$$

und nach Subtrahieren der Konstante bb wird sein

$$ax - by = -\frac{aa-2abp+bbpp}{1+pp}$$

und daher

$$\sqrt{by-ax} = \frac{bp-a}{\sqrt{1+pp}}.$$

Der Kurvenbogen werde $= w$ gesetzt; es wird sein

$$dw = dx\sqrt{1+pp};$$

daher wird diese Gleichung hervorgehen

$$dw = \frac{bdy-adx}{\sqrt{by-ax}} \qquad \text{und weiter} \qquad w = 2\sqrt{by-ax}.$$

Es drückt aber $by-ax$ ein Vielfaches einer über einer gewissen fixierten Achse angenommenen Abszisse aus, welcher daher das Quadrat des entsprechenden Bogens proportional ist. Daher wird eingesehen, dass die dem Geforderten genügende Kurve eine Zykloide ist, die durch vier gegebene Punkte bestimmt wird, und so beschrieben unter allen anderen Kurven, die durch dieselben vier Punkte hindurchgeführt worden sind, mit ihrer Evolute den kleinsten Raum einschließt. Die Folgerung ist daher ein wenig schwerer gemacht worden, weil die Zykloide für irgendeine Gerade, die als Achse angenommen worden ist, dem Geforderten genügt, und die Gleichung für die Achse bis dahin sehr verzwickt war. Wenn wir aber entweder a oder $b=0$ gesetzt hätten, womit freilich die Allgemeinheit der Lösung nicht eingeschränkt worden wäre, wäre die Gleichung für die Zykloide sofort hervorgegangen.

BEISPIEL III

52. Die Kurve zu finden, in welcher $\int \varrho^n dw$, während ϱ den Krümmungsradius der Kurve und dw ein Kurvenelement bezeichnet, ein Maximum oder Minimum ist.

Durch die zuvor gemachten Festlegungen ist

$$dw = dx\sqrt{1+pp} \qquad \text{und} \qquad \varrho = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q};$$

daher wird die Formel des Maximums oder Minimums sein

$$\int \frac{(1+pp)^{(3n+1):2}dx}{q^n};$$

und daher wird

$$Z = \frac{(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n}$$

und

$$dZ = \frac{(3n+1)(1+pp)^{(3n-1):2}pdp}{q^n} - \frac{n(1+pp)^{(3n+1):2}dq}{q^{n+1}}.$$

Deswegen wird gelten

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{(3n+1)(1+pp)^{(3n-1):2}p}{q^n}$$
$$\text{und} \quad Q = -\frac{n(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^{n+1}}.$$

Weil aber $M = 0$ und $N = 0$ ist, wird durch Paragraph 47 sein

$$Z = Cp + D + Qq$$

und daher

$$\frac{(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n} = Cp + D - \frac{n(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n}$$

oder

$$(n+1)(1+pp)^{(3n+1):2} = (Cp+D)q^n$$

und daher

$$q = \frac{(1+pp)^{(3n+1):2n}}{\sqrt[n]{C+Dp}} = \frac{dp}{dx};$$

also

$$dx = dp\sqrt[n]{\frac{C+Dp}{(1+pp)^{(3n+1):2}}}$$

und $dy = pdp\sqrt[n]{\frac{C+Dp}{(1+pp)^{(3n+1):2}}}$. Hier lässt sich aber mit Berechtigung vermuten, dass die Gleichung einfacher sein wird, wenn eine andere Achse genommen wird. Deswegen wollen wir eine andere Achse auffassen, in welcher die Abszisse $= t$, die Ordinate $= v$ ist, und es sei $dv = sdt$ und es werde zudem festgelegt

$$x = \frac{\alpha t + \beta v}{\gamma} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{\beta t - \alpha v}{\gamma}$$

nachdem $y = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ gesetzt worden ist. Es wird also gelten

$$dx = \frac{\alpha dt + \beta s dt}{\gamma} \qquad \text{und} \qquad dy = \frac{\beta dt - \alpha s dt}{\gamma}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\beta - \alpha s}{\alpha + \beta s} \quad \text{und} \quad (1 + pp) = \frac{\gamma^2(1 + ss)}{(\alpha + \beta s)^2} \quad \text{und} \quad dp = -\frac{\gamma\gamma ds}{(\alpha + \beta s)^2}.$$

Weiter wird aber sein

$$C + Dp = \frac{\alpha C + \beta D + s(\beta C - \alpha D)}{\alpha + \beta s}$$

und

$$(1 + pp)^{(3n+1):2n} = \frac{\gamma^{(3n+1):n}(1 + ss)^{(3n+1):2n}}{(\alpha + \beta s)^{(3n+1):n}}.$$

Nach diesen Substitutionen wird gelten

$$dx = \frac{\alpha dt + \beta dv}{\gamma} = \frac{a(\alpha + \beta s)ds}{\gamma(1 + ss)^{(3n+1):2n}},$$

nachdem $\beta C = \alpha D$ gesetzt und die Konstante geändert worden ist. Weiter wird aber

$$dy = \frac{\beta dt - \alpha dv}{\gamma} = \frac{a(\beta - \alpha s)ds}{\gamma(1 + ss)^{(3n+1):2n}}$$

und zusammengenommen geht dann hervor

$$dt = \frac{ads}{(1 + ss)^{(3n+1):2n}} \qquad \text{und} \qquad dv = \frac{asds}{(1 + ss)^{(3n+1):2n}}.$$

Weil wir nun diese Koordinaten gleichermaßen x und y nennen können wie wie vorhergehenden, wird $s = p$ werden und

$$dx = \frac{adp}{(1 + pp)^{(3n+1):2n}} \qquad \text{und} \qquad dy = \frac{apdp}{(1 + pp)^{(3n+1):2n}},$$

welche aus den vorhergehenden entstehen, wenn dort $D = 0$ gesetzt wird, woraus klar ist, dass der Allgemeinheit der oberen Lösung, in welcher $C + Dp$ enthalten war, überhaupt nichts abgeht, auch wenn $D = 0$ gesetzt wird. Es geht natürlich dieselbe gekrümmte Linie hervor, welcher Wert auch immer dem Buchstaben D zugeteilt wird, auch wenn eine andere Gleichung zwischen x und y hervorgeht, welche Kurve aber dennoch auf eine andere Achse bezogen wurde. Es ist dabei gefällig zu bemerken, dass in vielen Fällen eine algebraische Kurve genügt; deren erster ist gleichsam der, wenn $n = \frac{1}{2}$ ist, in welchem dann sein wird

$$x = \int \frac{adp}{(1 + pp)^{5:2}} = \frac{ap(1 + \frac{2}{3}pp)}{(1 + pp)^{3:2}} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{apdp}{(1 + pp)^{5:2}} = -\frac{\frac{1}{3}a}{(1 + pp)^{3:2}};$$

daher wird werden

$$(1+pp)^{3:2} = -\frac{a}{3y} \qquad \text{und} \qquad pp = \sqrt[3]{\frac{aa}{9yy}} - 1,$$

nach Einsetzen welcher dann mit

$$x = -(2\sqrt[3]{\frac{aay}{9}}) + y\sqrt{\sqrt[3]{(\frac{aa}{9yy})} - 1}$$

eine algebraische Gleichung für die Kurve in dem Fall entsteht, in dem $n = \frac{1}{2}$ ist.

BEISPIEL IV

53. Die Kurve zu finden, in welcher der Wert dieser Formel $\int \frac{ydydx^2}{ddy}$ der kleinste aller ist.

Es ist zuerst klar, dass kein Maximum Geltung haben kann, weil in einer geraden Linie $ddy = 0$ wird und daher der Wert der vorgelegten Formel unendlich groß wird. Deswegen ist zu sehen, in welcher gekrümmten Linie der Wert der Formel $\int \frac{ydydx^2}{ddy}$ minimal wird. Aber diese Formel geht durch unsere Substitutionen in diese über $\int \frac{ypdx}{q}$ und es wird gelten

$$Z = \frac{yp}{q} \qquad \text{und} \qquad dZ = \frac{pdy}{q} + \frac{ydp}{q} - \frac{ypdq}{qq};$$

es wird also sein

$$M = 0, \quad N = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad P = \frac{y}{q} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{yp}{qq}.$$

Weil aber $M = 0$ ist, wird die gesuchte Kurve mit der folgenden Gleichung ausgedrückt werden

$$Z - Pp - Qq + \frac{pdQ}{dx} = C,$$

wie in Korollar 5 gezeigt worden ist. Deswegen wird diese Gleichung hervorgehen

$$\frac{yp}{q} - \frac{p}{dx}d \cdot \frac{yp}{qq} = C$$

oder

$$\frac{ydy}{pq} + \frac{adx}{p} = \frac{pdy}{qq} + \frac{ydp}{qq} - \frac{2ypdq}{q^3}$$

wegen $dy = pdx$. Weil aber $dp = qdx$ ist, wird gelten

$$\frac{ydp}{qq} = \frac{ydx}{q} = \frac{ydy}{pq} \qquad \text{und daher} \qquad \frac{adx}{p} = \frac{pdy}{qq} - \frac{2ypdq}{q^3}$$

oder

$$\frac{adp}{pp} = \frac{dy}{q} - \frac{2ydq}{qq}.$$

Wenn die Konstante $a = 0$ gesetzt wird, wird die Gleichung integrierbar werden und es wird sein

$$y = bqq \qquad \text{und} \qquad q = \sqrt{\frac{y}{b}} = \frac{dp}{dx} = \frac{pdp}{dy},$$

woher $pdp = dy\sqrt{\frac{y}{b}}$ und durch Integrieren schließlich wird

$$\frac{pp}{2} = \frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{b}} + c$$

oder, nachdem die Konstanten geändert worden sind,

$$pp = \frac{y\sqrt{y} + a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \qquad \text{und} \qquad p = \sqrt{\frac{y^{3:2} + a^{3:2}}{b^{3:2}}} = \frac{dy}{dx};$$

und daher

$$dx = dy\sqrt{\frac{b^{3:2}}{y^{3:2} + a^{3:2}}}.$$

Es werde erneut $a = 0$ gesetzt , und es wird gelten

$$x = \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{y}} \qquad \text{und} \qquad xxy = b^2c;$$

diese ist eine besonders spezielle Gleichung für die genügende Kurve.

BEISPIEL V

54. Die Kurve zu finden, in welcher der Wert dieser Formel $\int q^n dx$ *oder dieser*

$$\int \frac{ddy^n}{dx^{2n-1}}$$

maximal oder minimal ist.

Man hat also

$$Z = q^n \qquad \text{und} \qquad dZ = nq^{n-1}dq;$$

daher wird sein

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0 \quad \text{und} \quad Q = nq^{n-1}.$$

Weil also die Gleichung für die genügende Kurve diese ist $\frac{ddQ}{dx^2} = 0$, wird gelten

$$dQ = \alpha dx \qquad \text{und} \qquad Q = q^{n-1} = \alpha x + \beta;$$

und daher

$$q = (\alpha x + \beta)^{1:(n-1)} = \frac{dp}{dx};$$

daher wird werden

$$p = (\alpha x + \beta)^{n:(n-1)} + \gamma = \frac{dy}{dx}$$

und schließlich
$$y = (\alpha x + \beta)^{(2n-1):(n-1)} + \gamma x + \delta,$$
wo wir die Koeffizienten, die durch Integration eingegangen sind, in den Konstanten erfasst haben. Die genügenden Kurven sind also immer algebraisch, ausgenommen in dem Fall, in dem $n = \frac{1}{2}$ ist; dann wird nämlich die letzte Integration liefern
$$y = \frac{1}{\alpha} l(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta.$$
Was den Fall $n = 1$ betrifft, jener geht in die Untersuchung des Maximums oder Minimums nicht einmal ein, weil die Formel $\int q dx$ nicht unbestimmt ist, sondern einen bestimmten Wert, beispielsweise p, wegen
$$q dx = dp$$
darstellt. Im Übrigen ist klar, während der Term $(\alpha x + \beta)^{(2n-1):(n-1)}$ verschwindet, dass wegen $y = \gamma x + \delta$ dem Geforderten eine gerade Linie genügt. Natürlich, wenn die vier gegebenen Punkte, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen muss, auf einer Geraden gelegen sind, wird dann die gerade Linie vor allen anderen Linien, die durch dieselben vier Punkte hindurchgehen, dem Geforderten genügen.

BEISPIEL VI

55 . Die Kurve zu finden, in welcher $\int \frac{xpdx}{yp}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Weil $Z = \frac{xp}{yq}$ ist, wird sein
$$dZ = \frac{pdx}{yq} - \frac{xpdy}{y^2 q} + \frac{xdp}{yq} - \frac{xpdq}{yqq}$$
und daher
$$M = \frac{p}{yq}, \quad N = -\frac{xp}{y^2 q}, \quad P = \frac{x}{yq} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{xp}{yq^2}.$$
Weil keiner dieser Terme verschwindet, wird die Gleichung für die gesuchte Kurve diese sein
$$-\frac{xp}{y^2 q} - \frac{1}{dx} d \cdot \frac{x}{yq} - \frac{1}{dx^2} d^2 \cdot \frac{xp}{yq^2} = 0$$
oder
$$0 = \frac{xpdx^2}{y^2 q} + \frac{dx^2}{yq} - \frac{xdxdy}{y^2 q} - \frac{xdxdq}{yq^2} + d \cdot \left(\frac{pdx}{yq^2} - \frac{xpdy}{y^2 q^2} + \frac{xdp}{yq^2} - \frac{2xpdq}{yq^3} \right)$$
oder auch
$$0 = q^2 dx^2 (3yq - 2p^2)(y - xp) - 4yqdxdq(xyq - xp^2 + yp) + 6xy^2 pdq^2 - 2xy^2 pqddq.$$
Diese ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung, die, ob sie integriert werden kann oder nicht, nicht leicht klar wird; und es ist auch nicht der Mühe

wert, gründlicher nach einer Art zu suchen, sie zu integrieren, weil ja dieser Fall nicht aus der Lösung eine nützlichen Problems entstanden ist, sondern aufs Geratewohl erdacht worden ist. Es scheint aber daher ratsam, dieses Beispiel hinzuzufügen, damit man einen Fall hat, in welchem die Lösung nicht nur zu einer Differentialgleichung vierter Ordnung aufsteigt, sondern auch nicht durch die allgemeinen oben erwähnten Hilfsmittel auf einen geringeren Grad gebracht werden kann. Denn die gegenwärtigen Beispiele sind alle so beschaffen, dass durch die allgemeinen in den Korollaren erläuterten Regeln sofort eine Gleichung geringeren Grades für die gesuchte Kurve gefunden werden können wird.

PROPOSITION V PROBLEM

56. Die Kurve zu finden, in welcher der Wert der Formel $\int Zdx$ maximal oder minimal ist, während Z eine Funktion solcher Art ist, die Differentiale jeden Grades involviert, sodass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt+$ etc. ist.

LÖSUNG. Weil ja (Fig. 4) diese Translation des Punktes n nach v die vorhergehenden Elemente mehr betrifft als die folgenden, jedes einzelne betrifft nämlich das folgende Element, aber sich in die vorhergehenden umso weiter ausdehnt, Differentiale von umso höherem Grad vorhanden sind, wird es deswegen helfen, eine vorherige Ordinate, wie Hh, als die erste anzunehmen, sodass die Veränderung aus dem Stück nv, das der Ordinate Nn hinzugefügt wurde, sich nicht weiter als Hh erstreckt; dies wird passieren, wenn in Z die Differentiale nicht weiter als bis zur sechsten Ordnung aufsteigen. Es wird aber genügen, den Wert von dZ bis hin zum Term Tdt auszudehnen, weil aus der Lösung selbst leicht die Art und Weise berechnet werden wird, sie an wie viele weitere Terme auch immer anzupassen. Außerdem, weil in diesem Problem alle vorhergehenden enthalten sind, wird zugleich feststehen, dass immer dieselbe Lösung hervorgeht, was für einer Ordinate auch immer um ein gewisses unendlich kleines Stück, wie nv, vermehrt wird. Es sei also $AH = x$ und $Hh = y$, es werden diesen einzelnen Punkten der Abszisse H, I, K, L, M, N, O etc. die Werte der Buchstaben p, q, r, s, t etc. entsprechen wie folgt:

$$\begin{array}{r|llllll}
H & y & , p & , q & , r & , s & , t \\
I & y' & , p' & , q' & , r' & , s' & , t' \\
K & y'' & , p'' & , q'' & , r'' & , s'' & , t'' \\
L & y''' & , p''' & , q''' & , r''' & , s''' & , t''' \\
M & y^{IV} & , p^{IV} & , q^{IV} & , r^{IV} & , s^{IV} & , t^{IV} \\
N & y^{V} & , p^{V} & , q^{V} & , r^{V} & , s^{V} & , t^{V}.
\end{array}$$

Aber diese einzelnen Werte werden aus der Translation von n nach v die folgenden Zuwächse erfahren, die sich aus der ersten Proposition, nach entsprechender Änderung der Vorzeichen, so verhalten werden:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
dy = 0 & dy' = 0 & dy'' = 0 & dy''' = 0 & dy^{IV} = 0 & dy^{V} = +nv \\
dp = 0 & dp' = 0 & dp'' = 0 & dp''' = 0 & dp^{IV} = +\frac{nv}{dx} & dp^{V} = -\frac{nv}{dx} \\
dq = 0 & dq' = 0 & dq'' = 0 & dq''' = +\frac{nv}{dx^2} & dq^{IV} = -\frac{2nv}{dx^2} & dq^{V} = +\frac{nv}{dx^2} \\
dr = 0 & dr' = 0 & dr'' = +\frac{nv}{dx^3} & dr''' = -\frac{3nv}{dx^3} & dr^{IV} = +\frac{3nv}{dx^3} & dr^{V} = -\frac{nv}{dx^3} \\
ds = 0 & ds' = +\frac{nv}{dx^4} & ds'' = -\frac{4nv}{dx^4} & ds''' = +\frac{6nv}{dx^4} & ds^{IV} = -\frac{4nv}{dx^4} & ds^{V} = +\frac{nv}{dx^4} \\
dt = +\frac{nv}{dx^5} & dt' = -\frac{5nv}{dx^5} & dt'' = +\frac{10nv}{dx^5} & dt''' = -\frac{10nv}{dx^5} & dt^{IV} = +\frac{5nv}{dx^5} & dt^{V} = -\frac{nv}{dx^5}
\end{array}$$

Weil ja weiter der Wert der Formel $\int Zdx$ der Abszisse AH entspricht, und er von der Translation des Punktes n nach v nicht verändert wird, entsprechen den folgenden Elementen der Abszisse die Werte der Formel $\int Zdx$, die in dieser Tabelle dargeboten werden:

Dem Element	entspricht
HI	Zdx
IK	$Z'dx$
KL	$Z''dx$
LM	$Z'''dx$
MN	$Z^{IV}dx$
NO	$Z^{V}dx$

Um die Zunahmen dieser Werte, die aus der Translation des Punktes n nach v entstammen, zu finden, müssen diese Werte differenziert werden und anstelle der Differentiale dy, dp dq, dr, ds, dt mit den derivierten derselben müssen die oben angegebenen und durch nv ausgedrückten Werte eingesetzt werden; und es wird sein wie folgt:

$$\begin{aligned}
d\cdot Z\ \ dx &= nv\cdot dx\left(\frac{T}{dx^5}\right)\\
d\cdot Z'\ dx &= nv\cdot dx\left(\frac{S'}{dx^4} - \frac{5T'}{dx^5}\right)\\
d\cdot Z''\ dx &= nv\cdot dx\left(\frac{R''}{dx^3} - \frac{4S''}{dx^4} + \frac{10T''}{dx^5}\right)\\
d\cdot Z'''\ dx &= nv\cdot dx\left(\frac{Q'''}{dx^2} - \frac{3R'''}{dx^3} + \frac{6S'''}{dx^4} - \frac{10T'''}{dx^5}\right)\\
d\cdot Z^{IV} dx &= nv\cdot dx\left(\frac{P^{IV}}{dx} - \frac{2Q^{IV}}{dx^2} + \frac{3R^{IV}}{dx^3} - \frac{4S^{IV}}{dx^4} + \frac{5T^{IV}}{dx^5}\right)\\
d\cdot Z^{V}\ dx &= nv\cdot dx\left(N^{V} - \frac{P^{V}}{dx} + \frac{Q^{V}}{dx^2} - \frac{R^{V}}{dx^3} + \frac{S^{V}}{dx^4} - \frac{T^{V}}{dx^5}\right).
\end{aligned}$$

Weil nun diese Elemente allein von der Translation des Punktes n nach v geändert werden und Zuwächse erfahren, wird die Summe dieser Zuwächse den ganzen Differentialwert geben, welchen die Formel $\int Zdx$ auf die ganze Abszisse

AZ ausgedehnt erhält; dieser wird also sein

$$nv \cdot dx \begin{cases} + N^V \\ - \dfrac{P^V - P^{IV}}{dx} \\ + \dfrac{Q^V - 2Q^{IV} + Q'''}{dx^2} \\ - \dfrac{R^V - 3R^{IV} + 3R''' - R''}{dx^3} \\ + \dfrac{S^V - 4S^{IV} + 6S''' - 4S'' + S'}{dx^4} \\ - \dfrac{T^V - 5T^{IV} + 10T''' - 10T'' + 5T' - T}{dx^5} \end{cases}$$

Diese einzelnen Glieder werden aber durch Differentiale angenehm und kurz ausgedrückt werden können; es wird nämlich sein

$$\begin{aligned} &- P^V + P^{IV} = - dP^{IV} \\ &+ Q^V - 2Q^{IV} \quad + Q''' = + ddQ''' \\ &- R^V + 3R^{IV} \quad - 3R''' \quad + R'' = - d^3R'' \\ &+ S^V - 4S^{IV} \quad + 6S''' \quad - 4S'' \quad + S' = + d^4S' \\ &- T^V + 5T^{IV} \quad - 10T''' + 10T'' \quad - 5T' \quad + T = - d^5T. \end{aligned}$$

18 Deswegen wird der ganze Differentialwert der Formel $\int Zdx$, der aus dem Stück nv entsteht, dieser sein

$$= nv \cdot dx \left(N^V - \frac{dP^{IV}}{dx} + \frac{ddQ'''}{dx^2} - \frac{d^3R''}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} \right).$$

Hier aber, weil alle Terme homogen sind, können die Schriftzeichen ohne Bedenken weggelassen werden, es verschwindet nämlich der Unterschied zwischen N^V und N und genauso zwischen dP^{IV} und dP und den übrigen. Deshalb wird man diesen Differentialwert der Formel $\int Zdx$ haben

$$nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} \right);$$

daraus kann zugleich der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ berechnet werden, wenn in Z auch höhere Differentiale erhalten waren. Daher, wenn die Kurve gesucht wird, die $\int Zdx$ für eine gegebene Abszisse zum Maximum oder Minimum hat, und dazu galt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \text{ etc.},$$

wird zuerst der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ dieser sein:

$$nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \text{ etc.} \right);$$

Und daher wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung entstehen

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \text{ etc.}$$

Q.E.I.

KOROLLAR I

57. In der Formel $\int Zdx$, wie wir sie behandelt haben, enthält die Größe Z Differentiale fünften Grades, wenn freilich im Differential von

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt$$

der Term Tdt der letzte ist. Weil also in T noch Differentiale fünften Grades oder t vorhanden ist, ist klar, dass die Gleichung für die gesuchte Kurve eine differentiale zehnten Grades sein wird.

KOROLLAR II

58. Daher wird eingesehen, dass die Differentialgleichung für die Kurve immer zu einem doppelt so hohen Grade aufsteigen muss wie der in der Formel der Maximums oder Minimums. Wir legen nämlich fest, im letzten Term Tdt, dass die Größe T noch t in sich umfasst; wenn dies nämlich nicht der Fall wäre, würde die Gleichung um zwei Grade verringert werden, wie sich aus Paragraph 50 berechnet lässt.

KOROLLAR III

59. Wenn also in Z Differentiale vom Grad n enthalten sind, dann wird die Differentialgleichung für die Kurve vom Grad $2n$ sein und deswegen enthält sie potentiell genauso viele beliebige Konstanten in sich.

KOROLLAR IV

60. Wegen der so vielen beliebigen Konstanten müssen genauso viele Punkte, um das Problem zu bestimmen, vorgelegt worden sein; so wird natürlich das Problem, damit es bestimmt ist, so ausgesprochen werden müssen: Unter allen Kurven, die durch $2n$ Punkte hindurchgehen, die zu bestimmen, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, wenn freilich die Größe Z Differentiale vom Grad n umfasst.

KOROLLAR V

61. Wegen der ganzen Zahl n wird also die Anzahl der Punkte, mit welcher das Problem bestimmt werden wird, immer gerade sein. So werden entweder kein Punkt oder zwei oder vier oder sechs oder acht Punkte und so weiter zur Bestimmung des Problems verlangt.

BEMERKUNG 1

62. Aus dem Grad der Differentialität, zu welchem die für die Kurve gefundene Gleichung ansteigt, oder aus der Anzahl der Punkte, durch die die genügende Kurve hindurchgehen muss, werden daher Probleme dieser Art angenehm in Klassen unterteilt werden können. Zur ersten Klasse werden also die Probleme

gezählt, in denen uneingeschränkt eine gekrümmte Linie gesucht wird, die für eine gegebene Abszisse den maximalen oder minimalen Wert $\int Zdx$ hat; solche Probleme sind sowohl in der zweiten Proposition, als auch in der enthalten, in den Fällen, welche wir in den Paragraphen 26 und 27 erläutert haben; in diesen Fällen liefert die Lösung natürlich eine bestimmte dem Geforderten genügende Kurve. Die zweite Klasse umfasst die Probleme, deren Lösung auf eine Differentialgleichung zweiten Grades führt; und diese erfordern zwei Punkte zu ihrer Bestimmung und müssen so vorgelegt werden, dass unter allen Kurven, die durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen, die bestimmt wird, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist: Probleme solcher Art haben wir in der dritten Proposition gelöst. Weiter beziehen sich auf die dritte Klasse die in der vierten Proposition behandelten Probleme, die sich so verhalten, dass unter allen Kurven, die durch vier gegebene Punkte hindurchgehen, die bestimmt wird, die $\int Zdx$ zum Maximum oder Minimum hat. Auf die gleiche Weise erfordert die vierte Klasse sechs Punkte zu ihrer Bestimmung, die fünfte acht und so weiter, welche Klassen wir alle im gegenwärtigen Problem erfasst haben. Auch wenn im Übrigen die gefundene Gleichung nur zu einem Grad der Differentiale ansteigt, lässt sie dennoch öfter allgemein eine oder mehrere Integrationen zu, Fälle von welcher Art wir in den gegenwärtigen Problemen einige dargeboten haben. Deswegen wollen wir auch sehen, in welchen Fällen unsere allgemeine Gleichung die Integration, entweder eine oder sogar mehrere, zulässt; damit sich in den erwähnten Beispielen sofort sehen lässt, ob sie in diesen Fällen enthalten sind oder nicht. Es gibt aber hauptsächlich zwei Fälle von dieser Art, in deren einem $N=0$, im anderen aber $M=0$ ist, von welchen darauf die anderen Fälle abhängen, welche wir hier entwickeln werden.

FALL I

63. Es sei in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ der Term $N=0$, sodass gilt

$$dZ = Mdx + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{ etc.}$$

In diesem Fall wird also die Gleichung für die Kurve diese sein

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \text{ etc.}$$

welche mit dx multipliziert integrierbar wird und es wird hervorgehen

$$0 = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \frac{d^4T}{dx^4} + \text{ etc.}$$

FALL II

64. Es sei sowohl $N=0$ als auch $P=0$, sodass gilt

$$dZ = Mdx + Qdq + Rdr + Sds + Tdt \text{ etc.}$$

Weil ja $N=0$ ist, ist eine Integration schon gelungen und man hat für die gesuchte Gleichung die gerade gefundene Gleichung, nachdem auch $P=0$ gesetzt worden ist:

$$0 = A + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \frac{d^4T}{dx^4} + \text{ etc.},$$

die mit dx multipliziert erneut integriert werden können wird und es wird gelten

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \text{ etc.}$$

FALL III

65. Wenn sowohl $N = 0$ als auch $P = 0$ und $Q = 0$ war, sodass ist

$$dZ = Mdx + Rdr + Sds + Tdt + \text{ etc.}$$

Die zwei verschwindenden Werte N und P haben schon diese zweimal integrierte Gleichung geliefert

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \text{ etc. ;}$$

wenn in dieser $Q = 0$ gesetzt wird und mit dx multipliziert wird, wird man die folgende dreimal integrierte Gleichung erhalten:

$$0 = Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{ddT}{dx^2} + \text{ etc.}$$

Daraus ist schon klar, wenn darüber hinaus $R = 0$ war, dass dann auch eine vierte Integration Geltung hat und so weiter.

FALL IV

66. Wenn $M = 0$ war, sodass gilt

$$dZ = Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{ etc.}$$

Es ist zuvor diese Gleichung für die gesuchte Kurve hervorgegangen

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ etc.,}$$

welche man mit $dy = pdx$ multipliziere und dann diese addiere

$$dZ - Ndy - Pdp - Qdq - Rdr - Sds - \text{ etc.,}$$

es wird hervorgehen

$$\begin{aligned} 0 = dZ - pdP + \frac{pddQ}{dx^2} - \frac{pd^3R}{dx^3} + \frac{pd^4S}{dx^4} - \text{ etc.} \\ - Pdp - Qdq \quad - Rdr \quad - Sds \quad - \text{ etc.,} \end{aligned}$$

deren Integral angegeben werden kann; es wird nämlich sein

$$\begin{aligned} 0 = A + Z - Pp + \frac{pdQ}{dx} - \frac{pddR}{dx^2} + \frac{pd^3S}{dx^3} - \text{ etc.} \\ - Qq + \frac{qdR}{dx} - \frac{qddS}{dx^2} \\ - Rr + \frac{rdS}{dx} \\ - Ss \end{aligned}$$

oder

$$0 = A + Z - Pp + \frac{pdQ - Qdp}{dx} - \frac{pddR - dpdR + Rddp}{dx^2}$$
$$+ \frac{pd^3S - dpddS + dSddp - Sd^3p}{dx^3} - \text{ etc.},$$

wie deren Terme weiter fortschreiten, wenn in dZ die folgenden Differentiale Tdt, Udu etc. enthalten sind, von selbst klar ist.

FALL V

67. Wenn sowohl $M = 0$ als auch $N = 0$ ist, sodass gilt

$$dZ = Pdp + Qdp + Rdr + Sds + \text{ etc.}$$

Weil $N = 0$ ist, werde eine Integration durch den ersten Fall unternommen und man wird haben

$$0 = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \text{ etc.},$$

diese werde mit $dp = qdx$ multipliziert und zu dieser addiert

$$0 = -dZ + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{ etc.},$$

wonach diese integrierbare Gleichung hervorgehen wird

$$\begin{aligned} 0 = Adp - dZ + qdQ - \frac{pddR}{dx} &+ \frac{pd^3S}{dx^2} - \text{ etc.} \\ + Qdq + Rdr \quad &+ Sds \quad + \text{ etc.}, \end{aligned}$$

deren Integral dann diese sein wird

$$\begin{aligned} 0 = Ap - B - Z + Qq \quad &- \frac{pdR}{dx} + \frac{qddS}{dx^2} - \text{ etc.} \\ &+ Rdr - \frac{rdS}{dx} \\ &+ Sds \end{aligned}$$

oder

$$0 = Ap - B - Z + Qq - \frac{qdR - Rdq}{dx}$$
$$+ \frac{qddS - dqdS + Sddq}{dx^2} - \frac{qd^3T - dqddT + dTddq - Td^3q}{dx^3} + \text{ etc.}$$

FALL VI

68. Es sei sowohl $M = 0$ als auch $N = 0$ und $P = 0$, sodass gilt

$$dZ = Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \text{ etc.}$$

Wegen $N = 0$ und $P = 0$ werden durch den zweiten Fall zwei Integrationen Geltung haben und die Gleichung für die gesuchte Kurve wird diese sein

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \text{ etc.},$$

wenn zu welcher mit $dq = rdx$ multiplizierten diese addiert wird

$$0 = dZ - Qdq - Rdr - Sds - Tdt - \text{ etc.},$$

wird man diese erneut integrierbare Gleichung haben:

$$\begin{aligned} 0 = Axdq - Bdq + dZ - rdR + \frac{rddS}{dx} - \frac{rd^3T}{dx^2} &+ \text{ etc.} \\ - Rdr - Sds \quad - Tdt \quad &- \text{ etc.} \end{aligned}$$

deren Integral diese ist

$$\begin{aligned} 0 = Axq - Bq + C + Z - Rr + \frac{rdS}{dx} - \frac{rddT}{dx^2} &+ \text{ etc.} \\ - Ap \qquad\qquad - Ss + \frac{sdT}{dx} & \\ - Tt \qquad & \end{aligned}$$

oder diese

$$0 = A(xq - p) - Bq + C + Z - rR + \frac{rdS - Sdr}{dx} - \frac{rddT - drdT + Tddr}{dx^2} + \text{ etc.}$$

FALL VII

69. Wenn $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ und $Q = 0$ war, sodass gilt

$$dZ = Rdr + Sds + Tdt + \text{ etc.}$$

Wegen $N = 0$, $P = 0$ und $Q = 0$ liefert der dritte Fall diese schon zweimal integrierte Gleichung für die gesuchte Kurve

$$0 = Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{ddT}{dx^2} + \text{ etc.},$$

zu welcher mit $dr = sdx$ multiplizierten man diese addiere

$$0 = -dZ + Rdr + Sds + Tdt + \text{ etc.},$$

wonach diese Gleichung hervorgehen wird

$$\begin{aligned} 0 = Ax^2dr - Bxdr + Cdr - dZ + sdS - \frac{sddT}{dx} &+ \text{ etc.} \\ + Sds + Tdt \quad &+ \text{ etc.,} \end{aligned}$$

die zweimal integriert diese geben wird

$$\begin{aligned} 0 = {} & Ax^2r - Bxr + Cr - D - Z + Ss - \frac{sdT}{dx} + \text{ etc.} \\ & - 2Axq + Bq \qquad\qquad\qquad + Tt \\ & + 2Ap \end{aligned}$$

oder diese

$$0 = A(x^2r - 2xq + 2p) - B(xr - q) + Cr - D - Z + Ss - \frac{sdT - Tds}{dx} + \text{ etc.}$$

BEMERKUNG 2

70. Mit Hilfe dieser Fälle, deren Anzahl sich weiter vermehren ließe, wenn es von Vorteil schiene, werden oftmals Probleme sehr bequem aufgelöst werden können. Wenn daher nämlich ein gewisses Problem in einem dieser Fälle enthalten ist, der eine oder mehrere Integrationen per se zulässt, wird sofort die Gleichung für die Kurve gebildet werden können, die einmal oder schon einige Male integriert worden ist und die deshalb leichter weiter behandelt werden können wird. Damit dies noch besser klar wird und zugleich der Nutzen des letzten Problems, in welchem in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ den zweiten Grad übersteigende Differentiale enthalten sind, aufgezeigt wird, wird es förderlich sein, ein Beispiel anzuführen.

BEISPIEL I

71. Unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, die zu bestimmen, deren Evolute, mit ihrer Evolute derselben, innerhalb der Radien der Evoluten den maximalen oder minimalen Raum einschließt.

Nachdem, für die gesuchte Kurve, die Abszisse $= x$ und die Ordinate $= y$ gesetzt worden sind, sei das Kurvenelement $= dw$ und ihr Krümmungsradius $= \varrho$; es wird das Element der Evolute $= d\varrho$ und der Krümmungsradius von dieser $= \frac{\varrho d\varrho}{dw}$ sein, woher die die erfasste Fläche zwischen der Evolute der gesuchten Kurve und der Evolute derselben $= \frac{1}{2}\int\frac{\varrho d\varrho^2}{dw}$ sein wird; dieser Ausdruck ist also zum Maximum oder Minimum zu machen. Weil aber gilt

$$dw = dx\sqrt{1+pp} \qquad \text{und} \qquad \varrho = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

wird auch gelten

$$d\varrho = 3(1+pp)^{\frac{1}{2}}pdx - \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}rdx}{qq}$$

und

$$d\varrho^2 = (1+pp)dx^2\left(9pp - \frac{6(1+pp)r}{qq} + \frac{(1+pp)^2rr}{q^4}\right)$$

und

$$\frac{\varrho}{dw} = \frac{1+pp}{qdx}.$$

Die Formel des Maximums oder Minimums ist deshalb

$$\int \frac{(1+pp)^2}{q}dx\left(9pp - \frac{6(1+pp)r}{qq} + \frac{(1+pp)^2r^2}{q^4}\right)$$
$$= \int dx\left(\frac{9pp(1+pp)^2}{q} - \frac{6(1+pp)^3r}{q^3} + \frac{(1+pp)^4r^2}{q^5}\right),$$

woher Z eine Funktion von p, q und r sein wird; daher wird durch Differenzieren hervorgehen:

$$\begin{aligned} dZ = & \frac{18pdp(1+pp)(1+3pp)}{q} - \frac{9ppdq(1+pp)^2}{qq} - \frac{6dr(1+pp)^3)}{q^3} \\ & - \frac{36prdp(1+pp)^2}{q^3} + \frac{18rdq(1+pp)^3}{q^4} + \frac{2rdr(1+pp)^4}{q^5} \\ & + \frac{8rrpdp(1+pp)^3}{q^5} - \frac{5r^2dq(1+pp)^4}{q^6}. \end{aligned}$$

Nachdem also ein Vergleich mit der allgemeinen Formel angestellt worden ist, wird sein

$$M = 0, \qquad N = 0,$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{9pp(1+pp)^2}{q} - \frac{6(1+pp)^3r}{q^3} + \frac{(1+pp)^4r^2}{q^5}, \\ P &= \frac{18p(1+pp)(1+3pp)}{q} - \frac{36pr(1+pp)^2}{q^3} + \frac{8rrp(1+pp)^3}{q^5}, \\ Q &= -\frac{9pp(1+pp)^2}{qq} + \frac{18r(1+pp)^3}{q^4} - \frac{5rr(1+pp)^4}{q^6}, \\ R &= -\frac{6(1+pp)^3}{q^3} + \frac{2r(1+pp)^4}{q^5}. \end{aligned}$$

Weil nun $M = 0$ und $N = 0$ ist, fällt die Lösung in den fünften Fall und die Gleichung für die gesuchte Kurve wird diese sein:

$$0 = Ap - B - Z + Qq + Rr - \frac{qdR}{dx},$$

welche nach den Substitutionen in diese übergeht

$$0 = Ap - B - \frac{18pp(1+pp)^2}{q} - \frac{16pr(1+pp)^3}{q^3} + \frac{6rr(1+pp)^4}{q^5} - \frac{2dr(1+pp)^4}{q^4dx} + \frac{36p(1+pp)^2}{q};$$

diese Gleichung ist zu kompliziert, als dass weitere Integrationen von ihr in Angriff genommen werden können. Im Übrigen ist klar, dass diese Differentialgleichung eine von vierter Ordnung ist, sodass durch die vier übrigen Integrationen noch vier Konstanten eingehen; daraus werden sechs gegebene Punkte von Nöten sein, durch die die gesuchte Kurve hindurchgeht, damit das Problem bestimmt wird.

Kapitel III

Über das Finden mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehener Kurven, wenn in der Formel des Maximums Minimums selbst unbestimmte Größen enthalten sind

PROPOSITION I PROBLEM

1. Die (Fig. 4) Zuwächse zu finden, welche die unbestimmte Integralgröße in jedem Punkt der der Abszisse von einer irgendwo um das Stück nV vermehrten Ordinate Nn erhält.

LÖSUNG. Es sei die Abszisse $AH = x$, die entsprechende Ordinate $Hh = y$ und es sei irgendeine unbestimmte Größe Π vorgelegt, die der Abszisse AH entspricht und die eine Integralformel sei, die unbestimmt keine Integration zulässt. Diese Größe Π sei so beschaffen, dass sie selbst, sofern sie der Abszisse AH oder dem Punkt H entspricht, von der vermehrten Ordinate Nn nicht verändert wird; dies wird passieren, wenn in Π die Differentiale nicht weiter als bis zum fünften Grad aufsteigen: Für diesen Zweck legen wir fest, dass erst die fünfte Ordinate Nn, wenn von Hh aus gezählt wird, verändert wird. Wenn nämlich in Π Differentiale höherer Grade enthalten wären, dann müsste erst eine spätere Ordinate nach Nn um ein unendlich kleines Stück vermehrt werden. Es wird aber genügen, die Lösung nur bis hin zum fünften Grad der in Π enthaltenen Differentiale auszudehnen, weil daher, wenn sie auch höhere Differentiale einbringen, sich die Lösung auch an sie anpassen lässt. So wie also dem Punkt H der Abszisse der Wert Π entspricht, so wird gemäß unserer Bezeichnungsweise dem folgenden Punkt I der Wert Π' entsprechen, dem Punkt K aber Π'', dem Punkt L der Wert Π''' und so weiter. Es wird also zu untersuchen sein, wie große Zuwächse diese derivierten Werte Π', Π'', Π''', Π^{IV} etc. aus der Translation des Punktes n nach v erhalten, oder es müssen deren Differentiale bestimmt werden, wenn allein die Ordinate Nn, die $= y^V$ entspricht, festgelegt wird, variiert zu werden und um das Stück nv vermehrt zu werden: Es wird aber in diesem Sinne $d{\cdot}\Pi = 0$ sein, weil wir festlegen, dass der Wert Π, der dem Punkt H entspricht, davon nicht betroffen wird. Weil ja nun Π eine unbestimmte Integralformel ist, sei sie $= \int [Z]dx$ und es sei $[Z]$ eine Funktion von x, y, p, q, r, s und t, sodass gilt

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + [S]ds + [T]dt;$$

daher werden zugleich die derivierten Werte von $d[Z]$, natürlich $d[Z']$, $d[Z'']$, $d[Z''']$ etc. durch die eingeführte Bezeichnungsweise gebildet werden können. Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, wird es wie folgt sein:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int [Z]dx \\
\Pi' &= \int [Z]dx + [Z]dx \\
\Pi'' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx \\
\Pi''' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx \\
\Pi^{IV} &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx + [Z''']dx \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nun wollen wir sehen, wie große Zuwächse diese einzelnen Glieder $[Z]dx$, $[Z']dx$, $[Z'']dx$, $[Z''']dx$ etc. aus dem der Ordinate Nn hinzugefügten Stück nv erhalten; diese wird man aus den Differentialen derselben erhalten, indem anstelle der Differentiale die in Paragraph 56 des vorhergehenden Kapitels erläuterten Werte gesetzt werden; es wird deshalb

$$\begin{aligned}
d\cdot[Z]dx &= nv\cdot dx\cdot\frac{[T]}{dx^5}\\
d\cdot[Z']dx &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[S']}{dx^4}-\frac{5[T']}{dx^5}\right)\\
d\cdot[Z'']dx &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[R'']}{dx^3}-\frac{4[S'']}{dx^4}+\frac{10[T'']}{dx^5}\right)\\
d\cdot[Z''']dx &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[Q''']}{dx^2}-\frac{3[R''']}{dx^3}+\frac{6[S''']}{dx^4}-\frac{10[T''']}{dx^5}\right)\\
d\cdot[Z^{IV}]dx &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[P^{IV}]}{dx}-\frac{2[Q^{IV}]}{dx^2}+\frac{3[R^{IV}]}{dx^3}-\frac{4[S^{IV}]}{dx^4}+\frac{5[T^{IV}]}{dx^5}\right)\\
d\cdot[Z^{V}]dx &= nv\cdot dx\cdot\left([N^V]-\frac{[P^{V}]}{dx}+\frac{[Q^{V}]}{dx^2}-\frac{[R^{V}]}{dx^3}+\frac{[S^{V}]}{dx^4}-\frac{[T^{V}]}{dx^5}\right)\\
d\cdot[Z^{VI}]dx &= 0\\
d\cdot[Z^{VII}]dx &= 0
\end{aligned}$$

sein und alle übrigen folgenden werden verschwinden.

Aus diesen werden nun die Zunahmen der Werte Π, Π', Π'', Π''' etc. berechnet werden, die sie aus der Translation des Punktes n nach v erhalten; es wird natürlich dann sein

$$
\begin{aligned}
d\cdot\Pi &= 0\\
d\cdot\Pi' &= nv\cdot dx\cdot\frac{[T]}{dx^5}\\
d\cdot\Pi'' &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[S']}{dx^4}-\frac{4[T']+d[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi''' &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[R'']}{dx^3}-\frac{3[S'']+d[S']}{dx^4}+\frac{6[T'']+4d[T']-d[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi^{IV} &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[Q''']}{dx^2}-\frac{2[R''']+d[R'']}{dx^3}+\frac{3[S''']+3d[S'']-d[S']}{dx^4}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{4[T''']+6d[T'']-4d[T']+d[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi^{V} &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[P^{IV}]}{dx}-\frac{[Q^{IV}]+d[Q''']}{dx^2}+\frac{[R^{IV}]+2d[R''']-d[R'']}{dx^3}\right.\\
&\qquad-\frac{[S^{IV}]+3d[S''']-3d[S'']+d[S']}{dx^4}\\
&\qquad\left.+\frac{[T^{IV}]+4d[T''']-6d[T'']+4d[T']-d[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi^{VI} &= nv\cdot dx\cdot\left([N^V]-\frac{d[P^{IV}]}{dx}+\frac{d[Q^{IV}]-d[Q''']}{dx^2}\right.\\
&\qquad-\frac{d[R^{IV}]-2d[R''']+d[R'']}{dx^3}+\frac{d[S^{IV}]-3d[S''']+3d[S'']-d[S']}{dx^4}\\
&\qquad\left.-\frac{d[T^{IV}]-4d[T''']+6d[T'']-4d[T']+d[T]}{dx^5}\right).
\end{aligned}
$$

Diesem Zuwachs sind aber die Zuwächse aller folgenden Werte gleich, natürlich von Π^{VII}, Π^{VIII}, Π^{IX} etc., aber dennoch wird der Zuwachs des Wertes Π^{VI} und aller folgenden derselbe sein

$$= nv\cdot dx\left([N^V]-\frac{d[P^{IV}]}{dx}+\frac{dd[Q''']}{dx^2}-\frac{d^3[R'']}{dx^3}+\frac{d^4[S']}{dx^4}-\frac{d^5[T]}{dx^5}\right).$$

Diese Zunahmen werden aber auch unter Berücksichtigung der Buchstaben $[P]$, $[Q]$, $[R]$, $[S]$ et $[T]$ auf dieselben Vorzeichen zurückgeführt werden können, und so wird hervorgehen

$$
\begin{aligned}
d\cdot\Pi &= 0\\
d\cdot\Pi' &= nv\cdot dx\cdot\frac{[T]}{dx^5}\\
d\cdot\Pi'' &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[S']}{dx^4}-\frac{4[T]+5d[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi''' &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[R'']}{dx^3}-\frac{3[S']+4d[S']}{dx^4}+\frac{6[T]+15d[T]+10dd[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi^{IV} &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[Q''']}{dx^2}-\frac{2[R'']+3d[R'']}{dx^3}+\frac{3[S']+8d[S']+6dd[S']}{dx^4}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{4[T]+15d[T]+20dd[T]+10d^3[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi^{V} &= nv\cdot dx\cdot\left(\frac{[P^{IV}]}{dx}-\frac{[Q''']+2d[Q''']}{dx^2}+\frac{[R'']+3d[R'']+3dd[R'']}{dx^3}\right.\\
&\qquad-\frac{[S']+4d[S']+6dd[S']+4d^3[S']}{dx^4}\\
&\qquad\left.+\frac{[T]+5d[T]+10dd[T]+10d^3[T]+5d^4[T]}{dx^5}\right)\\
d\cdot\Pi^{VI} &= nv\cdot dx\cdot\left([N^V]-\frac{d[P^{IV}]}{dx}+\frac{dd[Q''']}{dx^2}-\frac{d^3[R'']}{dx^3}+\frac{d^4[S']}{dx^4}-\frac{d^5[T]}{dx^5}\right).
\end{aligned}
$$

welchem die Zuwächse aller folgenden Werte gleich sind. Q.E.I.

KOROLLAR I

2. Wenn also Π eine unbestimmte Größe oder eine Integralformel war, die unbestimmt keine Integration zulässt, dann werden alle ihre Werte nach der Stelle der Abszisse, wo eine Ordinate vermehrt zu werden aufgefasst wird, und auch ihre Werte vor jener Stelle, deren Anzahl vom Grad der Differentiale abhängt, die in der Formel Π enthalten sind, eine Veränderung erfahren.

KOROLLAR II

3. Wenn daher also eine Größe dieser Art in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ enthalten ist, dann wird ihr Differentialwert nicht nur von einigen Elementen der Abszisse, sondern von der ganzen Abszisse, welcher das Maximum oder Minimum entspricht, abhängen.

KOROLLAR III

4. In diesen Fällen muss also jener Abszisse, für welche das Maximum oder

Minimum gesucht wird, bestimmt sein und dieselbe Kurve, die für diese Abszisse gefunden wurde, sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums zu erfreuen, wird für andere Abszissen nicht mit dieser Eigenschaft versehen sein.

BEMERKUNG 1

5. Bald wird der Unterschied, welcher zwischen Fragen einhergeht, in denen Z eine entweder bestimmte oder unbestimmte Größe ist, besser erkannt werden, wann immer wir nämlich Probleme dieser Art behandeln werden. Solche Fragen können aber auf mehrere Weisen variiert werden, je nachdem ob in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ die Größe Z entweder nur eine Funktion solcher Art der unbestimmten Formel Π ist, wie wir sie betrachtet haben, oder darüber hinaus die bestimmten Größen x, y, p, q, r, s etc. erfasst. Darauf werden in Z auch mehrere unbestimmte voneinander verschiedene Integralformeln solcher Art enthalten sein können. Für diese verschiedenen Fälle wird aber eine einzige Regel, die den oberen schon angegebenen hinzugefügt wurde, genügen können. Die grundlegende Bedeutung ist nämlich in der unbestimmten Formel $\Pi = \int [Z]dx$ gelegen, für welche wir hier $[Z]$ festgelegt haben, eine bestimmte Funktion zu sein; wenn daher aber diese Größe $[Z]$ selbst erneut unbestimmte Integralformeln solcher Art umfasst, wird wiederum eine spezielle Lösung nötig sein. Ja sogar die Zusammensetzung der unbestimmten Formeln kann ins Unendliche ausgedehnt werden; dies wird passieren, wenn die Größe $[Z]$ erneut die Größe Π in sich umfasst, sodass dann gilt

$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{ etc. },$$

dann wird nämlich wegen $d\Pi = [Z]dx$ wiederum der Wert

$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + \text{ etc.}$$

betrachtet werden müssen und dieser Prozess wird ins Unendliche fortgesetzt werden. Daher wird aber eine Methode entstehen, die Probleme aufzulösen, in denen eine Kurve gesucht wird, die den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat, wann immer die Größe Z nicht, wie bisher, bestimmt oder unbestimmt gegeben ist, sondern nur durch eine Differentialgleichung, deren Integration überhaupt nicht durchgeführt werden kann; eine Frage solcher Art ist die, wenn die Kurve gesucht wird, in welcher der Ausdruck $\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{v}}$ ein Minimum ist, während gilt

$$dv = gdx - hv^n dx\sqrt{1+pp};$$

und die Auflösung von Fragen solcher Art werden wir in diesem Kapitel auch angeben.

PROPOSITION II PROBLEM

6. Wenn Z (Fig. 4) eine Funktion der unbestimmten Größe Π war, sodass $dZ = Ld\Pi$ ist, und $\Pi = \int [Z]dx$ ist, während gilt

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{ etc. },$$

die Kurve az zu finden, die für die gegebene Abszisse AZ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat.

LÖSUNG. Nachdem die Abszisse $AH = x$, die Ordinate $Hh = y$ gesetzt wurde, sei die ganze Abszisse AZ, welcher das Maximum oder Minimum entsprechen muss, $= a$, nachdem also die Strecke HZ in unendlich viele unendlich kleine Elemente HI, IK, KL, LM etc. aufgeteilt worden ist, wird

$$\int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx + \text{ etc.}$$

bis schließlich zum äußersten Punkt Z gelangt wird, ein Maximum oder Minimum sein müssen. Um dies zu bewirken, sind die Differentialwerte zu suchen, welche diese einzelnen Terme von der Translation des Punktes n nach v erhalten, deren Summe gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben wird. Weil wir ja aber festlegen, dass die von nv abstammende Veränderung sich nicht weiter als H in Richtung A erstreckt, wird der Differentialwert des Terms $\int Zdx$ null sein. Die Differentialwerte der übrigen werden gefunden werden, wenn sie differenziert werden und in den Differentialen die Zuwächse geschrieben werden, die wir in der vorhergehenden Proposition gefunden haben, aus der Translation des Punktes n nach v zu entstehen. Es wird aber gelten

$$\begin{aligned}
d \cdot Zdx &= Ldx \cdot d\Pi \\
d \cdot Z'dx &= L'dx \cdot d\Pi' \\
d \cdot Z''dx &= L''dx \cdot d\Pi'' \\
d \cdot Z'''dx &= L'''dx \cdot d\Pi''' \\
d \cdot Z^{IV}dx &= L^{IV}dx \cdot d\Pi^{IV}.
\end{aligned}$$

Wenn wir daher nun anstelle der Differentiale $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$, $d\Pi'''$ etc. die oben gefundenen Werte, die aus der Translation des Punktes n und v entstehen, einsetzen, werden wir erhalten

$$\begin{aligned}
d \cdot Z dx &= 0 \\
d \cdot Z' dx &= nv \cdot L' dx^2 \cdot \frac{[T]}{dx^5} \\
d \cdot Z'' dx &= nv \cdot L'' dx^2 \cdot \left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T] + 5d[T]}{dx^5}\right) \\
d \cdot Z''' dx &= nv \cdot L''' dx^2 \cdot \left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S'] + 4d[S']}{dx^4} + \frac{6[T] + 15d[T] + 10dd[T]}{dx^5}\right) \\
d \cdot Z^{IV} dx &= nv \cdot L^{IV} dx^2 \cdot \left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R''] + 3d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S'] + 8d[S'] + 6dd[S']}{dx^4}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{4[T] + 15d[T] + 20dd[T] + 10d^3[T]}{dx^5}\right) \\
d \cdot Z^{V} dx &= nv \cdot L^{V} dx^2 \cdot \left(\frac{[P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q'''] + 2d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R''] + 3d[R''] + 3dd[R'']}{dx^3}\right. \\
&\qquad - \frac{[S'] + 4d[S'] + 6dd[S'] + 4d^3[S']}{dx^4} \\
&\qquad \left. + \frac{[T] + 5d[T] + 10dd[T] + 10d^3[T] + 5d^4[T]}{dx^5}\right) \\
d \cdot Z^{VI} dx &= nv \cdot L^{VI} dx^2 \cdot \left([N^V] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right) \\
d \cdot Z^{VII} dx &= nv \cdot L^{VII} dx^2 \cdot \left([N^V] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right) \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Die Zuwächse der folgenden Terme schreiten natürlich nach demselben Gesetz fort. Man addiere natürlich nun die Zuwächse der ersten sechs Terme, es wird der totale Zuwachs der Terme $Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx + Z^{IV}dx + Z^{V}dx$

hervorgehen

$$= nv \cdot dx^2 \left(\frac{L^V [P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q'''] dL^{IV} + 2L^{IV} [Q''']}{dx^2} \right.$$
$$+ \frac{[R''] ddL''' + 3d[R''] dL''' + 3L''' dd[R'']}{dx^3}$$
$$- \frac{[S'] d^3 L'' + 4d[S'] ddL'' + 6dL'' dd[S'] + 4L'' d^3 [S']}{dx^4}$$
$$\left. + \frac{[T] d^4 L' + 5d[T] d^3 L' + 10dd[T] ddL' + 10dL' d^3 [T] + 5L' d^4 [T]}{dx^5} \right),$$

in welchem Ausdruck, weil alle Terme zueinander homogen sind, schon die numerischen Indizes vernachlässigt werden können. Der Zuwachs aller folgenden Terme $L^{VI} dx + L^{VII} dx +$ etc. wird aber sein

$$= nv \cdot dx \left([N^V] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3 [R'']}{dx^3} + \frac{d^4 [S']}{dx^4} - \frac{d^5 [T]}{dx^5} \right) \cdot$$
$$\left(L^{VI} dx + L^{VII} dx + L^{VIII} dx + L^{IX} dx + \text{etc. bis zu } Z \right).$$

Dieser letzte Faktor wird aber durch die Integration der Formel $\int L dx$ bestimmt werden, die der unbestimmten Abszisse $AH = x$ entspricht; es werde in dieser letzten Formel nach der Integration $x = a$ gesetzt und sie gehe in H über, H wird der Wert der Formel $\int L dx$ sein, der der ganzen vorgelegten Abszisse AZ entspricht; wenn von dieser also $\int L dx$ abgezogen wird, wird der Wert $H - \int L dx$ zurückbleiben, der dem Anteil HZ oder NZ entspricht und der also anstelle von

$$L^{VI} dx + L^{VII} dx + L^{VIII} dx + \text{ etc.}$$

eingesetzt werden kann. Deswegen wird schließlich der Differentialwert der Formel $\int Z dx$, der der ganzen Abszisse AZ entspricht, sein

$$= nv \cdot dx (H - \int L dx) \left([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} - \frac{d^3 [R]}{dx^3} + \frac{d^4 [S]}{dx^4} - \frac{d^5 [T]}{dx^5} \right)$$
$$+ nv \cdot dx \left(L[P] - \frac{[Q] dL + 2L d[Q]}{dx} + \frac{[R] ddL + 3d[R] dL + 3L dd[R]}{dx^2} \right.$$
$$- \frac{[S] d^3 L + 4d[S] ddL + 6dL dd[S] + 4L d^3 [S]}{dx^3}$$
$$\left. + \frac{[T] d^4 L + 5d[T] d^3 L + 10dd[T] ddL + 10dL d^3 [T] + 5L d^4 [T]}{dx^4} \right),$$

welcher auf diese gefälligere Form zurückgeführt werden kann, dass gilt

$$= nv \cdot dx \left([N](H - \int L dx) - \frac{d[P](H - \int L dx)}{dx} + \frac{dd[Q](H - \int L dx)}{dx^2} \right.$$
$$\left. - \frac{d^3 [R](H - \int L dx)}{dx^3} + \frac{d^4 [S](H - \int L dx)}{dx^4} - \frac{d^5 [T](H - \int L dx)}{dx^5} \right);$$

dieser Differentialwert wird, bis wohin es die Situation erfordern wird, weiter fortgesetzt werden können; er wird aber, gleich null gesetzt, die Gleichung für die gesuchte Kurve geben. Q.E.I.

KOROLLAR I

7. Weil ja $H - \int Ldx$ der Wert der Formel $\int Ldx$ ist, die dem Anteil der Abszisse $AZ = a - x$ entspricht, wird, wenn $AZ = a - x = u$ gesetzt wird, $\int Ldu$ jener Wert $H - \int Ldx$ selbst sein, der von Nöten ist; wenn freilich $\int Ldu$ so integriert wird, dass es für $u = 0$ gesetzt verschwindet.

KOROLLAR II

8. Wenn daher also der Anfang der Abszissen im Punkt Z genommen wird, sodass die Abszisse $ZH = u$ gesetzt wird, und überall $x = a - u$ gesetzt wird, wird die Gleichung für die gesuchte Kurve zwischen den Koordinaten u und y hervorgehen; und es wird der Anteil dieser Kurve dem Geforderten genügen, der der Abszisse $AZ = a$ entspricht. Dennoch ist zu bemerken, dass sowohl in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ selbst als auch in $\int [Z]dx$ der Anfang der Abszissen im Punkt A genommen werden muss.

KOROLLAR III

9. Wenn also die Kurve gesucht wird, die auf die gegebene Abszisse AZ bezogen wurde und in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum sein muss, und Z irgendeine Funktion von $\Pi = \int [Z]dx$ ist, während gilt

$$dZ = Ld\Pi \quad \text{und} \quad d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{ etc. },$$

wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben:

$$0 = [N]\int Ldu - \frac{d \cdot [P]\int Ldu}{dx} + \frac{dd \cdot [Q]\int Ldu}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot [R]\int Ldu}{dx^3} + \text{ etc.},$$

wo $u = a - x$ ist und $\int Ldu$ den Wert der Formel $\int Ldx$ bezeichnet, der dem Anteil der Abszisse $HZ = u$ entspricht.

KOROLLAR IV

10. Es können also entweder die zwei Anfänge der Abszissen A und Z, und die zwei Abszissen $AH = x$ und $ZH = u$ betrachtet werden, von welchen jene im Integral $\int [Z]dx$ oder Π, diese aber im Integral $\int Ldx$ betrachtet werden muss, oder nur die eine Abszisse $AH = x$: in diesem Fall muss anstelle von $\int Ldu$ $H - \int Ldx$ geschrieben werden, während H den Wert bezeichnet, den die Formel $\int Ldx$ für $x = AH = a$ gesetzt liefert.

KOROLLAR V

11. Weil Z eine Funktion nur von Π ist, so dass sie keine anderen variablen Größen in sich umfasst, wird wegen $dZ = Ld\Pi$ auch L eine Funktion nur von Π sein.

KOROLLAR VI

12. Wenn $[Z]$ eine Funktion nur von x wäre, dann wäre $\Pi = \int [Z]dx$ eine bestimmte Größe und eine Funktion von x, und daher auch Z; daher wird ein

Maximum oder Minimum keinen Platz finden. Dasselbe zeigt die Lösung; es wird nämlich $[N] = 0$, $[P] = 0$ etc. werden und die Gleichung geht in die identische $0 = 0$ über.

BEMERKUNG 1

13. Hier tauchen einige primär zu betrachtende Fälle auf, deren erster der ist, wenn $[Z]$ eine Funktion nur von x und y ist, sodass $d[Z] = [M]dx + [N]dy$ ist. Wenn daher nun die Kurve gesucht wird, in welcher die Formel $\int Zdx$ für die gegebene Abszisse $AZ = a$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z irgendeine Funktion von $\int [Z]dx = \Pi$ ist, sodass $dZ = Ld\Pi$ ist, wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$0 = [N](H - \int Ldx);$$

es wird also entweder $[N] = 0$ oder $H = \int Ldx$ oder $L = 0$ sein; wenn entweder die eine oder jeder der beiden dieser Gleichungen eine gekrümmte Linie liefert, wird sie nicht nur für die Abszisse $AZ = a$ genügen, sondern auch für irgendeine andere unbestimmte Abszisse x; das berechnet man daher, weil aus der Gleichung die Größe H, die von der bestimmten Abszisse a abhängt, aus der Rechnung herausgegangen ist. Was aber speziell die Gleichung $L = 0$ betrifft, weil L eine Funktion von Π oder $\int [Z]dx$ ist, wird $\int [Z]dx =$ einer konstanten Größe werden, was, wenn nicht $[Z] = 0$ ist, nicht geschehen kann: Die zwei in diesem Fall genügenden Gleichungen werden also $[N] = 0$ und $[Z] = 0$ sein.

BEMERKUNG 2

14. Darauf aber verdient der Fall betrachtet zu werden, in welchem $[N]$ verschwindet; das passiert, wenn $[Z]$ eine Funktion von x, p, q, r etc. war, die y nicht involviert. Wir wollen festlegen, dass $[Z]$ eine Funktion von x und p und $d[Z] = [M]dx + [P]dp$ ist. Wenn also $\int [Z]dx = \Pi$ gesetzt wird und die Kurve gesucht wird, in welcher für die bestimmte Abszisse $AZ = a$ die Formel $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z eine Funktion von Π ist, sodass $dZ = Ld\Pi$ ist, wird für die gesuchte Gleichung diese Gleichung entstehen

$$0 = -\frac{d \cdot [P](H - \int Ldx)}{dx}$$

und daher Konst. $= [P](H - \int Ldx)$. Aber diese durch Integration eingegangene Konstante ist nicht beliebig; denn sie muss so beschaffen sein, dass für $x = a$ gesetzt, in welchem Fall $\int Ldx = H$ wird, $\frac{\text{Konst.}}{[P]} = 0$ wird. Dies kann aber nicht passieren, wenn nicht diese Konstante $= 0$ gesetzt wird und die Größe $[P]$ so beschaffen ist, dass sie $= \infty$ wird, nachdem $x = a$ gesetzt worden ist. Im ersten Fall hat man entweder $[P] = 0$ oder $\int Ldx = H$, das heißt $L = 0$ oder $\int [Z]dx =$ Konst. oder besser $[Z] = 0$; im zweiten Fall kann aber die Konstante dennoch nicht nach Belieben angenommen werden, denn sie wird durch Setzen von $x = a - dx$ bestimmt, und zwar auf die Weise, mit welcher Ausdrücke, die in gewissen Fällen unbestimmt zu sein scheinen, bestimmt zu werden pflegen. Und daher wird erkannt, dass bei Problemen dieser Art die Anzahl der in die

Lösungen eingehenden Konstanten, welcher dann die Anzahl der Punkte gleich genommen werden muss, durch die die gesuchte Kurve hindurchzulaufen hat, nicht aus dem Grad der Differentiale beurteilt werden kann. Es wird nämlich oft, indem durch Differentiation alle Integralformeln beseitigt werden, zu einer Differentialgleichung höheren Grades gelangt werden, von welcher keineswegs die Bestimmung des Problems durch einige Punkte anhängen wird.

BEISPIEL I

15. Wenn Π *die Fläche der Kurve* $\int ydx$ *bezeichnet und* Z *irgendeine Funktion von* Π *ist, die Kurve zu finden, die für die gegebene Abszisse* $= a$ *den maximalen oder minimalen Wert der Formel* $\int Zdx$ *hat.*

Weil Z eine Funktion von Π ist, sei $dZ = Ld\Pi$; es wird L eine Funktion von $\Pi = \int ydx$ sein. Weil darauf $d\Pi = ydx$ ist, wird $[Z] = y$ sein und wegen

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + \text{ etc.}$$

wird $[M] = 0$, $[N] = 1$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$ etc. werden, woher man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben wird $0 = H - \int Ldx$; und daher $L = 0$. Daher wird $\Pi = \int ydx =$ einer gewissen Konstante sein, und weiter $y = 0$. Es genügt also allein die gerade Linie, die auf die Achse selbst fällt; und das für irgendeine Abszisse und für die bestimmte $= a. = a$.

BEISPIEL II

16. Wenn Π *den Kurvenbogen* $= \int dx\sqrt{1+pp}$ *bezeichnet und* Z *irgendeine Funktion von diesem war, die Kurve zu finden, die für die gegebene Abszisse* $AZ = a$ *den maximalen oder minimalen Wert der Formel* $\int Zdx$ *hat.*

Wegen $dZ = Ld\Pi$ wird L eine Funktion des Bogens Π sein; und wegen $d\Pi = dx\sqrt{1+pp}$ wird sein

$$[Z] = \sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad [M] = 0,\ [N] = 0,\ [P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}},\ [Q] = 0 \text{ etc.},$$

woher man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben wird:

$$0 = -d \cdot \frac{p}{dx\sqrt{1+pp}}(H - \int Ldx),$$

und daher

$$C = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}(H - \int Ldx),$$

wo die Konstante C so bestimmt werden muss, dass für $x = a$ gesetzt $C = \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \times 0$ wird; daher, weil $\frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ nicht unendlich werden kann, ist es nötig, dass $C = 0$ ist und daher

$$\text{entweder } \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = 0 \quad \text{oder} \quad \int Ldx = H.$$

Es wird also, aus der zweiten Gleichung, $L = 0$ und $\Pi =$ einer gewissen Konstante werden; daraus wird weiter $d\Pi = dx\sqrt{1+pp} = 0$ abgeleitet, welcher

Bedingung auf keine Weise genügt werden kann. Aus der ersten Gleichung wird aber $p = 0$ oder $dy = 0$ abgeleitet, welche die Gleichung für eine der Achse AZ parallele gerade Linie ist, die der Frage für irgendeine Abszisse genügt.

BEISPIEL III

17. Es bezeichne Π die Oberfläche des Rotationskörpers, der aus der Umdrehung der Kurve ah um die Achse AZ entsteht, die wie $\int ydx\sqrt{1+pp}$ ist, und von dieser Oberfläche sei Z irgendeine Funktion, dann die Kurve zu finden, in welcher für die gegebene Abszisse $AZ = a$ $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist.

Wegen $dZ = Ld\Pi$ wird L eine Funktion von $\Pi = \int ydx\sqrt{1+pp}$ sein und wegen $d\Pi = ydx\sqrt{1+pp}$ wird werden

$$[Z] = y\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad d[Z] = dy\sqrt{1+pp} + \frac{ypdp}{\sqrt{1+pp}};$$

woher $[M] = 0$, $[N] = \sqrt{1+pp}$, $[P] = \frac{yp}{\sqrt{1+pp}}$ sein wird; die übrigen Werte $[Q]$, $[R]$, $[S]$ etc. werden alle $= 0$ sein. Deswegen wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben:

$$0 = (H - \int Ldx)\sqrt{1+pp} - \frac{1}{dx}d\cdot\frac{yp}{\sqrt{1+pp}}(H - \int Ldx).$$

Es werde, der Kürze wegen, $H - \int Ldx = V$ gesetzt; es wird gelten

$$Vdx\sqrt{1+pp} = d\cdot\frac{ypV}{\sqrt{1+pp}} = \frac{Vppdx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{Vydp}{(1+pp)^{3:2}} + \frac{ypdV}{\sqrt{1+pp}}$$

oder

$$Vdx = \frac{Vydp}{1+pp} + ypdV = \frac{Vydp}{1+pp} - ypLdx$$

wegen $dV = -Ldx$. Wir wollen festlegen, dass $Z = \Pi$ ist, sodass $\int dx \int ydx\sqrt{1+pp}$ ein Maximum sein muss, es wird $L = 1$ und $\int Ldx = x$ und $V = a - x$ wegen $H = a$ sein. Es wird gelten

$$(a-x)dx = \frac{(a-x)ydp}{1+pp} - ypdx.$$

Es sei $a - x = u$, es wird $dx = -du$ und $dy = -pdu$ sein und man wird diese Gleichung haben:

$$0 = udu - ydy + \frac{uydp}{1+pp} \quad \text{oder} \quad udu - ydy - \frac{uyduddy}{du^2+dy^2} = 0.$$

Es werde $u = e^t$ und $y = e^t z$ gesetzt, es wird $du = e^t dt$ und $ddu = 0 = e^t(ddt + dt^2)$ sein, oder auch $ddt = -dt^2$; weiter $dy = e^t(dz + zdt)$ und $ddy = e^t(ddz + 2dtdz)$; nach Einsetzen von diesen entsteht dann schließlich

$$dt - zdz - zzdt = \frac{zdt(ddz + 2dtdz)}{dt^2 + (dz+zdt)^2}.$$

Es sei weiter $dt = sdz$, es wird $ddt = -s^2dz^2 = sddz + dsdz$ sein und daher

$$ddz = -sdz^2 - \frac{dsdz}{s}.$$

Man wird also diese Gleichung haben

$$sdz - zdz - szzdz = \frac{zs^2dz - zds}{ss + (1+sz)^2};$$

diese ist zwar nur eine Differentialgleichung ersten Grades zwischen den zwei Variablen s und z, lässt aber dennoch weiter keine Integration zu. Um Vieles weniger wird daher etwas ausgerichtet werden können, wenn wir die Frage im Allgemeinem betrachten.

BEMERKUNG 3

18. Der Fall dieses Beispiels, in welchem wir die Kurve gesucht haben, in welcher $\int dx \int ydx\sqrt{1+pp}$ ein Maximum oder Minimum ist, auch wenn ein doppeltes Integralzeichen enthalten ist, kann dennoch auch durch die Methode des vorhergehenden Kapitels aufgelöst werden; es ist daher der Mühe wert, dies zu zeigen, damit die Übereinstimmung jeder der beiden Methoden aufgezeigt wird. Besonders wird aber bei dieser Arbeit ein neuer Weg eröffnet, viele andere Probleme über Maxima und Minima aufzulösen, welcher bis jetzt, sofern es jedenfalls bekannt ist, nicht beschritten worden ist. Die Frage ist natürlich, dass für die gegebene Abszisse $AZ = a$ dieser Ausdruck $\int dx \int ydx\sqrt{1+pp}$ ein Maximum oder Minimum wird, welcher in diesen verwandelt wird

$$x\int ydx\sqrt{1+pp} - \int xydx\sqrt{1+pp}.$$

Damit diese Form zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird, ist es von Nöten, dass ihr Wert für die Abszisse $AZ = a$ für die gesuchte Kurve az und für dieselbe, nachdem der Punkt n nach v bewegt wurde, derselbe ist. Wir wollen also festlegen, dass $\int ydx\sqrt{1+pp} = A$, wenn $x = a$ gesetzt wird, und in demselben Fall $\int xydx\sqrt{1+pp} = B$ wird. Nachdem nun die Elemente mno in mvo verwandelt wurden, wird der Wert A um seinen Differentialwert vermehrt werden, der, durch das vorhergehende Kapitel, dieser ist

$$= nv \cdot dx \left(\sqrt{1+pp} - \frac{1}{dx} d \cdot \frac{yp}{\sqrt{1+pp}} \right);$$

durch dieselben Vorschriften geht aber der Differentialwert der Größe B hervor

$$= nv \cdot dx \left(x\sqrt{1+pp} - \frac{1}{dx} d \cdot \frac{xyp}{\sqrt{1+pp}} \right).$$

Deswegen wird der Wert der vorgelegten Formel $\int dx \int ydx\sqrt{1+pp}$, nach der Translation des Punktes n nach v, für die Abszisse $AZ = a$ dieser sein

$$= a\left(A + nv \cdot \left(dx\sqrt{1+pp} - d \cdot \frac{yp}{\sqrt{1+pp}} \right) \right) - B$$
$$- nv \cdot \left(xdx\sqrt{1+pp} - d \cdot \frac{xyp}{\sqrt{1+pp}} \right),$$

welcher dem natürlichen Wert derselben Formel für die Abszisse $= a$ gleich sein muss, wobei aber der Punkt n nicht verändert worden ist, welcher dann $aA - B$ ist. Daher wird diese Gleichung hervorgehen

$$(a-x)dx\sqrt{1+pp} - d \cdot \frac{(a-x)yp}{\sqrt{1+pp}} = 0,$$

die ganz und gar mit der in der Lösung des Beispiels gefundenen Gleichung übereinstimmt.

PROPOSITION III PROBLEM

19. Während Π *eine unbestimmte Integralfunktion* $\int [Z]dx$ *ist, sodass gilt*

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{ etc. },$$

sei Z *irgendeine Funktion sowohl dieser Größe* Π *als auch der bestimmten Größen* x, y, p, q, r, s *etc., so dass gilt*

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ etc. },$$

die Kurve az *zu finden, die für die gegebene Abszisse* $AZ = a$ *den maximalen oder minimalen Wert der Formel* $\int Zdx$ *hat.*

LÖSUNG. Der Zuwachs nv, welcher aufgefasst wird, zu der einen Ordinate Nn hinzuzukommen, werde so von der ersten Ordinate Hh wegbewegt angenommen, dass er beim Wert der Formel $\int Zdx$, der der Abszisse AH entspricht, keine Veränderung verursacht und nur die Werte dieser Formel, die den folgenden Elementen der Abszisse nach H entsprechen, Veränderungen erfahren, die Zdx, $Z'dx$, $Z''dx$, $Z'''dx$ etc. bis hin zum letzten Element der Abszisse in Z sind. Die Zuwächse dieser Werte, die aus der Translation des Punktes n nach v entstanden sind, wenn sie zu einer Summe zusammengefasst werden und dann gleich null gesetzt werden, werden also die Gleichung für die gesuchte Kurve geben. Die Zuwächse dieser Werte werden aber erhalten werden, indem sie differenziert werden und anstelle der Differentiale die Werte geschrieben werden, welche wir oben, so in der letzten Proposition des vorhergehenden Kapitels wie in der ersten von diesem, aus der Translation des Punktes n nach v zu entstehen gefunden haben; so wird sein

$$\begin{aligned}
d \cdot Zdx &= dx(Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + \text{ etc.})\\
d \cdot Z'dx &= dx(L'd\Pi' + M'dx + N'dy' + P'dp' + \text{ etc.})\\
d \cdot Z''dx &= dx(L''d\Pi'' + M''dx + N''dy'' + P''dp'' + \text{ etc.})\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn daher nun anstelle der Differentiale $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$ etc., dy, dy', dy'' etc., dp, dp', dp'' etc., dq, dq', dq'' etc. die oben gefundenen Werte eingesetzt werden und auf dieselbe Weise, die wir oben gebraucht haben, zu einer Summe zusammengetragen werden, wird der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ für die Abszisse $AZ = a$ hervorgehen

$$\begin{aligned}
= nv \cdot dx \left([N](H - \int Ldx) - \frac{d \cdot [P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd \cdot [Q](H - \int Ldx)}{dx^2} \right. \\
\left. - \frac{d^3[R](H - \int Ldx)}{dx^3} + \frac{d^4 \cdot [S](H - \int Ldx)}{dx^4} - \text{ etc.} \right) \\
+ nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ etc.} \right).
\end{aligned}$$

Und aus diesem wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung entstehen:

$$\begin{aligned}
0 = [N](H - \int Ldx) - \frac{d \cdot [P](H - \int Ldx)}{dx} \\
+ \frac{dd \cdot [Q](H - \int Ldx)}{dx^2} - \frac{d^3[R](H - \int Ldx)}{dx^3} + \text{ etc.} \\
+ N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ etc. },
\end{aligned}$$

wo zu bemerken ist, dass H der Wert der Formel $\int Ldx$ ist, der für $x = a$ gesetzt entsteht. Q.E.I.

KOROLLAR I

20. Die im vorhergehenden Kapitel gefundene Regel ist also erweitert worden; nun können wir nämlich die Kurve bestimmen, die den maximalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat, wenn Z nicht nur eine Funktion der bestimmten Größen x, y, p, q, r etc. ist, sondern auch eine unbestimmte Integralgröße $\int [Z]dx$ in sich umfasst, solange $[Z]$ eine bestimmte Funktion ist.

KOROLLAR II

21. Ja sogar, wenn mehrere unbestimmte Integralgrößen dieser Art in Z enthalten waren, wird die Lösung benutzt werden können. Denn, was für ein Ausdruck aus einer unbestimmten Integralformel in den Differentialwert eingegangen ist, solche werden aus den einzelnen, wenn mehrere vorhanden waren, entstehen und zum Differentialwert hinzugehen.

KOROLLAR III

22. Weil ja Z hier nicht nur als eine Funktion der bestimmten Größen x, y, p, q, r etc., sondern auch der unbestimmten Größe $\Pi = \int [Z]dx$ festgelegt wird, werden wegen

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ etc.}$$

auch die Größen M, N, P, Q etc. diese Integralformel $\Pi = \int [Z]dx$ involvieren; und auch die Größe L selbst, wenn nicht wenn nicht zufällig Π in Z eine Dimension hat.

KOROLLAR IV

23. Dieser Sache wegen werden in der für die Kurve gefundenen Gleichung Integralgrößen zweifacher Art enthalten sein, natürlich $\int Ldx$ und $\int [Z]dx$; daher, wenn die gefundene Gleichung durch Differentiation von diesen Formeln befreit werden muss, wird sie zu einem um Vieles höheren Grad der Differentiale aufsteigen, als freilich die Form selbst zeigt.

KOROLLAR V

24. Es wird aber durch Eliminieren dieser Integralformeln zu einer um zwei Grade höheren Differentialgleichung gelangt werden. Wenn daher nämlich die resultierende Gleichung, wenn sie entwickelt wird, vom Grad n ist, dann werde aus ihr zuerst der Wert der Formel $\int Ldx$ bestimmt und nach der Differentiation wird zu einer Differentialgleichung von $n+1$ Graden gelangt werden, in welcher noch die Formel $\int [Z]dx$ enthalten sein wird, die weiter reduziert und durch Differentiation von der Formel $\int [Z]dx$ befreit eine Differentialgleichung vom Grad $n+2$ werden wird.

BEMERKUNG 1

25. Auch wenn die Anzahl der Punkte, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen muss, vom Grad der Differentialität abhängt, kann sie dennoch in diesem Fall nicht durch die Zahl $n+2$ bestimmt werden. Denn diese Differentialgleichung von $n+2$ Graden involviert potentiell zwar $n+2$ Konstanten, aber diese sind nicht alle beliebig. Denn eine Konstante wird daraus bestimmt, dass das Integral $\int [Z]dx$ keinen unbestimmten Wert erhalten darf, sondern einen solchen, wie es ihn in der Größe Z erhält, das heißt, der für $x=0$ gesetzt verschwindet, wenn freilich diese Bedingung in $\int Zdx$ angenommen worden ist. Darauf wird in gleicher Weise eine Konstante durch die Formel $\int Ldx$ bestimmt, die, wie wir festgelegt haben, für $x=0$ gesetzt verschwinden muss. Deswegen werden lediglich n beliebige Konstanten übrig bleiben, die genauso viele Punkte liefern werden, mit denen das Problem bestimmt werden wird. Gleichermaßen also, wie im vorhergehenden Kapitel, wird das Problem, damit es bestimmt ist, so vorzulegen sein, dass unter allen Kurven, die durch n gegebene Punkte hindurchgehen, die bestimmt wird, die für die gegebene Abszisse $x=a$ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ enthält. Um also diese Entscheidung zu treffen, wird die gefundene Gleichung entwickelt werden müssen; das heißt, alle angegebenen Differentiationen werden tatsächlich durchgeführt werden müssen; danach wird klar werden, Differentiale wie vielten Grades enthalten sind, und aus diesem Grad wird man die Anzahl n haben. Wie viel sich aber darüber hinaus über diese Zahl n beobachten lässt, werden wir in den folgenden Beispielen sehen.

BEISPIEL I

26. Die Kurve zu finden, die für die gegebene Abszisse $AZ=a$ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int yxdx \int ydx$ hat, indem das Integral $\int ydx$ so angenommen wird, dass es für $x=0$ gesetzt verschwindet.

Es wird also $\Pi = \int ydx$ und $[Z]=y$ sein; daher wird $[N]=1$ werden, während die übrigen Buchstaben $[M]$, $[P]$, $[Q]$ etc. $= 0$ sind. Weiter wird gelten

$$Z = yx\Pi \quad \text{und} \quad dZ = yxd\Pi + y\Pi dx + x\Pi dy;$$

daraus wird man $L = yx$, $M = y\Pi$ und $N = x\Pi$, $P = Q = R =$ etc. $= 0$ haben. Aus diesen wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung gebildet werden

$$0 = (H - \int yxdx) + x\Pi \quad \text{oder} \quad \int yxdx = H + x\int ydx,$$

wo H der Wert der Formel $\int yxdx$ ist, der für $x = a$ gesetzt hervorgeht. Es ist aber klar, dass daher keine Gleichung für eine andere gekrümmte Linie entsteht; denn nach Differentiation wird $dx\int ydx = 0$ und weiter $y = 0$, welches die Gleichung für die gerade Linie ist, die auf die Achse AZ fällt.

BEISPIEL II

27. Die Kurve zu finden, die für die gegebene Abszisse $AZ = a$ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int ydx \int dx\sqrt{1+pp}$ hat.

Weil ja also $\Pi = \int dx\sqrt{1+pp}$ ist, wird gelten

$$[Z] = \sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad [P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Weiter wird $Z = y\Pi$ und $L = y$ und $N = \Pi$ sein; die übrigen Buchstaben verschwinden alle. Daher wird also diese Gleichung für die gesuchte Kurve resultieren:

$$0 = -\frac{1}{dx}d\cdot\frac{p(H - \int ydx)}{\sqrt{1+pp}} + \Pi$$

oder

$$\Pi dx = d\cdot\frac{(H - \int ydx)p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{(H - \int ydx)dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ypdx}{\sqrt{1+pp}};$$

also

$$dx\int dx\sqrt{1+pp} = \frac{(H - \int ydx)dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ypdx}{\sqrt{1+pp}}.$$

Weil also $\int ydx = H$ wird, nachdem $x = a$ gesetzt wurde, wird in demselben Fall werden

$$\int dx\sqrt{1+pp} = -\frac{yp}{\sqrt{1+pp}} = \text{ dem der Abszisse } a \text{ entsprechenden Kurvenbogen.}$$

Diese Bedingung muss immer durch die Bestimmung einer einzigen Konstante erfüllt werden, die durch Integration eingehen wird. Diese Differentialgleichung ist aber tatsächlich eine zweiten Grades, die aber zweimal differenziert werden muss, bevor die von den Integralformeln $\int ydx$ und $\int dx\sqrt{1+pp}$ befreit wird; und auf diese Weise wird sie zum sechsten Grad aufsteigen und potentiell sechs Konstanten involvieren; von diesen werden zwei daher bestimmt werden, dass für $x = 0$ gesetzt die Formeln $\int ydx$ und $\int dx\sqrt{1+pp}$ verschwinden müssen. Aber die Gleichung selbst wird so verwickelt werden, dass ihre Behandlung es nicht verdient in Angriff genommen zu werden.

BEISPIEL III

28. Die Kurve zu finden, in welcher für eine gegebene Abszisse $\int \frac{dx}{p} \int ydx$ *ein Maximum oder Minimum ist.*

Hier wird $\Pi = \int ydx$ und $[Z] = y$ und $[N] = 1$ sein; weil darauf $Z = \frac{\Pi}{p}$ ist, wird $L = \frac{1}{p}$ und $P = -\frac{\Pi}{pp}$ sein; die übrigen Buchstaben verschwinden alle. Daher geht also diese Gleichung hervor

$$0 = H - \int \frac{dx}{p} + \frac{1}{dx} d \cdot \frac{\Pi}{pp}$$

oder

$$0 = H - \int \frac{dx}{p} + \frac{y}{pp} - \frac{2\Pi dp}{p^3 dx}.$$

Für $x = a$ gesetzt, in welchem Fall $\int \frac{dx}{p} = H$ wird, wird $ydx = \frac{2\Pi dp}{p}$ sein. Die Gleichung werde differenziert, und es wird gelten

$$0 = -\frac{dx}{p} + \frac{dx}{p} - \frac{2ydp}{p^3} - \frac{2ydp}{p^3} + \frac{6\Pi dp^2}{p^4 dx} - \frac{2\Pi ddp}{p^3 dx}$$

oder

$$0 = 3\Pi dp^2 - 2ypdxdp - \Pi pddp;$$

welche Gleichung angenehm integrierbar wird, wenn sie durch Πpdp geteilt wird, es geht nämlich hervor

$$0 = \frac{3dp}{p} - \frac{2ydx}{\Pi} - \frac{ddp}{dp},$$

deren Integral dieses ist

$$C = 3lp - 2l\Pi - l\frac{dp}{dx},$$

oder $C\Pi^2 dp = p^3 dx$; für $x = a$ gesetzt, weil $ydx = \frac{2\Pi dp}{p}$ sein muss, wird aus dieser Gleichung $C\Pi y = 2p^2$ sein, mit welcher eine Konstante bestimmt werden wird. Es wird also gelten

$$\Pi = \sqrt{\frac{p^3 dx}{Cdp}} = \frac{2ypdxdp}{3dp^2 - pddp}$$

oder

$$3dp^2 - pddp = \frac{2ydp\sqrt{d}xdp}{b\sqrt{b}p},$$

welche eine Differentialgleichung dritten Grades ist und außer der Konstante b (wir haben aber $\frac{1}{b^3}$ anstelle von C gesetzt) drei neue Konstanten involviert. Eine von diesen wird daher bestimmt werden, dass für $x = a$ gesetzt $\frac{\Pi y}{b^3} = 2pp$ werden muss; eine andere daher, dass für $x = 0$ gesetzt $\Pi = 0$ oder $\frac{p^3 dx}{dp} = 0$ werden muss. Aber die übrigen zwei Konstanten bleiben unbestimmt und deshalb muss die gesuchte Kurve durch zwei gegebene Punkte, durch die sie hindurchgehen soll, bestimmt werden.

BEISPIEL IV

29. Die Kurve az, die auf die Abszisse $Az = a$ bezogen wurde, zu finden, in welcher $\int dx \frac{\int yxdx}{\int ydx}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Es scheint daher ratsam, dieses Beispiel anzuführen, damit klar wird, wie Fragen solcher Art aufzulösen sind, wenn zwei oder mehrere Integralformeln vorhanden sind. Es sei also

$$\int yxdx = \Pi \qquad \text{und} \qquad \int ydx = \pi,$$

und für $d\Pi = [Z]dx$ und $d\pi = [z]dx$ gesetzt wird $[Z] = yx$ et $[z] = y$. sein. Wenn daher nun der Kleinbuchstabe $[z]$ auf die gleiche Weise behandelt wird wie der Großbuchstabe $[Z]$, so dass gilt

$$d[z] = [m]dx + [n]dy + [p]dp + \text{ etc. },$$

wird $[M] = y$ und $[N] = x$ und $[n] = 1$ sein. Darauf, weil $Z = \frac{\Pi}{\pi}$ ist, wird $dZ = \frac{d\Pi}{\pi} - \frac{\Pi d\pi}{\pi^2}$ sein. Es werde $\frac{1}{\pi} = L$ und $\frac{\Pi}{\pi^2} = l$ gesetzt, und man wird wegen N et P, Q, R etc. $= 0$ diese Gleichung für die gesuchte Kurve haben

$$0 = x\left(H - \int \frac{dx}{\pi}\right) - \left(h - \int \frac{\Pi dx}{\pi^2}\right),$$

wo $\int \frac{dx}{\pi} = H$ und $\int \frac{\Pi dx}{\pi^2} = h$ wird, wenn $x = a$ gesetzt wird. Weil also ist

$$Hx - x\int \frac{dx}{\pi} = h - \int \frac{\Pi dx}{\pi^2},$$

wird durch Differenzieren sein

$$H - \int \frac{dx}{\pi} - \frac{x}{\pi} = -\frac{\Pi}{\pi^2}.$$

Für $x = a$ gesetzt muss also $\Pi = \pi x$ werden. Es werde erneut differenziert und es wird hervorgehen

$$-\frac{2}{\pi} + \frac{xy}{\pi^2} = -\frac{yx}{\pi^2} + \frac{2\Pi y}{\pi^3} \quad \text{oder} \quad xy - \pi = \frac{\Pi y}{\pi}$$

und daher

$$\Pi = \pi x - \frac{\pi\pi}{y}.$$

Wenn eine weitere Differentiation durchgeführt wird, wird man haben

$$yxdx = \pi dx + yxdx - 2\pi dx + \frac{\pi\pi dy}{yy}$$

oder

$$yydx = \pi dy \qquad \text{oder} \qquad \frac{ydx}{\pi} = \frac{dy}{y}.$$

Weil ja aber für $x = 0$ gesetzt $\pi = 0$ wird, wird in diesem Fall $\frac{yydx}{dy} = 0$ werden. Aber die Gleichung $\frac{ydx}{\pi} = \frac{dy}{y}$, wegen $ydx = d\pi$, gibt integriert $\pi = by$; und daher muss für $x = 0$ gesetzt y verschwinden. Aus der Gleichung $\pi = by$ folgt aber $ydx = bdy$ und daher $x = bly - bl0$, wenn freilich $\pi = by$ für $x = 0$ gesetzt verschwinden muss; in diesem Fall würde $y = 0$ werden und die Kurve ginge in die Gerade über, die auf die Achse AZ fällt. Wenn wir aber festlegen, dass für $x = 0$ gesetzt der Wert $\pi = \int ydx$ nicht verschwinden darf, sondern $= bc$ wird, wird $x = bl\frac{y}{c}$ sein, welche die Gleichung für eine logarithmische Kurve ist. Um diese vollständig zu bestimmen, werde der Wert $\Pi = \int yxdx$ gesucht; weil $ydx = bdy$ ist, wird gelten

$$yxdx = bxdy \qquad \text{und} \qquad \Pi = bxy - b\pi + \text{ Konst.}$$

oder

$$\Pi = bbyl\frac{y}{c} - bby + C.$$

Es muss aber $\Pi = 0$ für $x = 0$ oder $y = c$ gesetzt sein, es wird sein

$$\Pi = bbyl\frac{y}{c} + bb(c - y).$$

Nun werde $x = a$ gesetzt, es wird $l\frac{y}{c} = \frac{a}{b}$ und $y = ce^{a:b}$ sein; in diesem Fall ist es aber von Nöten, dass $\Pi = \pi x$ oder

$$abce^{a:b} + bbc - bbce^{a:b} = abce^{a:b}$$

und daher $e^{a:b} = 1$ ist, woher entweder $a = 0$ oder $b = \infty$ sein wird. Diese Unannehmlichkeit entsteht daher, weil wir festgelegt haben, dass $\Pi = 0$ wird, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist. Wir wollen also festlegen, dass für $y = g$ gesetzt dann in dem Fall Π verschwindet, es wird gelten

$$\Pi = bbyl\frac{y}{c} - bby + bbg - bbgl\frac{g}{c}.$$

Nun wird für $x = a$ gesetzt, in welchem Fall $\Pi = \pi x = a\pi$ sein muss, sein

$$abce^{a:b} - bbce^{a:b} + bbg - bbgl\frac{g}{c} = abce^{a:b}$$

und daher

$$e^{a:b} = \frac{g}{c}\left(1 - l\frac{g}{c}\right) \qquad \text{oder} \qquad b = \frac{a}{l\frac{g}{c}\left(1 - l\frac{g}{c}\right)}$$

und daher

$$x = \frac{a(ly - lc)}{lg\left(1 - l\frac{g}{c}\right) - lc}.$$

Die ist die Gleichung, die die Kurve völlig bestimmt, sodass sich kein Punkt der Kurve nach Belieben annehmen lässt.

BEMERKUNG 2

30. Durch dieses Problem können also nicht nur jene Fragen, die eine Kurve verlangen, die für eine gegebene Abszisse die Formel $\int Zdx$ zum Maximum hat, aufgelöst werden, und in denen Z außer den bestimmten Größen x, y, p, q, r, s etc. die eine Integralformel $\Pi = \int [Z]dx$ umfasst, sondern auch wenn mehrere Formeln solcher Art vorhanden waren. Dennoch ist es wiederum zu bemerken, dass diese Integralformeln $\Pi = \int [Z]dx$, die in der Funktion Z enthalten sind, so beschaffen sein müssen, dass $[Z]$ eine bestimmte Funktion ist, das heißt eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc., die keine weiteren Integralformeln involviert. Dieser Sache wegen wollen wir nun nach einer Methode suchen, Probleme solcher Art aufzulösen, wann immer diese Funktion $[Z]$ nicht bestimmt ist, sondern außer x, y, p, q etc. die neue Integralformel $\pi = \int [z]dx$ involviert. Damit aber die Lösung nicht allzu lang wird, werden wir keine Differentiale höher als die zweiten Grades betrachten,. Es wird nämlich schon eingesehen, wenn die Lösung bis hinzu Differentialen zweiten Grades gegeben worden ist, dass dann die Lösung durch Induktion auf so viele weitere Grade, wie es beliebt, ausgedehnt werden kann. Zu diesem Zweck werden wird die erste Ordinate Ll durch y zu bezeichnen haben, von welcher die dritte, die folgt, $Nn = y''$ um das Stück nv vermehrt zu werden aufgefasst werde. Aus dieser Vermehrung werden die folgenden Zuwächse der Größen y, p und q mit ihren Derivierten entstehen

$$\begin{array}{lll} d \cdot y = 0 & d \cdot p = 0 & d \cdot q = +\dfrac{nv}{dx^2} \\[2ex] d \cdot y' = 0 & d \cdot p' = +\dfrac{nv}{dx} & d \cdot q' = -\dfrac{2nv}{dx^2} \\[2ex] d \cdot y'' = +nv & d \cdot p'' = -\dfrac{nv}{dx} & d \cdot q'' = +\dfrac{nv}{dx^2} \end{array}$$

welche Tabelle genügen wird, um irgendwelche Probleme aufzulösen, wie aus der folgenden Proposition eingesehen werden wird.

PROPOSITION IV PROBLEM

31. Es sei $\pi = \int [z]dx$ und $d[z] = [m]dx + [n]dy + [p]dp + [q]dq$, und die Größe $[Z]$ involviere die Integralformel π so, dass gilt

$$d[Z] = [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq.$$

Nun sei für $\Pi = \int [Z]dx$ gesetzt Z eine Funktion von x, y, p, q und genauso von Π, so dass gilt

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq.$$

Nach Festlegen dieser Dinge soll die Kurve az bestimmt werden müssen, die für die gegebene Abszisse $AZ = a$ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat.

LÖSUNG. Wie in der vorhergehenden Bemerkung erinnern wir daran, dass für uns die Abszisse $AL = x$ und die Ordinate $Ll = y$ ist, der Abszisse $AL = x$

aber entspreche der Wert $\int Zdx$, der vom Stück nv nicht betroffen werden wird. Daraus wird der Differentialwert aus den folgenden Elementen der Abszisse bestimmt werden müssen, denen die Werte $Z'dx$, $Z''dx$, $Z'''dx$, $Z^{IV}dx$ etc. bis hin zum letzten Element der ganzen vorgelegten Abszisse AZ in Z entsprechen. Die Differentialwerte dieser einzelnen Terme werden aber durch Differentiation gefunden werden, indem anstelle der Differentiale dy, dp, dq die im vorhergehenden Paragraph angegebenen Werte gesetzt werden. Es wird also sein

$$\begin{aligned}
d\cdot Zdx &= dx\left(Ld\Pi \quad + \frac{Q\cdot nv}{dx^2}\right)\\
d\cdot Z'dx &= dx\left(L'd\Pi' \quad + \frac{P'nv}{dx} - \frac{2Q'\cdot nv}{dx^2}\right)\\
d\cdot Z''dx &= dx\left(L''d\Pi'' \quad + N''\cdot nv - \frac{P''nv}{dx} + \frac{Q''\cdot nv}{dx^2}\right)\\
d\cdot Z'''dx &= dxL'''d\Pi'''\\
d\cdot Z^{IV}dx &= dxL^{IV}d\Pi^{IV}\\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Es ist also übrig, dass wir durch nv die Differentiale $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$, $d\Pi'''$ etc. bestimmen, das heißt die Differentialwerte der Größen Π, Π', Π'', Π''' etc.. Es ist aber

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int [Z]dx\\
\Pi' &= \int [Z]dx + [Z]dx\\
\Pi'' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx\\
\Pi''' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx\\
\Pi^{IV} &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx + [Z''']dx\\
&\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Dort ist aber zu bemerken, dass der Differentialwert der Größe $\int[Z]dx$ daher $= 0$ ist, dass das Stück nv in der Abszisse AL, auf die $\int[Z]dx$ bezogen wird, keine Veränderung verursacht. Es wird also nur von Nöten sein, die Differentialwerte der Terme der Differentiale $[Z]dx$, $[Z']dx$, $[Z'']dx$ etc. zu finden. Es wird aber sein

$$
\begin{aligned}
d\cdot[Z]\quad dx &= dx\left([L]d\pi+\frac{[Q]nv}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z']\quad dx &= dx\left([L']d\pi'+\frac{[P']nv}{dx}-\frac{2[Q']nv}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z'']\ dx &= dx\left([L'']d\pi''+[N'']nv-\frac{[P'']nv}{dx}+\frac{[Q'']nv}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z''']\ dx &= dx[L''']d\pi'''\\
d\cdot[Z^{IV}]dx &= dx[L^{IV}]d\pi^{IV}
\end{aligned}
$$

etc.

Nun sind weiter die Differentialwerte der Größen π, π', π'', π''' etc. durch nv zu bestimmen, welche anstelle von $d\pi$, $d\pi'$, $d\pi''$ etc. eingesetzt werden müssen. Weil aber $\pi=\int[z]dx$ ist und in $[z]$ den zweiten Grad überragende Differentiale festgelegt werden, nicht enthalten zu sein, wird der Differentialwert von π oder $d\pi=0$ werden, um aber die Differentialwerte der folgenden Größen π', π'', π''' etc. zu finden, wird es gefällig sein bemerkt zu haben, dass gilt

$$
\begin{aligned}
\pi\quad &= \int[z]dx\\
\pi'\quad &= \int[z]dx+[z]dx\\
\pi''\quad &= \int[z]dx+[z]dx+[z']dx\\
\pi'''\quad &= \int[z]dx+[z]dx+[z']dx+[z'']dx\\
\pi^{IV} &= \int[z]dx+[z]dx+[z']dx+[z'']dx+[z''']dx
\end{aligned}
$$

etc.

Es wird aber sein

$$
\begin{aligned}
d\cdot[z\quad]dx &= nv\cdot dx\frac{[q]}{dx^2}\\
d\cdot[z'\quad]dx &= nv\cdot dx\left(\frac{[p']}{dx}-\frac{2[q']}{dx^2}\right)\\
d\cdot[z''\ ]dx &= nv\cdot dx\left([n'']-\frac{[p'']}{dx}+\frac{[q'']}{dx^2}\right)\\
d\cdot[z'''\,]dx &= 0\\
d\cdot[z^{IV}]dx &= 0
\end{aligned}
$$

etc.

Aus diesen wird man deswegen erhalten

$$
\begin{aligned}
d\cdot\pi &= 0\\
d\cdot\pi' &= nv\cdot dx\frac{[q]}{dx^2}\\
d\cdot\pi'' &= nv\cdot dx\left(\frac{[p']}{dx}-\frac{[q]}{dx^2}\ -\frac{2[q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot\pi''' &= nv\cdot dx\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot\pi^{IV} &= nv\cdot dx\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot\pi^{V} &= nv\cdot dx\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)
\end{aligned}
$$

und alle folgenden Werte werden einander gleich sein. Wenn daher nun diese gefundenen Werte eingesetzt werden, wird gelten

$$
\begin{aligned}
d\cdot[Z\quad]dx &= nv\cdot dx\frac{[Q]}{dx^2}\\
d\cdot[Z'\ ]dx &= nv\cdot dx\left(\frac{[L'][q]}{dx}+\frac{[P']}{dx}-\frac{2[Q']}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z''\ ]dx &= nv\cdot dx\left([L'']dx\left(\frac{[p']}{dx}-\frac{[q]+2[q]}{dx^2}\right)+[N'']-\frac{[P'']}{dx}+\frac{[Q'']}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z'''\ ]dx &= nv\cdot dx[L''']dx\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z^{IV}]dx &= nv\cdot dx[L^{IV}]dx\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z^{V}\ ]dx &= nv\cdot dx[L^{V}]dx\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)
\end{aligned}
$$

etc.

Daher wird weiter abgeleitet:

$$
\begin{aligned}
d\cdot\Pi &= 0\\
d\cdot\Pi' &= nv\cdot dx\frac{[Q]}{dx^2}\\
d\cdot\Pi'' &= nv\cdot dx\left([L']dx\frac{[q]}{dx^2}+\frac{[P']}{dx}-\frac{[Q]+2[Q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot\Pi''' &= nv\cdot dx\left([L''][p']-\frac{[q]d[L']+2[L'']d[q]}{dx}+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot\Pi^{IV} &= nv\cdot dx\left([L''']dx\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+[L''][p']-\frac{[q]d[L']+2[L'']d[q]}{dx}+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot\Pi^{V} &= nv\cdot dx\left(([L''']dx+[L^{IV}]dx)\left([n'']-\frac{d[p']}{dx}+\frac{dd[q]}{dx^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+[L''][p']-\frac{[q]d[L']+2[L'']d[q]}{dx}+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Aus diesen werden nun die folgenden Bestimmungen entstehen:

$$d \cdot Z \quad dx = nv \cdot dx \frac{Q}{dx^2}$$

$$d \cdot Z' \quad dx = nv \cdot dx \left(L' dx \frac{[Q]}{dx^2} + \frac{P'}{dx} - \frac{2Q'}{dx^2} \right)$$

$$d \cdot Z'' \quad dx = nv \cdot dx \left(L'' dx \left(L' dx \frac{[q]}{dx^2} + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2} \right) \right.$$
$$\left. + N'' - \frac{P''}{dx} + \frac{Q''}{dx^2} \right)$$

$$d \cdot Z''' \ dx = nv \cdot dx \cdot L''' dx \left([L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L'']d[q]}{dx} \right.$$
$$\left. + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right)$$

$$d \cdot Z^{IV} dx = nv \cdot dx \cdot L^{IV} dx \left([L''']dx \left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2} \right) \right.$$
$$\left. + [L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L'']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right)$$

$$d \cdot Z^{V} \ dx = nv \cdot dx \cdot L^{V} dx \left(([L''']dx + [L^{IV}]dx) \left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2} \right) \right.$$
$$\left. + [L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L'']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right)$$

$$d \cdot Z^{VI} dx = nv \cdot dx \cdot L^{VI} dx \left(([L''']dx + [L^{IV}]dx + [L^{V}]dx) \left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2} \right) \right.$$
$$\left. + [L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L'']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right)$$

etc.

Damit diese Werte umso angenehmer zueinander addiert werden können, wollen wir der Kürze wegen

$$[h] = [n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2} = [n] - \frac{d[p]}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2}$$

und

$$[H] = [L][p] - \frac{[q]d[L] + 2[L]d[q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2}$$

festlegen und es wird die Summe aller, das heißt der Differentialwert der vorgelegten Formel $\int Zdx$ sein wie folgt:

$$\begin{aligned}
&nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \right) + nv \cdot dx \left(L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} \right) \\
&\quad + nv \cdot dx \cdot L[L][q] + nv \cdot dx \cdot [H](L'''dx + L^{IV}dx + L^{V}dx + \text{ etc. bis zu } Z) \\
&\quad + nv \cdot dx \cdot [h](L^{IV}dx \cdot [L''']dx + L^{V}dx([L''']dx + [L^{IV}]dx) \\
&\quad + L^{VI}dx([L''']dx + [L^{IV}]dx + [^{L}V]dx) \\
&\quad + L^{VII}dx([L''']dx + [L^{IV}]dx + [L^{V}]dx + [L^{VI}]dx) \\
&\quad + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Man hat also hier zwei unendliche Reihen, die von der Grenze Ll bis hin zu Zz fortschreiten, von denen die Summe jener $L'''dx + L^{IV}dx + L^{V}dx+$ etc. durch $H - \int Ldx$ ausgedrückt werden kann, während H den Wert von $\int Ldx$ für $x = a$ gesetzt bezeichnet. Damit wir aber den Wert der anderen Reihe finden, werde ihre Summe $= S$ gesetzt, sodass gilt

$$S = L^{IV}dx \cdot [L''']dx + L^{V}dx([L''']dx + [L^{IV}]dx) + \text{ etc.}$$

Es werde der folgende Wert $S' = S + dS$ genommen, es wird gelten

$$S + dS = L^{V}dx \cdot [L^{IV}]dx + L^{VI}dx([L^{IV}]dx + [L^{V}]dx) + \text{ etc. },$$

welcher von jenem subtrahiert diesen zurücklassen wird

$$-dS = L^{IV}[L''']dx^2 + L^{V}[L''']dx^2 + L^{VI}[L''']dx^2 + \text{ etc. },$$

oder

$$-dS = [L''']dx^2(L^{IV}dx + L^{V}dx + L^{VI}dx + \text{ etc. },)$$

und daher

$$-dS = [L''']dx^2(H - \int Ldx)$$

und durch Integrieren

$$S = G - \int [L]dx(H - \int Ldx)$$

nachdem die Konstante G so angenommen wurde, dass $S = 0$ wird, wenn $x = a$ gesetzt wird. Nach Finden von diesen wird der Differentialwert der vorgelegten Formel werden

$$\begin{aligned}
\int Zdx =& nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} + L[L][q] \right. \\
&+ (H - \int Ldx) \left([L][p] - \frac{[q]d[L] + 2[L]d[q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right) \\
&\left. + (G - \int [L]dx(H - \int Ldx)) \left([n] - \frac{d[p]}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann in die folgende Form verwandelt werden, aus welcher leichter der Differentialwert gebildet werden können wird, wenn Differentiale von höheren Graden als vom zweiten so in Z wie in $[Z]$ und $[z]$ vorhanden sind. Der Differentialwert der Formel $\int Zdx$, der der Abszisse $AZ = a$ entspricht, wird natürlich sein

$$= nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ etc.} \right)$$

$$+ nv \cdot dx \left([N](H - \int Ldx) - \frac{d \cdot [P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd \cdot [Q](H - \int Ldx)}{dx^2} \right.$$

$$\left. - \frac{d^3 \cdot [R](H - \int Ldx)}{dx^3} + \frac{d^4 \cdot [S](H - \int Ldx)}{dx^4} - \text{ etc.} \right)$$

$$+ nv \cdot dx \left([n](G - \int [L]dx(H - \int Ldx)) - \frac{d \cdot [p](G - \int [L]dx(H - \int Ldx))}{dx} \right.$$

$$\left. + \frac{dd \cdot [q](G - \int [L]dx(H - \int Ldx))}{dx^2} - \frac{d^3[r](G - \int [L]dx(H - \int Ldx))}{dx^3} + \text{ etc.} \right).$$

Nachdem aber der Differentialwert gefunden worden ist, wenn er $= 0$ gesetzt wird, wird man die Gleichung für die gesuchte Kurve haben. Q.E.I.

KOROLLAR I

32. Es ist also der Differentialwert der sich weiter erstreckenden Formel $\int Zdx$, als sie noch in der Proposition angenommen worden ist, gefunden worden, wenn natürlich galt

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ etc.}$$

und, während $d\Pi = [Z]dx$ ist, wenn gilt

$$d[Z] = [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{ etc.}$$

und genauso, wenn für $d\pi = [z]dx$ gesetzt galt

$$d[z] = [m]dx + [n]dy + [p]dp + [q]dq + [r]dr + \text{ etc.}$$

Differentiale wie vielten Grades auch immer in den Größen Z, $[Z]$ und $[z]$ enthalten sind, die gegebene Lösung wird sich nach den Umständen richten.

KOROLLAR II

33. Wenn daher $H - \int Ldx = T$ und $G - \int [L]dx(H - \int Ldx) = V$ gesetzt wird, wird der Differentialwert sein

$$= nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ etc.} \right)$$

$$+ nv \cdot dx \left([N]T - \frac{d[P]T}{dx} + \frac{dd \cdot [Q]T}{dx^2} - \frac{d^3[R]T}{dx^3} + \text{ etc.} \right)$$

$$+ nv \cdot dx \left([n]V - \frac{d \cdot [p]V}{dx} + \frac{dd \cdot [q]V}{dx^2} - \frac{d^3[r]V}{dx^3} + \text{ etc.} \right).$$

KOROLLAR III

34. Daher wird also die Gleichung für die gesuchte Kurve diese sein

$$0 = N + [N]T + [n]V - \frac{d(P + [P]T + [p]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]T + [q]V)}{d2} - \frac{d^3(R + [R]T + [r]V)}{dx^3} + \text{ etc. },$$

das Bildungsgesetz welcher Progression, wenn unter Umständen mehrere Terme von Nöten sind, von selbst klar ist.

KOROLLAR IV

35. Ja es werden sogar Probleme solcher Art aufgelöst werden können, in denen Z nicht nur eine, sondern mehrere unbestimmte Integralformeln dieser Art Π in sich umfasst; oder auch, wenn $[Z]$ mehrere Formeln solcher Art $\pi = \int [z]dx$ in sich enthält.

KOROLLAR V

36. Schließlich, auch wenn wir festlegt haben, dass $[z]$ eine bestimmte Funktion ist, ist dennoch durch Induktion daher die Art klar, den Differentialwert zu bilden, wenn $[z]$ weiter eine unbestimmte Integralformel enthält.

BEMERKUNG 1

37. Die Lösung dieses Problems erstreckt sich also sehr weit, weil sie nicht nur alle vorhergehenden Probleme in sich umfasst und dem vorgelegten Fall selbst genügt, sondern auch durch Induktion an wie verwickeltere Fälle auch immer angepasst werden kann. Damit dies leichter erkannt wird, wollen wir festlegen, dass in $[z]$ darüber hinaus die Integralformel $\pi = \int \zeta dx$ enthalten ist, sodass gilt

$$d[z] = [l]d\pi + [m]dx + [n]dy + [p]dp + [q]dq + \text{ etc.}$$

während gilt

$$d\zeta = \mu dx + v dy + \phi dp + \chi dq + \text{ etc.}$$

Um nun den Differentialwert zu bestimmen, muss außer den zwei Integralformeln T und V eine dritte so beschaffene W bestimmt werden, dass gilt

$$W = F - \int [l]dx(G - \int [L]dx(H - \int Ldx)),$$

die für $x = a$ gesetzt verschwinde. Und auf diese Weise wird der Differentialwert sein

$$= nv \cdot dx \left(N + [N]T + [n]V + vW - \frac{d(P + [P]T + [p]V + \phi W)}{dx} + \frac{dd \cdot (Q + [Q]T + [q]V + \chi W)}{dx^2} - \text{ etc.} \right)$$

Deswegen wird nicht einmal eine Formel des Maximums oder Minimums erdacht werden können, die nicht in der Lösung enthalten oder aus solchen Formeln zusammengesetzt wäre, auf welche sich die Lösung erstreckt. Ja es ließe sich dieser

Ausdruck sogar ins Unendliche ausdehnen, wenn eine beliebige unbestimmte Integralformel eine andere neue unbestimmte Integralformel in sich umfasst; und es wäre nicht eine Schwierigkeit vorhanden, außer in der Beschaffung einer genügenden Anzahl von Charakteren. Obwohl es nicht notwendig ist, weiter fortzuschreiten, wird es gefällig sein, einen grundlegenden Fall zu entwickeln, in welchem in der Formel $\int [Z]dx$, die den Wert von Π liefert, die Größe $[Z]$ selbst erneut Π involviert. In diesem Fall schreitet nämlich der Komplex von Integralformeln dieser Art tatsächlich bis ins Unendliche fort; denn, wenn gilt

$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \text{ etc.} ,$$

wird hier wiederum $d\Pi$ sein, was zuvor $d\pi$ war, und weil ja $d\Pi = [Z]dx$ ist, kehrt erneut dieselbe Gleichung

$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + \text{ etc.}$$

zurück, und so wird die Behandlung von Integralformeln dieser Art niemals abbrechen. Wir werden also diesen Fall, sowohl weil er uns einen riesigen Nutzen verschaffen wird, als auch weil er eine gefällige Lösung zulässt, hier vollständig behandeln.

PROPOSITION V PROBLEM

38. Wenn Π *nicht anders gegeben ist außer durch die Differentialgleichung* $d\Pi = [Z]dx$, *in welcher* $[Z]$ *außer den sich auf die Kurve beziehenden Größen* x, y, p, q, r *etc. die Größe* Π *umfasst, sodass gilt*

$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \text{ etc.} ,$$

Z *irgendeine Funktion von* Π *und* x, y, p, q *etc. ist, sodass gilt*

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ etc.} ,$$

die Kurve zu finden, in welcher für die gegebene Abszisse $AZ = a$ *die Formel* $\int Zdx$ *ein Maximum oder Minimum ist.*

LÖSUNG. Wir wollen festlegen, dass die Differentiale, die so in Z wie in $[Z]$ enthalten sind, den zweiten Grad nicht überschreiten, sodass das Stück nv nicht weiter als zum Punkt L der Abszisse zum Anfang hin keine Veränderung verursacht. Die Lösung wird nämlich nichtsdestoweniger in allgemeinster Form gegeben werden können. Es sei also die Abszisse $AL = x$ und die Ordinate $Ll = y$, es wird $\int Zdx$ von dem der Ordinate $Nn = y''$ hinzugefügten Stück nv keine Veränderung erfahren, und so wird ihr Differentialwert $= 0$ sein. Deswegen wird der Differentialwert der Formel $\int Zdx$, sofern sie auf die ganze Abszisse AT ausgedehnt wird, aus den Elementen Zdx, $Z'dx$, $Z''dx$, $Z'''dx$ etc. berechnet werden müssen. Die Differentialwerte dieser einzelnen Elemente werden aber gefunden werden, wenn sie differenziert werden und anstelle der Differentiale dy, dy', dy'', dp, dp', dp'' und dq, dq', dq'' die in Paragraph 30 angegebenen Werte eingesetzt werden. Weil ja aber darüber hinaus in diese Differentiale $d\Pi$,

$d\Pi'$, $d\Pi''$ etc. eingehen, wollen wir festlegen, dass deren aus nv herstammenden Werte solange, bis wir sie finden, diese sind:

$$\begin{array}{lll} d\Pi \;\;= nv\cdot\alpha & d\Pi''' \;\;= nv\cdot\delta & d\Pi^{VI} \;\;= nv\cdot\eta \\ d\Pi' \;= nv\cdot\beta & d\Pi^{IV} = nv\cdot\varepsilon & d\Pi^{VII} = nv\cdot\theta \\ d\Pi'' = nv\cdot\gamma & d\Pi^{V} \;\;= nv\cdot\zeta & \qquad \text{etc.} \end{array}$$

Daher werden deshalb die Differentialwerte sein

$$\begin{array}{ll} d\cdot Z & dx = nv\cdot dx\left(L\alpha + \dfrac{Q}{dx^2}\right) \\ d\cdot Z' & dx = nv\cdot dx\left(L'\beta + \dfrac{P'}{dx} - \dfrac{2Q'}{dx^2}\right) \\ d\cdot Z'' & dx = nv\cdot dx\left(L''\gamma + N'' - \dfrac{P''}{dx} + \dfrac{Q''}{dx^2}\right) \\ d\cdot Z''' & dx = nv\cdot dxL'''\delta \\ d\cdot Z^{IV} & dx = nv\cdot dxL^{IV}\varepsilon \\ d\cdot Z^{V} & dx = nv\cdot dxL^{V}\zeta \\ \quad\text{etc.} & \end{array}$$

Um nun die Werte der Buchstaben α, β, γ, δ, ε etc. zu bestimmen, ist zu bemerken, dass $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$ etc. die Differentialwerte der Größen Π, Π', Π'' etc. sind. Es ist aber

$$\begin{array}{ll} \Pi & = \displaystyle\int [Z]dx \\ \Pi' & = \displaystyle\int [Z]dx + [Z]dx \\ \Pi'' & = \displaystyle\int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx \\ \Pi''' & = \displaystyle\int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx \\ \text{etc.,} & \end{array}$$

wo $\int [Z]dx$ nach der Annahme vom Stück nv nicht betroffen ist. Es sind also die Differentialwerte der Formeln $[Z]dx$, $[Z']dx$, $[Z'']dx$ etc. zu finden, die sein werden

$$
\begin{aligned}
d\cdot[Z\quad]dx &= nv\cdot dx\left([L]\alpha+\frac{[Q]}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z'\quad]dx &= nv\cdot dx\left([L']\beta+\frac{[P']}{dx}-\frac{2[Q']}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z''\quad]dx &= nv\cdot dx\left([L'']\gamma+[N'']-\frac{[P'']}{dx}+\frac{[Q'']}{dx^2}\right)\\
d\cdot[Z'''\,]dx &= nv\cdot dx\cdot[L''']\delta\\
d\cdot[Z^{IV}]dx &= nv\cdot dx\cdot[L^{IV}]\varepsilon\\
d\cdot[Z^{V}\ \ ]dx &= nv\cdot dx\cdot[L^{V}]\zeta\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Aus diesen wird also sein wie folgt

$$
\begin{aligned}
d\Pi\quad &= nv\cdot\alpha\\
d\Pi'\quad &= nv\cdot dx\left([L]\alpha+\frac{[Q]}{dx^2}\right)\\
d\Pi''\quad &= nv\cdot dx\left([L]\alpha+[L']\beta+\frac{[P']}{dx}-\frac{[Q]+2d[Q]}{dx^2}\right)\\
d\Pi'''\quad &= nv\cdot dx\left([L]\alpha+[L']\beta+[L'']\gamma+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
d\Pi^{IV} &= nv\cdot dx\left([L]\alpha+[L']\beta+[L'']\gamma+[L''']\delta+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
d\Pi^{V} &= nv\cdot dx\left([L]\alpha+[L']\beta+[L'']\gamma+[L''']\delta+[L^{IV}]\varepsilon+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Nachdem diese mit den angenommen Werten verglichen worden sind, wird sein

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 0\\
\beta &= [L]\alpha dx+\frac{[Q]}{dx}\\
\gamma &= dx\left([L]\alpha+[L']\beta+\frac{[P']}{dx}-\frac{[Q]+2d[Q]}{dx^2}\right)\\
\delta &= dx\left([L]\alpha+[L']\beta+[L'']\gamma+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
\varepsilon &= dx\left([L]\alpha+[L']\beta+[L'']\gamma+[L''']\delta+[N'']-\frac{d[P']}{dx}+\frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Und aus diesen Gleichungen wird gefunden:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0\\
\beta &= \frac{[Q]}{dx}\\
\gamma &= [L'][Q] + [P'] - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx}\\
\delta &= [L'][Q] + [L''][L'][Q]dx + [L''][P']dx\\
&\quad - [L''][Q] - 2[L'']d[Q] + [N'']dx - d[P'] + \frac{dd[Q]}{dx}\\
\text{oder}\quad \delta &= [L''][L'][Q]dx + [L''][P']dx - [Q]d[L']\\
&\quad - 2[L'']d[Q] + [N'']dx - d[P'] + \frac{dd[Q]}{dx},
\end{aligned}$$

welcher Wert von δ gemerkt werde, und es wird weiter sein

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \delta(1 + [L''']dx)\\
\zeta &= \delta(1 + [L''']dx)(1 + [L^{IV}]dx)\\
\eta &= \delta(1 + [L''']dx)(1 + [L^{IV}]dx)(1 + [L^{V}]dx)\\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nachdem diese Werte bekannt geworden sind, wird der Differentialwert, der den Elementen $Zdx + Z'dx + Z''dx$ entspricht, sein

$$= nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} \right).$$

Aber der Differentialwert aller folgenden Elemente bis hin zu Z, wenn

$$V = [L^2][Q] + [L][P] - \frac{[Q]d[L] + 2[L]d[Q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2}$$

oder$\delta = Vdx$ festgelegt wird, wird der folgende sein:

$$\begin{aligned}
&nv \cdot dx(L'''dx + L^{IV}dx(1 + [L''']dx) + L^{V}dx(1 + [L''']dx)(1 + [L^{IV}]dx)\\
&\quad + L^{VI}dx(1 + [L''']dx)(1 + [L^{IV}]dx)(1 + [L^{V}]dx) + \text{ etc.})V.
\end{aligned}$$

Deswegen ist die Summe dieser Reihe zu untersuchen; zu diesem Zweck wollen wir L anstelle von L''' und $[L]$ anstelle von $[L''']$ schreiben, und die Summe, die wir suchen, sei $= S$; es wird gelten

$$\begin{aligned}
S =& Ldx + L'dx(1 + [L]dx) + L''dx(1 + [L]dx)(1 + [L']dx)\\
&+ L'''dx(1 + [L]dx)(1 + [L']dx)(1 + [L'']dx) + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Nun werde von S der folgende Wert genommen $S' = S + dS$, es wird sein

$$S + dS = L'dx + L''dx(1 + [L']dx) + L'''dx(1 + [L']dx)(1 + [L'']dx) + \text{ etc.}$$

Und daher

$$\begin{aligned}-dS =& Ldx + L'[L]dx^2 + [L]dx \cdot L''dx(1+[L']dx)\\ &+ [L]dx \cdot L'''dx(1+[L']dx)(1+[L'']dx) + \text{ etc. },\end{aligned}$$

welche Reihe, weil sie auf die erste zurückgeführt werden kann, sein wird

$$-dS = Ldx + S'[L]dx,$$

oder wegen $S' = S$, $dS + S[L]dx = -Ldx$; diese gibt integriert

$$e^{\int [L]dx} S = C - \int e^{\int [L]dx} Ldx,$$

welche Konstante C so angenommen werden muss, dass für $x = a$ gesetzt $S = 0$ wird. Deswegen wird der Wert jener Reihe sein

$$S = e^{-\int [L]dx}(C - \int e^{\int [L]dx} Ldx).$$

Aus diesen wird also der folgende Differentialwert der vorgelegten Formel $\int Zdx$ entstehen:

$$\begin{aligned}&nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx}\right.\\ &\left.+S\left([L^2][Q] + [L][P] - \frac{[Q]d[L] + 2[L]d[Q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2}\right)\right),\end{aligned}$$

der in diese gefälligere Form verwandelt wird

$$nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + [N]S - \frac{d \cdot [P]S}{dx} + \frac{dd \cdot [Q]S}{dx^2}\right).$$

Daher kann aber der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ gebildet werden, wenn so in Z wie in $[Z]$ die Differentiale zu welchem Grad auch immer ansteigen. Um dies zu bewerkstelligen, sei der Wert der Integralformel $\int e^{\int [L]dx} Ldx$, den sie erhält, wenn $X = a$ gesetzt wird, $= H$ und es werde der Kürze wegen also V anstelle dieses Ausdruckes geschrieben

$$e^{-\int [L]dx}(H - \int e^{\int [L]dx} Ldx),$$

und der Differentialwert wird sein

$$= nv \cdot dx \left(N + [N]V - \frac{d \cdot (P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3(R + [R]V)}{dx^3} + \text{ etc.}\right).$$

Und daher wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung entstehen.

$$\begin{aligned}0 = N + [N]V &- \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3(R + [R]V)}{dx^3}\\ &+ \frac{d^4(S + [S]V)}{dx^4} - \text{ etc.}\end{aligned}$$

Q.E.I.

KOROLLAR I

39. Diese Proposition dient also zum Auflösen von Problemen solcher Art, in denen die Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ in sich eine solche Größe Π enthält, die nicht einmal mit einer Integralformel aus den sich auf die Kurve beziehenden Größen x, y, p, q, r etc. dargeboten werden kann, sondern deren Bestimmung von der Auflösung irgendeiner Differentialgleichung abhängt. Man hat nämlich $d\Pi = [Z]dx$ und $[Z]$ wird festgelegt, die Größe Π irgendwie in sich zu umfassen.

KOROLLAR II

40. Es verdient dieser Fall bemerkt zu werden, in welchem $L = [L]$ ist, in welchem natürlich die Formel $\int e^{\int [L]dx} Ldx$ integrierbar wird, während das Integral $= e^{\int [L]dx}$ ist. Wenn daher also, für $x = a$ gesetzt, $e^{\int [L]dx}$ in H übergeht, dann wird werden

$$V = He^{-\int [L]dx} - 1.$$

KOROLLAR III

41. Es tritt dieser Fall hauptsächlich auf, wann immer die Kurve gesucht wird, in welcher die Formel $\Pi = \int [Z]dx$ ein Maximum oder Minimum ist. Dann wird nämlich $Z = [Z]$ und daher $L = [L]$, $M = [M]$, $N = [N]$ etc.. Daher wird deshalb der Differentialwert sein

$$= nv \cdot dx \left(H[N]e^{-\int [L]dx} - \frac{d \cdot H[P]e^{-\int [L]dx}}{dx} + \frac{dd \cdot H[Q]ee^{-\int [L]dx}}{dx^2} - \text{ etc.} \right).$$

Und die Gleichung für die Kurve wird sein

$$0 = [N]e^{-\int [L]dx} - \frac{d \cdot [P]e^{-\int [L]dx}}{dx} + \frac{dd \cdot [Q]e^{-\int [L]dx}}{dx^2} - \text{ etc.}$$

KOROLLAR IV

42. Weil aus dieser Gleichung die Größe H, die von der gegebenen Abszisse $AZ = a$ abhängt, durch Teilung herausgegangen ist, ist klar, dass in diesen Fällen dieselbe Kurve, die einer Abszisse genügt, für jede andere Abszisse genügen wird, sodass diese Probleme denen ähnlich sind, in denen die Größe Z eine bestimmte Funktion ist.

KOROLLAR V

43. Wenn also die Größe $\Pi = \int [Z]dx$ ein Maximum oder Minimum sein muss, während gilt

$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \text{ etc. },$$

wird die Kurve dargeboten werden können, die sich für irgendeine Abszisse dieser Eigenschaft erfreut; und ihre Natur wird mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$0 = [N]e^{-\int [L]dx} - \frac{d \cdot [P]e^{-\int [L]dx}}{dx} + \frac{dd \cdot [Q]e^{-\int [L]dx}}{dx^2} - \text{ etc.}$$

Aus dieser werden nach Entwickeln der einzelnen Terme die Exponentialgröße $e^{-\int [L]dx}$ und daher auch die Integralformel $\int [L]dx$ selbst herausgehen.

BEMERKUNG 1

44. Der Gebrauch dieser Proposition ist außerordentlich bei so beschaffenen Fragen, dass unbestimmte in ihnen enthaltene Größen nicht durch Integralformeln dargeboten werden können, sondern die Konstruktion von Differentialgleichungen erfordern. Und diese Lösung gilt genauso, ob eine Größe Π dieser Art in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ enthalten ist oder mehrere; wenn daher nämlich mehrere Größen Π solcher Art enthalten sind, hat man mehrere Werte der Buchstaben L, $[L]$, $[M]$, $[N]$, $[P]$, $[Q]$ etc. und auch die Buchstaben $V = e^{-\int [L]dx}(H - \int e^{\int [L]dx} Ldx)$; all diese werden gleichermaßen auf die Weise, welche wir gefunden haben, in den Differentialwert der Formel $\int Zdx$ eingeführt die Gleichung für die Kurve geben; und die Behandlung wird ganz und gar die gleiche sein, als wenn nur eine vorhanden gewesen wäre. Weil ja aber dieser Buchstabe Π, dessen absoluter Wert durch sich auf die Kurve beziehende Größen nicht dargeboten werden kann, bei fast allen Termen derselbe bleibt, wird die Gleichung für die Kurve, die gefunden wird, nicht nur aus den Buchstaben x, y, p, q, r etc. bestehen, sondern auch die Größe Π und mehrere andere von ihr abhängende Integralformeln, wie $\int [L]dx$ und $\int Ldx$, involvieren. Daher, damit die reine Gleichung für die Kurve, die nur die Buchstaben x, y, p, q etc. enthält, hervorgeht, ist es von Nöten, dass mit der gefundenen Gleichung, nachdem sie von den Integralformeln $\int [L]dx$ und $\int Ldx$ befreit worden ist, die Gleichung $d\Pi = [Z]dx$ verbunden wird und mit ihrer Hilfe der Wert Π eliminiert wird. Obwohl aber auf diese Weise zu Differentialen höherer Ordnungen gelangt wird, sind dennoch nicht genauso viele Konstanten anzusehen auch einzugehen. Denn so die Gleichung $d\Pi = [Z]dx$ wie die übrigen vorherigen Gleichungen verlangen eine gewisse Bestimmung, woher mehrere Konstanten bestimmt werden werden. Im Übrigen ist zu bemerken, dass die Gültigkeit dieser Methode durch die vorhergehenden gebilligt werden kann, wann immer die Gleichung $d\Pi = [Z]dx$ so beschaffen ist, dass sie eine Integration zulässt; dann werden nämlich dieselben Fragen durch die zuvor angegebenen Methoden aufgelöst werden können und daher wird sich die Übereinstimmung beobachten lassen. So, wenn $[Z]$ nur aus x und Π besteht, dann wird gewiss sein, dass Π eine gewisse bestimmte Funktion von x ist und die Lösung sich auf das vorhergehende Kapitel bezieht. Dasselbe wird aber diese Lösung offen legen; weil nämlich in diesem Fall $[N] = 0$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$ etc. ist, wird die Gleichung für die Kurve sein

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{ etc. },$$

welche selbe durch die erste Methode erhalten wird. Der Gebrauch dieser Lösungen wird aber besser durch einige Beispiele aufgezeigt werden.

BEISPIEL I

45. Die Kurve zu finden, in welcher der Wert von Π *maximal ist, während* $d\Pi = gdx - \alpha \Pi^n dx\sqrt{1+pp}$ *ist .*

Diese Frage taucht auf, wann immer die Kurve gesucht wird, über welcher ein schwerer Körper, der in einem resistierenden Medium gemäß Geschwindigkeiten in einem $2n$-fachen Verhältnis herabsinkt, die maximale Geschwindigkeit erhält; denn Π bezeichnet das Quadrat der Geschwindigkeit und g die Schwerkraft, die in Richtung der Achse AZ ausgeübt wird. Diese Frage bezieht sich deshalb auf den in Korollar 3, 4 und 5 erläuterten Fall, in welchem $Z = [Z] = g - \alpha\Pi^n\sqrt{1+pp}$ war; und daher wird die Kurve, die einer Abszisse genügt, für jede Abszisse gleichermaßen gelten. Weil also gilt

$$dZ = -\alpha n\Pi^{n-1}d\Pi\sqrt{1+pp} - \frac{\alpha\Pi^n pdp}{\sqrt{1+pp}},$$

wird sein

$$[L] = -\alpha n\Pi^{n-1}\sqrt{1+pp}, \quad [M] = 0, \quad [N] = 0,$$
$$[P] = -\frac{\alpha\Pi^n p}{\sqrt{1+pp}}, \quad [Q] = 0 \text{ etc.}$$

Daher wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung gefunden

$$0 = -d\cdot[P]e^{-\int[L]dx} \quad \text{oder} \quad [P]e^{-\int[L]dx} = C;$$

und daher

$$-\int[L]dx = lC - l[P] \quad \text{und} \quad [L]dx = \frac{d[P]}{[P]}.$$

Nachdem also anstelle von $[L]$ und $[P]$ die entsprechenden Werte eingesetzt worden sind, wird gelten

$$\int \alpha n\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp} = +lC - l(-\alpha) - l\Pi^n - lp + l\sqrt{1+pp};$$

und daher

$$\alpha n\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp} = -\frac{nd\Pi}{\Pi} - \frac{dp}{p} + \frac{pdp}{(1+pp)} = -\frac{dp}{p(1+pp)} - \frac{nd\Pi}{\Pi}$$

oder

$$0 = nd\Pi + \alpha n\Pi^n dx\sqrt{1+pp} + \frac{\Pi dp}{p(1+pp)}.$$

Diese Gleichung, damit Π eliminiert wird, ist mit dieser zu verbinden

$$d\Pi + \alpha\Pi^n dx\sqrt{1+pp} = gdx;$$

daher wird sofort

$$0 = ngdx - \frac{\Pi dp}{p(1+pp)} \quad \text{und} \quad \Pi = -\frac{ngpdx(1+pp}{dp}.$$

Weil also die Kurve gefunden worden ist, liefert diese Gleichung sofort die Geschwindigkeit des Körpers an jeder Stelle der Kurve. Es werde $dx = -\frac{tdp}{ng}$ gesetzt, es wird gelten

$$\Pi = pt(1+pp) \quad \text{und} \quad d\Pi = pdt(1+pp) + tdp(1+3pp);$$

und daher wird diese Gleichung erhalten werden

$$pdt(1+pp)+tdp(1+3pp)-\frac{\alpha p^n t^{n-1}(1+pp)^{n+\frac{1}{2}}dp}{ng}+\frac{tdp}{n}=0,$$

die in diese verwandelt wird

$$\frac{npdt(1+pp)+tdp(n+1+3npp)}{nt^{n+1}p^{n+2}(1+pp)^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{\alpha dp}{ngp^2},$$

deren Integral ist

$$\frac{1}{nt^n p^{n+1}(1+pp)^{n-\frac{1}{2}}}=\frac{\alpha}{ngp}+\frac{\beta}{ng}$$

oder

$$g=(\alpha+\beta p)t^n p^n(1+pp)^{n-\frac{1}{2}};$$

und daher

$$t=\frac{\sqrt[n]{g}}{p(1+pp)^{1-1:2n}\sqrt[n]{\alpha+\beta p}}.$$

Es wird also sein

$$dx=\frac{-dp}{np(1+pp)^{1-1:2n}\sqrt[n]{g^{n-1}(\alpha+\beta p)}}$$

und

$$dy=\frac{-dp}{n(1+pp)^{1-1:2n}\sqrt[n]{g^{n-1}(\alpha+\beta p)}};$$

und daher

$$\Pi=\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{(1+pp)}}{\alpha+\beta p}}.$$

Es wird also sein

$$x=-\frac{1}{ng}\int\frac{dp}{p(1+pp)}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{1+pp}}{\alpha+\beta p}}$$

und

$$y=-\frac{1}{ng}\int\frac{dp}{1+pp}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{1+pp}}{\alpha+\beta p}}.$$

Daher ist klar, dass die Größe Π über der Kurve niemals $=0$ sein kann; deswegen wird also am Anfang der Kurve Π schon einen gewissen Wert haben. Damit aber die Gestalt der Kurve besser erkannt wird, ist aus der Gleichung

$$\Pi=-\frac{ngpdx(1+pp)}{dp}$$

klar, dass der Wert von dp überall negativ sein muss, woher die Kurve zur Achse konkav sein wird. Weil also die Werte von p beim Entfernen vom Anfang der

Kurve schrumpfen, wird am Anfang der Kurve selbst p den maximalen Wert haben. Daher wollen wir festlegen (Fig. 6), dass der Anfang der Kurve dort ist, wo $p = \infty$ ist. Es sei also AP die vertikale Achse der Kurve, in deren Richtung die Schwerkraft g den Körper nach unten zieht, und am Anfang A der Kurve sei die horizontale Tangente Aa;

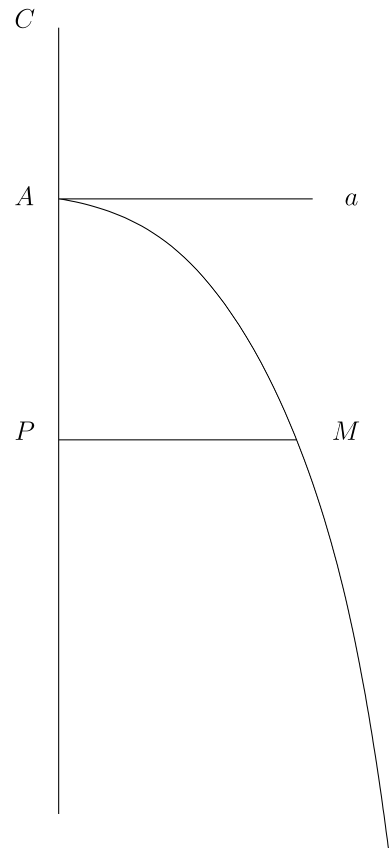

Fig. 6

und dort beginne der Körper über der Achse mit der Geschwindigkeit, deren Quadrat $= b$ sei, die Bewegung. Es wird also, für $p = \infty$ gesetzt, $b = \sqrt[n]{\frac{g}{\beta}}$, und $\beta b^n = g$ oder $\beta = \frac{g}{b^n}$ sein. Weiter, um Uniformität zu bewahren, sei $\alpha = \frac{1}{k^n}$. Wenn daher nun die gesuchte Kurve AM ist und $AP = x$, $PM = y$ und $dy = pdx$ ist, wird in M das Quadrat der Geschwindigkeit sein

$$\Pi = bk\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{1+pp}}{b^n + gk^n p}};$$

und wo die Tangente der Kurve vertikal werden wird, dort wird das Quadrat der Geschwindigkeit $= k\sqrt[n]{g}$ sein. Die Konstruktion der Kurve wird aber so bewerkstelligt werden, dass gilt

$$x = -\frac{bk}{ng}\int \frac{dp}{p(1+pp)}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{1+pp}}{b^n + gk^n p}}$$

und auch

$$y = -\frac{bk}{ng}\int \frac{dp}{1+pp}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{1+pp}}{b^n + gk^n p}}.$$

Darauf verdient die einzigartige Eigenschaft oder eine Relation zwischen der Zentrifugalkraft des herabsinkenden Körpers, die $\frac{2\Pi}{\text{Krümmungsradius}}$ ist, und der Normalkraft, die $\frac{gp}{\sqrt{1+pp}}$ ist, mitgeteilt zu werden. Wenn daher nämlich die Zentrifugalkraft

$$\frac{2\Pi}{\text{Krümmungsradius}} = -\frac{2\Pi dp}{dx(1+pp)^{3:2}}$$

$= F$ und die Normalkraft $\frac{gp}{\sqrt{1+pp}} = G$ gesetzt wird, wird aus der Gleichung

$$\Pi = -\frac{ngpdx(1+pp)}{dp} \quad \text{oder} \quad -\frac{2\Pi dp}{dx(1+pp)^{3:2}} = \frac{2ngp}{\sqrt{1+pp}}$$

diese Relation zwischen der Zentrifugalkraft F und der Normalkraft G gelten, dass $F = 2nG$ ist; denn die Normalkraft wird sich zur Zentrifugalkraft verhalten, wie 1 zu $2n$. Der Körper, der in A mit gegebener Geschwindigkeit die Bewegung beginnt, wird beim Herabsinken über der Kurve AM an jeder Stelle M, die der Abszisse AP entspricht, eine größere Geschwindigkeit haben, als wenn er über irgendeiner anderen Kurve mit derselben Anfangsgeschwindigkeit herabgesunken wäre. Wir wollen aber zwei grundlegende Fälle entwickeln. Es sei 1° der Widerstand den Quadraten der Geschwindigkeit proportional, es wird $n = 1$ und $F = 2G$ sein. Für die Kurve wird man aber haben:

$$x = -bk\int \frac{dp}{p(b+gkp)\sqrt{1+pp}}$$

und

$$y = -bk\int \frac{dp}{(b+gkp)\sqrt{1+pp}}$$

und genauso den Kurvenbogen

$$AM = -bk\int \frac{dp}{p(b+gkp)} = C + kl\frac{b+gkp}{p}.$$

der Bogen werde $AM = s$ gesetzt, weil dieser für $p = \infty$ gesetzt verschwinden muss, wird $s = kl\frac{b+gkp}{gkp}$ sein und daher

$$e^{s:k}gkp = b + gkp \quad \text{und} \quad p = \frac{b}{gk(e^{s:k}-1)} = \frac{dy}{dx}.$$

Daher entsteht

$$bdx + gkdy = gke^{s:k}dy.$$

Es wird aber weiter aus der Gleichung

$$y = -bk\int\frac{dp}{(b+gkp)\sqrt{1+pp}}$$

integriert sein

$$y = \frac{bk}{\sqrt{bb+ggkk}}l\frac{(b+gkp)(b+\sqrt{bb+ggkk})}{gk(bp-gk+\sqrt{(bb+ggkk)(1+pp)}}.$$

2°. Es sei der Widerstand den Geschwindigkeiten selbst proportional, es wird $n=\frac{1}{2}$ und $F=G$ werden, das heißt die Zentrifugalkraft wird der Normalkraft gleich sein. Weil diese beiden Kräfte einander entgegengesetzt sind, wird dem Geforderten die Kurve genügen, die vom Körper, der über ihr herabsinkt, überhaupt nicht mit Druck belastet wird. Es wird aber sein

$$x = -2gbk\int\frac{dp}{p(\sqrt{b}+gp\sqrt{k})^2}$$

und

$$y = -2gbk\int\frac{dp}{(\sqrt{b}+gp\sqrt{k})^2} = \frac{2b\sqrt{k}}{\sqrt{b}+gp\sqrt{k}};$$

und daher

$$ydx\sqrt{b}+gydy\sqrt{k} = 2bdx\sqrt{k} \quad \text{und} \quad dx = \frac{dydy\sqrt{k}}{2b\sqrt{k}-y\sqrt{b}};$$

und daher durch Integrieren

$$x = -gy\sqrt{\frac{k}{b}}+2gkl\frac{2b\sqrt{k}}{2b\sqrt{k}-y\sqrt{b}}.$$

Diese Kurven kann also nicht nur durch Logarithmen konstruiert werden, sondern ist ein Anteil einer schiefwinkligen Logaritmuskurve. Es wird natürlich die Kurve selbst eine Bewegungskurve sein, welche der in dieser Annahme des Widerstandes frei bewegte Körper beschreiben wird. Diese Übereinkunft ist daher klar, weil die Kurve vom bewegten Körper keinen Druck erfährt, welches die Eigenschaft von frei beschriebenen Kurven ist.

BEISPIEL II

46. Die Kurve zu finden, in welcher für die gegebene Abszisse $x=a$ diese Formel in Minimum ist $\int\frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{\Pi}}$, während $d\Pi = gdx-\alpha\Pi^n dx\sqrt{1+pp}$ ist.

Diese Frage stimmt mit jener überein, in welcher die Kurve verlangt wird, über welcher ein herabsinkender Körper in einem resistierenden Medium, dessen Widerstand wie eine Potenz des Exponenten $2n$ der Geschwindigkeit ist, am schnellsten den Bogen passiert, der der Abszisse a entspricht. Denn hier bezeichnet g die Schwerkraft, die in Richtung der Achse wirkt, $\sqrt{\Pi}$ die Geschwindigkeit des Körpers an irgendeiner Stelle und $\alpha\Pi^n$ den Widerstand des Mediums selbst. Es wird deshalb $Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{\Pi}}$ sein und daher

$$dZ = -\frac{d\Pi\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} + \frac{pdp}{\sqrt{\Pi(1+pp)}},$$

woher sein wird

$$L = \frac{-\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}}, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{p}{\sqrt{\Pi(1+pp)}}.$$

Weiter wird sein

$$[Z] = g - \alpha\Pi^n\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad d[Z] = -\alpha n\Pi^{n-1}d\Pi\sqrt{1+pp} - \frac{\alpha\Pi^n pdp}{\sqrt{1+pp}};$$

woher sein wird

$$[L] = -\alpha n\Pi^{n-1}\sqrt{1+pp},$$
$$[M] = 0, [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{-\alpha\Pi^n p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Man wird aber haben

$$V = e^{\alpha n\int\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp}}\left(\int e^{-\alpha n\int\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp}}\frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} - H\right),$$

während H den Wert der Formel bezeichnet

$$\int e^{-\alpha n\int\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp}}\frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}},$$

welchen sie erhält, wenn $x = a$ wird. Denn V muss für $x = a$ gesetzt verschwinden und es ist

$$dV = \alpha nV\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp} + \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}}.$$

Aus diesen wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung erhalten werden

$$d\cdot(P + [P]V) = 0 \quad \text{und} \quad P + [P]V = C \quad \text{oder} \quad V = \frac{C-P}{[P]}.$$

Nachdem also die entsprechenden Werte eingesetzt worden sind, wird sein

$$e^{\alpha n\int\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp}}\left(\int e^{-\alpha n\int\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp}}\frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} - H\right)$$
$$= \frac{p - C\sqrt{\Pi(1+pp)}}{\alpha\Pi^n p\sqrt{\Pi}}.$$

Daher muss die Konstante C so bestimmt werden, dass für $x = a$ gesetzt wird

$$C = \frac{p}{\sqrt{\Pi(1+pp)}}.$$

Weil aber gilt

$$V = \frac{1}{\alpha\Pi^n\sqrt{\Pi}} - \frac{C\sqrt{1+pp}}{\alpha\Pi^n p},$$

wird sein

$$\begin{aligned} dV &= \frac{-(n+\frac{1}{2})d\Pi}{\alpha\Pi^{n+1}\sqrt{\Pi}} + \frac{nCd\Pi\sqrt{1+pp}}{\alpha\Pi^{n+1}p} + \frac{Cdp}{\alpha\Pi^n p^2\sqrt{1+pp}} \\ &= \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} + \frac{ndx\sqrt{1+pp}}{\Pi\sqrt{\Pi}} - \frac{nC(1+pp)dx}{p\Pi} \end{aligned}$$

und unter Zuhilfenahme der Gleichung

$$dV = \alpha nV\Pi^{n-1}dx\sqrt{1+pp} + \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2\Pi\sqrt{\Pi}}.$$

Weil aber gilt

$$d\Pi = gdx - \alpha\Pi^n dx\sqrt{1+pp},$$

wird sein

$$-\frac{(n+\frac{1}{2})gdx}{\alpha\Pi^{n+1}\sqrt{\Pi}} + \frac{nCgdx1+pp}{\alpha\Pi^{n+1}p} + \frac{Cdp}{\alpha\Pi^n p^2\sqrt{1+pp}} = 0$$

oder

$$\frac{Cdp}{p^2\sqrt{1+pp}} = \frac{(n+\frac{1}{2})gdx}{\Pi\sqrt{\Pi}} - \frac{nCgdx\sqrt{1+pp}}{\Pi p}.$$

Wenn daher diese Gleichung mit jener

$$d\Pi = gdx - \alpha\Pi^n dx\sqrt{1+pp}$$

verbunden wird, wird die Größe Π eliminiert werden können und auf diese Weise die Gleichung für die gesuchte Kurve gefunden werden können. Auf diese Weise würde aber die Rechnung sehr unangenehm und keineswegs durchführbar werden. Aber eine sehr große Hilfe wird die letzte Gleichung in diese Form verwandelt verschaffen

$$\frac{Cdp}{gp^2} = \frac{(n+\frac{1}{2})dx\sqrt{1+pp}}{\Pi\sqrt{\Pi}} - \frac{nCdx(1+pp)}{\Pi p}.$$

welchem Ausdruck zuvor der Wert von dV gleich zu sein gefunden worden ist; es wird also sein

$$dV = \frac{Cdp}{gpp} \quad \text{und} \quad V = D - \frac{C}{gp} = \frac{1}{\alpha\Pi^n\sqrt{\Pi}} - \frac{C\sqrt{1+pp}}{\alpha\Pi^n p}.$$

Nun haben wir also diese zwei Gleichungen

$$\frac{Cdp}{gp^2} = \frac{(n+\frac{1}{2})dx\sqrt{1+pp}}{\Pi\sqrt{\Pi}} \quad \text{und} \quad \alpha D - \frac{\alpha C}{gp} = \frac{1}{\Pi^n\sqrt{\Pi}} - \frac{C\sqrt{1+pp}}{\Pi^n p}.$$

Wenn aus diesen Π eliminiert wird, wird man eine Gleichung zwischen p und x solcher Art haben, dass niemals x, sondern überall nur dx auftaucht, aus welcher jene Gleichung und daher die Kurve selbst konstruiert werden können wird. Oder es werde aus der letzten Gleichung leichter p durch Π bestimmt, und dieser Wert wird in die fundamentale Gleichung

$$dx = \frac{d\Pi}{g - \alpha\Pi^n\sqrt{1+pp}}$$

eingesetzt den Wert von x durch Π geben, es wird natürlich gelten

$$x = \int \frac{d\Pi}{g - \alpha\Pi^n\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{pd\Pi}{g - \alpha\Pi^n\sqrt{1+pp}}.$$

Aber die Konstante D muss so angenommen werden, dass für $x = a$ gesetzt, in welchem Fall $C = \frac{p}{\sqrt{\Pi(1+pp)}}$ wird, $D = \frac{1}{g\sqrt{\Pi(1+pp)}}$ wird oder es muss dann $\frac{C}{D} = gp$ sein.

BEMERKUNG 2

47. In diesen zwei Kapiteln haben wir also die Methode erläutert, die gekrümmte Linie zu finden, in welcher für eine Abszisse gegebener Größe $= a$ die Formel $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z eine entweder unbestimmte oder bestimmte Funktion von x, y, p, q, r etc. ist. Eine bestimmte Funktion ist aber für uns eine solche, die, wenn irgendwo die Werte der Buchstaben x, y, p, q, r gegeben sind, sie selbst entweder algebraisch oder transzendent angegeben werden kann. Eine unbestimmte Funktion ist aber eine solche, die durch gegebene Werte dieser Buchstaben, welche sie an jeder Stelle erhalten, nicht angegeben werden kann, sondern alle vorhergehenden zugleich involviert, wie es passiert, wenn Integralzeichen auftauchen. Im zweiten Kapitel haben wir also die Methode angegeben, alle Probleme aufzulösen, in denen Z eine bestimmte Funktion ist; in diesem dritten Kapitel hingegen haben wir die Formeln betrachtet, in welchen Z entweder selbst eine unbestimmte Funktion ist oder eine oder mehrere solcher involviert; und zugleich haben wir die Methode für die Fälle dargeboten, in denen jene unbestimmte Funktion nicht einmal durch Integralformeln dargestellt werden kann, sondern die Konstruktion einer Differentialgleichung erfordert. Nun wollen wir also die Fälle entwickeln, in denen der Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum sein muss, keine einfache Integralformel ist, wie wir bisher festgelegt haben, sondern aus mehreren Formeln solcher Art wie auch immer zusammengesetzt ist, und zugleich wollen wir die Methode eröffnen, viele andere Probleme, die sich nicht auf orthogonale Koordinaten beziehen, bequem aufzulösen.

Kapitel IV

Über den Gebrauch der bisher angegebenen Methode bei der Auflösung von Fragen verschiedener Art

PROPOSITION I PROBLEM

1. Die Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y zu finden, so dass für einen gegebenen Wert von x, beispielsweise für $x = a$ gesetzt, die Formel $\in Zdx$ den maximalen oder minimalen Wert erhält, während Z eine entweder bestimmte oder unbestimmte Funktion von x, y, p, q, r etc. ist.

LÖSUNG. Aus welcher Betrachtung auch immer die Variablen x und y entstanden sind, sie können immer als orthogonale Koordinaten einer gewissen Kurve betrachtet werden und deswegen wird die vorgelegte Frage darauf zurückgeführt, dass die Kurve bestimmt wird, die die Abszisse $= x$ und die Ordinate $= y$ hat, in welcher der Wert $\int Zdx$, wenn er an eine Abszisse gegebener Größe, beispielsweise $x = a$, angepasst wird, der größte oder kleinste aller wird. Wenn daher aber das Problem auf diese Weise vorgelegt wird, dann ist seine Lösung in den vorhergehenden Kapiteln hinreichend ausführlich angegeben worden. Deswegen muss der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ genommen werden, gemäß der zuvor erläuterten Methoden, der der gegebenen Abszisse $x = a$ entspricht, und er wird gleich null gesetzt die gewünschte Gleichung zwischen x und y geben, die für die gegebene Abszisse $x = a$ den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ erzeugen wird. Q.E.I.

KOROLLAR I

2. Die zuvor angegebene Methode erstreckt sich also um Vieles weiter, als auf zwischen Koordinaten von Kurven zu findende Gleichungen, dass ein gewisser Ausdruck $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum wird. Sie wird natürlich auf ir-

gendwelche zwei Variablen ausgedehnt, ob sie sich wie auch immer auf eine Kurve beziehen oder sich allein in analytischer Abstraktion befinden.

KOROLLAR II

3. Zwischen den zwei vorgelegten Variablen geht aber daher ein riesiger Unterschied einher, weil die vorgelegte Formel $\int Zdx$ für einen gewissen bestimmten Wert der einen Variable einen maximalen oder minimalen Wert erhalten muss. Es ist daher gefällig, dass diese Variable durchgehend mit dem Buchstaben x, die andere aber mit dem Buchstaben y bezeichnet wird.

KOROLLAR III

4. Nachdem also die Buchstaben x und y in entsprechender Weise als zwei variable Größen festgelegt worden sind, wird $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ sein. Mit diesen Buchstaben werden natürlich Differentiale welchen Grades auch immer, die unter Umständen vielleicht in der Formel des Maximums oder Minimums enthalten sind, beseitigt werden können, so dass Z eine Funktion der Buchstaben x, y, p, q, r etc. sein wird.

KOROLLAR IV

5. Weil also die Formel des Maximums oder Minimums auf eine solche Form $\int Zdx$ zurückgeführt worden ist, in welcher Z eine entweder bestimmte oder unbestimmte Funktion von x, y, p, q, r etc. ist, muss dann aus den oberen Vorschriften der Differentialwert der Formel $\int Zdx$, der der ganzen vorgelegten Abszisse $x = a$ entspricht, gesucht werden, der gleich null gesetzt die gesuchte Gleichung zwischen x und y liefern wird.

KOROLLAR V

6. Wenn Z eine bestimmte Funktion von x, y, p, q, r etc. ist, dann hängt der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ nicht vom vorgeschriebenen Wert der Abszisse $x = a$ ab; und dieser Sache wegen wird die zwischen x und y gefundene Gleichung für eine beliebige Abszisse den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ geben.

BEMERKUNG 1

7. Weil ja also bei dieser Aufgabe die Differentialwerte, welche wir für jede Art von Formeln überall verstreut gefunden haben, griffbereit sein müssen, werden wir sie hier gesammelt auflisten, damit Nachfolgendes das ist, woher in jedem sich ergebenden Fall die Differentialwerte, die nötig waren, zusammengesucht und entnommen werden können. Wir werden also hier den Differentialwert der Formel $\int Zdx$ für verschiedene Gestalten der Funktion Z darbieten, welcher immer einer bestimmten variablen Größe x, beispielsweise $x = a$ entspreche.

I. FORMEL DES MAXIMUMS ODER MINIMUMS

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ etc.}$$

Der Differentialwert wird sein

$$nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ etc.} \right),$$

welcher Differentialwert für jede Größe der Variable x gleichermaßen gilt.

II. FORMEL DES MAXIMUMS ODER MINIMUMS

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ etc.} \quad \text{und} \quad \Pi = \int [Z]dx$$

während gilt

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{ etc.}$$

Nachdem nun nach der Integration $x = a$ gesetzt wurde, sei $\int Ldx = H$, und es werde $H - \int Ldx = V$ gesetzt. Der Differentialwert wird sein

$$nv \cdot dx \left(N + [N]V - \frac{d \cdot (P + [P]V)}{dx} + \frac{dd \cdot (Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot (R + [R]V)}{dx^3} \right. \\ \left. + \frac{d^4 \cdot (S + [S]V)}{dx^4} - \text{ etc.} \right).$$

III. FORMEL DES MAXIMUMS ODER MINIMUMS

$$\begin{aligned} dZ \; &= Ld\Pi \; + Mdx \; + Ndy \; + Pdp \; + Qdq \; + \text{ etc.} \quad \text{und} \quad \Pi = \int [Z]dx \\ d[Z] &= [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \text{ etc.} \quad \text{und} \quad \pi = \int [z]dx \\ d[z] \; &= [m]dx + [n]dy \; + [p]dp \; + [q]dq \; + [r]dr \; + \text{ etc.} \end{aligned}$$

Es sei wiederum, nachdem nach der Integration $x = a$ gesetzt wurde, wie zuvor $\int Ldx = H$ und es werde $H - \int Ldx = V$ gesetzt. Nun werde $\int [L]V dx$ integriert und das Integral sei in dem Fall, in dem $x = a$ gesetzt wird, $= G$ und man setze

$$G - \int [L]V dx = [V] = G - \int [L]dx(H - \int Ldx).$$

Nach Festlegen dieser Dinge wird der Differentialwert sein

$$nv \cdot dx \left(N + [N]V + [n][V] - \frac{d \cdot (P + [P]V + [p][V])}{dx} + \frac{dd \cdot (Q + [Q]V + [q][V])}{dx^2} \right. \\ - \frac{d^3 \cdot (R + [R]V + [r][V])}{dx^3} \\ \left. + \frac{d^4 \cdot (S + [S]V + [s][V])}{dx^4} - \text{ etc.} \right),$$

woher zugleich das Bildungsgesetz der Progression klar ist, wenn noch mehr Integrale involviert werden.

IV. FORMEL DES MAXIMUMS ODER MINIMUMS

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ etc.} \quad \text{und} \quad \Pi = \int [Z]dx.$$

Es gehe für $x = a$ gesetzt dieser Ausdruck $e^{\int Ldx}$ in H über, während e die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus $= 1$ ist, und es sei $He^{-\int Ldx} = V$, und der Differentialwert wird sein

$$nv \cdot dx \left(NV - \frac{d \cdot PV}{dx} + \frac{dd \cdot QV}{dx^2} - \frac{d^3 RV}{dx^3} + \frac{d^4 SV}{dx^4} - \text{ etc.} \right).$$

V. FORMEL DES MAXIMUMS ODER MINIMUMS

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ etc.} \quad \text{und} \quad \Pi = \int [Z]dx$$
$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{ etc.}$$

Es sei, wenn nach der Integration $x = a$ gesetzt wird,

$$\int e^{\int [L]dx} Ldx = H$$

und man setze

$$e^{-\int [L]dx}(H - \int e^{\int [L]dx} Ldx) = V.$$

Der Differentialwert wird sein

$$nv \cdot dx \left(N + [N]V - \frac{d \cdot (P + [P]V)}{dx} + \frac{dd \cdot (Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot (R + [R]V)}{dx^3} \right.$$
$$\left. + \frac{d^4 \cdot (S + [S]V)}{dx^4} - \text{ etc.} \right).$$

In diesen fünf Fällen sind also alle Regeln enthalten, welche wir in den vorhergehenden Kapiteln gefunden haben. Und sie erstrecken sich so weit, dass alle Fälle, die freilich auftauchen können, in ihnen entweder tatsächlich enthalten sind oder zumindest durch die nicht schwer aufgelöst werden können. Nachdem diese hier also in Kürze wiederholt worden sind, werden wir deren Gebrauch beim Auflösen von Fragen zeigen, in denen x und y keine orthogonalen Koordinaten bezeichnen.

BEISPIEL I

8. Nachdem aus dem gegebenen Zentrum C (Fig. 7) die Radien CA, CM gezogen wurden, die Linie AM zu finden, die unter allen anderen Linien, die innerhalb des Winkels ACM enthalten sind, die kürzeste ist.

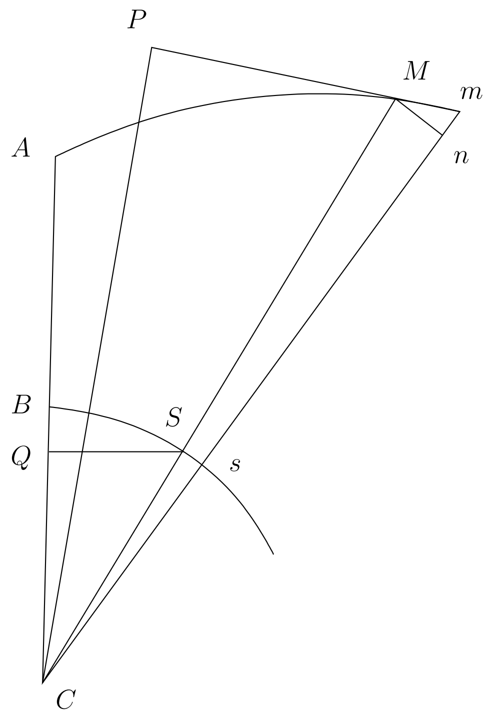

Fig. 7

Es ist freilich klar, dass die gesuchte Linie eine Gerade ist; dennoch wird es gefällig sein, diese Frage gemäß der gegebenen Vorschriften aufzulösen, dass die Übereinstimmung der Methode mit der Wahrheit noch besser erkannt wird. Weil also die Länge der Linie AM für den gegebenen Winkel ACM die geringste sein muss, wollen wir festlegen, dass dieser Winkel $ACM = x$ ist; oder um das Zentrum C, mit dem Radius $CB = 1$, wollen wir einen Kreis beschreiben, und der Bogen sei $BS = x$. Dann sei der Radius CM die andere Variable $= y$; nachdem nämlich die Gleichung zwischen diesen Variablen x und y gefunden wurde, wird die Natur der gesuchten Linie AM bekannt werden. Nachdem aber nun der unendliche nahe Radius Cm gezogen wurde, wird $Ss = dx$ und $mn = dy$ sein, nachdem $Cn = CM$ genommen wurde; wegen der ähnlichen Dreiecke CSs und CMn wird aber gelten

$$1 : dx = CM[y] : Mn[ydx].$$

Aus diesen wird deshalb $Mm = \sqrt{dy^2 + y^2dx^2}$ sein; und weil wir immer $dy = pdx$ setzen, wird $Mm = dx\sqrt{yy + pp}$ sein, woher die Länge der Linie $AM = \int dx\sqrt{yy + pp}$ sein wird, die für einen gegebenen Wert von x minimal sein muss, beispielsweise $x = a$. Aber weil diese Formel sich auf den ersten Fall bezieht, wird die genügende Linie für jeden Wert von x minimal sein. Weil also $Z = \sqrt{yy + pp}$ ist, wird gelten

$$dZ = \frac{ydy}{\sqrt{yy + pp}} + \frac{pdp}{\sqrt{yy + pp}}$$

und im ersten Fall wird werden

$$M = 0, \quad N = \frac{y}{\sqrt{yy+pp}}, \quad P = \frac{p}{\sqrt{yy+pp}}, \quad Q = 0, \quad R = 0 \text{ etc.}$$

und daher $dZ = Ndy + Pdp$. Man wird also diesen Differentialwert haben

$$nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} \right),$$

und daher gibt diese Gleichung $0 = N - \frac{dP}{dx}$, die mit $pdx = dy$ multipliziert wurde, für die Lösung $Ndy = pdP$; nachdem dies in der Gleichung $dZ = Ndy + Pdp$ eingesetzt wurde, wird $dZ = Pdp + pdP$ hervorgehen und durch Integrieren

$$Z + C = Pp \quad \text{oder} \quad C + \sqrt{yy+pp} = \frac{pp}{\sqrt{yy+pp}}.$$

Deshalb wird gelten

$$\frac{yy}{\sqrt{yy+pp}} = \text{ Konst. } = b.$$

Aber es ist

$$Mm[dx\sqrt{yy+pp}] : Mn[ydx] = MC[y] : \frac{yy}{\sqrt{yy+pp}};$$

welche vierte Proportionale das Lot CP liefert, dass aus C zur Tangente der gesuchten Linie MP gefällt wurde. Weil also dieses Lot CP konstant ist, wird eingesehen, dass die gesuchte Linie eine Gerade ist, und weil in der ersten gefundenen Gleichung $Ndx = dP$ potentiell zwei beliebige Konstanten enthalten sind, ist diese Bedingung der Frage hinzuzufügen, dass die gesuchte Linie duch zwei gegebene Punkte hindurchgeht; dann wird also die gerade Linie, die durch jene zwei Punkte hindurchgeführt wurde, dem Geforderten genügen.

BEISPIEL II

9. Über der Achse AP (Fig. 8) eine Linie BM zu konstruieren, die so beschaffen ist, dass, nachdem die Fläche $ABMP$ von gegebener Größe abgetrennt wurde, der Kurvenbogen BM, der jener Fläche entspricht, der kleinste aller ist.

Weil für die gegebene Fläche $ABMP$ die minimale Länge des Bogens BM verlangt wird, werden wir die Fläche $ABMP$ mit der Variable x zu bezeichnen haben, mit der anderen Variable y wollen wir aber die Ordinate der Kurve PM bezeichnen. Nun sei die Abszisse $AP = t$, es wird $x = \int ydt$ und daher $dt = \frac{dx}{y}$ sein, und die Länge des Bogens BM wird $= \int \sqrt{\left(dy^2 + \frac{dx^2}{yy}\right)}$ sein.

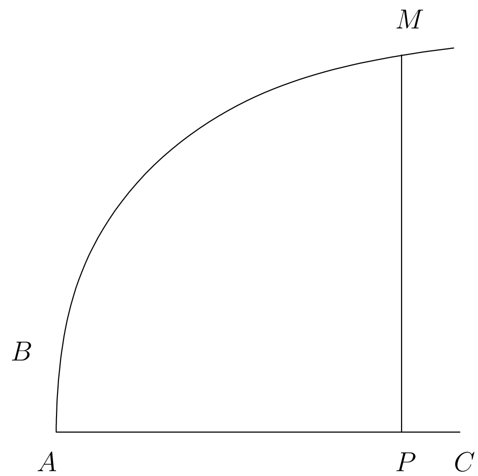

FIG. 8

Nachdem also $dy = pdx$ gesetzt worden ist, muss diese Formel ein Minimum sein

$$\int dx\sqrt{\left(\frac{1}{yy}+pp\right)} = \int \frac{dx\sqrt{1+yypp}}{y}.$$

Es wird deshalb gelten

$$Z = \frac{\sqrt{1+yypp}}{y} \quad \text{und} \quad dZ = -\frac{dy}{yy\sqrt{1+y^2p^2}} + \frac{yypdp}{y\sqrt{1+y^2p^2}};$$

woher gilt

$$M = 0, \quad N = \frac{-1}{yy\sqrt{1+y^2p^2}}, \quad P = \frac{yp}{\sqrt{1+y^2p^2}}, \quad Q = 0 \text{ etc.}$$

Diese Frage bezieht sich also auf den ersten Fall und die Lösung wird die gekrümmte Linie liefern, die für irgendeine abgetrennte Fläche $ABMP$ die kürzeste sein wird. Es wird aber, wie im vorhergehenden Beispiel, zu dieser Gleichung $Z = C + Pp$ gelangt werden und die gesuchte Kurve wird durch zwei gegebene Punkte beschrieben werden können. Es wird deshalb gelten

$$\frac{\sqrt{1+yypp}}{y} = C + \frac{ypp}{\sqrt{1+yypp}}$$

oder

$$1 = Cy\sqrt{1+yypp} \quad \text{oder} \quad b = y\sqrt{1+yypp};$$

daher wird

$$bb = yy + y^4pp \quad \text{und} \quad p = \frac{\sqrt{bb-yy}}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ydt},$$

wegen $dx = ydt$. Es wird also sein

$$dt = \frac{ydy}{\sqrt{bb - yy}} \quad \text{und} \quad t = c \pm \sqrt{bb - yy}.$$

Daher wird die gesuchte Linie ein Kreis sein, nachdem das Zentrum irgendwo auf der Achse AP, beispielsweise in C, angenommen wurde; und er wird unter allen anderen Kurven, die durch dieselben zwei welche Punkte auch immer gezogen wurden, für eine gegebene abgetrennte Fläche $ABMP$, den kürzesten Bogen BM haben.

BEISPIEL III

10. Nachdem (Fig. 7) vom Fixpunkt C aus die Radien CA, CM gezogen worden sind, innerhalb von ihnen die Kurve AM zu beschreiben, die für den gegebenen Raum ACM den kürzesten Bogen BM hat.

Weil der Bogen AM der kleinste sein muss, wenn der Raum ACM von gegebener Größe abgetrennt wird, werde die Fläche $ACM = x$ gesetzt und der Radius CM werde mit der anderen Variable y bezeichnet. Nun werde der Bogen BS, der mit dem Radius $CB = 1$ beschrieben wurde, $= t$ gesetzt; es wird, wie wir zuvor gesehen haben, $MN = ydt$ und die Fläche $MCm = \frac{1}{2}yydt = dx$ sein, woher $dt = \frac{2dx}{yy}$ wird. Weil weiter gilt

$$Mm = \sqrt{dy^2 + y^2dt^2} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{4dx^2}{yy}\right)},$$

sei $dy = pdx$, es muss $\int \frac{dx}{y}\sqrt{4 + ppyy}$ ein Minimum sein. Weil also $Z = \frac{\sqrt{4+y^2p^2}}{y}$ ist, wird gelten

$$M = 0, \quad N = -\frac{4}{yy\sqrt{4 + y^2p^2}} \quad \text{und} \quad P = \frac{yp}{\sqrt{4 + y^2p^2}}, \quad Q = 0 \text{ etc.}$$

Daher resultiert diese Gleichung $Z = C + Pp$, deshalb weil $M = 0$ ist; und daher

$$\frac{\sqrt{4 + y^2p^2}}{y} = C + \frac{ypp}{\sqrt{4 + y^2p^2}}$$

oder

$$4 = Gy\sqrt{4 + yypp} \quad \text{oder} \quad 2b = y\sqrt{4 + yypp};$$

und daher

$$p = \frac{2\sqrt{bb - yy}}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{2dy}{yydt};$$

sowie $dt = \frac{dy}{\sqrt{bb-yy}}$; und genauso durch Integrieren

$$t = A\sin\frac{y}{b} + A\sin\frac{c}{b} = A\sin\frac{y\sqrt{bb - cc} + c\sqrt{bb - yy}}{bb}.$$

Zu AC werde aus S das Lot $QS = \sin At$ gefällt, es wird sein

$$Qs = \frac{y\sqrt{bb-cc} + c\sqrt{bb-yy}}{bb}.$$

Aber aus der Gleichung $t+$ Const. $= A\sin\frac{y}{b}$ wird die gesuchte Kurve berechnet (Fig. 9), der Kreis AME zu sein, der durch den Fixpunkt C hindurchgeht. Es werde nämlich über irgendeinem Durchmesser CE, der in C begrenzt wird, der Kreis $CAME$ beschrieben, der eingeschlossene Bogen AM wird zwischen den Radien ACM für die gegebene Fläche ACM der kleinste sein. Wenn natürlich irgendeine andere Kurve durch irgendwelche zwei Punkte, die auf diesem Kreis gelegen sind, beschrieben wird und, nachdem die zwei Radien, die von C aus gezogen worden sind, eine der Fläche ACM gleiche Fläche abgetrennt wird, wird der entsprechende Bogen jener Kurve immer größer sein als der Bogen AM.

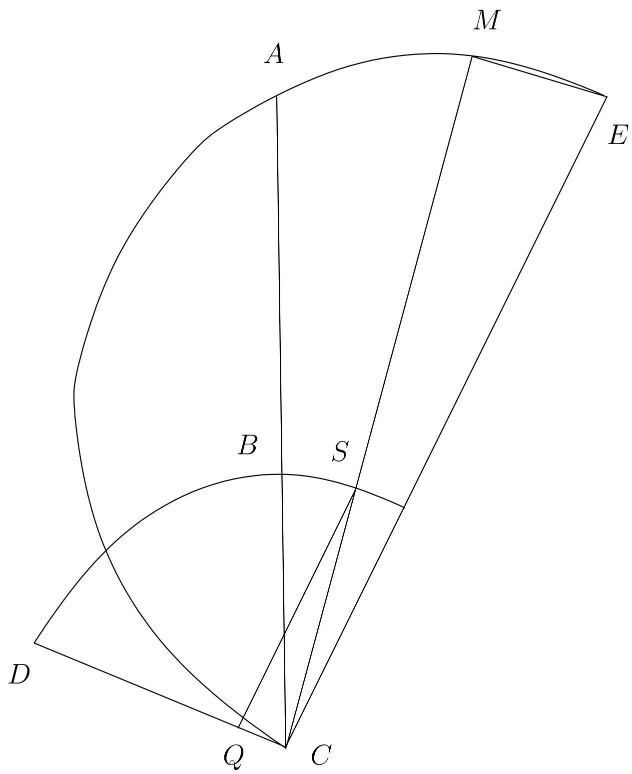

Fig. 9

Damit dies klar wird, werde aus C zu CE die Normale CD gezogen und zu ihr aus S das Lot SQ gefällt; es wird das Dreieck SCQ dem Dreieck CEM ähnlich sein und daher $CE : CM[y] = CS[1] : SQ$ oder $SQ = \frac{y}{CE} = \sin A \cdot DBS$, oder $DBS = A\sin\frac{y}{CE}$. Nachdem also der Durchmesser $CE = b$ gesetzt wurde und weil $DBS = BS + BD = t + Konst.$ ist, wird gelten

$$t+ \text{ Konst. } = A\sin\frac{y}{b},$$

welches jene Eigenschaft selbst ist, mit welcher wir die gesuchte Kurve versehen sein zu müssen gefunden haben.

BEISPIEL IV

11. In einer (Fig. 10) entweder konvexen oder konkaven Oberfläche die Linie zu ziehen, die innerhalb ihrer Grenzen die kürzeste von allen ist.

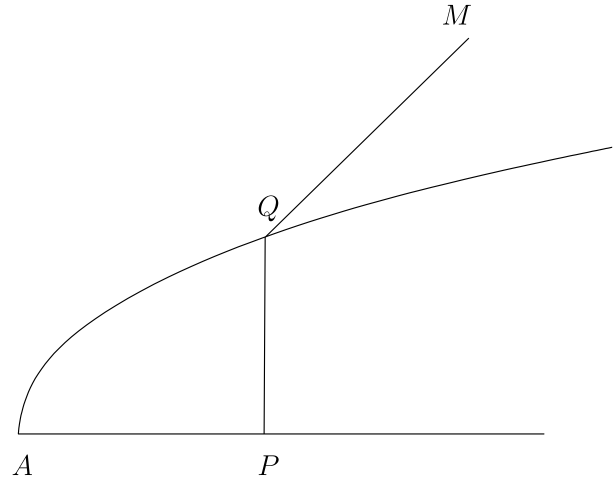

FIG. 10

Es werde irgendeine Ebene APQ genommen, auf welche die Oberfläche bezogen werde und auf ihr werde die Gerade AP für die Achse genommen. Nun werden aus den einzelnen Punkten der gesuchten Linie Lote zu dieser Ebene gefällt zu werden aufgefasst, mit denen die Linie AQ beschrieben werde, die eine Projektion der kürzesten Linie in diese Ebene sein wird; nachdem diese bekannt geworden ist, wird zugleich die kürzeste Linie in dieser vorgelegten Oberfläche bekannt werden. Es werde $AP = x$, $PQ = y$ genannt; und weil die Natur der Oberfläche gegeben ist, wird aus den gegebenen $AP = x$ und $PQ = y$ die Länge der Senkrechte QM zur Ebene APQ bestimmt werden können, bis sie schließlich die Oberfläche in M schneidet. Wenn daher also $QM = z$ gesetzt wird, wird die Länge dieser Linie z durch x und y gegeben sein, sodass z eine bestimmte Funktion von x und y ist. Weil also z eine Funktion von x und y ist, die aus der lokalen Gleichung zur Oberfläche gegeben ist, wollen wir festlegen, dass $dz = Tdx + Vdy$ ist; und es werden T und V Funktionen solcher Art von x und y sein, dass $Tdx + Vdy$ eine bestimmte Differentialformel ist; denn für $dT = Edx + Fdy$ gesetzt wird $dV = Fdx + Gdy$ sein, während der Buchstabe F das jeden der beiden gemeinsame Differential ist. Nun ist das Element der zur Oberfläche gezogenen Linie

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (Tdx + Vdy)^2}.$$

Für $dy = pdx$ gesetzt muss also diese Formel ein Minimum sein

$$\int dx\sqrt{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2},$$

sodass gilt

$$Z = \sqrt{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2},$$

woher wird

$$dZ = \frac{\begin{cases} +TEdx \ +TFdy \ +pdp \quad +VEpdx \ +VFpdy \ +TVdp \\ +TFpdx + TGpdy + V^2pdp + VFp^2dx + VGppdy \end{cases}}{\sqrt{1 + pp + T^2 + 2TVp + V^2p^2}}$$

Weil diese Formel sich auf den ersten Fall bezieht, wird diese Gleichung zwischen x und y hervorgehen:

$$\frac{TFdx + VFpdx + TGpdx + VGppdx}{\sqrt{1 + pp + T^2 + 2TVp + V^2p^2}} = d \cdot \frac{p + TV + V^2p}{\sqrt{1 + pp + T^2 + 2TVp + V^2p^2}}.$$

Es ist aber

$$Fdx + Gpdx = Fdx + Gdy = dV,$$

woher sein wird

$$\frac{TdV + VpdV}{\sqrt{1 + pp + (T + Vp^2)}} = d \cdot \frac{p + TV + V^2p}{\sqrt{1 + pp + (T + Vp^2)}}$$

$$= \frac{+dp(1 + T^2 + V^2) + dT(V - Tp) + dV(T + T^3 + 3T^2Vp + 3TV^2p^2 + V^3p^3 + 2Vp + Vp^3)}{(1 + pp + (T + Vp)^2)^{3:2}}.$$

Nach Ordnen dieser Gleichung wird aber diese resultieren

$$dp(1 + T^2 + V^2) + dT(V - Tp) + dV(Vp - Tpp) = 0$$

oder

$$dp = \frac{(Tp - V)(dT + pdV)}{1 + T^2 + V^2}.$$

Weil aber $p = \frac{dy}{dx}$ ist, wird $dp = \frac{ddy}{dx}$ sein; und daher wird werden

$$dxddy = \frac{(Tdy - Vdx)(dxdT + dydV)}{1 + T^2 + V^2},$$

welche eine Differenzen-Differentialgleichung für die Projektion AQ der kürzesten Linie in der gesuchten Oberfläche ist und daher aufzeigt, dass sie durch zwei gewisse Punkte hindurchgeführt werden kann. Diese gefundene Gleichung kann in verschiedene Formen transformiert werden, die öfter mit größerem Vorteil benutzt werden können werden. Und zuerst wird es freilich helfen, dass die Differentiale dT und dV eliminiert werden; weil nämlich $dz = Tdx + Vdy$ ist, wird gelten

$$ddz = dxdT + dydV + Vddy \quad \text{und daher} \quad dxdT + dydV = ddz - Vddy,$$

nach Einsetzten welches Wertes diese Gleichung hervorgehen wird

$$dxddy + T^2dxddy + V^2dxddy = Tdyddz - Vdxddz - TVdyddy + V^2dxddy$$

oder

$$dxddy + Tdzddy = Tdyddz - Vdxddz$$

und daher

$$ddy : ddz = Tdy - Vdx : dx + Tdz.$$

Die gefundene Gleichung werde mit dz multipliziert und im ersten Term werde $Tdx + Vdy$ anstelle von dz geschrieben, es wird sein

$$Tdx^2ddy + Vdxdyddy + Tdz^2ddy = Tdydzddz - Vdxdzddz.$$

Es werde auf beiden Seiten $Tdy^2ddy - Vdxdyddy$ addiert und es wird sein

$$Tddy(dx^2 + dy + dz^2) = (dzddz + dyddy)(Tdy - Vdx)$$

oder

$$\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz}.$$

Oder die Gleichung werde mit dx multipliziert und anstelle von Tdx werde $dz - Vdy$ geschrieben, es wird erhalten werden

$$dx^2ddy + dz^2ddy - Vdydzddy = dydzddz - Vdy^2ddz - Vdx^2ddz.$$

Es werde auf beiden Seiten $dy^2ddy - Vdz^2ddz$ addiert, es wird sein

$$\begin{aligned} ddy(dx^2 + dy^2 + dz^2) \ &- Vdz(dyddy + dzddz) \\ = dy(dyddy + dzddz) &- Vddz(dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz};$$

welche Gleichungen alle im folgenden Ausdruck enthalten sind:

$$\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}.$$

Hier ist zu bemerken, weil die Differentiale der Größen T und V nie auftauchen, dass es egal ist, ob in T oder V z enthalten ist oder nicht. In jedem sich ergebenden Fall wird es also gefällig sein, die Gleichung anzunehmen, die am leichtesten eine Integration zulässt. Wie beispielsweise, wenn die Oberfläche eines Rotationskörpers vorgelegt ist, der durch Rotation irgendeiner Figur um die Achse AP herum entstanden ist, wird $yy + zz =$ dem Quadrat einer Funktion von x sein, die $= X$ sei, und ist die Ordinate jener erzeugenden Kurve, die der Abszisse x entspricht. Es wird deshalb sein

$$zdz = XdX - ydy \quad \text{et} \quad dz = \frac{XdX}{z} - \frac{ydy}{z},$$

woher werden wird

$$T = \frac{XdX}{zdz} \quad \text{und} \quad V = \frac{-y}{z}.$$

Man nehme nun, der Annehmlichkeit wegen, diese Gleichung, in welcher T nicht auftaucht

$$\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz},$$

die wegen $V = \frac{y}{z}$ in diese übergeht

$$\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{zddy - yddz}{zdy - ydz},$$

deren Integral ist

$$l\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = l\frac{zdy - ydz}{b} \quad \text{oder} \quad zdy - ydz = b\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Weil ja nun $z = \sqrt{X^2 - y^2}$ ist, werde $dX = vdx$ gesetzt, es wird sein

$$dz = \frac{Xvdx - ydy}{\sqrt{X^2 - y^2}} \quad \text{und} \quad zdy - ydz = \frac{X^2dy - Xyvdx}{\sqrt{X^2 - y^2}}$$

und

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{\sqrt{X^2dx^2 - y^2dx^2 + X^2dy^2 + X^2v^2dx^2 - 2Xyvdxdy}}{\sqrt{X^2 - y^2}}.$$

Also

$$X^4dy^2 - 2X^3yvdxdy + X^2y^2v^2dx^2$$
$$= b^2X^2dx^2 - b^2y^2dx^2 + b^2X^2dy^2 + b^2X^2v^2dx^2 - 2b^2Xyvdxdy$$

oder

$$dy^2 = \frac{2(b^2 - X^2)Xyvdxdy + X^2y^2v^2dx^2 - b^2X^2dx^2 + b^2y^2dx^2 - b^2X^2v^2dx}{X^2(bb - XX)},$$

die nach Ziehen der Wurzel liefert

$$dy = \frac{yvdx}{X} \pm \frac{bdx\sqrt{(1 + vv)(yy - XX)}}{X\sqrt{bb - XX}}.$$

Wenn daher $y = Xt$ gesetzt wird, dass $dy = Xdt + tvdx$ ist, wird werden

$$\frac{dt}{\sqrt{tt - 1}} = \frac{bdx\sqrt{1 + vv}}{X\sqrt{bb - XX}};$$

in dieser Gleichung, weil X und v Funktionen von x sind, sind die Variablen t und x voneinander separiert.

BEISPIEL V

12. Über der Achse APN (Fig. 11) eine Kurve AM solcher Art zu konstruieren, dass, nachdem durch die Normale MN die Fläche AMN von gegebener Größe abgetrennt worden ist, der Bogen AM minimal ist.

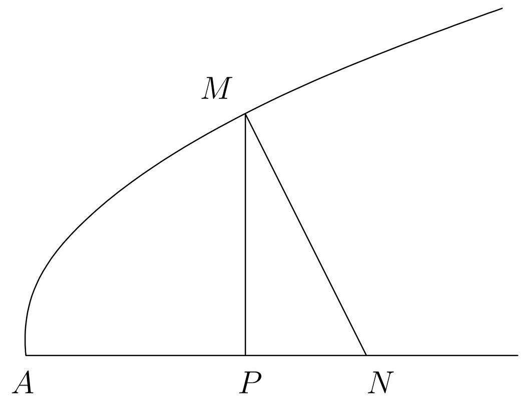

Fig. 11

Weil für die bestimmte Größe der Fläche AMN der Bogen AM minimal sein muss, werde die Fläche $AMN = ax$ gesetzt, und für $x = a$ gesetzt, in welchem Fall die Fläche $AMN = aa$ sei, werde der Bogen AM minimal. Es werde weiter die orthogonale Ordinate $MP = y$, die Abszisse $AP = t$ und die Subnormale $PN = u$ gesetzt; es wird sein

$$ax = \int ydt + \frac{1}{2}uy \quad \text{und} \quad u = \frac{ydy}{dt};$$

das Element des Bogens AM wird aber $= \frac{dy\sqrt{yy+uu}}{u}$ sein. Weil weiter gilt

$$adx = ydt + \frac{1}{2}(udy + ydu) \quad \text{und} \quad dt = \frac{ydy}{u},$$

wird gelten

$$audx = yydy + \frac{1}{2}uudy + \frac{1}{2}yudu \quad \text{und} \quad du = \frac{2adx}{y} - \frac{2ydy}{u} - \frac{udy}{y}.$$

Nun werde $dy = pdx$ gesetzt, es wird ein Minimum sein müssen

$$\int \frac{pdx\sqrt{yy+uu}}{u},$$

und u ist die Größe, deren Wert aus dieser Gleichung

$$du = dx\left(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{u} - \frac{up}{y}\right)$$

bestimmt werden muss. Deshalb bezieht sich diese Gleichung auf den fünften Fall; wenn mit diesem ein Vergleich angestellt wird, sei $u = \Pi$ und $Z = \frac{p\sqrt{yy+\Pi^2}}{\Pi}$; daher ist

$$L = \frac{-pyy}{\Pi^2\sqrt{yy+\Pi^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{yp}{\Pi\sqrt{yy+\Pi^2}} \quad \text{und} \quad P = \frac{\sqrt{yy+\Pi\Pi}}{\Pi}.$$

Weil darauf $\Pi = \int dx \left(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\Pi} - \frac{\Pi p}{y}\right)$ ist, wird

$$[Z] = \frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\Pi} - \frac{\Pi p}{y}$$

und durch Differenzieren wird sein

$$[L] = \frac{2yp}{\Pi^2} - \frac{p}{y}, \quad [M] = 0, \quad [N] = -\frac{2a}{yy} - \frac{2p}{\Pi} + \frac{\Pi p}{yy} \quad \text{und} \quad [P] = -\frac{2y}{\Pi} - \frac{\Pi}{y}.$$

Nun wird sein

$$\int [L]dx = \int \frac{2ydy}{\Pi^2} - ly \quad \text{und} \quad e^{\int [L]dx} = \frac{e^{\int 2ydy:\Pi\Pi}}{y};$$

aber es ist $Ldx = -\frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{yy+\Pi\Pi}}$; daher wird werden

$$\int e^{\int [L]dx} Ldx = -\int \frac{e^{\int 2ydy:\Pi\Pi} ydy}{\Pi^2\sqrt{yy+\Pi^2}},$$

deren Wert für $x = a$ gesetzt $= H$ werde und es sei

$$V = e^{-\int 2ydy:\Pi\Pi} y \left(H + \int \frac{e^{\int 2ydy:\Pi\Pi} ydy}{\Pi^2\sqrt{yy+\Pi^2}}\right).$$

Nachdem diese Dinge vorbereitet worden sind, wird die genügende Gleichung $(N + [N]V)dx = d \cdot (P + [P]V)$ sein oder nach Substitutionen

$$\frac{ydy}{\Pi\sqrt{yy+\Pi\Pi}} - \frac{2aVdx}{yy} - \frac{2Vdy}{\Pi} + \frac{\Pi Vdy}{yy} = d \cdot \left(\frac{\sqrt{yy+\Pi\Pi}}{\Pi} - \frac{2Vy}{\Pi} - \frac{\Pi V}{y}\right).$$

Aber es ist $2adx = yd\Pi + \frac{2yydy}{\Pi} + \Pi dy$; woher sein wird

$$\frac{ydy}{\Pi\sqrt{yy+\Pi^2}} - \frac{Vd\Pi}{y} - \frac{4Vdy}{\Pi} = d \cdot \left(\frac{\sqrt{yy+\Pi^2}}{\Pi} - \frac{2Vy}{\Pi} - \frac{\Pi V}{y}\right)$$

$$= \frac{ydy}{\Pi\sqrt{yy+\Pi^2}} - \frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{yy+\Pi^2}} - \frac{2Vdy}{\Pi} - \frac{2ydV}{\Pi} + \frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2} - \frac{\Pi dV}{y} - \frac{Vd\Pi}{y} + \frac{\Pi Vdy}{yy};$$

und daher

$$\frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{y^2+\Pi^2}} - \frac{2Vdy}{\Pi} + \frac{2ydV}{\Pi} - \frac{2Vdy\Pi}{\Pi^2} + \frac{\Pi dV}{y} - \frac{\Pi Vdy}{yy} = 0.$$

Aber es ist allgemein $dV = -Ldx - V[L]dx$; daher wird sein

$$dV = \frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{yy+\Pi\Pi}} - \frac{2Vydy}{\Pi^2} + \frac{Vdy}{y}$$

und daher
$$\frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{yy+\Pi\Pi}} = \frac{dVd\Pi}{dy} + \frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2} - \frac{Vd\Pi}{y};$$
nach Einsetzen von diesem entsteht
$$\frac{dVd\Pi}{dy} - \frac{2Vdy}{\Pi} + \frac{2ydV}{\Pi} + \frac{\Pi dV}{y} - \frac{Vd\Pi}{y} - \frac{\Pi Vdy}{yy} = 0;$$
das heißt
$$dV\left(\frac{d\Pi}{dy} + \frac{2y}{\Pi} + \frac{\Pi}{y}\right) = V\left(\frac{d\Pi}{y} + \frac{2dy}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy}\right) = \frac{ydV}{dy}\left(\frac{d\Pi}{y} + \frac{2dy}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy}\right);$$
diese Gleichung, weil sie durch $\frac{d\Pi}{y} + \frac{2dy}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy}$ teilbar ist, gibt eine zweifache Lösung. Deren erste wird $\frac{dV}{V} = \frac{dy}{y}$ sein, die $V = cy$ liefert; weil ja aber V im Fall des Minimums verschwinden muss, wird in demselben Fall $y = 0$ sein; für $x = a$ gesetzt wird $y = 0$ werden. Weil nun $V = cy$ ist, wird nach Substitutionen in der Gleichung
$$dV = \frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{y^2+\Pi^2}} - \frac{2Vydy}{\Pi^2} + \frac{Vdy}{y}$$
sein
$$\frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{y^2+\Pi^2}} = \frac{2cyydy}{\Pi^2};$$
und daher ist $y = 0$ oder $dy = 0$, in welchen Fall eine der Achse parallele gerade Linie hervorgeht, oder $\Pi = \infty$, in welchem Fall eine der Achse normale gerade Linie hervorgeht, oder auch $\sqrt{yy+\Pi\Pi} = MN =$ Konst., welche die Gleichung für einen Kreis gibt; und der ganze Halbkreis, wegen $y = 0$ im Fall des Minimus, wird dem Geforderten genügen. Die zweite Lösung geht aus diesem Teiler hervor
$$\frac{d\Pi}{y} + \frac{2\Pi}{\Pi} + \frac{\Pi dy}{yy} = 0 \quad \text{oder} \quad \Pi d\Pi + \frac{\Pi\Pi dy}{y} + 2ydy = 0,$$
die mit yy multipliziert $yy\Pi d\Pi + \Pi\Pi ydy + 2y^3dy = 0$ wird, deren Integral $\Pi^2y^2 + y^4 = C$ ist, und daher $\Pi = \frac{\sqrt{b^4-y^4}}{y}$; diese Gleichung, weil sie nicht von V abhängt, wird für irgendeinen Wert von x genügen. Es wird aber nach Einführen der Abszisse $AP = t$ wegen $u = \Pi = \frac{ydy}{dt}$ diese Gleichung gelten
$$\frac{ydy}{dt} = \frac{\sqrt{b^4-y^4}}{y} \quad \text{,woher gilt} \quad dt = \frac{yydy}{\sqrt{b^4-y^4}},$$
aus welcher Gleichung eingesehen wird, dass rechtwinklige elastische Kurve dem Geforderten genügt; sodass für die Fläche AMN zwischen den Normalen AN und MN der Kurvenbogen AM der kürzeste ist. Diese Kurve kann aber durch zwei gegebene Punkte, wenn freilich die Achse AP von der Lage her gegeben ist, beschrieben werden.

BEMERKUNG 2

13. Aus diesen Beispielen wird der außerordentliche Nutzen, welchen unsere Methode beim Auflösen von Problemen auch von verschiedener Art hat, im Überfluss klar; besonders aber das letzte Beispiel liefert einige höchst bemerkenswerte Umstände, aus denen die Natur der Lösung illustriert werden können wird. Weil ja nämlich wegen der zwei Faktoren eine zweifache Gleichung entstanden ist, ging auch eine zweifache Lösung hervor; deren erste bestimmt die genügende Linie uneingeschränkt, so dass sie nicht durch zwei beliebige Punkte hindurchgeführt werden kann; sie gibt nämlich entweder eine gerade Linie oder einen Halbkreis: Die gerade Linie löst aber die Frage auf zweifache Weise, während sie entweder zur Achse AP normal ist oder derselben parallel ist; und wie jede der beiden genügt, ist klar: Denn in der, die normal zur Achse ist, ist der Anteil, der mit der Achse und der Normale einen gegebenen Raum erfasst, immer unendlich klein und daher in der Tat minimal; die andere der Achse parallele Gerade erstreckt sich ein wenig weiter, weil sie durch einen gegebenen Punkt hindurch gezogen werden kann; und weil die Ordinaten selbst zur ihr normal sind und der abgetrennte Raum wie die Abszisse selbst ist, wird in Anbetracht jener jene gerade Linie natürlich die kürzeste sein. Der Halbkreis, der aus der ersten Lösung hervorging, genügt darauf so uneingeschränkt, dass, nachdem eine Größe des abzutrennenden Raumes vorgelegt wurde, der Halbkreis selbst bestimmt wird, denn seine Fläche muss $= aa$ sein. Aber die zweite Lösung, die die rechtwinklige elastische Kurve lieferte, erstreckt sich weiter; denn durch zwei irgendwelche gegebenen Punkte kann eine Kurve solcher Art hindurchgeführt werden und sie wird sich unter allen anderen Kurven, die durch dieselben Punkte hindurchgehen, dieser Eigenschaft erfreuen, dass, wenn in allen Kurven durch Normalen gleiche Flächen abgetrennt werden, der Bogen der Elastica der kleinste aller sein wird. Nachdem diese Dinge also erläutert worden sind, wollen wir dahin fortschreiten, den Gebrauch der angegebenen Methode bei Untersuchungen des Maximums oder Minimums zu zeigen, in denen die Formel des Maximums oder Minimums nicht ein solcher einfacher Integralausdruck $\int Zdx$ ist, welche Form wir bisher immer behandelt haben, sondern aus zwei oder mehreren Formeln dieser Art irgendwie zusammengesetzt wurde. Und zuerst freilich, wenn das Maximum oder Minimum ein Aggregat zweier oder mehrerer Integralformeln sein muss, beispielsweise $\int Zdx + \int Ydx - \int Xdx$, bereitet die Operation keine Schwierigkeit; weil nämlich die Formel des Maximums oder Minimums $\int dx(Z + Y - X)$ ist, wird diese als einfache Integralformel behandelt werden können und ihr Differentialwert angegeben werden können. Die Operation wird aber drauf hinauslaufen, dass für die einzelnen Formeln $\int Zdx$, $\int Ydx$ und $\int Xdx$ deren Differentialwerte gesucht werden und an deren Stelle in der Formel $\int Zdx + \int Ydx - \int Xdx$ eingesetzt werden und das, was entsteht, gleich null gesetzt wird; und so wird man die dem Geforderten genügende Gleichung haben.

PROPOSITION II PROBLEM

14. Die Gleichung zwischen x und y zu finden, dass für $x = a$ gesetzt dieser Ausdruck $\int Zdx \cdot \int Ydx$, der ein Produkt aus den zwei Integralformeln $\int Zdx$

und $\int Ydx$ ist, ein Maximum oder Minimum wird.

LÖSUNG. Wir wollen festlegen, dass diese Gleichung zwischen x und y schon gefunden worden ist und aus ihr für $x = a$ gesetzt der Wert der Formel $\int Zdx = A$ und $\int Ydx = B$ sein wird; diese Größen A und B werden konstant und deren Produkt AB maximal oder minimal sein. Nun werde festgelegt, dass beim unbestimmten Wert x die Variable y um das Stück nv vermehrt wird, aus welcher jede der beiden Größen A und B einen Zuwachs erfahren wird, irgendeine wird natürlich um den aus dem Vorhergehenden zu bestimmenden Differentialwert vermehrt werden. Es sei also dA der Differentialwert von A, der der Integralformel $\int Zdx$ für $x = a$ entspricht, und auf die gleiche Weise sei dB der Differentialwert, der aus der Formel $\int Ydx$ für $x = a$ gesetzt entsteht. Weil also aus dem der Variable$y$ hinzugefügten Stück nv A in $A + dA$ und B in $B + dB$ übergeht, wird das Produkt AB in $AB+AdB+BdA+dAdB$ verwandelt werden; daher, weil AB ein Maximum oder Minimum sein muss, wird $AB = AB + AdB + BdA + dAdB$ sein müssen. Und daher $0 = AdB + BdA$, wegen des in Bezug auf die übrigen verschwindenden Terms $dAdB$. Aus diesen entsteht deshalb die folgende Lösung des Problems. Es werde der Differentialwert der Formel $\int Zdx$ gesucht, der dA sei, und es sei A der Wert der Formel $\int Zdx$, den sie für $x = a$ gesetzt erhält. Darauf werde der Differentialwert der Formel $\int Ydx$ gesucht, der dB sei, und B bezeichne den Wert der Formel $\int Ydx$, den sie für $x = a$ gesetzt erhält; danach wird man diese Gleichung haben $0 = AdB + bdA$, in welcher die genügende Relation zwischen x und y enthalten sein wird. Q.E.I.

KOROLLAR I

15. Obwohl in der Gleichung $0 = AdB + BdA$ die konstanten Größen A und B enthalten sind, sind sie dennoch nicht beliebig, sondern jede der beiden wird durch diese Gleichung selbst bestimmt werden. Natürlich, wenn aus dieser Gleichung die Werte $\int Zdx$ und $\int Ydx$ hervorgebracht werden und $x = a$ gesetzt wird, müssen jene Größen A und B hervorgehen; daher werden diese durch a und durch die übrigen beliebigen Konstanten bestimmt werden, die durch Integration eingehen werden.

KOROLLAR II

16. Wenn Z und Y bestimmte Funktionen der Größen x, y, p, q, r etc. sind, dann werden die Differentialwerte dA und dB nicht von a abhängen; dennoch geht die Größe a nicht in die Gleichung $0 = AdB + BdA$ ein; daher wird die gefundene Kurve nur für den bestimmten Wert $x = a$ dem Geforderten genügen.

KOROLLAR III

17. Aus der Gleichung $0 = AdB + BdA$ wird aber das Stück nv ganz und gar herausgehen, denn, weil jeder der beiden Differentialwerte dA und dB mit nv multipliziert hervorging, wird nv durch Teilung wiederum vernichtet werden und auf diese Weise wird eine Gleichung zwischen x und y entstehen, mit welcher dem Problem genügt werden wird.

BEMERKUNG 1

18. Niemandem sollte hier die Form der gefundenen Gleichung $0 = AdB + BdA$

daher missfallen, weil sie die Gestalt einer bestimmten Differentialgleichung zeigt, aber daher sollte auch niemand folgern, dass zugleich dieses Integral der Gleichung $== AdB + BdA$ genommen werden kann: Konst. $= AB$. Wir haben nämlich die Bedeutungen schon erklärt, welche wir sowohl den Buchstaben A und B als auch den Differentialformen dA und dB zugeteilt haben; daher lässt sich einsehen, dass die gewöhnliche Bezeichnungsweise hier keine Geltung hat. Es schien aber daher ratsam, diese Bezeichnungsweise, wenn auch von der gewöhnlichen in diesem Fall abweichende, hier zu verwenden, damit der Zusammenhang der Gleichung $0 = AdB + BdA$ mit der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx \cdot \int Y dx$ besser erkannt wird. Weil nämlich das Maximum oder Minimum dem Wert $x = a$ entsprechen muss, wollen wir festlegen, dass in diesem Fall $\int Zdx$ in A und $\int Y dx$ in B übergeht; danach wird das Maximum AB sein. Daher entsteht aber von selbst die gefundene Gleichung $0 = AdB + BdA$, wenn freilich AB, nachdem die Buchstaben A und B als Variablen betrachtet worden sind, differenziert wird. Nachdem dies gemacht worden ist, muss in Erinnerung gerufen werden, dass für die Differentiale dA und dB die Differentialwerte anzunehmen sind, die den Integralformeln $\int Zdx$ und $\int Y dx$ entsprechen, aus welchen die konstanten Größen A und B selbst hervorgegangen sind. Es wird daher förderlich sein, diesen Zusammenhang bemerkt zu haben, weil sich unten derselbe auf irgendeine Zusammensetzungsweise, mit welcher die Formel des Maximums oder Minimums aus Integralformeln gebildet worden ist, gleichermaßen erstreckt; und wir werden zeigen, dass auf diese Weise aus dem Ausdruck des Maximums oder Minimums durch Differentiation die gesuchte Gleichung erhalten wird.

BEISPIEL I

19. Die Gleichung zwischen x und y zu finden, dass für $x = a$ gesetzt dieser Ausdruck $\int ydx \cdot \int xdy$ ein Maximum wird.

Es werde $\int ydx = A$ und $\int xdy = B$ für $x = a$ gesetzt und es werden die Differentialwerte der Formeln $\int ydx$ und $\int xdy$ oder $\int xpdx$ gesucht; und der Differentialwert der Formel $\int ydx$ ist $nv \cdot dx \cdot 1$, der der Formel $\int xdy$ oder $\int xpdx$ aber ist

$$nv \cdot dx \left(-\frac{1}{dx} d \cdot x\right) = -nv \cdot dx.$$

Es wird also sein

$$dA = nv \cdot dx \quad \text{und} \quad dB = -nv \cdot dx,$$

woher die Gleichung $0 = AdB + BdA$ in diese übergehen wird

$$0 = -A \cdot nv \cdot dx + B \cdot nv \cdot dx \quad \text{oder} \quad A = B.$$

Dem Geforderten genügen also alle Gleichungen zwischen x und y gleichermaßen, solange im Fall $x = a$ $\int ydx = \int xdy$, das heißt die Fläche der Kurve $= \frac{1}{2}xy$ war.

BEISPIEL II

20. Die Gleichung zwischen x und y zu finden, dass im Fall $x = a$ dieser Ausdruck $\int ydx \cdot \int dx\sqrt{1+pp}$ ein Minimum wird.

Im Fall $x = a$ werde $\int ydx = A$ und $\int dx\sqrt{1+pp} = B$. Weiter wird durch Nehmen der Differentialwerte sein

$$dA = nv \cdot dx \cdot 1 \quad \text{und} \quad dB = nv \cdot dx \left(-\frac{1}{dx} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}\right) = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Daher geht die folgende Gleichung hervor

$$0 = -A \cdot nv \cdot d\frac{p}{\sqrt{1+pp}} + B \cdot nv \cdot dx \quad \text{oder} \quad Bdx = Ad \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Diese gibt integriert

$$x + b = \frac{Ap}{B\sqrt{1+pp}},$$

wo $\frac{A}{B}$ das Verhältnis bezeichnet, das $\int ydx$ zu $\int dx\sqrt{1+pp}$ dann hat, wenn $x = a$ ist. Es sei der Kürze wegen $\frac{A}{B} = c$, es wird sein

$$(x+b)\sqrt{1+pp} = cp \quad \text{und} \quad p = \frac{x+b}{\sqrt{cc - (x+b)^2}} = \frac{dy}{dx}.$$

Nachdem also diese Gleichung integriert worden ist, wird $y = f \pm \sqrt{cc - (x+b)^2}$ resultieren, sodass $(y-f)^2 + (x+b)^2 = c^2$ ist, woher klar ist, dass die genügende Kurve ein mit dem Radius c beschriebener Kreis ist, nachdem irgendeine Achse angenommen worden ist. Es wird aber nicht jeder Bogen eines Kreises dieser Art genügen, sondern nur der, der mit dem Radius c des Kreises multipliziert eine Fläche erzeugt; es ist nämlich $A = Bc$. Also kann entweder der Radius c des Kreises nach Belieben angenommen werden und aus ihm wird jene bestimmte Größe a der Abszisse x bestimmt werden; oder, wenn a gegeben ist, wie wir festlegen, wird daher umgekehrt der Radius c bestimmt werden. Es ist aber klar, dass der Bogen des Kreises, der genügt, konvex zur Achse sein muss; in diesem Fall wird nämlich die Fläche kleiner und daher das Produkt aus Fläche mit Bogen minimal.

BEISPIEL III

21. Die Kurve zu finden, in welcher für die gegebene Abszisse $x = a$ dieser Ausdruck $\int yxdx \cdot \int xdx\sqrt{1+pp}$ ein Minimum wird.

Für $x = a$ gesetzt werde $\int yxdx = A$ und $\int xdx\sqrt{1+pp} = B$. Es wird aber sein

$$dA = nv \cdot dx \cdot x \quad \text{und} \quad dB = -nv \cdot dx \cdot \frac{1}{dx} d \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}};$$

daher wird diese Gleichung erhalten werden

$$Bxdx = Ad \cdot \frac{px}{\sqrt{1+pp}},$$

dese gibt integriert

$$xx \pm bb = \frac{2Apx}{B\sqrt{1+pp}} = \frac{2cpx}{\sqrt{1+pp}}$$

nachdem $\frac{A}{B} = c$ gesetzt wurde, Daher ist

$$p = \frac{xx \pm bb}{\sqrt{4ccxx - (xx \pm bb)^2}} = \frac{dy}{dx}$$

und daher wird man für die Kurve diese Gleichung haben

$$y = \int \frac{(xx \pm bb)dx}{\sqrt{4ccxx - (xx \pm bb)^2}}.$$

Über diese ist zu bemerken, wenn $b = 0$ ist, dass dann die Gleichung für einen Kreis hervorgeht $y = \int \frac{xdx}{\sqrt{4cc - xx}}$, dessen Radius $2c$ ist.

BEMERKUNG 2

22. Diese selben Beispiele können alle auch durch die schon oben angegebene Methode aufgelöst werden; daher, weil auf jedem der beiden Wege dieselbe Lösung erhalten wird, wird es förderlich sein, dass die Lösung durch den anderen Weg an einem Beispiel dargeboten wird. Wir wollen also das dritte Beispiel nehmen, in welchen die Formel des Maximums oder Minimums $\int yxdx \cdot \int xdx\sqrt{1+pp}$, indem differenziert und wiederum termweise integriert wird, auf diese Form zurückgeführt wird

$$\int yxdx \int xdx\sqrt{1+pp} + \int xdx\sqrt{1+pp} \int yxdx,$$

jedes von beiden Gliedern welcher Gleichung im zweiten oben in Paragraph 7 erläuterten Fall enthalten ist. Es werde deshalb der Differentialwert von jedem der beiden gesucht, denn Summe wird nämlich $= 0$ gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben. Nachdem aber die Formel $\int yxdx \int xdx\sqrt{1+pp}$ mit dem zweiten Fall verglichen wurde, wird er $\Pi = \int xdx\sqrt{1+pp}$ und $Z = yx\Pi$ geben; daher wird

$$L = yx, \quad M = y\Pi, \quad N = x\Pi, \quad P = 0 \text{ etc.}$$

Darauf wird $[Z] = x\sqrt{1+pp}$ sein; und daher

$$[M] = \sqrt{1+pp}, \quad [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{xp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Weiter ist $\int Ldx = \int yxdx$, deren Wert für $x = a$ gesetzt, den wir allgemein als H festgelegt haben, hier in der Lösung des Beispiels A ist, so dass $V = A - \int yxdx$ ist. Daher wird der Differentialwert dieser Formel sein

$$= nv \cdot dx \left(x\Pi - \frac{1}{dx} d \cdot \frac{xp(A - \int yxdx)}{\sqrt{1+pp}} \right)$$
$$= nv \cdot dx \left(x \int xdx\sqrt{1+pp} - \frac{A}{dx} d \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}} + \frac{1}{dx} d \cdot \frac{xp \int yxdx}{\sqrt{1+pp}} \right).$$

Die andere Formel $\int xdx\sqrt{1+pp}\int yxdx$, mit dem zweiten Fall in Paragraph 7 verglichen, gibt $\Pi = \int yxdx$ et $Z = x\Pi\sqrt{1+pp}$, woher gelten wird

$$L = x\sqrt{1+pp}, \quad M = \Pi\sqrt{1+pp}, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{x\Pi p}{\sqrt{1+pp}};$$

und daher $\int Ldx = \int xdx\sqrt{1+pp}$; daher, weil H der Wert von $\int Ldx$ für $x = a$ gesetzt ist, wird $H = B$ und $V = B - \int xdx\sqrt{1+pp}$ sein. Weiter ist $[Z] = yx$, und daher $[M] = y$, $[N] = x$ und $[P] = 0$. Aus diesen geht der Differentialwert hervor

$$= nv \cdot dx \left(Bx - x\int xdx\sqrt{1+pp} - \frac{1}{dx} d \cdot \frac{xp\int yxdx}{\sqrt{1+pp}} \right).$$

Nachdem also diese zwei Differentialwerte addiert worden sind, wird der Ausdruck dieses zusammengesetzten Ausdrucks

$$\int yxdx \int xdx\sqrt{1+pp} + \int xdx\sqrt{1+pp}\int yxdx$$

oder dieses

$$\int yxdx \cdot \int xdx\sqrt{1+pp},$$

der im Beispiel vorgelegt war, hervorgehen

$$= nv \cdot dx \left(Bx - \frac{A}{dx} d \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}} \right),$$

aus welchem die Gleichung für die Kurve diese sein wird

$$Bxdx = Ad \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}},$$

welche selbe wir in der Lösung des Beispiels gefunden haben. Die gleiche Übereinstimmung wird aber im Allgemeinen entdeckt werden, wenn jemand den Ausdruck $\int Zdx \cdot \int Ndx$ auf dieselbe Weise behandeln wollte.

PROPOSITION III PROBLEM

23. Die Gleichung zwischen x und y unter der Bedingung zu finden, dass für $x = a$ gesetzt dieser Bruch $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$ den maximalen oder minimalen Wert erhält, während Z und Y irgendwelche entweder bestimmten oder unbestimmten Funktionen von x, y, p, q, r etc. sind.

LÖSUNG. Im Fall, in dem $x = a$ wird, sei $\int Zdx = A$ und $\int Ydx = B$ und es wird $\frac{A}{B}$ ein Maximum oder Minimum sein, wenn freilich die Relation zwischen x und y richtig angegeben worden ist. Der Bruch $\frac{A}{B}$ wird also diesem Bruch in dem Fall gleich sein $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$, in dem $x = a$ ist, wenn irgendwo die eine Ordinate y um das Stück nv vermehrt wird. Dann wird aber $\int Zdx$ selbst A, zusammen mit dem Differentialwert der Formel $\int Zdx$, der $= dA$ sei, gleich werden; und auf die gleiche Weise wird $\int Ydx$ in B, das um den Differentialwert der Formel

$\int Ydx$ vermehrt wurde, der $= dB$ sei, übergehen; und so wird aus dem zur Ordinate y hinzugefügten Stück nv im Fall, in dem $x = a$ ist, der Bruch $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$ in diesen übergehen $\frac{A+dA}{B+dB}$; dieser muss dem Bruch $\frac{A}{B}$ selbst gleich sein; daher entsteht diese Gleichung $BdA = AdB$, die die gesuchte Gleichung zwischen x und y liefern wird. Q.E.I.

KOROLLAR I

24. Um also diese Gleichung zwischen x und y zu finden, muss bewirkt werden, dass die Differentialwerte von $\int Zdx$ und $\int Ydx$ den Werten dieser Formeln, proportional werden, welche sie für $x = a$ gesetzt erhalten.

KOROLLAR II

25. Obwohl in dieser gefundenen Gleichung $BdA = AdB$ die zwei unbekannten Konstanten A und B enthalten zu sein scheinen mögen, lassen sich dennoch die beiden zu einer vermischen. Denn für $\frac{A}{B} = C$ gesetzt wird $dA = CdB$ sein; und nachdem die Gleichung gefunden worden ist, wird aus dem Wert a, der anstelle von x eingesetzt wurde, der Wert von C bestimmt werden.

BEMERKUNG 1

26. Wenn die Lösungen dieses und des vorhergehenden Problems miteinander verglichen werden, wird eine riesige Übereinstimmung in ihnen entdeckt werden. Denn wenn das Produkt $\int Zdx \cdot \int Ydx$ ein Maximum oder Minimum sein muss, ist diese Gleichung entstanden $0 = AdB + BdA$; wenn aber der Quotient $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$ maximal oder minimal sein muss, ist diese Gleichung gefunden worden $0 = AdB - BdA$; in jedem der beiden Fälle behalten aber die Buchstaben A, B und dA, dB dieselben Werte bei. Daher weil A und B konstante Größen sind, unterscheiden sich die Gleichungen nur in Hinblick des Vorzeichens einer Konstante; denn für $\frac{A}{B} = C$ gesetzt hat man im ersten Fall $dA = -CdB$, im zweiten aber $dA = +CdB$. Daher wird für jede der beiden Fälle auch fast dieselbe Lösung hervorgehen, weil der ganze Unterschied nur im Vorzeichen der konstanten Größe C gelegen sein wird. Wenn daher also die Gleichung zwischen x und y gefunden worden ist, die für $x = a$ das maximale oder minimale Produkt $\int Zdx \cdot \int Ydx$ enthält, wird dieselbe Gleichung mit einer kleinen Veränderung zugleich den maximalen oder minimalen Quotienten $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$ enthalten. Es ist aber klar, ob $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$ ein Maximum oder Minimum sein muss, oder $\frac{\int Ydx}{\int Zdx}$, dass in jedem der beiden Fälle vollkommen dieselbe Gleichung hervorgehen wird. Diese Übereinstimmung erfordert in der Tat die Sache selbst; denn wenn $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$ ein Maximum ist, dann wird daher natürlich $\frac{\int Ydx}{\int Zdx}$ ein Minimum sein, woher es notwendig ist, dass jeder der beiden Fragen dieselbe Lösung genügt. Im Übrigen wird es auch förderlich sein, diesen Zusammenhang zwischen der Formel des Maximums oder Minimums $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$, die für $x = a$ gesetzt in $\frac{A}{B}$ übergeht, und zwischen der gefundenen Gleichung $BdA - AdB$ bemerkt zu haben, denn diese Gleichung entsteht aus der Differentiation der Formel $\frac{A}{B}$, indem ihr Differential

$= 0$ gesetzt wird; dass ein Zusammenhang dieser Art aber immer Geltung hat, werden wir in der folgenden Proposition beweisen.

BEISPIEL I

27. Die Kurve zu finden, deren Fläche mit orthogonalen Koordinaten abgetrennt zum Kurvenbogen das größte Verhältnis hat, wenn der Abszisse ein gegebener Wert a zugeteilt wird.

Nachdem die Abszisse der gesuchten Kurve $= x$, die Ordinate $= y$ gesetzt worden sind, wird die Fläche $= \int ydx$ und der Bogen $= \int dx\sqrt{1+pp}$ sein, nachdem $x = a$ gesetzt worden ist; es muss also $\frac{\int ydx}{\int dx\sqrt{1+pp}}$ ein Maximum in dem Fall sein, in welchem $x = a$ gesetzt wird. Es sei also im Fall $x = a$ der Wert der Formel $\int ydx$ oder die Fläche $= A$ und $\int dx\sqrt{1+pp}$ oder der Bogen, der der Abszisse a entspricht, $= B$. Darauf wird der Differentialwert dA der Formel $\int ydx = nv \cdot dx \cdot 1$ sein und der der Formel $\int dx\sqrt{1+pp}$ oder

$$dB = nv \cdot dx \left(-\frac{1}{dx} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}\right) = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Nachdem diese Werte in der Gleichung $BdA = AdB$ eingesetzt worden sind, wird für die gesuchte Kurve die folgende Gleichung hervorgehen

$$Bdx = -Ad \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Es werde $\frac{A}{B} = c$ gesetzt, sodass für die Abszisse $x = a$ die Fläche der Kurve gleich dem Produkt aus dem Bogen mit dieser Konstante c wird. Es wird also $dx = -cd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ sein und durch Integrieren

$$x = b - \frac{cp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{oder} \quad cp = (b-x)\sqrt{1+pp},$$

und daher $p = \frac{b-x}{\sqrt{c^2-(b-x)^2}} = \frac{dy}{dx}$. Es wird also sein

$$y = \int \frac{(b-x)dx}{\sqrt{c^2-(b-x)^2}} = f \pm \sqrt{c^2-(b-x)^2}$$

oder $(y-f)^2 + (b-x)^2 = cc$; daher ist bekannt, dass die gesuchte Kurve ein mit dem Radius c beschriebener Kreis ist, der auf irgendeine Gerade als Achse bezogen wurde. Aber es genügt nur der Anteil des Kreises dem Geforderten, der der Abszisse $= a$ entspricht, von welchem Wert c abhängt, sodass, nachdem die Abszisse $= a$ genommen wurde, die Fläche gleich dem Produkt aus dem Bogen, der mit dem Radius des Kreises multipliziert worden ist, ist. Wenn daher also umgekehrt der Radius c gegeben ist, muss auf der Achse eine so große Abszisse abgetrennt werden, dass der Bogen mit dem Radius multipliziert die Fläche liefert. Dem Geforderten wird also auf unendlich viele Weisen genügt; die Frage wird aber bestimmt sein, wenn zwei Punkte vorgeschrieben werden, durch die die gesuchte Kurve hindurchzugehen hat. Wir wollen also den Radius c als bekannt annehmen und mit ihm (Fig. 12) den Kreis BMD um das Zentrum C beschreiben. Weiter werde irgendeine Linie APD für die Achse genommen und auf ihr A für den Ursprung der Abszissen. Danach wird nun dem Geforderten genügt werden, wenn mit der Ordinate PM einen so großer Raum $ABMP$ abgetrennt wird, dass er gleich dem Produkt aus dem Bogen BM mit dem Radius BC des Kreises ist.

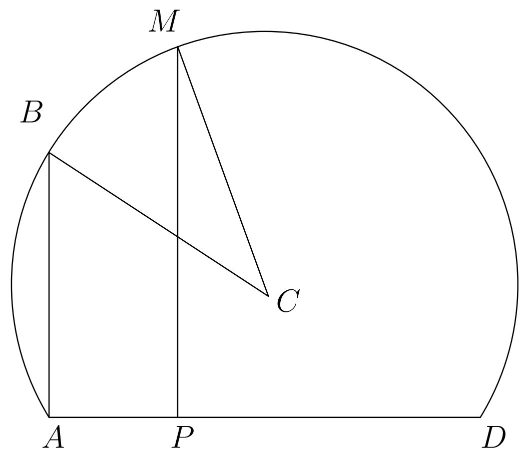

Fig. 12

Weil aber der Sektor $BCM = \frac{1}{2}BM \cdot BC$ ist, ist von Nöten, dass die Fläche $ABMP$ doppelt so groß ist wie der Sektor BCM. Es ist aber klar, nachdem sowohl eine Achse als auch ihr Anfang nach Belieben genommen worden ist, dass oftmals die vorgeschriebene Bedingung nicht einmal erfüllt werden kann. Denn wenn die Achse AD durch das Zentrum hindurchgeht, dann wird die Fläche $ABMP$ immer größer sein wird als das Doppelte des Sektors BCM, außer wenn, für einen unendlich kleinen Bogen BM, die erste Ordinate BA zugleich durch das Zentrum hindurchgeht; wenn aber die Achse AD oberhalb des Zentrums verliefe, dann kann auf keine Weise der vorgeschriebenen Bedingung genügt werden. Daher ist es von Nöten, dass die Achse AD unterhalb des Zentrums C gezogen wird, über welche Sache viele außergewöhnliche geometrische Beobachtungen gemacht werden könnten, wenn die Art des Unternehmens es zuließe. Im Übrigen, wenn diese Lösung mit dem zweiten Beispiel der vorhergehenden Proposition von Paragraph 20 verglichen wird, wird klar werden, dass vollkommen dieselbe Gleichung gefunden worden ist, ob $\int ydx \cdot \int dx\sqrt{1+pp}$ ein Minimum sein muss, oder $\frac{\int ydx}{\int dx\sqrt{1+pp}}$ ein Maximum. Der Unterschied besteht aber darin, dass der Radius des Kreises $c = \frac{A}{B}$ im einem Fall positiv, im anderen aber negativ angenommen werden muss. Natürlich, wenn $\int ydx \cdot \int dx\sqrt{1+pp}$ ein Minimum sein muss, muss der Bogen BM, während er konvex ist, den Raum $ABMP$, im anderen aber, während er konkav ist, einschließen.

BEISPIEL II

28. Innerhalb des gegebenen Winkels (Fig. 7, p. 129) ACM die Kurve AM zu *konstruieren, die so beschaffen ist, dass die Fläche ACM durch den Bogen AM geteilt die größte aller ist.*

Es werde der Winkel ACM oder der mit dem Radius $CB = 1$ beschriebene Kreisbogen $BS = x$ gesetzt, der im vorgelegten Fall $= a$ werde, in welchem $\frac{ACM}{AM}$ ein Maximum werden muss. Es werde weiter $CM = y$ gesetzt und es sei $dy = pdx$, es wird $Mn = ydx$ und die Fläche $ACM = \frac{1}{2}\int yydx$ sein; der Bogen AM wird aber gleich $= \int dx\sqrt{yy+pp}$ gefunden; daher wird dieser Bruch $\frac{\int yydx}{2\int dx\sqrt{yy+pp}}$ oder sein Doppeltes $\frac{\int yydx}{\int dx\sqrt{yy+pp}}$ ein Maximum sein müssen. Es sei im Fall, in dem $x = a$ ist, $\int yydx = A$ und $\int dx\sqrt{yy+pp} = B$; es wird, wenn $x = a$ ist, die Fläche $ACM = \frac{1}{2}A$ und der Bogen $AM = B$ sein. Nun ist der Differentialwert dA der Formel $\int yydx = A = nv\cdot dx\cdot 2y$ und der Differentialwert dB der Formel $\int dx\sqrt{yy+pp}$ ist

$$= nv\cdot dx\left(\frac{y}{\sqrt{yy+pp}} - \frac{1}{dx}d\cdot\frac{p}{\sqrt{yy+pp}}\right).$$

Daher, weil wir allgemein für die Kurve diese Gleichung gefunden haben $BdA = AdB$, wird nach Teilung durch nv sein

$$2Bydx = \frac{Aydx}{\sqrt{yy+pp}} - Ad\cdot\frac{p}{\sqrt{yy+pp}}.$$

Es werde mit p multipliziert, wegen $pdx = dy$ wird gelten

$$2Bydy = A\left(\frac{ydy}{\sqrt{yy+pp}} - pd\frac{p}{\sqrt{yy+pp}}\right).$$

Aber es ist

$$d\cdot\sqrt{yy+pp} = \frac{ydy}{\sqrt{yy+pp}} + \frac{pdp}{\sqrt{yy+pp}}$$

und

$$\frac{ydy}{\sqrt{yy+pp}} = d\cdot\sqrt{yy+pp} - \frac{p}{\sqrt{yy+pp}}dp;$$

daher wird werden

$$2Bydy = A\left(d\cdot\sqrt{yy+pp} - d\cdot\frac{pp}{\sqrt{yy+pp}}\right),$$

wegen

$$pd\frac{p}{\sqrt{yy+pp}} + dp\frac{p}{\sqrt{yy+pp}} = d\cdot p\cdot\frac{p}{\sqrt{yy+pp}} = d\cdot\frac{pp}{\sqrt{yy+pp}}.$$

Daher wird man durch Integrieren, wenn $\frac{A}{B} = c$ gesetzt wird, diese Gleichung haben

$$yy \pm bb = c\sqrt{yy+pp} - \frac{cpp}{\sqrt{yy+pp}} = \frac{cyy}{\sqrt{yy+pp}}$$

oder

$$p = \frac{y\sqrt{c^2y^2 - (yy \pm bb)^2}}{yy \pm bb} = \frac{dy}{dx}$$

und daher

$$dx = \frac{(yy \pm bb)dy}{y\sqrt{c^2y^2 - (yy \pm bb)^2}};$$

aus dieser Gleichung kann leicht abgeleitet werden, wenn $cc + 4bb$ eine positive Größe ist, dass die Konstruktion durch die Quadratur des Kreises durchgeführt werden kann. Aber dasselbe wird leichter klar werden, wenn wir anstelle von dy oder pdx das Lot CP einführen, das aus C zur Tangente MP gefällt wurde. Wenn daher aber dieses Lot $CP = u$ gesetzt wird, wird gelten

$$y : u = dx\sqrt{yy + pp} : ydx \quad \text{und daher} \quad \frac{yy}{\sqrt{yy + pp}} = u;$$

deswegen, weil $yy \pm bb = \frac{cyy}{\sqrt{yy+pp}}$ war, wird $yy \pm bb = cu$ sein, welche bekannt ist, die Gleichung für einen Kreis selbst zu sein. Um dies zu zeigen, werde (Fig. 13) irgendein Kreis genommen, der um das Zentrum O mit dem Radius $OM = g$ beschrieben wurde, und der Punkt C sei in C so genommen worden, dass $OC = h$ ist.

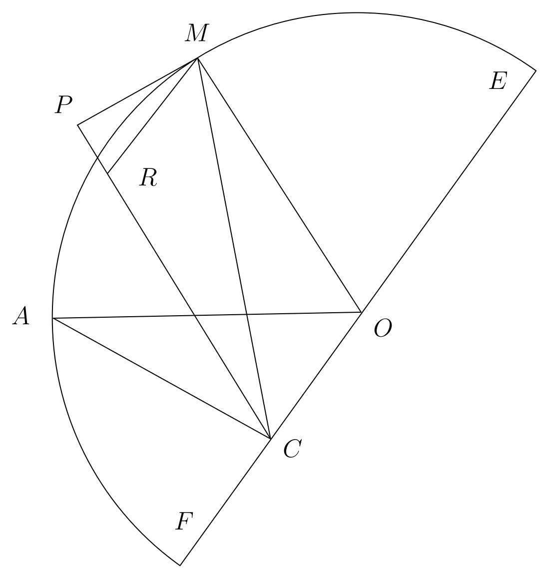

Fig. 13

Nachdem nun die Gerade $CM = y$ und $CP = u$, das Lot zur Tangente MP gezogen wurden, wird CP dem Radius OM parallel sein. Aus M werde die dem Durchmesser EF parallele Gerade MR gezogen, es wird $MR = CO = h$, $CR = OM = g$ und $PR = u - g$ sein; weil also $MR^2 = MP^2 + PR^2 = CM^2 - CP^2 + PR^2$ ist, wird gelten

$$h^2 = y^2 - u^2 + (u - g)^2 = y^2 - 2gu + gg$$

und daher $yy + gg - hh = 2gu$; nachdem diese mit der gefundenen $yy \pm bb = cu$ verglichen wurde, wird $g = \frac{1}{2}c$ und $\pm bb = \frac{1}{4}cc - hh$ oder $hh = \frac{1}{4}cc + bb$ werden. Es wird deshalb die gesuchte Kurve ein mit dem Radius $= \frac{1}{2}c$ beschriebener Kreis sein, nachdem der Punkt C wo es beliebt angenommen wurde. In einem solchen Kreis wird dem Geforderten der Bogen AM genügen, wenn galt

$$\frac{ACM}{AM} = \frac{A}{2B} = \frac{1}{2}c = \text{ dem Radius } OM;$$

das heißt, wenn galt

$$\text{Fläche } ACM = \text{ Bogen } AM \cdot AO = \text{ dem doppelten Sektor } AOM.$$

Dies kann aber nicht geschehen, wenn nicht der Punkt C außerhalb des Kreises angenommen wird; in diesem Fall kann diese Bedingung auf unendlich viele Weisen erfüllt werden und es kann daher bewirkt werden, dass die genügende Kurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht.

BEISPIEL III

29. Die Kurve (Fig. 14) DAD zu finden, die auf die Achse AC bezogen wurde, in welcher für die gegebene Abszisse $AC = a$ $\frac{\int xdx\sqrt{1+pp}}{\int dx\sqrt{1+pp}}$ *ein Minimum ist.*

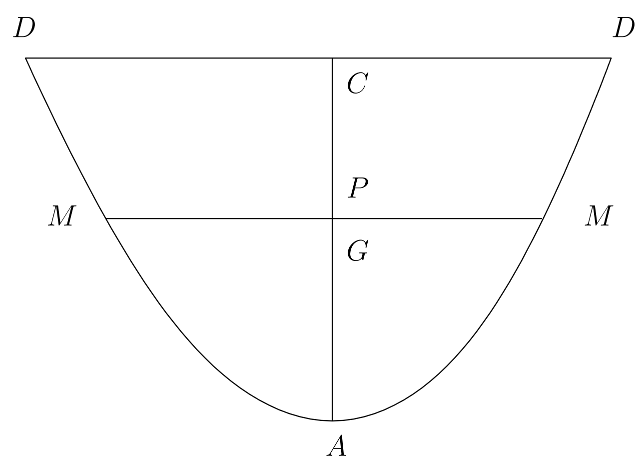

FIG. 14

Wenn die unbestimmte Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$ und $dy = pdx$ gesetzt wird, drückt

$$\frac{\int xdx\sqrt{1+pp}}{\int dx\sqrt{1+pp}}$$

die Distanz des Schwerpunktes der Kurve MAM aus, die als gleichmäßig schwer vom untersten Punkt A aus betrachtet wurde; diese Distanz, nach Translation von P nach C, muss also minimal werden. Um dies zu finden, sei für $x = a$ gesetzt

$$\int xdx\sqrt{1+pp} = A \quad \text{und} \quad \int dx\sqrt{1+pp} = B;$$

es wird aber der folgende Differentialwert der Formel $\int xdx\sqrt{1+pp}$ gefunden

$$dA = -nv \cdot d \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}}$$

und der Differentialwert der Formel $\int dx\sqrt{1+pp}$

$$dB = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}};$$

nachdem diese in der Gleichung $BdA = AdB$ eingesetzt worden sind, wird hervorgehen

$$Bd \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}} = Ad \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

und für $\frac{A}{B} = c$ gesetzt wird sein

$$d \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}} = cd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}};$$

daher entsteht durch Integrieren

$$\frac{xp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{cp}{\sqrt{1+pp}} - b \quad \text{oder} \quad b\sqrt{1+pp} = (c-x)p;$$

und daher wird gefunden

$$p = \frac{b}{\sqrt{(c-x)^2 - bb}} = \frac{dy}{dx}.$$

Es wird also sein

$$y = \int \frac{bdx}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}};$$

diese Gleichung zeigt auf, dass die gesuchte Kurve eine Kettenlinie ist, nachdem der Anfang der Abszissen für x an irgendeiner Stelle der Achse AC angenommen wurde; ja es kann sogar für die Achse irgendeine dem Durchmesser AC der Kettenlinie parallele Gerade und in ihr irgendein Punkt für den Anfang der Achse genommen werden. Wie auch immer aber die Achse und ihr Anfang festgelegt wird, es wird der Frage nur der Anteil der Kurve genügen, wo gilt

$$\int xdx\sqrt{1+pp} = c\int dx\sqrt{1+pp}.$$

Wir wollen festlegen, dass für die Achse der Durchmesser AC selbst und der Scheitel A für den Anfang der Abszissen angenommen wird. Weil in A, wo $x = 0$ ist, $\frac{dy}{dx} = p = \infty$ wird, ist es notwendig, dass $cc - bb = 0$ und daher $b = c$ ist. Aber in diesem Fall wird $y = \int \frac{cdx}{\sqrt{xx-2cx}}$, welche Kurve nach oben gerichtet imaginär wird, bis schließlich $x > 2c$ wird. Es sei also $x = 2c + t$, es wird $t =$ der Abszisse und $y = PM = \int \frac{cdt}{\sqrt{2ct+tt}}$ sein; und die Kurve DAD wird eine gewöhnliche Kettenlinie sein. Damit aber klar wird, ein wie großer Anteil von ihr der Frage genügt, ist zu bemerken, dass wegen $dx = dt$ gilt

$$p = \frac{c}{\sqrt{2ct + tt}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + pp} = \frac{c + t}{\sqrt{2ct + tt}};$$

und daher

$$\int dx\sqrt{1 + pp} = \int \frac{(c + t)dt}{\sqrt{2ct + tt}} = \sqrt{2ct + tt}.$$

Aber der Ausdruck $\frac{\int xdx\sqrt{1+pp}}{\int dx\sqrt{1+pp}}$ wird

$$= 2c + \frac{\int tdt\sqrt{1 + pp}}{\sqrt{2ct + tt}},$$

der c auf keine Weise gleich gemacht werden kann. Daher wird gefolgert, dass kein Anteil dieser Kurve dem Geforderten in Bezug auf die übrigen mehr genügt. Deswegen kann der Anfang der Abszissen nicht im Scheitel A genommen werden. Er werde also in irgendeinem anderen Punkt genommen, und für $AP = t$ gesetzt muss $2bt + tt = (c - x)^2 - bb$ werden; daher wird entweder $b + t = x - c$ oder $b + t = c - x$. Die erste Gleichung $x = b + c + t$ kann nicht Geltung haben, weil wegen $dx = dt$ nicht werden kann

$$\frac{\int xdt\sqrt{1 + pp}}{\int dt\sqrt{1 + pp}} \quad \text{oder} \quad \left(b + c + \frac{\int tdt\sqrt{1 + pp}}{\int dt\sqrt{1 + pp}}\right) = c.$$

Also werde $x = c - b - t$, in welchem Fall die Abszissen von irgendeinem oberen Punkt der Achse AC nach unten herabkommen werden und es müsste werden

$$\frac{\int xdx\sqrt{1 + pp}}{\int dx\sqrt{1 + pp}} \quad \text{oder} \quad c - b - \frac{\int tdt\sqrt{1 + pp}}{\int dt\sqrt{1 + pp}} = c,$$

was gleichermaßen nicht geschehen kann; daher wird zu folgern sein, dass kein Anteil mehr als ein gewisser anderer genügt. Dies scheint aber daher zu kommen, weil die Kettenlinie zwei konjugierte Teile hat wie zum Beispiel die konische Hyperbel und daher kann immer werden

$$\frac{\int xdx\sqrt{1 + pp}}{\int dx\sqrt{1 + pp}} = 0,$$

welcher Wert der kleinste ist. Dies kann deutlicher aus dem gefundenen Wert aufgezeigt werden

$$p = \frac{b}{\sqrt{(c - x)^2 - b^2}};$$

daher wird

$$\sqrt{1 + pp} = \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 - b^2}} = (c - x)r$$

nachdem der Kürze wegen festgelegt wurde

$$r = \frac{1}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}.$$

Es müsste also im gesuchten Fall gelten

$$\frac{\int (c-x)xrdx}{\int (c-x)rdx} = c \quad \text{oder} \quad \int (c-x)^2 rdx = 0,$$

weil dies aber im Fall $x = 0$ geschehen muss, müsste er darüber hinaus in einem anderen Fall verschwinden. Aber es ist

$$\int (c-x)^2 rdx = \int \frac{(c-x)^2 dx}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$$
$$= -\frac{1}{2}(c-x)\sqrt{(c-x)^2 - b^2} - \frac{bb}{2} l \frac{c - x + \sqrt{(c-x)^2 - b^2}}{c + \sqrt{c^2 - b^2}} + \frac{1}{2} c\sqrt{c^2 - b^2},$$

welcher Ausdruck, wenn er einmal $= 0$ war, nach, wegen des immer positiven $(c-x)^2$, ununterbrochen wachsen wird und daher nicht erneut $= 0$ werden kann. Deswegen müssen die beiden Integrationsgrenzen der Formel

$$\int \frac{(c-x)^2 dx}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$$

miteinander übereinstimmen; dies geschieht, wenn $x = c$ war; in diesem Fall geht die genügende Kurve in eine der Achse normale gerade Linie über, die natürlich einen von ihr keineswegs wegbewegten Schwerpunkt hat.

BEISPIEL IV

30. Die Kurve zu finden, in welcher für die gegebene Abszisse $x = a$ dieser Ausdruck $\frac{\int yxdx}{\int dx\sqrt{1+pp}}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Für $x = a$ gesetzt wird $\int yxdx = A$ und $\int dx\sqrt{1+pp} = B$ werden. Nun ist der Differentialwert der Formel $\int yxdx$ $dA = nv \cdot dx \cdot x = nv \cdot xdx$ und der Differentialwert der Formel $\int dx\sqrt{1+pp}$

$$dB = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Daher, weil $BdA = AdB$ ist, wird man diese Gleichung haben

$$Bxdx = -Ad \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{oder} \quad xdx = -ccd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

nachdem $A = Bc^2$ gesetzt wurde. Daher wird durch Integrieren $xx = bc - \frac{2ccp}{\sqrt{1+pp}}$ erhalten werden und daher

$$p = \frac{bc - xx}{\sqrt{4c^4 - (bc - xx)^2}} = \frac{dy}{dx};$$

diese liefert

$$y = \int \frac{(bc - xx)dx}{\sqrt{4c^4 - (bc - xx)^2}},$$

welches die allgemeine Gleichung für eine elastische Kurve ist, die diese Eigenschaft hat, dass der Krümmungsradius überall der Abszisse x umgekehrt proportional ist, was aus nachstehender Gleichung klar ist

$$xdx = -ccd \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + pp}},$$

die in diese übergeht

$$-\frac{dx}{d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}} = \frac{cc}{x},$$

und es ist

$$-\frac{dx}{d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}} = -\frac{dx(1 + pp)^{3:2}}{dp}$$

der Krümmungsradius in der Kurve. Es genügt aber nur ein so großer Anteil dieser Kurve, indem vom Anfang aus gezählt wird, in welchem gelten wird

$$\int yxdx = cc \int dx\sqrt{1 + pp} = 2c^4 \int \frac{dx}{\sqrt{4c^4 - (bc - xx)^2}};$$

diese Bestimmung wird darauf zurückgeführt, dass folgendes bewirkt werden muss

$$\int dx\sqrt{4c^4 - (bc - xx)^2} = (aa - bc) \int \frac{dx(bc - xx)}{\sqrt{4c^4 - (bc - xx)^2}},$$

wenn nach jeder der beiden Integrationen $x = a$ gesetzt wird. Auf diese Weise wird deshalb jene Konstante c durch a bestimmt werden.

PROPOSITION IV PROBLEM

31. Die so beschaffene Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y zu finden, dass, nachdem die Variable $x = a$ gesetzt wurde, der Ausdruck W ein Maximum oder Minimum wird, der irgendeine Funktion der Integralformeln $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$ etc. sei, in welchen Z, Y, X etc. irgendwelche entweder bestimmte oder unbestimmte Funktion von x, y, p, q etc. bezeichnen.

LÖSUNG. Wir wollen festlegen, dass die Gleichung zwischen x und y schon gefunden worden ist und für $x = a$ gesetzt $\int Zdx = A$, $\int Ydx = B$, $\int Xdx = C$ etc, wird; Und nachdem diese Werte im Ausdruck W eingesetzt worden sind, wird man in der Tat ein Maximum oder Minimum haben. Wenn daher also die eine Variable y festgelegt wird, an einer Stelle um das Stück nv vermehrt zu werden, und die daher entstehenden Veränderungen in den einzelnen Formeln $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$ etc. eingeführt werden, muss derselbe Wert für W hervorgehen. Aber von jenem Stück nv werden die Formeln $\int Zdx$, $\int Ydx$ und $\int Xdx$ etc. um ihre Differentialwerte vermehrt werden. Wenn also der Differentialwert der Formel $\int Zdx = dA$, der Formel $\int Ydx = dB$, der Formel $\int Xdx = dC$

etc. gesetzt werden, werden anstelle der Größen A, B, C etc. diese vom Stück nv vermehrten entstehen $A + dA$, $B + dB$, $C + dC$ etc., die in W eingesetzt denselben Wert erzeugen müssen, wie A, B, C etc.. Wir wollen festlegen, dass, nachdem $A + dA$, $B + dB$, $C + dC$ etc. anstelle $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$ etc. eingesetzt worden sind, dass $W + dW$ hervorgeht; und es wird $W + dW = W$ und daher $dW = 0$ sein. Hier wird aber der Wert dW gefunden, wie aus der Natur der Differentiation klar ist, wenn die Größe W, nachdem in jener anstelle der Integralformeln die Buchstaben A, B, C etc. eingesetzt worden sind, differenziert wird, wobei die Buchstaben A, B, C etc. selbst als Variablen behandelt worden sind; und in diesem Differential bezeichnen dA, dB, dC etc. die Differentialwerte der entsprechenden Formeln $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$ etc.. Mit dieser Bezeichnung wird also das genommene Differential der Größe W, wenn es gleich null gesetzt wird, die gesuchte Gleichung zwischen x und y geben. Q.E.I.

KOROLLAR I

32. Wenn also der vorgelegte Ausdruck W eine Funktion solcher Art der Integralformeln $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$ etc. war, der für einen bestimmten Wert von $x = a$ ein Maximum oder Minimum sein muss, dann schreibe man anstelle der Formeln $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$ etc. die Buchstaben A, B, C etc., wonach der Ausdruck W differenziert werde, nachdem diese Buchstaben A, B, C etc. allein als Variablen behandelt worden sind, und das Differential $= 0$ gesetzt werde.

KOROLLAR II

33. In diesem Differential, in dem die Buchstaben AB, B, C etc. mit ihren Differentialen dA, dB, dC etc. enthalten sein werden, werden die Buchstaben A, B, C etc. respektive die Werte der Formeln $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$ etc. bezeichnen, welche sie für $x = a$ gesetzt annehmen; aber die Differentiale dA, dB, dC etc. drücken die Differentialwerte derselben Integralformeln aus, die der Abszisse $x = a$ entsprechen.

KOROLLAR III

34. Aus dem Vorhergehenden ist aber klar, wenn Z, Y, X etc. bestimmte Werte der Größen x, y, p, q etc. waren, dass dann die Differentialwerte dA, dB, dC etc. nicht vom Wert a abhängen; andernfalls aber, wenn X, Y, Z, etc. unbestimmte Funktionen waren, dass dann die Differentialwerte dA, dB, dC etc. zugleich vom Wert a abhängen müssen.

KOROLLAR IV

35. Weil also auf diese Weise W eine Funktion der Buchstaben A, B, C etc. wird, wird ihr Differential eine Form dieser Art haben $FdA + GdB + HdC+$ etc. und daher wird die gesuchte Gleichung $0 = FdA + GdB + HdC+$ etc. sein, wo F, G, H durch A, B, C etc. bestimmte konstante Größen sein werden.

KOROLLAR V

36. Die dem Problem genügende Gleichung wird also aus den Differentialwerten der einzelnen im Ausdruck des Maximums oder Minimums W enthaltenen Integralformeln bestehen, nachdem die einzelnen mit gewissen konstanten Größen

multipliziert worden sind; das Aggregat dieser Produkte wird natürlich gleich null gesetzt die gewünschte Gleichung geben.

BEMERKUNG 1

37. Wir hätten diese Methode, das vorgelegte Problem aufzulösen, aus den Lösungen der zwei vorhergehenden Probleme schon durch Induktion folgern können, aus welchen natürlich schon klar wurde, wenn die Formel des Maximums oder Minimums W entweder ein Produkt aus zwei Integralformeln oder ein Quotient, der aus der Teilung der einen durch die andere entsteht, war, dass dann das Differential des Ausdrucks W auf die erläuterte Weise genommen die dem Problem genügende Gleichung liefert. Es ist aber besser, dieses Problem wegen seiner sehr großen Ausdehnung mit einer gesonderten Lösung abzusichern. In diesem Problem sind nämlich ganz und gar alle Fragen enthalten, die in dieser Art, in dem ein gewisser maximaler oder minimaler Ausdruck verlangt wird, jemals vorgelegt und erdacht werden können, und daher ist durch diese Proposition die absolute Methode der Maxima und Minima völlig ausgeschöpft worden, die wir zuerst zu behandeln in Angriff genommen haben. Außerdem ist es hier zu bemerken, wenn der Ausdruck W nicht nur Integralformeln, wie wir festgelegt haben, umfasst, sondern auch bestimmte Funktionen von x, y, p, q etc., dass dann die Lösung nicht schwerer gemacht wird. Denn auf die gleiche Weise müssen konstante Größen dieser bestimmten Funktionen festgelegt werden, in welche sie natürlich für $x = a$ gesetzt übergehen; aber danach müssen in der Differentiation von W diese Größen daher auch als Konstanten behandelt werden, weil bestimmte Funktionen keine Differentialwerte erhalten. Damit aber besser klar wird, wie Ausdrücke dieser Art behandelt werden sollten, werden in den folgenden Beispielen einige Dinge auftauchen, die diesen Gegenstand vollkommen illustrieren werden.

BEISPIEL I

38. Die in orthogonalen Koordinaten enthaltene Kurve zu finden, in welcher dieser Ausdruck $(1+pp)^{1:2}\int ydx+y\int dx\sqrt{1+pp}$*, ein Maximum oder Minimum sein soll, wenn die Abszisse* $x = a$ *gesetzt wird.*

Wir wollen festlegen, dass die Gleichung zwischen x und y, die dem Geforderten genügt, schon gefunden worden ist und für $x = a$ gesetzt $y = f$ $\sqrt{1+pp} = g$ wird und genauso $\int ydx = A$ und $\int dx\sqrt{1+pp} = B$ wird; es wird gelten

$$dA = nv \cdot dx \quad \text{und} \quad dB = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Der Ausdruck, der maximal oder minimal sein wird, ist also in diesem Fall $gA + fB$, dessen Differential $gdA + fdB$ ist; dieses wird $= 0$ gesetzt die verlangte Gleichung für die Kurve geben. Hier wird natürlich eingesehen, dass die Buchstaben g und f, die aus bestimmten Funktionen entstanden sind, in der Differentiation als konstante Größen behandelt worden sind. Nachdem nun für dA und dB die entsprechenden Werte eingesetzt worden sind und die Division durch nv durchgeführt worden ist, wird diese Gleichung für die gesuchte Kurve entstehen

$$gdx = fd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Es werde $\frac{f}{g} = c$ gesetzt, sodass $\frac{y}{\sqrt{1+pp}} = c$ in dem Fall ist, in dem $x = a$ ist; es wird durch Integrieren gelten

$$x + b = \frac{cp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad p = \frac{x+b}{\sqrt{cc-(x+b)^2}} = \frac{dy}{dx};$$

aus welcher wird

$$y = h \pm \sqrt{c^2 - (x+b)^2}.$$

Die genügende Kurve ist also ein mit dem Radius c beschriebener Kreis, nachdem die Abszissen über irgendeiner Gerade angenommen worden sind und gleichermaßen der Anfang der Abszissen wo auch immer festgelegt wurde. Aber die Größe c, die den Radius des Kreises festlegt, wird aus der bestimmten Abszisse $x = a$ bestimmt, weil $\frac{y}{\sqrt{1+pp}} = c$ in dem Fall sein muss, in dem $x = a$ ist. Es wird aber in diesem Fall

$$y = h \pm \sqrt{c^2 - (a+b)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{c}{\sqrt{cc-(a+b)^2}},$$

durch welche entweder c durch a oder umgekehrt a durch c bestimmt werden kann. Wir wollen festlegen, dass $h = 0$, $b = -c$ ist, sodass die Achse der Durchmesser des Kreises ist und der Anfang der Abszissen im Scheitel festgelegt wird; es wird $y = \sqrt{2cx - xx}$ sein und es wird $(a-c)^2 = 0$ oder $c = a$ werden. Daher wird eingesehen, dass in diesem Fall ein Quadrant des Kreises dem Geforderten genügt. Wenn aber der Anfang der Abszissen an irgendeiner Stelle des Durchmessers genommen wird, wird nur $h = 0$ werden, und wenn positive Ordinaten genommen werden, wird $(a+b)^2 = 0$ oder $b = -a$ werden. Der Durchmesser des Kreises bleibt also unbestimmt und es wird nur der Anteil des auf diese Weise genommenen Kreises genügen, der der Abszisse, die von ihrem Ursprung aus bis hin zum Zentrum des Kreises verlängert wurde, entspricht.

BEISPIEL II

39. Die Gleichung zwischen x und y zu finden, dass für den bestimmten Wert $x = a$ dieser Ausdruck $y^{\int dx\sqrt{1+pp}} \int ydx$ ein Maximum oder Minimum wird.

Für $x = a$ gesetzt werde

$$y = f, \qquad \int dx\sqrt{1+pp} = A \quad \text{und} \quad \int ydx = B,$$

es wird sein

$$dA = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad dB = nv \cdot dx.$$

Es muss also diese Größe $f^A B$ ein Maximum oder Minimum sein, deren Differential $f^A BdAlf + f^A dB$ ist; dieses wird $= 0$ gesetzt $BdAlf = -dB$ geben. Für die gesuchte Gleichung hat man also

$$Blfd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = dx$$

und durch Integrieren

$$x+b=\frac{Bplf}{\sqrt{1+pp}}=\frac{cp}{\sqrt{1+pp}}$$

nachdem $Blf=c$ gesetzt wurde. Man hat also

$$p=\frac{b+x}{\sqrt{cc-(b+x)^2}} \quad \text{und} \quad y=h\pm\sqrt{c^2-(b+x)^2}.$$

Es wird also $f=h\pm(\sqrt{c^2-(b+a)^2}$ für $x=a$ gesetzt sein und

$$B=\int ydx=ha\pm\int dx\sqrt{c^2-(b+x)^2}$$

nachdem nach der Integration $x=a$ gesetzt wurde. Für $Blf=c$ gesetzt wird also der Wert c bekannt werden, wenn welchem x im Kreis mit Radius c gleich genommen wird, wird ein dem Problem genügender Teil abgetrennt werden. Im Übrigen lässt sich aus diesen und Korollar 5 berechnen, sooft die Formel des Maximums oder Minimums irgendeine Funktion dieser zwei Formeln war $\int ydx$ und $\int dx\sqrt{1+pp}$, dass dann die genügende Kurve immer ein Kreis sein wird; es muss nur aus der Lösung die Größe des genügenden Anteils mit Sorgfalt gesucht werden und bestimmt werden.

BEISPIEL III

40. Die Gleichung zwischen x und y zu finden, dass für $x=a$ gesetzt dieser Ausdruck ein Maximum oder Minimum wird $e^{-n\int dx\sqrt{1+pp}}\int e^{n\int dx\sqrt{1+pp}}dx$.

Wir wollen festlegen, dass im vorgelegten Fall, in dem $x=a$ ist, wird

$$n\int dx\sqrt{1+pp}=A \quad \text{und} \quad \int e^{n\int dx\sqrt{1+pp}}dx=B;$$

sodass diese Größe ein Maximum oder Minimum ist $e^{-A}B$, deren Differential $e^{-A}dB-e^{-A}BdA$ ist, welches $=0$ gesetzt diese Gleichung geben wird $dB=BdA$. Aber es ist dA der Differentialwert der Formel $n\int dx\sqrt{1+pp}$, woher gelten wird

$$dA=-nv\cdot d\cdot\frac{np}{\sqrt{1+pp}}$$

und dB ist der Differentialwert der Formel $\int e^{n\int dx\sqrt{1+pp}}dx$, die im zweiten Fall von Paragraph 7 enthalten ist, wo gilt

$$Z=e^{n\int dx\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad \Pi=\int dx\sqrt{1+pp},$$

so dass $Z=e^{n\Pi}$ und $dZ=e^{n\Pi}nd\Pi$ ist, woher $L=e^{n\Pi}n$ sein wird, und die übrigen Buchstaben M, N, P etc. werden $=0$ werden. Weiter wird wegen $\Pi=\int dx\sqrt{1+pp}$ gelten

$$[Z]=\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad d[Z]=\frac{pdp}{\sqrt{1+pp}},$$

woher gelten wird

$$[M] = 0, \quad [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Nun ist

$$\int L dx = n \int e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx,$$

deren Wert für $x = a$ gesetzt $= nB$ sein wird; und daher

$$V = n(B - \int e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx).$$

Durch die gegebene Regel wird also werden

$$dB = nv \cdot dx \left(-\frac{d \cdot [P]V}{dx} \right) = -nv \cdot d \cdot \frac{np(B - \int e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx)}{\sqrt{1+pp}}$$

$$= -nv \cdot d \cdot \frac{nBp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{wegen} \quad dB = BdA.$$

und durch Integrieren wird deshalb gelten

$$\frac{np(B - \int e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx)}{\sqrt{1+pp}} = \frac{nBp}{\sqrt{1+pp}} - nb$$

und daher

$$\frac{b\sqrt{1+pp}}{p} = \int e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx.$$

Aus dieser Gleichung, weil der bestimmte Wert a herausgegangen ist, ist klar, dass die gefundene Gleichung für jeden Wert von x gleichermaßen gilt. Damit wir aber diese Gleichung entwickeln, wird nach Nehmen von Differentialen gelten

$$-\frac{bdp}{p^2\sqrt{1+pp}} = e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx,$$

die mit $n\sqrt{1+pp}$ multipliziert und integriert gibt

$$\frac{nb}{p} + c = e^{n \int dx \sqrt{1+pp}},$$

welcher Exponentialwert in jener Gleichung eingesetzt geben wird

$$\frac{nbdx}{p} + cdx = -\frac{bdp}{p^2\sqrt{1+pp}} \quad \text{oder} \quad dx = -\frac{bdp}{p(nb+cp)\sqrt{1+pp}}.$$

Eine angenehmere Gleichung entsteht aber, wenn $\int dx\sqrt{1+pp} = s$ gesetzt wird, und es wird s der Kurvenbogen sein, wenn x und y normale Koordinaten waren. Daher wird man diese Gleichung haben $nb + cp = e^{ns}p$, die mit dx multipliziert wegen $dy = pdx$ in diese übergeht $nbdx + cdy = e^{ns}dy$. Weil aber für $x = 0$

gesetzt der Bogen s verschwinden muss, ist es notwendig, dass in diesem Fall $\frac{nb}{p}+c=0$ ist; daher wird deshalb entweder, nachdem der Anfang der Kurve gegeben worden ist, die Konstante c bestimmt werden oder umgekehrt aus c die Lage der ersten Tangente bekannt werden. Im Übrigen, wenn wir diese Frage ein wenig sorgfältiger betrachten, werden wir entdecken, dass sie schon in einem gewissen Beispiel des vorhergehenden Kapitels von Paragraph 45 enthalten ist. Weil nämlich unser Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum sein muss, ist

$$e^{-n\int dx\sqrt{1+pp}}\int e^{n\int dx\sqrt{1+pp}}dx,$$

werde er $=W$ gesetzt, es wird sein

$$e^{n\int dx\sqrt{1+pp}}W=\int e^{n\int dx\sqrt{1+pp}}dx,$$

und durch Differenzieren wird werden

$$dW+nW\,dx\sqrt{1+pp}=dx.$$

Der Ausdruck des Maximums oder Minimums W ist also durch eine Differentialgleichung gegeben, die im vierten Fall von Paragraph 7 enthalten ist und mit der entsprechenden Methode behandelt auf dieselbe Gleichung führt, die wir hier gefunden haben. Die Frage, die jene in sich umfasst, haben wir aber schon oben in Paragraph 45 des vorhergehenden Kapitels (p. 120, 1°) behandelt, zu welchem sich dieser Fall hinzugefügt betrachten lässt. Nachdem aber ein Vergleich angestellt worden ist, wird die größte Übereinstimmung der verschiedenen Lösungen, die freilich versucht werden können, desselben Problems, erkannt werden.

BEISPIEL IV

41. Die Kurve zu finden, in welcher für die gegebene Abszisse $=a$ dieser Ausdruck $\frac{\int dx\sin Ay\cdot\sqrt{1+pp}}{\int dx\cos Ay\cdot\sqrt{1+pp}}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Für $x=a$ gesetzt werde

$$\int dx(1+pp)^{1:2}\sin Ay=A\quad\text{und}\quad\int dx(1+pp)^{\frac{1}{2}}\cos Ay=B;$$

es wird durch die Differentialwerte gelten

$$dA=nv\cdot dx\left((1+pp)^{1:2}\cos Ay-\frac{1}{dx}d\cdot\frac{p\sin Ay}{\sqrt{1+pp}}\right)$$

und

$$dB=nv\cdot dx\left(-(1+pp)^{1:2}\sin Ay-\frac{1}{dx}d\cdot\frac{p\cos Ay}{\sqrt{1+pp}}\right).$$

Weil also $\frac{A}{B}$ ein Maximum oder Minimum sein muss, wird $BdA=AdB$ sein; für $\frac{A}{B}=m$ gesetzt wird also werden

$$(1+pp)^{1:2}dx\cos Ay-d\cdot\frac{p\sin Ay}{\sqrt{1+pp}}=-m(1+pp)^{\frac{1}{2}}dx\sin Ay-md\cdot\frac{p\cos Ay}{\sqrt{1+pp}}.$$

es werde mit p multipliziert, es wird sein, wegen

$$d\cdot(1+pp)^{1:2}\sin Ay = dy(1+pp)^{1:2}\cos Ay + \frac{pdp\sin Ay}{\sqrt{1+pp}}$$

und

$$d\cdot(1+pp)^{1:2}\cos Ay = dy(1+pp)^{1:2}\sin Ay + \frac{pdp\cos Ay}{\sqrt{1+pp}}:$$

$$d\cdot(1+pp)^{1:2}\sin Ay - d\cdot\frac{pp\sin Ay}{\sqrt{1+pp}} = md\cdot(1+pp)^{1:2}\cos Ay - md\cdot\frac{pp\cos Ay}{\sqrt{1+pp}};$$

diese liefert integriert und reduziert

$$\frac{\sin Ay}{\sqrt{1+pp}} = \frac{m\cos Ay}{\sqrt{1+pp}} + b \quad \text{oder} \quad b\sqrt{1+pp} = \sin Ay - m\cos Ay;$$

wo zu bemerken ist, dass, wenn $x=a$ gesetzt wird, werden muss

$$m = \frac{\int dx(1+pp)^{1:2}\sin Ay}{\int dx(1+pp)^{1:2}\cos Ay}.$$

Es sei $m = \frac{\sin An}{\cos An} = \operatorname{tang} An$, es wird werden

$$b\sqrt{1+pp} = \frac{\sin A(y-n)}{\cos An} \quad \text{und} \quad y = n + A\sin b(1+pp)^{1:2}\cos An.$$

Weil aber $dy = pdx$ ist, wird $dx = \frac{dy}{p}$ sein. Aber es ist

$$dy = \frac{cpdp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$$

nachdem $b\cos An = c$ gesetzt worden ist . Aus diesen stellt man auf

$$x = \int \frac{cdp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$$

und

$$y = \int \frac{cdp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}};$$

aber die Länge der Kurve wird sein

$$= \int \frac{cdp}{\sqrt{1-cc-ccpp}} = A\sin\frac{cp}{\sqrt{1-cc}}.$$

Daher, wenn der Kurvenbogen s genannt wird, wird man diese gefällige Gleichung haben

$$dx\sin As = \frac{cdy}{\sqrt{1-cc}}.$$

Die Konstruktion folgt aber aus den vorherigen Formeln von selbst.

BEMERKUNG 2

42. In diesen Kapiteln haben wir also den Teil der auf das Finden von gekrümmten Linien angewandten Methode der Maxima und Minima hinter uns gebracht, welche wir die absolute genannt haben, in welcher immer eine gekrümmte Linie verlangt zu werden pflegt, die für einen gewissen Wert der Abszisse oder der einen Variable x irgendeinen unbestimmten Ausdruck zum Maximum oder Minimum hat. Denn dieser Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum sein muss, wird entweder eine gewisse Integralformel $\int Zdx$ sein, sodass Z irgendeine entweder bestimmte oder unbestimmte Funktion von x, y, p, q etc. ist, für welche wir die Methode in den vorhergehenden Kapiteln angegeben haben; oder jener Ausdruck des Maximums oder Minimums wird in sich mehrere Integralformeln solcher Art enthalten, so dass er eine Funktion von zwei oder mehreren Integralformeln ist; für diesen Fall ist eine geeignete Methode in diesem Kapitel erklärt worden und an Beispielen illustriert worden. Aber die ganze Methode, die wir hier gegeben haben, ist auf das Finden von Differentialwerten gestützt, die den einzelnen Integralformeln entsprechen, die entweder selbst ein Maximum oder Minimum sein müssen oder im Ausdruck des Maximums oder Minimums enthalten sind, und daher wird die ganze Lösungsmethode auf jene Fälle zurückgeführt, welche wir in Paragraph 7 dieses Kapitels gesammelt dargestellt haben. Wer also jene Fälle in Erinnerung behält oder griffbereit hat, der wird gerüstet sein, um alle Probleme dieser Art bequem zu lösen. Aber in der Tat legen die dort aufgezählten Fälle nicht nur die absolute Methode der Maxima und Minima fest, sondern auch die relative Methode, welche wir im Folgenden angehen werden, werden sie abfertigen; daher wird der sehr große Nutzen jener Fälle in jeder der beiden Methoden reichlich erkannt werden. Wir werden aber diese Behandlung in zwei Kapiteln vollenden, in deren erstem wir allen Kurven, aus denen die gesuchte gefunden werden muss, eine gewisse gemeinsame Eigenschaft, im zweiten aber mehrere zuteilen werden.

Kapitel V

Die Methode, unter allen mit derselben Eigenschaft versehenen Kurven die zu finden, die sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut

DEFINITION I

1. Eine allgemeine Eigenschaft ist die Integralformel oder der unbestimmte Ausdruck, der allen Kurven, aus denen die gesuchte bestimmt werden muss, gleichermaßen zufällt.

BEMERKUNG 1

2. Bisher haben wir die absolute Methode der Maxima und Minima angegeben, in welcher immer ganz und gar alle Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, verlangt zu werden pflegten, die sich der Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums erfreuen würde. Nun schreiten wir aber zur relativen Methode voran, in welcher wir eine mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehene Kurve zu bestimmen lehren werden, nicht aus ganz und gar allen Linien, die derselben Abszisse entsprechen, sondern aus den, freilich unzähligen, gekrümmten Linien, denen eine gewisse vorgelegte Eigenschaft oder auch mehrere gemeinsam sind. Und freilich werden wir in diesem Kapitel unzählige Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, betrachten, die eine gewisse gemeinsame Eigenschaft haben; und aus diesen werden wir eine Linie suchen, in welcher irgendein unbestimmter Ausdruck einen maximalen oder minimalen Wert erhält. In dieser Art ist besonders das isoperimetrische Problem berühmt,

das am Anfang dieses Jahrhunderts publik gemacht wurde, in welchem unter allen Kurven derselben Länge, die freilich derselben Abszisse entsprechen, die bestimmt werden musste, die die Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums enthalten würde. Danach ist aber die Frage in weiterem Sinne aufgefasst worden, dass diese Bestimmung nicht nur unter allen Kurven derselben Länge geschehen würde, sondern auch unter allen Kurven, die mit einer anderen gewissen gemeinsamen Eigenschaft versehen sind; diese Frage haben wir in diesem Kapitel zu behandeln in Angriff genommen. Weil also die Kurve nicht aus ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, herauszusuchen ist, sondern lediglich aus unzähligen, welchen eine gewisse vorgelegte Eigenschaft gleichermaßen zufällt, muss vor Allem diese Eigenschaft selbst betrachtet werden, die wir hier mit dem Namen der gemeinsamen Eigenschaft bezeichnen wollen. Diese gemeinsame Eigenschaft, wie zum Beispiel die Gleichheit der Länge der Kurven, muss also alle Zwischenpunkte betreffen und dieser Sache wegen wird sie eine unbestimmte Funktion sein, die nicht aus einem einzigen Kurvenelement, sondern aus der Lage der ganzen Kurve bestimmt wird. Deswegen wird die gemeinsame Eigenschaft entweder eine unbestimmte Integralformel oder ein Ausdruck, der mehrere Integralformeln solcher Art umfasst, sein. Sie wird also ganz und gar auf die gleiche Weise beschaffen sein wie die Formel des Maximums oder Minimums selbst. Es werden sich also dieselben Varietäten und Unterteilungen, die wir zuvor über den Ausdruck des Maximums und Minimums gemacht haben und dann behandelt haben, gleichermaßen auf die gemeinsame Eigenschaft beziehen.

KOROLLAR I

3. Wenn also die gemeinsame Eigenschaft vorgelegt worden ist, die B sei, dann sind alle Kurven zu betrachten, die für dieselbe gegebene Abszisse denselben Wert von B enthalten, und aus diesen muss die bestimmt werden, die maximalen oder minimalen hat.

KOROLLAR II

4. In Problemen, die sich hierauf beziehen, müssen also zwei Sachen gegeben sein, die gemeinsame Eigenschaft B und der Ausdruck des Maximums oder Minimums A. Nachdem diese gegeben worden sind, wird unter allen Kurven, die für eine gegebene Abszisse denselben Wert B enthalten, die bestimmt werden müssen, die für dieselbe Abszisse den maximalen oder minimalen Wert von A hat.

KOROLLAR III

5. Es sind aber nicht nur unzählige Kurven gegeben, die für eine gegebene Abszisse dieselbe gemeinsame Eigenschaft haben, sondern sie sind auch auf unendlich viele Weisen gegeben. Nachdem nämlich irgendeine Kurve nach Belieben angenommen wurde, wird sie einen bestimmten Wert der vorgelegten gemeinsamen Eigenschaft haben; außer dieser werden aber unzählige andere gegeben sein, die denselben Wert der gemeinsamen Eigenschaft für dieselbe Abszisse enthalten.

KOROLLAR IV

6.Nachdem also irgendein unbestimmter Ausdruck vorgelegt wurde, werden unzählige Arten unendlich vieler Kurven gegeben sein, von denen eine beliebige Art unendlich viele Kurven in sich umfasst, die für dieselbe gegebene Abszisse denselben Wert jenes Ausdrucks enthalten.

KOROLLAR V

7. Weil also unendlich viele Arten gegeben sind, von denen die einzelnen unzählige gekrümmte Linien erfassen, welchen der für die gemeinsame Eigenschaft vorgelegte Ausdruck gleichermaßen zufällt, wird in einer Art auch eine Kurve gegeben sein, die für die übrigen Kurven derselben Art einen anderen Ausdruck in maximalem oder minimalem Grade enthält.

KOROLLAR VI

8. Weil ja also aus einer beliebigen Art eine mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehene Kurve gefunden wird, werden insgesamt unendlich viele genügende Kurven solcher Art gefunden werden, von denen jede so beschaffen sein wird, dass sie unter allen anderen, die sich derselben Eigenschaft erfreuen, mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist.

BEMERKUNG 2

9. All diese Dinge werden mehr illustriert werden, wenn wir die gemeinsame Eigenschaft, über welche wir bisher im Allgemeinen geredet haben, definieren. Es sei also die gemeinsame Eigenschaft die Formel, die die Länge des Kurvenbogens ausdrückt, der Ausdruck des Maximums oder Minimums sei aber $\int Zdx$; sodass unter allen Kurven, die einander gleiche derselben Abszisse entsprechende Bogen haben, die bestimmt werden muss, in welcher für dieselbe Abszisse $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum wird. Es ist aber klar, dass nicht nur unendlich viele für dieselbe Abszisse von der Länge her gleiche gekrümmte Linien gegeben sind, sondern dies auch auf unendlich viele Weisen geschehen kann. Es sei nämlich die gemeinsame Abszisse $= a$ und es werde irgendeine Länge c größer als a genommen, es werden dann unendlich viele gerade wie gekrümmte Linien dargeboten werden können, die Länge welcher einzelnen $= c$ ist; und unter all diesen wird eine bestimmt werden können, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist. Anstelle von c können aber auch daher unendlich viele Größen angenommen werden, weil keine andere Bedingung vorhanden ist, außer dass $c > a$ ist; und jeder beliebige für c angenommene Wert wird eine mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehene Kurve geben. Deswegen werden für unendlich viele Werte von c unendlich viele der Frage genügende gekrümmte Linien gefunden werden. Und dennoch ist deshalb die Frage nicht für unbestimmt zu halten, denn die Lösung selbst, die unendlich viele genügende Kurven liefert, ist so zu deuten, dass irgendeine dieser gefundenen Kurven unter allen anderen gleich langen den Wert der Formel $\int Zdx$ im maximalen oder minimalen Grade besetzt. Es ist aber klar, dass dasselbe, was wir hier über gleiche Kurvenbogen gezeigt haben, über irgendeine andere unbestimmte Formel oder unbestimmten Ausdruck gelten muss. Wenn so unter allen Kurven, die für die gegebene Abszisse $x = a$ denselben Wert der Formel $\int Ydx$ enthalten, die verlangt wird, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, dann werden freilich unendlich viele genügende Linien gefunden werden; aber diese werden sich so voneinander unterscheiden, dass eine beliebige unter allen möglichen gekrümmten Linien,

die den Wert der Formel $\int Y dx$ miteinander gemein haben, den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Z dx$ enthält.

PROPOSITION I THEOREM

10. Dieselbe Kurve, die sich unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, der Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums erfreut, wird sich zugleich unter allen Kurven, die mit irgendeiner gemeinsamen Eigenschaft versehen sind, derselben Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen.

BEWEIS. Es sei der Ausdruck des Maximums oder Minimums $= A$, die gemeinsame Eigenschaft aber $= B$, und es wird so A wie B entweder eine unbestimmte Integralformel oder ein aus mehreren Formeln dieser Art zusammengesetzter Ausdruck sein. Wir wollen nun festlegen, dass die Kurve schon gefunden worden ist, die unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, den maximalen oder minimalen Ausdruck A enthält; die Kurve wird einen gewissen Wert des Ausdrucks B enthalten; außer dieser werden aber unzählige andere gegeben sein, welchen derselbe Wert des Ausdrucks B zufällt und diese unzähligen Kurven sind alle schon in jenen ganz und gar allen Kurven enthalten, aus welchen die, in welcher der Ausdruck A ein Maximum oder Minimum ist, gefunden worden ist. Weil also diese Kurve sich unter ganz und gar allen Kurven der vorgelegten Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut, wird dieselbe auch unter jenen unendlich vielen Kurven, die den Ausdruck B einander gemein haben, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdruckes A besitzen. Q.E.D.

KOROLLAR I

11. Die absolute Methode dient also auch zum Lösen der Probleme der relativen Methode, indem sie immer eine genügende Kurve darbietet. Aber dennoch wird die vollständige Lösung nicht gewonnen.

KOROLLAR II

12. Die Kurve, die unter allen den maximalen oder minimalen Ausdruck A hat, wird also eine aus jenen unendlich vielen sein, deren einzelne unter allen anderen, die sich der gemeinsamen Eigenschaft B erfreuen, denselben maximalen oder minimalen Ausdruck A haben.

KOROLLAR III

13. Die Lösung des Problems also, in welchem unter allen Kurven, die mit derselben gemeinsamen Eigenschaft B versehen sind, die gesucht wird, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist, wird sich weiter erstrecken, als wenn uneingeschränkt unter allen Kurven die gesucht werden würde, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist; jene Lösung wird aber diese als Spezialfall in sich umfassen.

PROPOSITION II PROBLEM

14. Die Methode Probleme aufzulösen, in denen unter allen Kurven, die sich einer gewissen gemeinsamen Eigenschaft erfreuen, die verlangt wird, die sich *der Eigenschaft eines gewissen vorgelegten Maximums oder Minimums erfreut, im Allgemeinen zu umreißen.*

LÖSUNG. Jedes Maximum oder Minimum ist so beschaffen, dass (Fig. 15) nach einer unendlich kleinen Änderung sein Wert überhaupt nicht verändert wird. Deswegen, wenn die Kurve az unter allen Kurven, die derselben Abszisse AZ entsprechen und die sich freilich der gemeinsamen Eigenschaft B erfreuen, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdrucks A hat, wird sie denselben Wert beibehalten, wenn selbiger eine solche unendlich kleine Veränderung beigefügt wird, von welcher die gemeinsame Eigenschaft B nicht gestört wird.

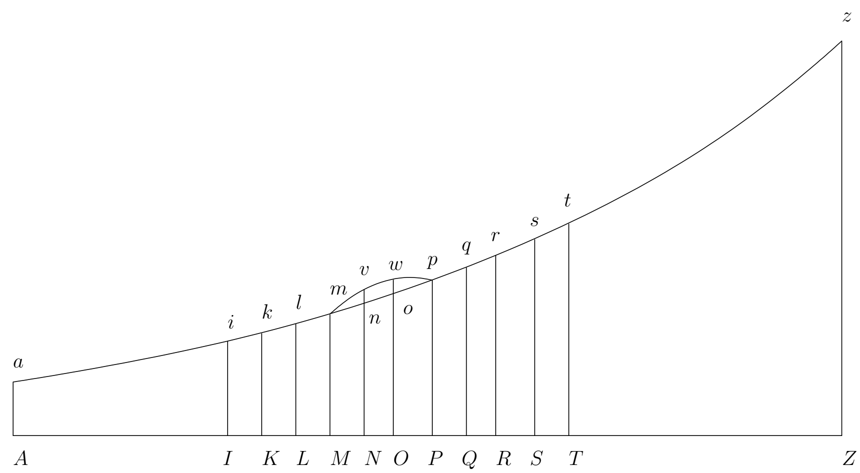

FIG. 15

Dafür genügt es aber nicht, wie wir es gemacht haben, eine einzige Ordinate, beispielsweise Nn, um das unendlich kleine Stück nv vermehrt zu haben; weil nämlich auf diese Weise die ganze Veränderung mit einer einzigen Gleichung bestimmt wird, kann es durch sie nicht bewerkstelligt werden, dass so die gemeinsame Eigenschaft B der Kurve selbst und der veränderten gleichermaßen zufällt, wie der Ausdruck des Maximums oder Minimums A. Deswegen muss die zu verursachende Veränderung mit zwei Bedingungen bestimmt werden; diese wird aber erhalten werden, wenn die zwei Ordinaten Nn und Oo um die unendlich kleinen Stücke nv und $o\omega$ vermehrt werden. Wenn daher also diese Kurve aufgefasst wird, auf diese Weise verändert zu werden, ist zuerst zu bewirken, dass die gemeinsame Eigenschaft sowohl der Kurve selbst als auch veränderten gleichermaßen zufällt; darauf wird auch der Ausdruck des Maximums oder Minimums bei jeder der beiden Kurven denselben Wert beibehalten müssen. Das erste wird geleistet werden, wenn der Differentialwert des Ausdrucks, in welchem die gemeinsame Eigenschaft enthalten ist, gesucht wird, der aus der Translation der zwei Punkte n und o nach v und ω abstammt, und er verschwindend festgelegt wird; der zweiten Bedingung wird aber genügt werden, wenn auf die gleiche Weise der Differentialwert des Ausdrucks, der ein Maximum oder Minimum sein muss, gesucht wird, der aus den zwei Stücken nv und $o\omega$ herstammt, und gleich null gesetzt wird. Auf diese Weise werden zwei Gleichungen erhalten werden, die eine aus der gemeinsamen Eigenschaft, die andere aus dem Ausdruck des Maximums oder Minimums; jede von beiden wird aber ein Form solcher Art haben $S \cdot nv + T \cdot o\omega = 0$; in dieser werden S und T sich auf die Kurve beziehende Größen sein. Aus zwei Gleichungen solcher Art werden aber die Stücke nv und $o\omega$ eliminiert werden und es wird die Gleichung für die gesuchte Kurve hervorgehen, die unter allen anderen Kurven, die mit derselben gemeinsamen Eigenschaft b versehen sind, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdrucks A hat. Q.E.I.

KOROLLAR I

15. Die Lösung von Problemen dieser Art wird also auch auf das Finden von Differentialwerten zurückgeführt; aber die Differentialwerte an sich unterscheiden sich von denen, welche wir zuvor gegeben haben, darin, dass sie aus der Translation zweier Punkte der Kurve bestimmt werden müssen.

KOROLLAR II

16. Es müssen also in jedem Problem zwei Differentialwerte solcher Art, die von den zwei Stücken nv und $o\omega$ abstammen, bestimmt werden, der eine für die gemeinsame Eigenschaft, der andere für den Ausdruck des Maximums oder Minimums.

KOROLLAR III

17. Nachdem aber in einem Problem diese zwei Differentialwerte gefunden worden sind, muss jeder der beiden gleich null gesetzt werden, woher zwei Gleichungen entstehen werden, die durch Eliminieren der angenommenen Stücke nv und $o\omega$ eine Gleichung liefern werden, die die Natur der gesuchten Kurve ausdrückt.

KOROLLAR IV

18. Wenn also unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen und die gleichermaßen mit der gemeinsamen Eigenschaft B versehen sind, die verlangt wird, in welcher der Ausdruck A ein Maximum oder ein Minimum wird, dann müssen auch die Differentialwerte jedes der beiden Ausdrücke A und B, die aus den zwei Stücken nv und $o\omega$ entstehen, gesucht werden und gleich null gesetzt werden; wenn aus diesen zwei Gleichungen die Stücke nv und $o\omega$ eliminiert werden, wird die Gleichung für die gesuchte Kurve entstehen.

KOROLLAR V

19. In dieser Operation werden deshalb die beiden Ausdrücke A und B ganz und gar gleich behandelt und es geht nicht in die Betrachtung ein, welcher von beiden die gemeinsame Eigenschaft und welcher das Maximum oder Minimum bezeichnet. Daher ist es klar, dass dieselbe Lösung hervorgehen muss, wenn die Ausdrücke A und B miteinander vertauscht werden.

KOROLLAR VI

20. Es wird also dieselbe Lösung Geltung haben, ob unter allen Kurven, die sich der gemeinsamen Eigenschaft B erfreuen, die gesucht wird, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist, oder umgekehrt unter allen Kurven, die sich

der gemeinsamen Eigenschaft B erfreuen, die gesucht wird, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist.

BEMERKUNG 1

21. Dass die beiden Ausdrücke A und B, obwohl sie für sich betrachtet ganz und gar verschiedene Sachen bezeichnen, miteinander vertauschbar sind, ist aus der Natur der Lösung von selbst klar. Wenn wir daher nämlich auf die zwei Stücke $n\nu$ und $o\omega$ achten, um welche die Ordinaten Nn und Oo vermehrt werden, müssen sie zuerst so beschaffen sein, dass die gemeinsame Eigenschaft B so in der Kurve selbst wie in der veränderten denselben Wert erhält; natürlich muss die gemeinsame Eigenschaft B der Kurve $amnopz$ und $am\nu\omega pz$ gleichermaßen zufallen; darauf ist auf die gleiche Weise durch dieselben Stücke $n\nu$ und $o\omega$ zu bewirken, dass der Ausdruck A, der ein Maximum oder Minimum sein muss, so für die Kurve $amnopz$ wie für $am\nu\omega pz$ denselben Wert erhält. Und daher bringt so die gemeinsame Eigenschaft wie die Natur des Maximums oder Minimums vollkommen dieselbe Bedingung in die Rechnung ein; daher ist es klar, dass die beiden gegebenen Ausdrücke, von denen der eine die gemeinsame Eigenschaft, der andere die Art des Maximums oder Minimums enthält, untereinander vertauscht und miteinander vermischt werden können, ohne dass die Lösung verändert wird. Dieser Sache wegen genügt es also bei der Lösung von Problemen dieser Art, jene beiden Ausdrücke zu kennen; und um die Lösung auszuführen, ist es nicht von Nöten zu wissen, welcher der beiden die gemeinsame Eigenschaft oder das Maximum oder Minimum bezeichnet. Wenn so beispielsweise unter allen Kurven von gleicher Länge die gesucht wird, die die größte Fläche erfasst, wird dieselbe Kurve gefunden, die hervorgeht, wenn unter allen Kurven, die gleiche Flächen einschließen, die gesucht wird, die die kürzeste ist oder die kleinste Länge hat. Diese Dinge verhalten sich so, wenn die Natur des Maximums oder Minimums, das gesucht wird, so beschaffen war, dass ihr Differentialwert $= 0$ ist. Nun haben wir aber schon oben beobachtet, dass Maxima und Minima von zweifacher Art gegeben sind, in der einen von welchen der Differentialwert $= 0$ ist, in der anderen aber $= \infty$. Hier wollen wir aber nur Maxima und Minima der ersten Art betrachten; denn in dieser relativen Methode kann die zweite Art überhaupt nicht auftreten. Wenn daher nämlich der Differentialwert, der dem Ausdruck des Maximums oder Minimums entspricht, unendlich groß festgelegt wird, dann wird aus diesem allein die Gleichung für die Kurve gefunden und daher geht die gemeinsame Eigenschaft überhaupt nicht in die Rechnung ein. Daher, wenn ein Maximum oder Minimum dieser Art in den absoluten Methode auftritt, wird sich dieselbe Kurve in der relativen Methode derselben Eigenschaft erfreuen, was für eine gemeinsame Eigenschaft auch immer hinzugefügt wird. Weil sich also die ganze Bedeutung der Lösung von Problemen dieser Art um das Finden von Differentialwerten dreht, die aus den zwei Stücken $n\nu$ und $o\omega$ entstehen, werden wir die Methode angeben, Differentialwerte solcher Art für irgendeinen unbestimmten Ausdruck zu finden, und das auf die Weise, die wir oben gebraucht haben, um die Differentialwerte zu finden, die aus dem einen Stück $n\nu$ entstehen.

PROPOSITION III PROBLEM

22. Nachdem (Fig. 15) irgendein unbestimmter Ausdruck vorgelegt wurde, der auf die gegebene Abszisse AZ bezogen werde, seinen Differentialwert zu finden, der aus der Translation der zwei Punkte n und o der Kurve nach v und ω entsteht.

LÖSUNG. Wir wollen die Abszisse $AI = x$ und die Ordinate $Ii = y$ setzen, es wird $Kk = y'$, $Ll = y''$, $Mm = y'''$, $Nn = y^{IV}$, $Oo = y^{V}$, $Pp = y^{VI}$ etc. sein. Von diesen Ordinaten erfahren nur zwei, nämlich y^{IV} und y^{V}, von den Stücken nv und $o\omega$, die selbigen hinzugefügt wurden, eine Veränderung. Es wird also der Differentialwert der Ordinate $y^{IV} = nv$ und der Differentialwert der Ordinate y^{V} wird $= o\omega$ sein, der Differentialwert von allen übrigen Ordinaten wird aber $= 0$ sein. Daher wird man die Differentialwerte aller sich auf die Kurve beziehenden Größen p, q, r, s etc. haben, sofern sie von diesen zwei Ordinaten y^{IV} und y^{V} abhängen. Weil so $p = \frac{y'-y}{dx}$ ist, wird der Differentialwert von $p = 0$ und in gleicher Weise der von $'$ und p''; aber weil $p''' = \frac{y^{IV}-y'''}{dx}$ ist, wird der Differentialwert von $p''' = \frac{nv}{dx}$ sein; und wegen $p^{IV} = \frac{y^{V}-y^{IV}}{dx}$ wird der Differentialwert von $p^{IV} = \frac{o\omega}{dx} - \frac{nv}{dx}$ sein und weiter wird der Differentialwert von $p^{V} = -\frac{o\omega}{dx}$. sein. Darauf, weil $q = \frac{p'-p}{dx}$ ist, wird der Differentialwert von $q'' = \frac{nv}{dx}$, von $q''' = \frac{o\omega}{dx^2} - \frac{2nv}{dx^2}$ von $q^{IV} = -\frac{2o\omega}{dx^2} + \frac{nv}{dx^2}$, von $q^{V} = \frac{o\omega}{dx^2}$ sein. Und auf diese Weise lässt sich gleichermaßen zu den folgenden Größen r, s etc. mit ihren derivierten fortschreiten; und daher wird die folgende Tabelle entstehen, in welcher die Differentialwerte dieser einzelnen Größen dargeboten werden:

$d \cdot y^{IV}$	$= nv$		
$d \cdot y^{V}$	$= o\omega$	$d \cdot q''$	$= \frac{nv}{dx^2}$
$d \cdot p'''$	$= \frac{nv}{dx}$	$d \cdot q'''$	$= -\frac{2nv}{dx^2} + \frac{o\omega}{dx^2}$
$d \cdot p^{IV}$	$= -\frac{nv}{dx} + \frac{o\omega}{dx}$	$d \cdot q^{IV}$	$= \frac{nv}{dx^2} - \frac{2o\omega}{dx^2}$
$d \cdot p^{V}$	$= -\frac{o\omega}{dx}$	$d \cdot q^{V}$	$= \frac{2o\omega}{dx^2}$
$d \cdot r'$	$= +\frac{nv}{dx^3}$	$d \cdot s$	$= +\frac{nv}{dx^4}$
$d \cdot r''$	$= -\frac{3nv}{dx^3} + \frac{o\omega}{dx^3}$	$d \cdot s'$	$= -\frac{4nv}{dx^4} + \frac{o\omega}{dx^4}$
$d \cdot r'''$	$= +\frac{3nv}{dx^3} - \frac{3o\omega}{dx^3}$	$d \cdot s''$	$= +\frac{6nv}{dx^4} - \frac{4o\omega}{dx^4}$
$d \cdot r^{IV}$	$= -\frac{nv}{dx^3} + \frac{3o\omega}{dx^3}$	$d \cdot s'''$	$= -\frac{4nv}{dx^4} + \frac{6o\omega}{dx^4}$
$d \cdot r^{V}$	$= -\frac{o\omega}{dx^3}$	$d \cdot s^{IV}$	$= +\frac{nv}{dx^4} - \frac{4o\omega}{dx^4}$
		$d \cdot s^{V}$	$= +\frac{o\omega}{dx^4}$
etc.		etc.	

Aus dieser Tabelle wird erkannt, dass in den Differentialwerten genauso viele mit dem Stück $o\omega$ versehene Terme auftauchen, wie mit dem Stück nv, und dass bei jeden von beiden die gleichen Koeffizienten vorhanden sind; der Unterschied aber darin besteht, dass einem beliebigen mit dem Stück $o\omega$ behaftetem Term die der unmittelbar folgende Größe entspricht, welcher der gleiche mit dem Stück nv versehene Term entspricht. So, während der Term $-\frac{2nv}{dx^2}$ im Differentialwert der Größe q''' gefunden wird, ist genauso der Term $-\frac{2o\omega}{dx^2}$ im Differentialwert der folgenden Größe q^{IV} vorhanden. Darauf wird wegen der Terme der zwei Arten, die in den Differentialwerten auftauchen, von welchen die einen das Stück nv, die anderen das Stück $o\omega$ involvieren, der Differentialwert irgendeines unbestimmten Ausdrucks eine Form dieser Art haben $nv \cdot I + o\omega \cdot K$; über diese ist zuerst klar, dass das erste Glied $nv \cdot I$ der Differentialwert desselben Ausdruckes ist, der entsteht, wenn allein das Stück nv betrachtet wird, und daher wird $nv \cdot I$ jener Differentialwert selbst sein, welchen wir oben für jeden sich ergebenden Fall zu bestimmen gelehrt haben, so dass sich dieses Glied durch die oben angegebenen Vorschriften für jeden Ausdruck darbieten lässt. Was aber das andere Glied $o\omega \cdot K$ betrifft, weil die einzelnen Glieder, in denen $o\omega$ enthalten ist, immer den diesen folgenden Größen entsprechen, den die gleichen Terme entsprechen, die das Stück nv involvieren, ist klar, dass die Größe K der Wert sein wird, welchen die Größe I an unmittelbar folgender Stelle annimmt, und deshalb $K = I' = I + dI$ ist. Daher, weil wir das Glied $nv \cdot I$ aus den schon oben gegebenen Vorschriften angeben können, wird aus diesem weiter das andere Glied $o\omega \cdot K = o\omega(I + dI)$ bekannt werden. Es sei also V irgendein unbestimmter Ausdruck, dessen Differentialwert, der aus den beiden Stücken nv und $o\omega$ entsteht, bestimmt werden muss. Wir wollen festlegen, dass sein Differentialwert, der aus dem einen Stück nv entsteht, $= nv \cdot I$ ist, und der Differentialwert, der aus den beiden Stücken nv und $o\omega$ entsteht, wird $= nv \cdot I + o\omega \cdot I'$ oder $= nv \cdot I + o\omega(I + dI)$ sein; dieser wird also mit Hilfe der oben gegebenen Regeln leicht angegeben werden können. Q.E.I.

KOROLLAR I

23. Wir können also nun die Differentialwerte, die aus den zwei Stücken nv et $o\omega$ entstehen, derselben Ausdrücke, deren Differentialwerte, die aus einem einzigen Stück nv entstehen, wir zu finden gelehrt haben, bestimmen.

KOROLLAR II

24. Diese Methode wird also gelten, so um Differentialwerte von Ausdrücken zu finden, die nicht von der Größe der vorgelegten Abszisse AZ abhängen, wie um die zu finden, die von der Länge dieser Abszisse abhängen.

KOROLLAR III

25. Ja sogar, wenn der vorgelegte Ausdruck, der entweder die gemeinsame Eigenschaft enthält oder ein Maximum oder Minimum sein muss, eine Funktion von zwei oder mehreren Integralformeln war, wird ihr Differentialwert, der aus den zwei Stücken nv und $o\omega$ entsteht, nach demselben Gesetz bestimmt werden.

BEMERKUNG 1

26. In den oberen Kapiteln haben wir gesehen, dass der Differentialwert irgendeines Ausdrucks, der aus dem einen Stück nv entsteht, eine Form dieser Art haben muss $nv \cdot dx \cdot T$ oder $nv \cdot Tdx$, wo T eine endliche Größe bezeichnet; daher wird der Differentialwert, der aus den zwei Stücken nv und $o\omega$ entsteht, desselben Ausdrucks $= nv \cdot Tdx + o\omega \cdot T'dx$ sein, so wie wir in der Lösung gezeigt haben. Dieselbe Formel kann aber leicht auf diese Weise gezeigt werden: Wenn natürlich $o\omega = 0$ gesetzt wird, muss natürlich derselbe Differentialwert, der aus dem einen Stück nv entsteht und den wir oben zu finden gelehrt haben, hervorgehen und es wird $nv \cdot Tdx$ sein. Wenn aber $nv = 0$ gesetzt wird und allein

das andere Stück $o\omega$ betrachtet wird, wird der Differentialwert auf die gleiche Weise gefunden werden, wie die, die wir oben benutzt haben; er wird aber nicht $= o\omega \cdot Tdx$ sein; denn weil das Stück $o\omega$ in der folgenden Position angenommen wird, muss anstelle von T in gleicher Weise sein folgender Wert genommen werden, sodass der wahre Differentialwert $= o\omega \cdot T'dx$ sein wird. Wenn daher also jedes der beiden Stücke nv und $o\omega$ zusammen betrachtet wird, wird der Differentialwert $= nv \cdot Tdx + o\omega \cdot T'dx$ sein, weil in der Rechnung selbst die Stücke nv und $o\omega$ niemals miteinander vermischt werden, sondern jedes von beiden immer einzeln behandelt werden kann. Damit wir aber diese Dinge an die im oberen Kapitel eingeführte Bezeichnungsweise anpassen, wollen wir festlegen, dass V irgendein unbestimmter Ausdruck ist, die für die bestimmte Abszisse $AZ = a$ den Wert $= A$ erhält, und sein Differentialwert, der aus dem Stück nv entsteht, $= nv \cdot dA$ ist, wo dA dasselbe bezeichnet, wie zuvor Tdx; dieser Wert dA wird aus dem Ausdruck V auf die in den vorhergehenden Kapiteln erläuterte Weise gefunden werden können. Nachdem dieser gefunden worden ist, wird der Differentialwert desselben Ausdruckes V, der aus den zwei Stücken nv und $o\omega$ entsteht, $= nv \cdot dA + o\omega \cdot dA'$ sein, wo dA' den um sein Differential vermehrten Wert dA bezeichnet. Obwohl aber dieser Unterschied der aus zwei Stücken entstehenden Differentialwerten für unser Unternehmen vollkommen notwendig ist, wird dennoch die Lösung sich hierher beziehender Probleme selbst wiederum darauf zurückgeführt werden, dass sie durch die auf die oben erläuterte Weise gefundenen Differentialwerte allein, die natürlich aus dem einen Stück nv entstehen, fertig gestellt werden kann; das wird sich aus der folgenden Proposition bald zeigen.

PROPOSITION IV PROBLEM

27. Unter allen Kurven, die auf dieselbe gegebene Abszisse $AZ = a$ bezogen wurden und welchen derselbe Wert des unbestimmten Ausdruckes W zufällt, die zu bestimmen, in welcher der Ausdruck V ein Maximum oder Minimum wird.

LÖSUNG. Wir wollen festlegen, dass az dem Geforderten genügt und der Ausdruck W in ihr den bestimmten Wert $= B$ erhält; es wird also diese Kurve az unter allen anderen Kurven, die auf dieselbe Abszisse AZ bezogen wurden und in welchen der Ausdruck W denselben Wert erhält, so beschaffen sein, dass in ihr der Ausdruck V den maximalen oder minimalen Wert erhält, der $= A$ sei. Um also diese Kurve zu finden, nachdem die unbestimmte Abszisse $AI = x$ und die entsprechende Ordinate $Ii = y$ gesetzt worden sind, werden die zwei Ordinaten Nn und Oo aufgefasst, um die unendlich kleinen Stücke nv und $o\omega$ vermehrt zu werden: Danach wird also so der Differentialwert von W wie der von V, der aus diesen zwei hinzugefügten Stücken nv und $o\omega$ entstehen wird, gleich null gesetzt werden müssen, wie wir im zweiten Problem gezeigt haben. Es sei nun der Differentialwert des Ausdrucks V, der aus dem einen Stück nv entsteht, $= nv \cdot dA$ und der Differentialwert des anderen Ausdrucks W, der aus demselben einen Stück nv entsteht, $= nv \cdot dB$, welche Differentialwerte sich aus den in den oberen Kapiteln gegebenen Vorschriften finden lassen werden. Nun also, während wir die zwei Stücke nv und $o\omega$ betrachten, wird der Differentialwert des Ausdruckes $V = nv \cdot dA + o\omega \cdot dA'$, des anderen Ausdruckes W aber

$= nv \cdot dB + o\omega \cdot dB'$ sein. Deshalb muss, um die gesuchte Kurve zu finden, sowohl $nv \cdot dA + o\omega \cdot dA' = 0$ und $nv \cdot dB + o\omega \cdot dB' = 0$ werden. Die beiden Gleichungen werden also mit irgendwelchen Größen multipliziert, so dass hervorgeht

$$nv \cdot \alpha dA + o\omega \cdot \alpha dA' = 0,$$
$$nv \cdot \beta dB + o\omega \cdot \beta dB' = 0.$$

Und es werde, um die Stücke nv und $o\omega$ zu eliminieren, so $\alpha dA + \beta dB = 0$ wie $\alpha dA' + \beta dB' = 0$; und es werden α und β konstante oder variable Größen solcher Art sein, die jeder der beiden Gleichungen genügen. Weil ja aber $\alpha dA + \beta dB = 0$ ist, wird auch $\alpha' dA' + \beta' dB' = 0$ sein; diese Gleichung zeigt mit $\alpha dA' + \beta dB' = 0$ verglichen, dass $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ sein muss; daher werden diese Größen α und β Konstanten und zwar irgendwelche sein müssen. Nachdem deshalb für α und β irgendwelche konstanten Größen genommen worden sind, wird die Gleichung für die Kurve $\alpha dA + \beta dB = 0$ sein. Diese selbe Gleichung geht aber hervor, wenn wir mit der üblichen Methode die Stücke nv und $o\omega$ eliminieren. Es wird nämlich gelten

$$\frac{nv}{o\omega} = -\frac{dA'}{dA} = -\frac{dB'}{dB},$$

und daher

$$\frac{dA'}{dA} = \frac{dB'}{dB} \quad \text{oder} \quad \frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}$$

wegen $dA' = dA + ddA$ und $dB' = dB + ddB$. Aber die Gleichung $\frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}$ gibt integriert $ldA = ldB + lC$ oder $dA = CdB$; diese geht, für $C = -\frac{\beta}{\alpha}$ gesetzt, in $\alpha dA + \beta dB = 0$ über, wie wir schon zuvor bemerkt haben. Deswegen, um Probleme aufzulösen, ist es nötig, die Differentialwerte so des Ausdruckes, der die gemeinsame Eigenschaft enthält, W wie des Ausdruckes, der ein Maximum oder Minimum sein muss, V mit der in den oberen Kapiteln angegebenen Methode zu finden und sie mit irgendwelchen Konstanten Größen zu multiplizieren und die Summe $= 0$ zu setzen; danach wird die Gleichung entstehen, die die Natur der gesuchten Kurve ausdrückt. Q.E.I.

KOROLLAR I

28. Nun also, um in dieser Propositionen enthaltene Fragen aufzulösen, genügt es, die Differentialwerte zu kennen, die aus dem einen Stück nv entstehen; diese haben wir schon oben bequem zu finden gelehrt.

KOROLLAR II

29. Daher wird für diese Aufgabe das vorhergehende Kapitel zur Hilfe genommen werden müssen, und aus ihm sowohl Paragraph 7 wie Paragraph 31. An erstem Ort sind nämlich alle Vorschriften enthalten, Differentialwerte zu finden, wenn die vorgelegten unbestimmten Ausdrücke Funktionen einer einzelnen, am anderen aber, wenn sie Funktionen von zwei oder mehreren Integralformeln solcher Art sind.

KOROLLAR III

30. Nachdem also die gemeinsame Eigenschaft W und der Ausdruck des Maximums oder Minimums V vorgelegt wurden, muss der Differentialwert jeder der

beiden Ausdrücke aus diesen Vorschriften gesucht werden; nachdem diese gefunden worden sind und mit beliebigen Konstanten multipliziert worden sind, wird deren Aggregat gleich null gesetzt die Gleichung fü die gesuchte Kurve geben.

KOROLLAR IV

31. Wenn unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse AT entsprechen, die gesucht wird, in welcher der Ausdruck V den maximalen oder minimalen Wert erhält, hat man für sie diese Gleichung $dA = 0$, während dA den Differentialwert des Ausdrucks V bezeichnet.

KOROLLAR V

32. Wenn daher aber unter allen Kurven, die derselben Abszisse AZ entsprechen und welchen der Ausdruck W gleichermaßen zufällt, die gesucht wird, in welcher der Ausdruck V den maximalen oder minimalen Wert hat, wird für sie diese Gleichung gefunden $\alpha dA + \beta dB = 0$.

KOROLLAR VI

33. Es ist also klar, dass die Kurve, die unter ganz und gar allen Kurven das maximale oder minimale V hat, deren Gleichung $dA = 0$ ist, in dieser Gleichung enthalten ist $\alpha dA + \beta dB = 0$, mit welcher die Kurve ausgedrückt wird, die unter allen, die sich der gemeinsamen Eigenschaft W erfreuen, das maximale oder minimale V hat.

KOROLLAR VII

34. In der ersten Gleichung selbst, die die Lösung liefert, $\alpha dA + \beta dB = 0$ ist also schon eine beliebige Konstante enthalten, die aber dadurch bestimmt werden muss, dass der Wert des Ausdrucks W einen gegebenen Wert erhält.

KOROLLAR VIII

35. Das Problem wird deshalb so gelöst werden können, dass unter allen Kurven, die derselben Abszisse AZ entsprechen und in denen der Ausdruck W einen gegebenen Wert erhält, die bestimmt wird, in welcher der Wert von V maximal oder minimal ist.

KOROLLAR IX

36. Aus diesen sieht Dingen man schließlich ein, dass die Lösung des vorgelegten Problems mit der Lösung dieses Problems übereinstimmt, in welchem unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse AZ entsprechen die verlangt wird, die $\alpha V + \beta W$ zum Maximum oder Minimum hat. Diese Frage, auch wenn sie sich auf die absolute Methode bezieht, gibt dennoch die Gleichung $\alpha dA + \beta dB = 0$, die wir gefunden haben.

BEMERKUNG 1

37. Aus diesen Dingen wird also nicht nur eine leichte und bequeme Methode berechnet, alle sich hierauf beziehenden Fragen aufzulösen, sondern auch wird die Natur von Problemen dieser Art vollständiger erkannt. Zuerst ist nämlich klar, was wir auch schon oben bewiesen haben, dass die Lösung dieselbe sein wird, ob unter allen Kurven, die mit der gemeinsamen Eigenschaft W versehen

sind, die gesucht wird, die V zum Maximum oder Minimum hat, oder umgekehrt unter allen Kurven, die mit der gemeinsamen Eigenschaft V versehen sind, die verlangt wird, in welcher W ein Maximum oder Minimum ist. Des Weiteren wird auch eingesehen, dass die Frage so vorgelegt werden kann, dass ihre Lösung sich auf die absolute Methode der Maxima und Minima bezieht; das vorgelegte Problem stimmt nämlich mit dem überein, in welchem unter ganz und gar allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse AZ bezogen wurden, die verlangt wird, in welcher dieser Ausdruck $\alpha V + \beta W$ ein Maximum oder Minimum wird; und diese Transformation des Problems ist der Grund dafür, dass de Lösung durch Differentialwerte, die aus dem einen Stück nv entstehen, erledigt werden kann und es nicht weiter von Nöten ist, zwei Stücke dieser Art zu betrachten, wie es auf den ersten Blick die Natur der Frage zu erfordern schien. Aber diese Übereinkunft werden wir danach per se und ohne diese Methode, in welcher zwei Stücke betrachtet werden, beweisen; damit diese Wahrheit, bei dieser Aufgabe von größter Bedeutung, noch mehr bestätigt wird. Um im Übrigen Fragen dieser Art zu lösen, muss man die im vorhergehenden Kapitel in Kürze zusammengefassten Vorschriften vor Augen haben; mit deren Hilfe werden die Differentialwerte irgendwelcher Ausdrücke gefunden werden können. Zuerst nämlich werden nämlich in Paragraph 7 jenes Kapitels die Fälle aufgezählt, mit denen die Differentialwerte von gewöhnlichen Differentialformlen dargeboten werden, dann wird aber in Paragraph 31 die Methode angegeben, Differentialwerte von Ausdrücken zu finden, die aus zwei oder mehr Integralformeln irgendwie zusammengesetzt worden sind. Aus diesen Hilfsmitteln wird deshalb für jede sich ergebende Frage der Differentialwert so des Ausdrucks des Maximums oder Minimums wie der gemeinsamen Eigenschaft angegeben werden können; nachdem aber jeder von beiden gefunden worden ist, wird die Gleichung für die gesuchte Kurve mit sehr wenig Arbeit gebildet werden, weil es nur nötig ist, dass das Aggregat irgendwelcher Vielfachen jener zwei Differentialwerte gleich null gesetzt wird. Und diese gefundene Gleichung wird darauf auf die gleiche Weise zu behandeln sein, wie die, die wir oben sowohl bei der Reduktion zur Konstruktion wie bei der Integration benutzt haben.

BEMERKUNG 2

38. Wir haben schon bemerkt, dass in der Gleichung $\alpha dA + \beta dB = 0$, welche die Lösung unmittelbar liefert, eine einzige konstante Größe enthalten ist, die aber nicht ganz und gar beliebig ist, sondern aus der vorgelegten Bedingung bestimmt werden muss. Natürlich, weil allen Kurven, aus denen die gesuchte bestimmt werden muss, derselbe Ausdruck W gleichermaßen zufallen muss oder in allen denselben Wert, beispielsweise B, erhalten muss, kann diese Größe B als gegeben betrachtet werden; und weil selbige nicht in die Rechnung eingeht, werden sich die Konstanten α und β so bestimmen lassen, dass der Wert des Ausdruckes W, der der Abszisse $AZ = a$ entspricht, B gleich wird; und auf diese Weise wird die andernfalls unbestimmte Frage bestimmt werden. Sie wird aber nur so bestimmt werden, wie durch die danach durchzuführenden Integrationen die neuen beliebigen Konstanten auch durch genauso viele Punkte bestimmt werden. Es werden nämlich, genauso wie zuvor, genauso viele Punkte vorge-

schrieben werden können, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen soll, wie neue Konstanten durch Integration einzugehen anzusehen sind. Die Anzahl von diesen wird aber aus dem höchsten Grad der Differentiale bekannt werden, der in der Gleichung enthalten sein wird. Weil ja aber die ganze Frage auf die absolute Methode zurückgeführt werden kann, wird die Anzahl von Konstanten dieser Art immer gerade sein; oder die resultierende Gleichung $\alpha dA + \beta dB = 0$ wird entweder endlich oder eine differentiale zweiten Grades oder eine differentiale vierten Grades oder eine differentiale sechsten Grades oder achten usw. sein. Wenn daher eine endliche Gleichung hervorgeht, dann wird auch die Kurve schon völlig bestimmt sein, wenn freilich das Verhältnis zwischen α und β so bestimmt wird, dass der Ausdruck W den gegebenen Wert B in der gefundenen Kurve erhält, welche Bestimmung wir festlegen, immer verwendet zu werden. Wenn eine Differentialgleichung zweiten Grades gefunden wird, dann wird die gefundene Kurve mit zwei Punkten bestimmt werden; eine passende und gebräuchliche Weise ist es aber, dass die Grenzen a und z der Kurve selbst vorgeschrieben werden, und in diesen Fällen wird das Problem bestimmt werden, wenn diese Bedingung hinzugefügt, dass die gesuchte Kurve innerhalb der zwei gegebenen Grenzen a und z enthalten ist. Wenn aber eine Differentialgleichung vierten Grades hervorgeht, dann wird die genügende Kurve, nachdem vier Punkte nach Belieben angenommen worden sind, bestimmt werden; es wird also gefällig sein, dass diese so bestimmt werden, dass außer den zwei äußeren Grenzen a und z zugleich die Lage der Tangenten in diesen Grenzen vorgeschrieben wird. Wenn aber zu einer Differentialgleichung sechsten Grades gelangt wird, dann wird die Kurve durch sechs irgendwelche Punkte bestimmt werden; anstelle derer werden aber auch zuerst die beiden Grenzen a und z vorgeschrieben werden können, dann die Lage der Tangenten in diesen Grenzen, und drittens die Krümmung an diesen Stellen oder die Größe des Krümmungsradius. Nachdem diese Dinge bemerkt worden sind, wird also aus der Lösung selbst eingesehen werden, eine Bedingung welcher Art beim Vorlegen des jeweiligen Problems hinzugefügt werden muss, damit es völlig bestimmt wird; und diese Anmerkung hat nicht nur hier, sondern auch in der absoluten Methode und der übrigen relativen Methode Geltung.

BEMERKUNG 3

39. Es ist hier auch ein Unterschied von größter Bedeutung besonders zu bemerken, aus welchem wir in der absoluten Methode den ersten Anteil der Behandlung entnommen haben. Er besteht aber in der Art, auf welche die gefundene Kurve genügt. Es kann nämlich geschehen, dass irgendein Teil von ihr, der auf die unbestimmte Abszisse bezogen wurde, sich der vorgelegten Eigenschaft erfreut; darauf sind auch Fälle gegeben, in denen nur der Anteil, der der bestimmten Abszisse $AZ = a$ entspricht, der Bedingung des Problems genügt. Jenes geschieht natürlich, wenn diese Größe a in die Gleichung, welche die Lösung liefert, entweder überhaupt nicht eingeht oder in den beliebigen Größen α und β erfasst werden kann. Daher ist klar, wenn die beiden Formeln W und V im ersten Fall, der in Paragraph 7 des vorhergehenden Kapitels aufgezählt wird, enthalten ist, dass jeder beliebige Anteil der gefundenen Kurve an die

Frage angepasst ist. Darauf kann es auch geschehen, dass, obwohl die Größe a oder von ihr abhängende Größen entweder in dem einen der beiden Differentialwerte oder in jedem von beiden enthalten sind, sie dennoch sich entweder gegenseitig in der Gleichung $\alpha dA + \beta dB = 0$ aufheben oder in den beliebigen α und β erfasst werden können; in diesem Fall muss gleichermaßen ein Anteil der gefundenen Kurve genügen. Dies tritt aber nur auf, wenn kein gegebener und bestimmter Wert vorgeschrieben wird, welchen die gemeinsame Eigenschaft W im genügenden Anteil erhalten muss; dann kann es nämlich nicht geschehen, dass er in jedem Anteil denselben Wert erhält. Aus der Lösung jeder Frage wird aber leicht eingesehen werden, mit welcher Bedingung entweder die ganze Kurve az oder jeder Anteil genügen kann; dass wird am besten an Beispielen gezeigt werden können.

BEISPIEL I

40. Unter allen Kurven, die auf die Abszisse AZ bezogen wurden und in denen die Formel $\int yxdx$ denselben Wert erhält, die zu finden, in welcher der Wert der Formel $\int yydx$ minimal ist.

Es wird also die gemeinsame Eigenschaft $W = \int xydx$ sein, deren, wegen $dxy = ydx+xdy$, Differentialwert $= nv\cdot dx\cdot x$ ist. Aber die Formel des Maximums oder Minimums ist $V = \int yydx$, deren, wegen $d \cdot yy = 2ydy$, Differentialwert $= nv \cdot dx \cdot 2y$ ist. Man wird also, nach Teilung durch $nv \cdot dx$, diese Gleichung erhalten $\alpha x+2\beta y = 0$; aus dieser ist klar, dass der Frage die gerade Linie genügt, die in A mit der Achse AZ irgendeinen Winkel festlegt. Und weil die Länge der Abszisse $AZ = a$ nicht in die Rechnung eingeht, wird jeder Anteil dieser Kurve gleichermaßen genügen. Wenn daher aber erfordert wird, dass für die gegebene Abszisse $AZ = a$ die Formel $\int yxdx$ einen gegebenen Wert erhält, beispielsweise B, dann wird wegen $y = mx$ $\int yxdx = \frac{1}{3}mx^3$ und daher $\frac{1}{3}ma^3 = B$ werden; daher wird die Lage der geraden Linie so bestimmt werden, dass $y = \frac{3Bx}{a^3}$ sein muss. Diese Gerade wird sich also nun dieser Eigenschaft erfreuen, dass sie unter allen entweder geraden oder gekrümmten Linien, die für die gegebene Abszisse $AZ = a$ den Wert $= B$ der Formel $\int xydx$ haben, den minimalen Wert der Formel $\int yydx$ erzeugt.

BEISPIEL II

41. Unter allen Kurven derselben Länge, die die Punkte a und z verbinden, die zu finden, die die maximale oder minimale Fläche aAZz (Fig. 16) erfasst.

Weil ja die allgemeine Eigenschaft die Bogenlänge $= \int dx\sqrt{1+pp}$ ist, wird ihr Differentialwert $= -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ sein. Darauf ist die Formel des Maximums oder Minimums $\int ydx$, deren Differentialwert $nv \cdot dx$ ist; daher wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben $dx = bd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ und durch Integrieren

$$x + c = \frac{bp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und daher} \quad p = \frac{x+c}{\sqrt{b^2 - (x+c)^2}} = \frac{dy}{dx}.$$

Daher wird also durch Integrieren $y = f \pm \sqrt{b^2 - (x+c)^2}$ oder $b^2 = (y-f)^2 + (x+c)^2$, welches die allgemeine Gleichung für einen Kreis ist.

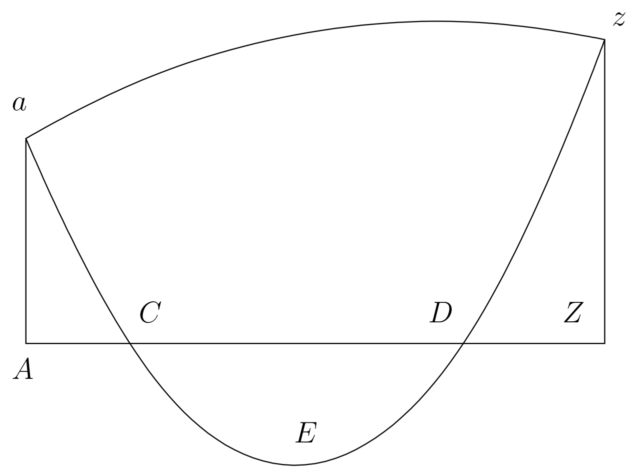

FIG. 16

Deswegen, wird der Bogen irgendeines Kreises, der durch die Punkte a und z gezogen wurde, unter allen anderen gekrümmten Linien derselben Länge die entweder maximale oder minimale Fläche $aAZz$ einschließen. Es kann aber auf zweifache Weise ein Kreisbogen gegebener Länge innerhalb der Grenzen a und z festgelegt werden; auf die eine, in welcher er zur Achse AZ konkav ist, auf die andere, in der er konvex ist. Im ersten Fall ist klar, dass die Fläche maximal sein wird, im zweiten aber minimal. Und daher, wenn die Grenzen a und z zusammen mit der Länge der innerhalb dieser Grenzen festgelegten Kurve gegeben sind, welcher freilich größer sein muss als die gerade Linie, die diese Enden verbindet, wird die Lösung völlig bestimmt sein; es wird nämlich ein einziger Kreisbogen dieser Länge durch diese Grenzen beschrieben werden können, der, je nachdem ob er entweder konkav oder konvex zur Achse AZ ist, die größte oder kleinste Fläche bilden wird.

KOROLLAR I

42. Daher ist auch klar, dass der Kreisbogen az (Fig. 16), der durch die Grenzen a und z gezogen wurde, nicht nur die maximale Fläche $aAZz$ unter allen anderen Kurven derselben Länge bildet, sondern auch, was für eine von der Grenze a zur Grenze z gezogene Linie $aCDEz$ auch immer gegeben ist, mit ihr der Kreisbogen az die größte Fläche einschließt. Denn wenn die Fläche $aAZz$ maximal ist, wird auch die Fläche

$$aAZz - aAC - zZD + CED$$

wegen der Flächen aAC, zZD und CED von konstanter Größe, was für eine Linie auch immer für az genommen wird, maximal sein.

BEISPIEL III

43. Unter allen Kurven (Fig. 7) derselben Länge, die die Punkte A und M verbinden, die zu finden, die mit den Geraden AC und MC, die zum Fixpunkt C gezogen wurden, die maximale oder minimale Fläche ACM erfasst.

Weil ja, wegen der gegebenen Punkte A, C, M, die Geraden AC und MC in Bezug auf die Lage gegeben sind, werde der Winkel $ACM = x$ gesetzt, oder nachdem, um das Zentrum C, mit dem Radius $CB = 1$, der Kreisbogen BS beschrieben wurde, sei dieser Bogen $BS = x$ und es werde $CM = y$ gesetzt; es wird $Ss = dx$, $Mn = ydx$ und die Fläche $ACM = \frac{1}{2}\int yydx$ sein. Weiter wird wegen $mn = dy$

$$Mm = \sqrt{y^2dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{yy + pp}$$

für $dy = pdx$ gesetzt sein. Daher muss unter allen Gleichungen, die eine Relation zwischen x und y enthalten und die für einen gegebenen Wert von x dieselbe Größe $\int dx\sqrt{yy + pp}$ liefern, die bestimmt werden, die für denselben Wert von x die entweder maximale oder minimale Größe der Formel $\frac{1}{2}\int yydx$ liefert. Weil also der Differentialwert der Formel $\int dx\sqrt{yy + pp}$

$$= nv \cdot dx \left(\frac{y}{\sqrt{yy + pp}} - \frac{1}{dx} d \cdot \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} \right)$$

und der Differentialwert der Formel $\int yydx = nv \cdot dx \cdot y$ ist, wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$ydx = \frac{bydx}{\sqrt{yy + pp}} - bd \cdot \frac{p}{\sqrt{yy + pp}},$$

die mit p multipliziert in diese übergeht

$$ydx = \frac{bydx}{\sqrt{yy + pp}} - bd \cdot \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} = bd \cdot \sqrt{yy + pp} - \frac{bpdp}{\sqrt{yy + pp}} - bpd \cdot \frac{p}{\sqrt{yy + pp}};$$

deren Integral diese ist

$$\frac{1}{2}yy = b\sqrt{yy + pp} - \frac{bpp}{\sqrt{yy + pp}} + bc = \frac{byy}{\sqrt{yy + pp}} + bc.$$

Es werde zur Tangente MP aus C die Senkrechte $CP = u$ gezogen; es wird gelten

$$u = \frac{yy}{\sqrt{yy + pp}}$$

und man wird $yy = 2bu + bc$ haben; diese Gleichung haben wir schon oben gezeigt, die für einen Kreis zu sein. Deswegen wird der Kreisbogen, der durch die Grenzen a und z gezogen wurde, diese Eigenschaft haben, dass er unter allen Kurven derselben Länge, die die Enden A und M verbinden, die entweder maximale oder minimale Fläche ACM darbietet, je nachdem ob jener Bogen entweder konkav oder konvex innerhalb des Winkels ACM ist. Damit wird das bestätigt, was wir im vorhergehenden Paragraphen im Allgemeinen angemerkt haben.

BEISPIEL IV

44. Unter allen Kurven (Fig. 15), die die Punkte a und z verbinden und die um die Achse AZ rotiert den Festkörper derselben Oberfläche erzeugen, die zu bestimmen, die zugleich das maximale Volumen des auf diese Weise erzeugten Festkörpers ergibt.

Die Oberfläche des auf diese Weise erzeugten Festkörpers wird dieser Integralformel proportional gefunden $\int ydx\sqrt{1+pp}$, deren Differentialwert ist

$$nv\cdot dx\left(\sqrt{1+pp}-\frac{1}{dx}d\cdot\frac{yp}{\sqrt{1+pp}}\right).$$

Das Volumen des auf diese Weise erzeugten Festkörpers ist aber wie $\int yydx$, deren Differentialwert $= nv\cdot dx\cdot 2y$ ist. Deshalb wird diese Gleichung resultieren

$$2ydx = bdx\sqrt{1+pp} - bd\cdot\frac{yp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Diese werde mit p multipliziert, dass hervorgeht

$$2ydy = bdy\sqrt{1+pp} - bpd\cdot\frac{yp}{\sqrt{1+pp}}$$

$$= bd\cdot y\sqrt{1+pp} - \frac{bypdp}{\sqrt{1+pp}} - bpd\cdot\frac{yp}{\sqrt{1+pp}},$$

deren Integral ist

$$yy = by\sqrt{1+pp} - \frac{bypp}{\sqrt{1+pp}} - bc = \frac{by}{\sqrt{1+pp}} + bc.$$

Es wird also sein

$$by = (yy-bc)\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad p = \frac{\sqrt{b^2y^2-(yy-bc)^2}}{yy-bc} = \frac{dy}{dx}.$$

Daher wird sein

$$dx = \frac{(yy-bc)dy}{\sqrt{bbyy-(yy-bc)^2}}.$$

Über diese Gleichung ist zuerst zu bemerken, wenn $c = 0$ war, dass gelten wird

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{bb-yy}}$$

und daher die Kurve ein Kreis ist, dessen Zentrum auf der Achse AZ gelegen ist; jener um das auf der Achse AN genommene Zentrum beschriebene und durch die zwei gegebenen Punkte a und z hindurchgehende Kreisbogen wird der Frage also genügen; er wird aber der einzige sein, und daher den Festkörper von bestimmter Oberfläche erzeugen. Daher, wenn unter allen Kurven, welche Festkörper von anderer und verschiedener Oberfläche erzeugen, die gesucht wird, die das maximale oder minimale Volumen erzeugt, wird sie nicht der Kreis sein, sondern eine andere Kurve, die in der Gleichung

$$dx = \frac{(yy-bc)dy}{\sqrt{bbyy-(yy-bc)^2}}$$

enthalten ist. Denn nicht nur, wegen der zwei Konstanten b und c, kann bewirkt werden, dass die Kurve durch die zwei Punkte a und z hindurchgeht, sondern auch, dass die Länge der Kurve az von gegebener Größe ist. Im Übrigen wird die Länge der Kurve, wegen

$$\int dx\sqrt{1+pp} = \int \frac{bydxb}{yy-bc}$$

werden

$$= \int \frac{bydy}{\sqrt{bbyy-(yy-bc)^2}},$$

deren Integral von der Quadratur des Kreises abhängt, und es ist

$$= \frac{b}{2} A\cos.\frac{b(2c+b)-2yy}{b\sqrt{bb+4bc}} + \text{ Konst.}$$

Wenn daher aber $b=\infty$ gesetzt wird, entsteht ein einzigartiger Fall; denn es geht diese Gleichung hervor

$$dx = -\frac{cdy}{\sqrt{yy-cc}},$$

welches die Gleichung für eine Kettenlinie ist, die zur Achse AZ konvex ist.

BEISPIEL V

45. Unter allen Kurven az, die gleiche Flächen $aAZz$ enthalten, die zu bestimmen, die um die Achse AZ rotiert den Festkörper der kleinsten Oberfläche erzeugt.

Weil ja die gemeinsame Eigenschaft in der Fläche $= \int ydx$ festgelegt wird, wird ihr Differentialwert $= nv \cdot dx$ sein. Darauf ist die Formel, die ein Minimum sein muss, $\int ydx\sqrt{1+pp}$, deren Differentialwert ist

$$= nv \cdot \left(dx\sqrt{1+pp} - d \cdot \frac{yp}{\sqrt{1+pp}}\right);$$

woher, für die gesuchte Kurve, die Gleichung entstehen wird

$$ndx = dx\sqrt{1+pp} - d \cdot \frac{yp}{\sqrt{1+pp}},$$

die, mit p multipliziert und integriert, liefert

$$ny+b = \frac{y}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{y}{ny+b};$$

woher wird

$$p = \frac{\sqrt{y^2-(ny+b)^2}dy}{ny+b} = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad dx = \frac{(ny+b)dy}{\sqrt{(1-n^2)y^2-2bny-bb}}.$$

Daher ist klar, wenn $b = 0$ ist, dass dann die Kurve in die gerade Linie übergehen wird, die die Punkte a und z verbindet. Darauf, wenn $n = 0$ ist, wird wegen

$$dx = \frac{bdy}{\sqrt{yy - bb}}$$

die Kurve eine Kettenlinie sein, die konkav zur Achse AZ ist. Wenn daher aber $n = -1$ ist, wird werden

$$dx = \frac{(b - y)dy}{\sqrt{2by - bb}},$$

aus welcher durch Integrieren entsteht

$$x = c + \frac{2b - y}{3b}\sqrt{2by - bb};$$

welche für eine algebraische Kurve ist und im Rationalen liefert

$$9b(x - c)^2 = (2b - y)^2(2y - b).$$

Sie ist daher eine Linie dritter Ordnung und bezieht sich auf Gattung 68 nach NEWTON.

BEISPIEL VI

46. Unter allen Kurven az derselben Länge die zu bestimmen, die um die Achse AZ rotiert den maximalen Festkörper erzeugt.

Unter allen Kurven, die sich der gemeinsamen Eigenschaft $\int dxV(1 + pp)$ erfreuen, wird also die gesucht, in welcher $\int yydx$ ein Maximum ist. Weil ja also der Differentialwert der Formel $\int dx\sqrt{1 + pp}$ ist

$$= -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + pp}},$$

der Differentialwert der Formel $\int yydx$ aber $= 2nv \cdot ydx$ ist, wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$2ydx = \pm bbd \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + pp}},$$

die mit p multipliziert und integriert geben wird

$$yy + bc = \pm\frac{bb}{\sqrt{1 + pp}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 + pp} = \frac{\pm bb}{yy + bc};$$

und daher

$$p = \frac{\sqrt{b^4 - (yy + bc)^2}}{yy + bc} = \frac{dy}{dx};$$

aus dieser wird

$$x = \int \frac{(yy + bc)dy}{y(b^4 - (yy + bc)^2)}.$$

Diese Kurve hat diese Eigenschaft, dass ihr Krümmungsradius, der allgemein ist

$$= dx : d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}},$$

$= \frac{bb}{2y}$ wird, das heißt, er ist der inversen Ordinate y proportional; daher ist klar, dass die gesuchte Kurve eine Elastica ist. Nicht nur durch die beliebigen Konstanten b und c kann aber bewirkt werden, dass die Kurve durch die zwei gegebenen Grenzen a und z hindurchgeht, sondern auch, dass ihr innerhalb dieser Grenzen eingeschlossener Bogen von gegebener Größe ist. Wenn so $c = 0$ ist, geht die rechtwinklige elastische Kurve hervor. Im Übrigen kann aber in keinem Fall die Konstruktion durch Quadratur entweder des Kreises oder der Hyperbel durchgeführt werden, wenn nicht entweder b und c unendlich sind, in welchem Fall freilich die gerade Linie az hervorgeht, oder aber $b = c$ ist. In diesem Fall wird man nämlich haben

$$x = \int \frac{(yy+bb)dy}{y\sqrt{-2bb-yy}},$$

oder nachdem bb negativ genommen wurde, wird sein

$$x = \int \frac{(yy-bb)dy}{y\sqrt{2bb-yy}} = -\sqrt{2bb-yy} - bb\int \frac{dy}{y\sqrt{2bb-yy}}$$

und nach Ausführen der Integration durch Logarithmen wird werden

$$x = -\sqrt{2bb-yy} + b\sqrt{2}l\frac{b\sqrt{2}+\sqrt{2bb-yy}}{y}.$$

Die wahre Länge der Kurve, die allgemein diese ist

$$= \int \frac{bbdy}{\sqrt{b^4-(yy+bc)^2}},$$

wird aber in diesem Fall dann sein.

$$= g - b\sqrt{2}l\frac{b\sqrt{2}+\sqrt{2bb-yy}}{y}.$$

BEISPIEL VII

47. Die Kurve zu finden, die unter allen anderen derselben Länge um die Achse AZ rotiert den Festkörper erzeugt, dessen Oberfläche entweder maximal oder minimal ist.

Weil ja die gemeinsame Eigenschaft $= \int dx\sqrt{1+pp}$ ist, deren Differentialwert $-nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ ist, aber der Differentialwert der Formel des Maximums oder Minimums $\int ydx\sqrt{1+pp}$ ist

$$= nv \cdot \left(dx\sqrt{1+pp} - d \cdot \frac{yp}{\sqrt{1+pp}} \right),$$

wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$bd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = dx\sqrt{1+pp} - d \cdot \frac{yp}{\sqrt{1+pp}},$$

die mit p multipliziert und integriert liefert

$$c - \frac{b}{\sqrt{1+pp}} = \frac{y}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{oder} \quad c = \frac{b+y}{\sqrt{1+pp}}.$$

Daher wird werden

$$\sqrt{1+pp} = \frac{b+y}{c} \quad \text{und} \quad p = \frac{\sqrt{(b+y)^2 - cc}}{c} = \frac{dy}{dx}$$

und aus dieser

$$dx = \frac{cdy}{\sqrt{(b+y)^2 - cc}},$$

welche die allgemeine Gleichung für die Kettenlinie ist und genügt, solange die Achse in Bezug der hängenden Kette eine horizontale Lage hat. Es kann also geschehen, dass die Kurve entweder konvex oder konkav zur Achse AZ ist, im ersten Fall wird die Oberfläche des Festkörpers minimal werden, im zweiten maximal.

BEISPIEL VIII

48. Unter allen Kurven (Fig. 17), die durch die Punkte A und C hindurchgehen und die gleiche Flächen ABC erfassen, die zu bestimmen, die in einem Fluid gemäß der Richtung der Achse BA bewegt den geringsten Widerstand erfährt.

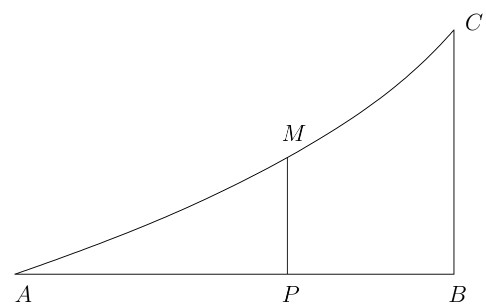

FIG. 17

Nachdem die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$ gesetzt worden sind, ist die gemeinsame Eigenschaft $\int ydx$, und ihr Differentialwert $= nv \cdot dx$. Aber der totale Widerstand, welche die Form in Richtung AB erfährt, ist wie $\int \frac{p^3dx}{1+pp}$, deren Differentialwert $-nv \cdot d \cdot \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$ ist. Aus diesen geht für die Kurve diese Gleichung hervor

$$dx = bd \cdot \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2};$$

diese gibt integriert

$$x = c + \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2}.$$

Aber die Differentialgleichung geht mit p multipliziert in diese über

$$dy = bpd \cdot \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2},$$

die in diese Form

$$dy = bpd \cdot \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2} + bpd \cdot \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2} - bpd \cdot \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2}$$

verwandelt dieses Integral hat

$$y = f + \frac{bp^3(3+pp)}{(1+pp)^2} - \frac{bp^3}{1+pp} \quad \text{seu} \quad y = f + \frac{2bp^3}{(1+pp)^2};$$

weil also gilt

$$x = c + \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2},$$

wird die Kurve algebraisch sein. Es ist aber zu bewirken, dass in dem Fall, in welchem $x = 0$ wird (was nicht geschehen kann, wenn nicht entweder b oder c negativ genommen wird) y zugleich verschwindet. Damit aber die Kurve erkannt wird, werde $x - c = t$ und $y - f = u$ gesetzt, es wird gelten

$$t = \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{2bp^3}{(1+pp)^2};$$

woher

$$t + u\sqrt{3} = \frac{b(p^4 + 2p^3\sqrt{3} + 3pp)}{(1+pp)^2}$$

und wird

$$t - u\sqrt{3} = \frac{b(p^4 - 2p^3\sqrt{3} + 3pp)}{(1+pp)^2}.$$

Indem also die Quadratwurzeln gezogen werden, wird man haben

$$\sqrt{\frac{t + u\sqrt{3}}{b}} = \frac{pp + p\sqrt{3}}{1+pp} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{t - u\sqrt{3}}{b}} = \frac{pp - p\sqrt{3}}{1+pp};$$

und daher

$$\sqrt{\frac{t + u\sqrt{3}}{b}} + \sqrt{\frac{t - u\sqrt{3}}{b}} = \frac{2pp}{1+pp}$$

und

$$\sqrt{\frac{t + u\sqrt{3}}{b}} - \sqrt{\frac{t - u\sqrt{3}}{b}} = \frac{2p\sqrt{3}}{1+pp}.$$

Aber es ist

$$\begin{aligned}\frac{t}{b} &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2pp}{1+pp} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4p^4}{(1+pp)^2}\\ &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{b} + 2\sqrt{\frac{tt-3u}{bb}}\right).\end{aligned}$$

Also

$$\frac{4t}{b} = 3\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + 3\sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} - \frac{2\sqrt{tt-3uu}}{b};$$

welche rational gemacht diese Gleichung vierter Ordnung liefert

$$4t^4 + 8ttuu + 4u^4 = 4bt^3 + 36btuu - 27b^2uu,$$

oder

$$4(tt+uu)^2 = 4bt^3 + 36btu^2 - 27b^2u^2.$$

Um aber die Kurve durch unendlich viele Punkte zu konstruieren, hilft es, diese Formeln zu verwenden

$$t = \frac{b(p^4+3pp)}{(1+pp)^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{2bp^3}{(1+pp)^2}.$$

Zuerst ist aber klar, dass die Kurve einen in der Lage der Abszissen t gelegenen Durchmesser hat und an zwei Stellen $u = 0$ wird, nämlich im Fall $p = 0$, in dem zugleich $t = 0$ wird, und im Fall $p = \infty$, in dem $t = b$ wird. Wenn daher $b = 4c$ und $t = 3c + r$ gesetzt wird, wird diese Gleichung entstehen,

$$(rr+uu)^2 + 8c(r^3 - 3ru^2) + 18cc(r^2+u^2) - 27c^4 = 0,$$

weil diese eine Funktion von $rr + uu$ und $r^3 - 3ruu$ ist, zeigt sie auf, dass diese Kurve drei Durchmesser hat, die sich im Anfang dieser Abszissen r kreuzen. Also wird die gesuchte Kurve (Fig. 18) dem gleichseitigen Dreieck ABC einbeschrieben sein, das aus den drei einander ähnlichen und gleichen Zweigen ADB, AEC und BFC besteht, die in den Punkten A, B und C sehr scharfe Spitzen bilden. Ihre Durchmesser werden also die drei Geraden AI, BH und CG sein, die sich im Zentrum O des Dreiecks kreuzen. Es wird aber $AO = 3c$, $OF = c$ und $OI = \frac{3}{2}c$ sein, sodass $AI = \frac{9}{2}c$ und $FI = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}OF$ ist. Nun wird irgendein Anteil abc, der von den AI und BI parallelen Geraden ab und bc und dem Kurvenbogen ac erfasst wurde, so beschaffen sein, dass der Bogen ac unter allen anderen, die die Punkte a und c verbinden und die Gleiche Fläche abc enthalten, in einem Fluid gemäß der Richtung ba bewegt den geringsten Widerstand erfährt.

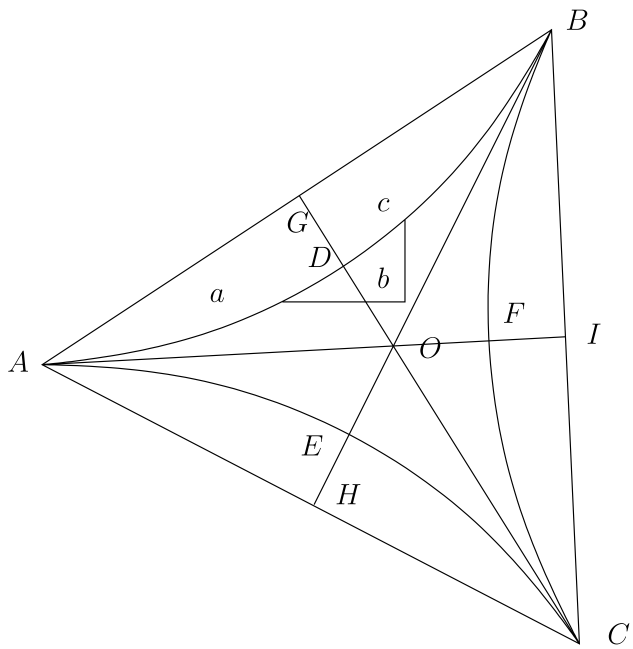

Fig. 18

Weiter wird aber die Kurve rektifizierbar sein und man findet den Bogen $ADB = \frac{16}{3}c$; daher wird gelten

$$ADB : AI = \frac{16}{3} : \frac{9}{2} = 32 : 27$$

und

$$ADB : AB = 32 : 18\sqrt{3} = 16 : 9\sqrt{3}.$$

BEISPIEL IX

49. Unter allen Kurven (Fig. 19) AM, die gleiche Flächen APM einschließen, die zu finden, die so beschaffen ist, dass, wenn immer von Zentrum des Schmiegekreises O zur verlängerten Ordinate MP die Senkrechte ON gezogen wird, die von den Punkten N gebildete Kurve die kleinste Fläche APN einschließt.

Nachdem die Abszisse $AP = x$ und die Ordinate $PM = y$ gesetzt worden sind, wird die Fläche $APM = \int ydx$, welche die gemeinsame Eigenschaft ist, und ihr Differentialwert $= nv \cdot dx$ sein.

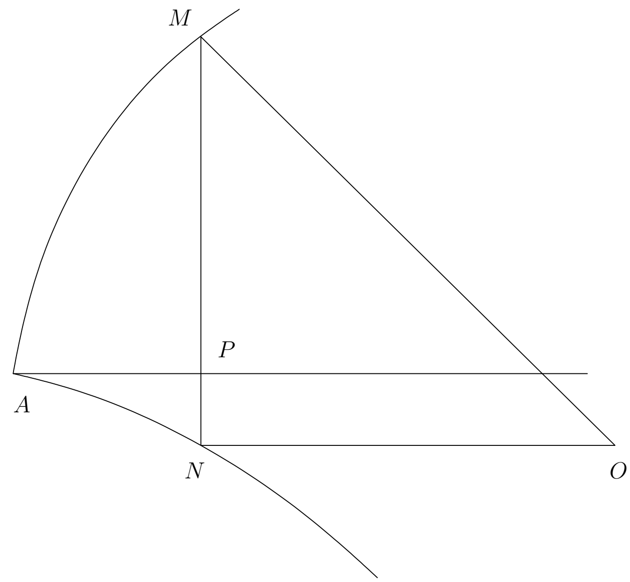

Fig. 19

Darauf, weil der Krümmungsradius $MO = -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$ ist, wird werden

$$MN = -\frac{(1+pp)}{q} \quad \text{und} \quad PN = -\frac{(1+pp)}{q} - y;$$

woher die Fläche APN sein wird

$$= -\int ydx - \int \frac{(1+pp)}{q}dx,$$

welche minimal sein muss, deren Differentialwert dieser ist

$$= nv \cdot \left(-dx + d \cdot \frac{2p}{q} + \frac{1}{dx} dd \cdot \frac{(1+pp)}{qq} \right);$$

daher entsteht diese Gleichung

$$ndx^2 = dxd \cdot \frac{2p}{q} + dd \cdot \frac{(1+pp)}{qq};$$

diese gibt integriert

$$nxdx = \frac{2pdx}{q} + d \cdot \frac{1+pp}{qq} + bdx.$$

Aber jene selbe Gleichung gibt mit p multipliziert

$$ndxdy = dyd \cdot \frac{2p}{q} + pdd \cdot \frac{1+pp}{qq};$$

deren Integral ist

$$nydx = cdx - \frac{2dx}{q} + pd \cdot \frac{1+pp}{qq}.$$

Indem diese Gleichungen verbunden werden, entsteht

$$nxdy - nydx = bdy - cdx + \frac{2pdy}{q} + \frac{2dx}{q} = bdy - cdx + \frac{2dx^2 + 2dy^2}{dp}.$$

es werde festgelegt

$$nx - b = nt \quad \text{und} \quad ny - c = nu;$$

es wird $dy = du$ und $dx = dt$ sein, und

$$ndp = \frac{2dt^2 + 2du^2}{tdu - udt} = \frac{nddu}{dt},$$

oder

$$2dt^3 + 2dtdu^2 = ntduddu - nudtddu$$

nachdem dt konstant gesetzt wurde. Es sei $u = st$, es wird gelten

$$du = sdt + tds \quad \text{und} \quad ddu = tdds + 2dtds;$$

und nach Einsetzen von diesen wird diese Gleichung hervorgehen:

$$2(1+ss)dt^3 + 4stdt^2ds + 2(1-n)ttdtds^2 = nt^3dsdds.$$

Es werde $t = e^{\int rds}$ gesetzt, es wird gelten

$$dt = e^{\int rds}rds \quad \text{und} \quad ddt = 0 = e^{\int rds}(rdds + drds + rrds^2);$$

woher wird

$$dds = -\frac{drds}{r} - rds^2;$$

aus diesen geht schließlich hervor

$$2(1+ss)r^3ds + 4sr^2ds + 2(1-n)rds = -\frac{ndr}{r} - nrds$$

oder

$$\frac{ndr}{r} + (2-n)rds + 4sr^2ds + 2r^3ds + 2r^3s^2ds = 0.$$

Es sei $s = v - \frac{1}{r}$, es wird $dr + rrdv = \frac{ndv}{2(1+vv)}$ werden; diese Gleichung lässt eine Integration zu, sooft $n = 2i(i-1)$, ist, während i irgendeine ganze Zahl bezeichnet; wenn $n = 4$ ist, wird werden

$$r = \frac{2v}{1+vv} + \frac{1}{(1+vv)^2 \int \frac{dv}{(1+vv)^2}};$$

aus welcher durch Rückwärtsgehen die Konstruktion durchgeführt werden können wird.

BEISPIEL X

50. Unter allen Kurven, in denen $\int xTdx$ denselben Wert erhält, die zu finden, in welcher $\int yTdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während T irgendeine Funktion von p ist, so dass $dT = Pdp$ ist.

Um den Differentialwert der Formel $\int xTdx$ zu finden, ist zu bemerken, dass $d{\cdot}xT = Tdx + xPdp$ ist, woher der Differentialwert jener $= -nv{\cdot}d{\cdot}xP$ sein wird. Aber aus der anderen Formel $\int yTdx$ hat man $d \cdot yT = Tdy + yPdp$, woher ihr Differentialwert $nv \cdot (Tdx - d \cdot yP)$ sein wird. Daher wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung entstehen $nd{\cdot}xP = Tdx - d{\cdot}yP$. Also ist $\int Tdx = nxP + yP + b$. Weiter, wenn jene Gleichung mit p multipliziert wird, wird man haben

$$npd \cdot xP = Tdy - pd \cdot yP = d \cdot yT - yP \cdot dp - pd \cdot yP = d \cdot yT - d.yPp.$$

Aber es ist

$$pd \cdot xP = Ppdx + pxdP + xPdp + Tdx - d \cdot xT = d \cdot xPp + Tdx - d \cdot xT.$$

Deswegen wird entstehen

$$d \cdot yT - d \cdot yPp = nd \cdot xPp + nTdx - nd \cdot xT;$$

und daher

$$\int nTdx = yT - yPp - nxPp + nxT + c.$$

Weil wir aber aus der oberen Integration haben

$$\int nTdx = nnxP + nyP + nb,$$

wird durch Eliminieren von $\int nTdx$ diese Gleichung gelten

$$nnxP + nyP + nb = yT - yPp - nxPp + nxT + c$$

oder

$$y = \frac{nx(nP + Pp - T) + c}{-nP - Pp + T}$$

oder

$$y = -nx + \frac{c}{T - np - pp}.$$

Also geht schließlich hervor

$$x = c\int \frac{dP}{(T - nP - Pp)^2},$$

und

$$y = c\int \frac{pdP}{(T - nP - Pp)^2} = \frac{c}{T - nP - Pp} - nc\int \frac{dP}{(T - nP - Pp)^2}.$$

BEISPIEL XI

51. Die Kurve zu finden, die unter allen anderen, die innerhalb derselben Grenzen enthalten sind und derselben Wert der Formel $\int xdx\sqrt{1+pp}$, $\int ydx\sqrt{1+pp}$ zum Maximum oder Minimum hat.

Dieses Beispiel ist ein Fall des vorhergehenden und entspringt aus jenem durch Setzen von $T=\sqrt{1+pp}$, woher gelten wird

$$P=\frac{p}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad dP=\frac{dp}{(1+pp)^{3:2}}.$$

Weiter wird aber sein

$$T-nP-Pp=\frac{1-np}{\sqrt{1+pp}}.$$

Aus diesen eingesetzten wird nun hervorgehen

$$x=c\int\frac{dp}{(1-np)^2\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad y=\frac{c\sqrt{1+pp}}{1-np}-nx.$$

Nachdem aber durch Logarithmen die Integration durchgeführt worden ist, wird werden

$$\begin{aligned} x=&\frac{nc(p+\sqrt{1+pp})-c}{(1+nn)(1-np)}\\ &+\frac{c}{(1+nn)^{3:2}}\cdot l\frac{n+(1+\sqrt{1+nn})(p+\sqrt{1+pp})}{n+(1-\sqrt{1+nn})(p+\sqrt{1+pp})}+b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y=&\frac{nc+c(\sqrt{1+pp}-nnp)}{(1+nn)(1-np)}\\ &-\frac{nc}{(1+nn)^{3:2}}\cdot l\frac{n+(1+\sqrt{1+nn})(p+\sqrt{1+pp})}{n+(1-\sqrt{1+nn})(p+\sqrt{1+pp})}-nb; \end{aligned}$$

aus welchen Werten die gesuchte Kurve durch Logarithmen konstruiert werden können wird. Allgemein aber, was für eine Funktion T von p auch immer bezeichnet, die Konstruktion kann immer durch Quadraturen durchgeführt werden. Im Übrigen wäre dieses Beispiel ohne Hilfe des vorherigen viel schwerer lösbar gewesen; denn es hätte sich nicht so leicht erkennen lassen, wie die gefundene Gleichung integrierbar gemacht werden würde, wie im allgemeinen Fall.

PROPOSITION V PROBLEM

52. Unter allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse $=a$ bezogen wurden und die denselben Wert der Formel $\Pi=\int[Z]dx$ erhalten, die zu finden, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z zugleich eine Funktion von Π ist, sodass gilt

$$dZ=Ld\Pi+Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+\ \text{etc.}$$

und

$$d[Z]=[M]dx+[N]dy+[P]dp+[Q]dq+\ \text{etc.}$$

LÖSUNG. Weil ja $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq +$ etc. ist, wird der Differentialwert der Formel $\int [Z]dx$, welche hier die allen Kurven gemeinsame Größe bezeichnet, sein

$$= nv \cdot dx \left([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} - \text{ etc.} \right),$$

der aus dem ersten Fall von Paragraph 7 des vorhergehenden Kapitels folgt. Aber die Formel $\int Zdx$, die das Maximum oder Minimum ausdrückt, weil Z die Integralformel $\Pi = \int [Z]dx$ involviert, bezieht sich auf den zweiten Fall des erwähnten Ortes und daher wird sein Differentialwert sein

$$= nv \cdot dx \left(N + [N]V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Qd + [Q]V)}{dx^2} - \text{ etc.} \right),$$

während $V = H - \int Ldx$ ist, wo H eine bestimmte Größe ist, die entsteht, wenn im Integral $\int Ldx$ $x = a$ gesetzt wird. Und wegen dieser Größe H wird dieser Differentialwert von der vorgeschriebenen Länge der Abszisse $x = a$ abhängen. Aus diesen zwei Differentialwerten der beiden vorgelegten Formeln, deren eine die gemeinsame Eigenschaft, die andere das Maximum oder Minimum erklärt, entsteht gemäß der gegebenen Regel die folgende Gleichung für die Kurve:

$$\begin{aligned} 0 =& \alpha[N] - \frac{\alpha d[P]}{dx} + \frac{\alpha dd[Q]}{dx^2} - \text{ etc.} \\ &+ N + [N]V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \text{ etc.;} \end{aligned}$$

die, wegen $V = H - \int Ldx$, in diese übergeht

$$\begin{aligned} 0 =& N + (\alpha + H - \int Ldx)[N] - \frac{d(P + (\alpha + H - \int Ldx)[P])}{dx} \\ &+ \frac{dd(Q + (\alpha + H - \int Ldx)[Q])}{dx^2} - \text{ etc.} \end{aligned}$$

Weil nun α eine beliebige konstante Größe ist, auch wenn H eine bestimmte Größe ist, wird dennoch $\alpha + H$ eine beliebige Größe werden und daher nicht weiter von der bestimmten Länge a der Abszisse abhängen. Daher, wenn wir anstelle von $\alpha + H$ C schreiben, werden wir für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben:

$$\begin{aligned} 0 =& N + (C - \int Ldx)[N] - \frac{d(P + (C - \int Ldx)[P])}{dx} \\ &+ \frac{dd(Q + (C - \int Ldx)[Q])}{dx^2} - \text{ etc.,} \end{aligned}$$

welche also für irgendeine Abszisse die Kurve darbietet, die unter allen anderen, die denselben Wert der Formel $\int [Z]dx$ erhalten, den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ enthalten wird. Q.E.I.

KOROLLAR I

53. Wenn also die gemeinsame Eigenschaft die Integralformel selbst war, die in der Formel des Maximums oder Minimums verwickelt wird, dann geht die Betrachtung der Abszisse von bestimmter Größe aus der Rechnung heraus und die gefundene Kurve wird für jede Abszisse dem Geforderten genügen.

KOROLLAR II

54. In dieser gefundenen Gleichung werden noch zwei andere Integralformeln enthalten sein; zuerst nämlich die Formel $\int Ldx$ und darauf die Formel $\Pi = \int [Z]dx$, die, weil sie in Z enthalten ist, in den Größen L, M, N, P etc. vorhanden sein wird.

KOROLLAR III

55. Wenn es also gefällt, diese Integrale durch Differentiation zu beseitigen, wird zu einer um zwei Grade höheren Differentialgleichung gelangt werden und zugleich wird die beliebige Konstante C herausgehen. Dennoch wird die Anzahl der beliebigen Konstanten um eine Einheit kleiner sein als der Grad dieser Differentiale; dies erklärt sich daher, weil das Integral $\Pi = \int [Z]dx$ einen bestimmten Wert erhalten muss, natürlich den, welchen sie in der Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ hat.

KOROLLAR IV

56. Daher werden also in der gefundenen Gleichung wegen der beliebigen Konstante C potentiell mehr Konstanten enthalten sein, als der Grad der Differentiale aufzeigt. Von diesen wird aber eine dadurch bestimmt werden, dass der Wert der gemeinsamen Formel $\Pi = \int [Z]dx$ für die gefundene Kurve von gegebener Größe ist; die übrigen werden aber durch gegebene Punkte oder die gegebene Lage der Tangenten bestimmt werden.

KOROLLAR V

57. Wenn Z eine Funktion sowohl der Größen x, y, p, q etc. als auch des Kurvenbogens s war und unter allen isoperimetrischen Kurven die gesucht wird, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum wird, dann wird werden

$$\Pi = s = \int [Z]dx \quad \text{und} \quad [Z] = \sqrt{1+pp},$$

so dass gilt

$$[M] = 0, \quad [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

KOROLLAR VI

58. In diesem Fall also, wenn $dZ = Lds + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ etc. war, wird man für die Kurve, die unter allen isoperimetrischen $\int Zdx$ zum Maximum oder Minimum hat, diese Gleichung haben:

$$0 = N - \frac{1}{dx} d\left(P + \frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}}\right) + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{ etc.}$$

oder

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = \frac{(C - \int Ldx)dp}{dx(1+pp)^{3:2}} - \frac{Lp}{\sqrt{1+pp}} + \text{ etc.}$$

oder

$$\frac{Lp}{\sqrt{1+pp}} + N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{ etc.} = \frac{(C - \int Ldx)dp}{dx(1+pp)^{3:2}}.$$

KOROLLAR VII

59. Weil C eine beliebige Größe ist, ist es gefällig, im Allgemeinen zu bemerken, dass, wenn für C jener Wert der Formel $\int Ldx$ angenommen wird, welchen sie einführt, wenn $x = a$ gesetzt wird, dann die Kurve hervorgehen wird, die unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse $x = a$ entsprechen, den maximalen oder minimalen Wert der Formel $\int Zdx$ hat.

BEMERKUNG 1

60. Der Fall von Korollar 6, weil er von den Autoren hauptsächlich behandeln zu werden pflegte, verdient eine spezielle Entwicklung, dass mit seiner Hilfe Probleme, die unter Umständen auftauchen können, leichter und bequemer aufgelöst werden können. Unter allen isoperimetrischen Kurven oder denen, die dieselbe Länge $s = \int dx\sqrt{1+pp}$ haben, werde die gesucht, in welcher $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während Z eine Funktion sowohl der bestimmten Größen x, y, p, q etc. als auch des Kurvenbogens s ist; sodass gilt

$$dZ = Lds + Mdx + Ndp + Pdp + \text{ etc.}$$

Für die Kurve, die sich dieser Eigenschaft erfreut, ist schon diese Gleichung gefunden worden:

$$\frac{1}{dx} d \cdot \frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}} = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{ etc.},$$

die freilich in diesem weitesten Sinne es weder zulässt integriert werden noch es zulässt, auf eine einfachere Form reduziert zu werden. Aber es wird förderlich sein, Fälle zu kennen, in denen sie sich integrieren lassen wird. Und zuerst freilich, wenn $N = 0$ ist, geht von selbst die Gleichung für die Kurve hervor:

$$A + \frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}} = -P + \frac{dQ}{dx} - \text{ etc.}$$

die schon einmal integriert worden ist. Zweitens wollen wir festlegen, dass $M = 0$ ist; und die Gleichung wird mit $pdx = dy$ multipliziert in diese übergehen

$$pd \cdot \frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}} = Ndy - pdP + \frac{pddQ}{dx} - \text{ etc.},$$

wenn zu dieser dann nachstehende addiert wird

$$Lds = Ldx\sqrt{1+pp} = dZ - Ndy - Pdp - Qdq + \text{ etc.},$$

wird nach Durchführen der Integration diese hervorgehen

$$\int\left(Ldx\sqrt{1+pp}+pd\cdot\frac{(C-\int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}}\right)=-A+Z-Pp-Qq+\frac{pdQ}{dx}+\text{ etc.}$$

Das erste Glied, wenn es entwickelt wird, geht in dieses über

$$\begin{aligned}&\int\left(Ldx\sqrt{1+pp}+\frac{(C-\int Ldx)pdp}{\sqrt{1+pp}^{3:2}}-\frac{Lppdx}{\sqrt{1+pp}}\right)\\=&\int\left(\frac{Ldx}{\sqrt{1+pp}}+\frac{(C-\int Ldx)pdp}{(1+pp)^{3:2}}\right),\end{aligned}$$

deren Integral diese ist

$$-\frac{C-\int Ldx}{\sqrt{1+pp}}.$$

Daher wird man in dem Fall, in dem $M=0$ ist, diese Gleichung haben

$$\frac{C-\int Ldx}{\sqrt{1+pp}}=A-Z+Pp+Qq-\frac{pdQ}{dx}.$$

Wenn aber drittens so $M=0$ wie $N=0$ war, wird man zuerst, wegen $N=0$, diese Gleichung haben:

$$A+\frac{(C-\int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}}=-P+\frac{dQ}{dx};$$

diese, mit $dp=qdx$ multipliziert, geht in diese über

$$Adp+\frac{(C-\int Ldx)pdp}{\sqrt{1+pp}}=-Pd+dQ.$$

Weil aber gilt

$$dZ=Ldx\sqrt{1+pp}+Pdp+Qdq,$$

wird man haben

$$dZ+Adp-Ldx\sqrt{1+pp}+\frac{(C-\int Ldx)pdp}{\sqrt{1+pp}}=qdQ+Qdq;$$

die integriert geben wird

$$Z+B+Ap+(C-\int Ldx)\sqrt{1+pp}=Qq$$

oder

$$C-\int Ldx=\frac{Qq-B-Ap-Z}{\sqrt{1+pp}}.$$

Aber aus der ersten Gleichung ist

$$C-\int Ldx=-\frac{A\sqrt{1+pp}}{p}-\frac{P\sqrt{1+pp}}{p}+\frac{dQ\sqrt{1+pp}}{pdx};$$

aus welchen man durch Kombination findet:

$$Adx - Bdy = Zdy - Pdx - Ppdy + dQ + ppdQ - Qpdp,$$

in welcher nicht weiter die Integralformel $\int Ldx$ enthalten ist. Den Gebrauch dieser Fälle werden wir also an Beispielen zeigen.

BEISPIEL I

61. Unter allen isoperimetrischen Kurven die zu bestimmen, in welcher $\int s^n dx$ ein Maximum oder Minimum ist, während s den Kurvenbogen bezeichnet, der der Abszisse x entspricht.

Weil ja die gemeinsame Eigenschaft die Länge des Bogens $s = \int dx\sqrt{1+pp}$ betrifft und in der Formel des Maximums oder Minimums $\int s^n dx$ der Bogen selbst enthalten ist, wird die Lösung sich auf den in der Bemerkung behandelten Fall beziehen. Nachdem also die Formel $\int s^n dx$ mit der allgemeinen $\int Zdx$ verglichen wurde, wird werden

$$Z = s^n \qquad \text{und} \qquad dZ = ns^{n-1}ds$$

und daher

$$L = ns^{n-1}, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0 \text{ etc.}$$

Daher wird man aus dem letzten Fall der Bemerkung, in welchem wir $M = 0$ und $N = 0$ gesetzt hatten, diese Gleichung haben

$$Adx - Bdy = Zdy = s^n dy,$$

aus welcher diese entsteht

$$Adx = dy(B + s^n) \quad \text{und} \quad A^2dx^2 + A^2dy^2 = A^2ds^2 = dy^2(A^2 + (B + s^n)^2)$$

und daher

$$dy = \frac{Ads}{\sqrt{A^2 + (B + s^n)^2}}$$

und

$$dx = \frac{(B + s^n)ds}{\sqrt{A^2 + (B + s^n)^2}};$$

woher die Konstruktion der Kurve durchgeführt werden können wird. Oder es wird, für $dy = pdx$ gesetzt, gelten

$$s^n = \frac{A - Bp}{p} \quad \text{und} \quad s = \sqrt[n]{\frac{A - Bp}{p}}:$$

woher werden wird

$$ds = dx\sqrt{1 + pp} = -\frac{Adp(A - Bp)^{(1-n):n}}{np^{(1+n):n}}.$$

Und daher werden durch p die Koordinaten der Kurve x und y so bestimmt werden, dass gilt

$$x = -\frac{A}{n}\int \frac{dp(A-Bp)^{(1-n):n}}{p^{(1+n):n}\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad y = -\frac{A}{n}\int \frac{dp(A-Bp)^{(1-n):n}}{p^{1+n}\sqrt{1+pp}}.$$

Es scheinen hier freilich vier Konstanten, natürlich zwei neue, außer A und B, wegen der zwei Integrationen y und x, einzugehen. Aber weil für $x = 0$ gesetzt zugleich der Bogen der Kurve $s = \sqrt[n]{\frac{A-Bp}{p}}$ verschwinden muss, wird daher umgekehrt die Konstante, die in der Integration von x entsteht, bestimmt werden. Denn, wenn n eine positive Zahl war, verschwindet der Bogen s für $p = \frac{A}{B}$ gesetzt; daher muss der Wert von x so bestimmt werden, dass für $p = \frac{A}{B}$ gesetzt $= 0$ wird.

Wenn daher $n = 1$ gesetzt wird, wird man aus der ersten Konstruktion sofort haben

$$dx = \frac{(B+s)ds}{\sqrt{A^2 + (B+s)^2}}$$

und daher

$$x = \sqrt{A^2 + B^2 + 2Bs + ss} - \sqrt{A^2 + B^2},$$

oder für $B = b$ und $\sqrt{A^2 + B^2} = c$ gesetzt wird gelten

$$x + c = \sqrt{c^2 + 2bs + ss}.$$

Aus der zweiten Konstruktionsweise entsteht aber

$$x = -A\int \frac{dp}{pp\sqrt{1+pp}} = \frac{A\sqrt{1+pp}}{p} + b \quad \text{oder} \quad (x-b)p = c\sqrt{1+pp};$$

und daher

$$p = \frac{c}{\sqrt{(x-b)^2 - c^2}} = \frac{dy}{dx}.$$

Daher, weil gilt

$$y = \int \frac{cdx}{\sqrt{(x-b)^2 - c^2}},$$

wird die genügende Kurve eine Kettenlinie sein.

BEISPIEL II

62. Unter allen Kurven derselben Länge die zu bestimmen, in welcher $\int Sdx$ ein Maximum oder Minimum ist, während S irgendeine Funktion des Bogens s ist.

Weil die gemeinsame Eigenschaft im Bogen $s = \int dx\sqrt{1+pp}$ enthalten ist, wird die Lösung aus der Bemerkung hergeholt werden können. Weil natürlich $Z = S =$ einer Funktion s ist, wird gelten

$$Lds = dS \quad \text{und} \quad M = N = P = Q \text{ etc. } = 0.$$

Daher, durch den dritten Fall der Bemerkung, wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$Adx - Bdy = Sdy \qquad \text{und} \qquad Adx = dy(B+S).$$

Daher wird also sein

$$A^2dx^2 + A^2dy^2 = A^2ds^2 = dy^2(A^2 + (B+S)^2)$$

und

$$y = \int \frac{Ads}{\sqrt{A^2 + (B+S)^2}};$$

es wird aber die Abszisse sein

$$x = \int \frac{(B+S)ds}{\sqrt{A^2 + (B+S)^2}};$$

daher wird die Konstruktion der Kurve durchgeführt werden können.

Wir wollen festlegen, dass $S = e^s$ ist; und für $dy = pdx$ gesetzt wird gelten

$$\frac{A - Bp}{p}e^s \quad \text{und} \quad e^s ds = -\frac{Adp}{pp} = \frac{(A-Bp)dx\sqrt{1+pp}}{p},$$

und daher

$$dx = -\frac{Adp}{(A-Bp)p\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad dy = -\frac{Adp}{(A-Bp)\sqrt{1+pp}}.$$

Durch Vergleichen wird aber werden

$$dx - \frac{Bdy}{A} = -\frac{dp}{p\sqrt{1+pp}}$$

und durch Integrieren

$$Ax - By = Al\frac{1+\sqrt{1+pp}}{p} + C,$$

oder

$$\frac{1+\sqrt{1+pp}}{p} = e^{(Ax-By-C):A}.$$

Weil aber für $s = 0$ gesetzt x verschwinden muss, und wegen $\frac{A-Bp}{p} = e^s$ für $s = 0$ gesetzt $p = \frac{A}{B+1}$ wird, ist durch die Integrationen zu bewirken, dass für $p = \frac{A}{B+1}$ gesetzt $x = 0$ wird.

BEISPIEL III

63. Unter allen Kurven derselben Länge die zu bestimmen, in welcher $\int sydx$ *ein Maximum oder Minimum ist, während* s *den Kurvenbogen bezeichnet.*

Die Lösung dieser Frage ist wiederum aus der Bemerkung herzuholen; denn es wird $Z = sy$ und $dZ = yds + sdy$ sein, woher $L = y$, $M = 0$ und $N = s$ wird, die übrigen Buchstaben P, Q etc. werden verschwinden. Weil $M = 0$ ist, wird der zweite Fall der Bemerkung diese Lösung liefern:

$$\frac{C - \int ydx}{\sqrt{1+pp}} = A - ys;$$

unmittelbar geht aber hervor

$$sdx = d \cdot \frac{(C - \int ydx)p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{(C - \int ydx)dp}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{ypdx}{\sqrt{1+pp}}.$$

Daher, weil ist

$$C - \int ydx = A\sqrt{1+pp} - ys\sqrt{1+pp},$$

wird gelten

$$sdx = \frac{Adp - ysdp - ydy}{1+pp}$$

oder

$$sdx + spdy + ysdp + ydy = Adp.$$

Wenn es aber gefällt, den Bogen s zu eliminieren, wird man aus den zwei Gleichungen haben

$$s = \frac{A}{y} - \frac{(C - \int ydx)}{y\sqrt{1+pp}} = \frac{(C - \int ydx)dp}{dx(1+pp)^{3:2}} - \frac{yp}{\sqrt{1+pp}};$$

und daher

$$\frac{Adx}{y} + \frac{ypdx}{\sqrt{1+pp}} = (C - \int ydx)\left(\frac{dp}{(1+pp)^{3:2}} + \frac{dx}{y\sqrt{1+pp}}\right).$$

In jedem der beiden Fälle ist es aber schwierig, zu einer zur Konstruktion der Kurve geeigneten Gleichung zu gelangen.

BEISPIEL IV

64. Unter allen Kurven, die dieselbe Fläche $\Pi = \int ydx$ *enthalten, die zu bestimmen, in welcher* $\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\Pi}$ *ein Maximum oder Minimum ist.*

Wenn wir diese Frage mit der allgemeinen Lösung vergleichen, werden wir haben

$$\int [Z]dx = \int ydx;$$

und daher ist $[Z] = y$ und $[N] = 1$; während die übrigen Buchstaben $[M]$, $[P]$, $[Q]$ etc. verschwinden. Weiter wird sein

$$Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\Pi} \qquad \text{und} \qquad dZ = -\frac{d\Pi\sqrt{1+pp}}{\Pi^2} + \frac{pdp}{\Pi\sqrt{1+pp}},$$

woher sein wird

$$L = -\frac{\sqrt{1+pp}}{\Pi^2}, \quad M = 0, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{p}{\Pi\sqrt{1+pp}}.$$

Deshalb wird für die gesuchte Kurve die folgende Gleichung hervorgehen:

$$0 = C + \int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\Pi} - \frac{1}{dx} d \cdot \frac{p}{\Pi\sqrt{1+pp}}.$$

Diese Gleichung werde mit $dy = pdx$ multipliziert, es wird sein

$$0 = Cdy + dy \int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\Pi^2} - pd \cdot \frac{p}{\Pi\sqrt{1+pp}},$$

welche integriert geben wird:

$$\begin{aligned} 0 = B + Cy + y\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\Pi^2} - \int \frac{d\Pi\sqrt{1+pp}}{\Pi^2} - \frac{pp}{\Pi\sqrt{1+pp}} \\ + \int \frac{pdp}{\Pi\sqrt{1+pp}} = B + Cy + y\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\Pi^2} - \frac{pp}{\Pi\sqrt{1+pp}} + \frac{\sqrt{1+pp}}{\Pi}. \end{aligned}$$

Daher werden wir deshalb diese Gleichung erhalten

$$0 = B + Cy + y\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\Pi^2} + \frac{1}{\Pi\sqrt{1+pp}};$$

wenn von dieser die erste mit y multipliziert subtrahiert wird, wird sein

$$0 = B + \frac{1}{\Pi\sqrt{1+pp}} + \frac{y}{dx} d \cdot \frac{p}{\Pi\sqrt{1+pp}}$$

oder

$$0 = Bdx + \frac{dx}{\Pi\sqrt{1+pp}} + \frac{ydp}{\Pi(1+pp)^{3:2}} - \frac{y^2 pdx}{\Pi^2\sqrt{1+pp}}$$

wenn wir aus welcher Gleichung erneut $\Pi = \int ydx$ eliminieren wollten, ginge eine Differentialgleichung dritter Ordnung hervor, aus welcher um Vieles weniger etwas abgeleitet werden könnte, um die Kurve zu erkennen.

BEMERKUNG 2

65. Obwohl wir in dieser Proposition festgelegt haben, dass $[Z]$ eine bestimmte Funktion der Größen x, y, p, q etc. ist, ist dennoch die Lösungsmethode klar, wenn diese Größe $[Z]$ selbst eine unbestimmte Funktion war, die Integralformeln in sich umfasst. Wir wollen nämlich festlegen, dass in der Formel $\Pi = \int [Z]dx$, die allen Kurven gemein sein muss, gilt

$$d[Z] = [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \text{ etc.}$$

während $\pi = \int [z]dx$ ist und gilt

$$d[z] = [rn]dx + [n]dy + [p]dp + [q]dq + \text{ etc.}$$

Es muss aber die Formel $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum sein, während gilt

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + \text{ etc.}$$

Nun ist die Formel $\int [Z]dx$ im zweiten Fall von Paragraph 7 des vorhergehenden Kapitels enthalten; daher, wenn das Integral $\int [L]dx$ genommen und sein der Abszisse $x = a$ entsprechender Wert, an welche Abszisse die Lösung angepasst werden muss, $= [H]$ und $[H] - \int [L]dx = [V]$ gesetzt wird, wird man den Differentialwert der Formel $\int [Z]dx$ haben

$$= nv \cdot dx \left([N] + [n][V] - \frac{d([P] + [p][V])}{dx} + \frac{dd([Q] + [q][V])}{dx^2} - \text{ etc.} \right).$$

Darauf ist aber die Formel des Maximums oder Minimums $\int Zdx$ im dritten Fall der erwähnten Stelle enthalten; um ihren Differentialwert zu finden, werde der Wert der Formel $\int Ldx$, der der Abszisse $x = a$ entspricht $= H$, $H - \int Ldx = V$ gesetzt. Nun werde nachstehendes Integral genommen

$$\int [L]Vdx = H \int [L]dx - \int [L]dx \int Ldx$$

und es sei für $x = a$ der Wert der Formel $\int [L]dx \int Ldx = K$, im selben Fall ist aber der Wert der Formel $\int [L]dx = [H]$, woher der Wert der Formel $\int [L]Vdx$ im Fall $x = a = H[H] - K$ sein wird und, man nenne

$$H[H] - K - H \int [L]dx + \int [L]dx \int Ldx = W,$$

sodass gilt

$$W = H[V] - K + \int [L]dx \int Ldx,$$

und es wird der Differentialwert der vorgelegten Formel $\int Zdx$ sein

$$= nv \cdot dx \left(N + [N]V + [n]W - \frac{d \cdot (P + [P]V + [p]W)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V + [q]W)}{dx^2} - \text{ etc.} \right).$$

Wenn daher zu diesem Differentialwert der vorhergehende mit einer beliebigen Konstante α multiplizierte addiert wird und die Summe $= 0$ gesetzt wird, wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung hervorgehen:

$$0 = N + [N](\alpha + V) + [n](\alpha[V] + W) - \frac{1}{dx} d \cdot d(P + [P](\alpha + V) + [p](\alpha[V] + W))$$
$$+ \frac{1}{dx^2} \cdot dd(Q + [Q](\alpha + V) + [q](\alpha[V] + W)) - \text{ etc.}$$

Es ist aber hier $\alpha + V = \alpha + H - \int Ldx$; daher, wenn $\alpha + H = C$ gesetzt wird, wird C eine beliebige Konstante und $\alpha + V = C - \int Ldx$ sein, und es wird gelten

$$\alpha[V] + W = C[H] - K - C \int [L]dx + \int [L]dx \int Ldx.$$

Auf diese Weise wird also zu der gesuchten Kurve gelangt werden, in deren Gleichung, weil wegen $[H]$ und K noch die gegebene Konstante a enthalten ist, sie dem Geforderten nur für die vorgelegte Abszisse $X = a$ genügen wird. Wenn daher aber die eine der beiden Formeln sich auf Fall 4, die andere auf Fall 5 bezieht, dann geht wiederum die Betrachtung der gegebenen Abszisse a aus der Rechnung heraus und dieselbe Kurve wird für die ganze Abszisse genügen, was ausreichen wird, es an einem einzigen Beispiel gezeigt zu haben.

BEISPIEL V

66. Unter allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen und die denselben Wert der Formel v erhalten, die zu finden, in welcher $\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{v}}$ ein Maximum oder ein Minimum ist, während $dv = gdx + Wdx\sqrt{1+pp}$ und W irgendeine Funktion von v ist.

Die Lösung dieser Frage wird die Kurve darbieten, über welcher ein herabsinkender Körper von gleichmäßiger Schwerkraft g nach unten in Richtung der Abszissen beunruhigt in irgendeinem resistierenden Medium am schnellsten unter allen Kurven, über denen er beim Herabsinken dieselbe Geschwindigkeit [vergleiche oben] erhält, herabgleitet. Es ist nämlich $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit des Körpers in irgendeinem Punkt der Kurve und W drückt den Widerstand des Mediums aus. Was nun zuerst die allgemeine Eigenschaft

$$v = \int dx(g + W\sqrt{1+pp}) \text{ betrifft,}$$

wollen wir festlegen, dass $dW = Udv$ ist, und diese Formel wird sich auf den vierten Fall [Seite] beziehen; denn es wird gelten

$$\Pi = v \quad \text{und} \quad Z = g + W\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad dZ = Udv\sqrt{1+pp} + \frac{Wpdp}{\sqrt{1+pp}};$$

daher wird gelten

$$L = U\sqrt{1+pp}, \quad M = 0, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{Wp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Es werde also das Integral $\int Udx\sqrt{1+pp}$ genommen und es sei im Fall, in dem $x = a$ gesetzt wird,

$$e^{\int Udx\sqrt{1+pp}} = H$$

und man setze

$$V = He^{-\int Udx\sqrt{1+pp}}.$$

Aus diesen wird der Differentialwert der Formel v sein

$$= nv \cdot dx\left(-\frac{1}{dx}d \cdot \frac{WVp}{\sqrt{1+pp}}\right) = -nv \cdot d \cdot \frac{WVp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Weiter wird sich die Formel des Maximums oder Minimums $\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{v}}$ auf den fünften Fall beziehen [Seite] und es wird gelten

$$Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{v}} \quad \text{und} \quad dZ = \frac{dv\sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}} + \frac{pdp}{\sqrt{v(1+pp)}}$$

und daher

$$\Pi = v \quad \text{und} \quad L = -\frac{\sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}}, \quad M = 0, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}.$$

Darauf wird aber wegen $v = \int dx(g + W\sqrt{1+pp})$ gelten

$$[Z] = g + W\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad d[Z] = U dv\sqrt{1+pp} + \frac{Wpdp}{\sqrt{1+pp}},$$

woher gilt

$$[L] = U\sqrt{1+pp}, \quad [M] = 0, \quad [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{Wp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Man setzte, wenn nach der Integration $x = a$ wird,

$$-\int e^{\int U dx\sqrt{1+pp}} \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}} = K,$$

und es sei

$$e^{-\int U dx\sqrt{1+pp}} \left(K + \int e^{\int U dx\sqrt{1+pp}} \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}} \right) = T;$$

und der Differentialwert der Formel $\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{v}}$ wird sein

$$= -\, nv \cdot dx \left(\frac{1}{dx} d \left(\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{WTp}{\sqrt{1+pp}} \right) \right) = -nv \cdot d \left(\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{WTp}{\sqrt{1+pp}} \right).$$

Aus diesen zwei gefundenen Differentialwerten entsteht also die folgende Gleichung für die gesuchte Kurve

$$0 = \alpha d \cdot \frac{WVp}{\sqrt{1+pp}} + d \left(\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{WTp}{\sqrt{1+pp}} \right)$$

und durch Integrieren

$$B = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{Wp(\alpha V + T)}{\sqrt{1+pp}}.$$

Aber es ist

$$\alpha V + T = e^{-\int U dx\sqrt{1+pp}} \left(\alpha H + K + \int e^{\int U dx\sqrt{1+pp}} \frac{dx\sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}} \right).$$

Wenn daher also $\alpha H + K = C$ gesetzt wird, wird C eine beliebige Konstante sein und die bestimmte Größe a wird ganz und gar aus der Gleichung verschwinden;

und daher wird die gesuchte Kurve die gewünschte Eigenschaft für jede Abszisse besitzen. Für die gesuchte Kurve wird man also diese Gleichung haben:

$$e^{\int U dx\sqrt{1+pp}}\left(\frac{B\sqrt{1+pp}}{Wp}-\frac{1}{W\sqrt{v}}\right)=C+\int e^{\int U dx\sqrt{1+pp}}\frac{dx\sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}}$$

und durch Differenzieren

$$-\frac{Bdp}{Wp^2\sqrt{1+pp}}-\frac{BUdv\sqrt{1+pp}}{W^2p}+\frac{Udv}{W^2\sqrt{v}}+\frac{dv}{2Wv\sqrt{v}} \\ +\frac{BUdx(1+pp)}{Wp}-\frac{Udx\sqrt{1+pp}}{W\sqrt{v}}=\frac{dx\sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}}.$$

Weil aber $dv = gdx + W dx\sqrt{1+pp}$ gilt, werden wir nach der Substitution diese Gleichung haben

$$\frac{Bdp}{Wp^2\sqrt{1+pp}}=\frac{gdx}{2Wv\sqrt{v}}+\frac{gUdx}{W^2\sqrt{v}}-\frac{gBUdx\sqrt{1+pp}}{W2^p}$$

oder diese

$$\frac{2BWdp}{\sqrt{1+pp}}=\frac{gWp^2dx}{v\sqrt{v}}+\frac{2gUp^2dx}{\sqrt{v}}-2BUdx\sqrt{1+pp}.$$

Diese Gleichung werde mit dv multipliziert und im ersten Term werde anstelle von dv $gdx + W dx\sqrt{1+pp}$, und dW anstelle von Udv geschrieben; danach wird man diese Gleichung haben

$$\frac{2gBdp}{W\sqrt{1+pp}}+2Bd-\frac{gp^2dv}{Wv\sqrt{v}}=\frac{2gppdW}{W^2\sqrt{v}}-\frac{2gBpdW\sqrt{1+pp}}{W^2},$$

die durch p^2 geteilt integrierbar wird; und die integrierte Gleichung wird diese sein

$$2C-\frac{2B}{p}=\frac{2gB\sqrt{1+pp}}{Wp}-\frac{2g}{W\sqrt{v}}\quad\text{oder}\quad W=\frac{gB\sqrt{v(1+pp)}-gp}{Cp\sqrt{v}-B\sqrt{v}}=\frac{dv-gdx}{dx\sqrt{1+pp}}.$$

Daher entsteht diese vom Widerstand W freie Gleichung

$$(Cp-B)dv=gCpdx+gBppdx-\frac{gpdx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{v}}.$$

Weil aber W eine gegebene Funktion von v ist, wird mit Hilfe der Gleichung

$$W\sqrt{v}=\frac{gB\sqrt{v(1+pp)}-gp}{Cp-B},$$

p durch v gegeben sein; wenn dieser Wert in der vorhergehenden Gleichung eingesetzt wird, wird dx durch v und dv gegeben sein und daher wird die gesuchte Kurve konstruiert werden können.

PROPOSITION VI PROBLEM

67. Unter allen Kurven, die mit der gemeinsamen Eigenschaft A versehen sind, die zu bestimmen, in welcher irgendeine Funktion sowohl jenes Ausdrucks A als auch irgendeines anderen B ein Maximum oder Minimum ist.

LÖSUNG. Es sei dA der Differentialwert des Ausdruckes A und dB der Differentialwert des Ausdrucks B; es wird der Differentialwert jener Funktion von A und B, die ein Maximum oder Minimum sein muss, eine Form dieser Art haben $\alpha dA + \beta dB$, in welcher die Konstanten α und β von der Art der Zusammensetzung, in welcher die Ausdrücke A und B in jener Funktion miteinander vermischt werden, abhängen, sodass sie bestimmte Werte erhalten, die von der Größe der Abszisse, welcher die Lösung angepasst sein muss, abhängen. Weil ja aber der Differentialwert des Ausdruckes A, der die gemeinsame Eigenschaft umfasst, dA ist, werde irgendein Vielfaches γdA zum Differentialwert $\alpha dA+\beta dB$ des Ausdruckes, der ein Maximum oder Minimum sein muss, addiert und die Summe $(\alpha+\gamma)dA+\beta dB$ wird gleich null gesetzt die Gleichung für die gesucht Kurve geben. Man wird also diese Gleichung haben

$$(\alpha+\gamma)dA+\beta dB = 0 \quad \text{oder} \quad (\alpha+\gamma)\delta dA+\beta\delta dB = 0,$$

in welcher, auch wenn α und β bestimmte konstante Größen sind,dennoch, wegen der beliebigen konstanten Größen γ und δ, die Koeffizienten der Werte dA und dB, die $(\alpha+\gamma)\delta$ und $\beta\delta$ sind, Konstanten beliebiger Größe werden werden. Wenn also an deren Stelle die Buchstaben ξ und η geschrieben werden, wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben $\xi dA + \eta dB = 0$. Deshalb, um Probleme zu lösen, müssen von den Ausdrücken A und B, von denen der eine die gemeinsame Eigenschaft enthält, aber irgendeine Funktion jeder der beiden ein Maximum oder Minimum sein muss, einzeln die Differentialwerte dA und dB genommen werden und sie, die mit gewissen beliebigen konstanten Größen multipliziert wurden, gleich null gesetzt werden, wonach diese Gleichung resultieren wird $\xi dA+\eta dB = 0$, die die Natur der gesuchten Kurve ausdrücken wird. Q.E.I.

KOROLLAR I

68. Die Natur der genügenden Kurve hängt also nur von den Ausdrücken A und B ab und die Art der Funktion von A und B, die ein Maximum oder Minimum sein muss, bleibt in keiner Weise in der Rechnung; sondern was für eine Funktion auch immer sie auch immer ist, es wird dieselbe Lösung hervorgehen.

KOROLLAR II

69. Was für eine Funktion von A und B deshalb auch immer unter allen Kurven, die sich derselben Eigenschaft A erfreuen, ein Maximum oder Minimum sein muss, die Lösung wird sich genauso verhalten, als wenn unter allen Kurven, die sich der gemeinsamen Eigenschaft A erfreuen, die verlangt wird, in welcher der andere Ausdruck B den maximalen oder minimalen Wert erhält.

KOROLLAR III

70. Wenn daher also die Ausdrücke A und B Formeln solcher Art waren, deren

Differentialwerte dA und dB nicht von der Größe der Abszisse x abhängen, welcher sie entsprechen, was passiert, wenn jene Formeln sich auf den entweder ersten oder vierten Fall beziehen, dann wird, gemäß unserer Aufzählung im vorhergehenden Kapitel in Paragraph 7, die gefundene Kurve für irgendeine Abszisse gleichermaßen genügen.

KOROLLAR IV

71. Dieselbe Lösung wird Geltung haben, wenn unter allen Kurven, die eine gemeinsame Eigenschaft haben, irgendeine Funktion von A und B verlangt wird, in welcher eine andere gewisse Funktion derselben A und B ein Maximum oder Minimum ist. In diesem Fall wird nämlich zur Gleichung $\xi dA + \eta dB = 0$ gelangt, in welcher ξ und η nach Belieben anzunehmende Konstanten sind.

BEISPIEL I

72. Unter allen Kurven (Fig. 20) aMb, die unter der Achse AB dieselbe Fläche $\int ydx$ enthalten, die zu finden, in welcher $\frac{\int yydx}{\int ydx}$ ein Minimum ist.

Diese Frage kommt auf, wenn unter allen gleichen Flächen, die innerhalb der äußersten Ordinaten Aa und Bb und der Basis AB gebildet werden können, die verlangt wird, die ihren Schwerpunkt an der untersten Stelle gelegen hat. Nachdem nämlich irgendeine Kurve aMb genommen wurde und die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$ gesetzt worden sind, wird der Schwerpunkt, der von der Basis AP wegbewegt wurde, des Anteils im Intervall $= \frac{\int yydx}{2\int ydx}$ sein, welcher daher minimal werden wird, wenn dieser Ausdruck $\frac{\int yydx}{\int ydx}$ minimal gemacht wird.

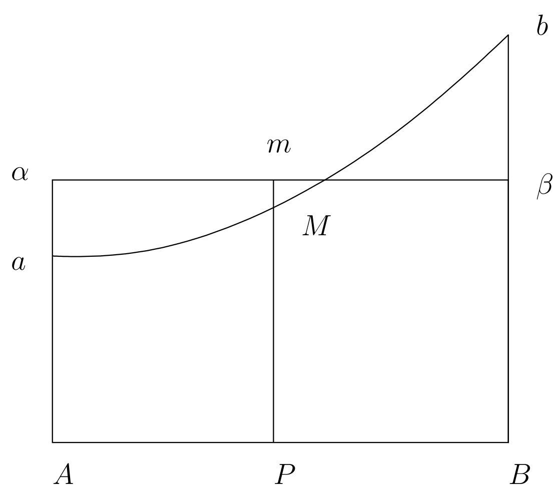

FIG. 20

Wir haben also diese zwei Formeln $\int ydx$ und $\int yydx$, deren Differentialwerte $nv \cdot dx \cdot 1$ und $nv \cdot dx \cdot 2y$ sind, aus denen für die gesuchte Kurve diese Gleichung berechnet wird $\xi + 2\eta y = 0$ oder $y = c$. Der Frage genügt also die der

Basis AB parallele gerade Linie $\alpha\beta$ und das rechtwinklige Parallelogramm wird sich vor allen Figuren wie $AabB$ derselben Fläche dieser Eigenschaft erfreuen, dass ihr Schwerpunkt zur Basis AB am nächsten herankommt. Wenn daher also $\alpha AB\beta$ als gefülltes Wassergefäß aufgefasst wird, wenn die oberste Schicht des Wassers $\alpha\beta$ sich in einer horizontalen Lage befindet, dann wird das Wasser seinen Schwerpunkt tiefer gelegen haben, als wenn seine oberste Schicht irgendeine andere Lage hätte.

BEISPIEL II

73. Unter allen Kurven (Fig. 14) derselben Länge DAD die zu finden, die ihren Schwerpunkt am tiefsten gelegen hat oder in welcher $\frac{\int x dx\sqrt{1+pp}}{\int dx\sqrt{1+pp}}$ *ein Minimum ist.*

Die Lösung, die gegeben werden wird, dieser Frage wird eingesehen, eine Kettenlinie zu sein; denn gemäß der Gesetze der Statik wird eine Kette, die von den Punkten D und D herabhängt eine Form solcher Art annehmen, dass ihr Schwerpunkt am tiefsten herabsinkt. Deswegen wird unter allen Formen, welche die Kette annehmen kann, die freilich alle von derselben Länge sind, die Kettenlinie entstehen, wenn die gesucht wird, in welcher $\frac{\int x dx\sqrt{1+pp}}{\int dx\sqrt{1+pp}}$ ein Minimum ist; dieser Ausdruck gibt natürlich die Distanz der Schwerpunktes G vom Anfang der Abszissen A. Weil man also diese zwei Formeln hat $\int dx\sqrt{1+pp}$ und $\int xdx\sqrt{1+pp}$ hat, suche man zuerst deren Differentialwerte; diese werden sein

$$\text{des ersten } = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und des anderen } = -nv \cdot d \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}},$$

aus welchen für die gesuchte Kurve diese Gleichung entsteht

$$cd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = d \cdot \frac{xp}{\sqrt{1+pp}}$$

und durch Integrieren

$$\frac{xp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{cp}{\sqrt{1+pp}} + b \quad \text{oder} \quad x - c = \frac{b\sqrt{1+pp}}{p} \quad \text{und} \quad dx = \frac{-bdp}{pp\sqrt{1+pp}}.$$

Daher wird also werden

$$y = \int pdx = -b\int \frac{dp}{p\sqrt{1+pp}};$$

aus diesen Gleichungen wird die Kurve konstruiert werden und die Kurvenlänge wird sein

$$\int dx\sqrt{1+pp} = s = \frac{b}{p} + \text{ Konst. } = -\frac{b}{p} + f.$$

Daher wird eine andere Konstruktion, indem x und y durch s bestimmt werden, gebildet werden können; denn es wird $p = \frac{b}{s-f}$ sein und, wenn der Anfang in A

genommen wird, wo $p = \infty$ wird, ist $f = 0$ zu setzen, sodass gilt $p = \frac{b}{s}$; daher wird

$$\sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{bb+ss}}{s} \quad \text{und} \quad dx\sqrt{1+pp} = ds = \frac{dx\sqrt{bb+ss}}{s};$$

und daher

$$dx = \frac{sds}{\sqrt{bb+ss}} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{bb+ss} - b.$$

Weiter wird sein

$$dy = pdx = \frac{bds}{\sqrt{bb+ss}} \quad \text{und} \quad y = bl\frac{s+\sqrt{bb+ss}}{b}.$$

Es wird aber eine Gleichung zwischen den orthogonalen Koordinaten x und y aus nachfolgender Gleichung abgeleitet werden

$$x - c = \frac{b\sqrt{1+pp}}{p};$$

wenn diese über der Achse AP verlangt wird, ist die der Durchmesser und, nachdem der Anfang der Abszissen in A genommen wurde, wo $pp = \infty$ ist, muss $c = -b$ gesetzt werden; und es wird $(x+b)p = b\sqrt{1+pp}$ sein und daher

$$(x+b)^2pp = bb + bbpp \quad \text{et} \quad p = \frac{b}{\sqrt{xx+2bx}};$$

und daher $dy = \frac{bdx}{\sqrt{xx+2bx}}$, welches die bekannte Gleichung für die Kettenlinie ist.

BEISPIEL III

74. Unter allen Kurven derselben Länge die zu bestimmen, in welcher $\frac{\int Sxdx\sqrt{1+pp}}{\int Sdx\sqrt{(1+pp}}$ *ein Minimum ist, während S irgendeine Funktion des Kurvenbogens* $s = \int dx\sqrt{1+pp}$ *bezeichnet.*

In diesem Beispiel ist also der Fund der Kettenlinie enthalten, wenn die Kette nicht überall gleichmäßig dick war, sondern die Dicke, die dem Bogen s entspricht, wie S eine Funktion von s ist. Dann wird nämlich $\int Sdx\sqrt{1+pp}$ das Gewicht dieser Kette und $\frac{\int Sxdx\sqrt{1+pp}}{\int Sdx\sqrt{1+pp}}$ die Höhe des Schwerpunktes über dem Anfang der Abszissen ausdrücken; diese muss also also minimal sein. Prinzipiell scheint freilich dieser Fall im vorhergehenden Problem nicht enthalten zu sein, weil die Formel, die den Bogen ausdrückt, $\int dx\sqrt{1+pp}$ nicht im Ausdruck des Maximums oder Minimums $\frac{\int Sxdx\sqrt{1+pp}}{\int Sdx\sqrt{1+pp}}$ enthalten ist, die natürlich eine Funktion zwei anderer Integralformeln ist. Aber weil S eine Funktion des Kurvenbogens s und $ds = dx\sqrt{1+pp}$ ist, wird $\int Sdx\sqrt{1+pp} = \int Sds$ sein, und daher eine Funktion von s; daher wird der Ausdruck $\frac{\int Sxdx\sqrt{1+pp}}{\int Sdx\sqrt{1+pp}}$ eine Funktion der

Formeln $\int dx\sqrt{1+pp}$ und $\int Sxdx\sqrt{1+pp}$ sein, jene von welchen die gemeinsame Eigenschaft enthält. Es ist also dasselbe, als wenn wir im Allgemeinen unter allen Kurven und gleich langen die suchen müssten, in welcher $\int Sxdx\sqrt{1+pp}$ ein Minimum ist. Weil nun S eine Funktion von $s = \int dx\sqrt{1+pp}$ ist, wird sich diese Frage auf die vorhergehende Proposition und den Fall beziehen, der in Paragraph 60 behandelt worden ist. Es wird natürlich $Z = Sx\sqrt{1+pp}$ sein; daher, wenn wir $dS = Tds$ setzen, wird werden

$$dZ = xTds\sqrt{1+pp} + Sdx\sqrt{1+pp} + \frac{Sxpdx}{\sqrt{1+pp}},$$

sodass gilt

$$L = xT\sqrt{1+pp}, \quad M = S\sqrt{1+pp}, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{Sxp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Nun erhalten wir, wegen $N = 0$, aus demselben erwähnten Ort sofort diese Gleichung

$$A + \frac{(C - \int xTdx\sqrt{1+pp})p}{\sqrt{1+pp}} = -\frac{Sxp}{\sqrt{1+pp}}$$

oder

$$\frac{A\sqrt{1+pp}}{p} + C - \int xTdx\sqrt{1+pp} + Sx = 0.$$

Aber es ist $Tdx\sqrt{1+pp} = Tds = dS$; daher hat man

$$\frac{A\sqrt{1+pp}}{p} + C + Sx - \int xdS = 0,$$

wo A und C beliebige konstante Größen sind. Diese Gleichung werde differenziert und es wird werden

$$\frac{-Adp}{pp\sqrt{1+pp}} + Sdx = 0 \quad \text{oder} \quad Sdx\sqrt{1+pp} = -\frac{cdp}{pp} = Sds.$$

Daher, weil S eine Funktion von s ist, werde Sds integriert und das integral, was $= R$ sei, wird das Gewicht sein, das der Länge s entspricht. Es wird also durch Integrieren $\frac{c}{p} = R + C$ werden; und, wenn es gefällt, den Anfang der Kurve an der Stelle A zu nehmen, wo die Tangente der Kurve horizontal ist, wird $C = 0$ und $p = \frac{c}{R}$ sein. Daher wird also weiter sein

$$\sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{cc+RR}}{R} = \frac{ds}{dx};$$

und daher

$$dx = \frac{Rds}{\sqrt{cc+RR}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{cds}{\sqrt{cc+RR}},$$

aus welchen Gleichungen die Kurve so konstruiert werden können wird, dass zu einer gewissen Länge der Kette so die entsprechende Abszisse wie die entsprechende Ordinate bestimmt wird. Es ist aber klar, dass im Fall, in dem $R = s$ ist, das heißt in dem die Kette von gleichmäßiger Dicke festgelegt wird, dann die gewöhnlich Kettenlinie hervorgeht.

BEMERKUNG 1

75. Wenn also die Übereinstimmung dieses Beispiels so mit dieser Proposition wie mit der vorhergehenden nicht bemerkt worden wäre, dann hätte die Lösung freilich durch die allgemeine Regel durchgeführt werden können, wäre aber dennoch um Vieles länger gewesen. Damit aber nichtsdestoweniger der allgemeine Gebrauch dieser Methode deutlicher vor Augen geführt wird, scheint es ratsam, dieses Beispiel gemäß der allgemeinen Vorschriften aufzulösen. Es werde also unter allen Kurven derselben Länge $s = \int dx\sqrt{1+pp}$ die gesucht, die den maximalen oder minimalen Wert dieses Ausdrucks

$$\frac{\int Sxdx\sqrt{1+pp}}{\int Sdx\sqrt{1+pp}}$$

hat, während S irgendeine Funktion des Kurvenbogens s ist. Und weil sich ja noch nicht vermuten lässt, dass die Betrachtung der gegebenen Abszisse, von welcher der Differentialwert des Ausdrucks $\frac{\int Sxdx\sqrt{1+pp}}{\int Sdx\sqrt{1+pp}}$ abhängt, aus der Rechnung herausgehen wird, wollen wir festlegen, dass dieser Frage nur für eine gegebene Länge $x = a$ der Abszisse genügt werden muss. Von dieser Länge hängt freilich der Differentialwert der Formel, die die gemeinsame Eigenschaft enthält, $\int dx\sqrt{1+pp}$ nicht ab, der natürlich durchgehend $= -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ ist; aber im Ausdruck des Maximums oder Minimums $\frac{\int Sxdx\sqrt{1+pp}}{\int Sdx\sqrt{1+pp}}$ wollen wir festlegen, dass in dem Fall, in dem $x = a$ ist, gelten wird

$$\int Sxdx\sqrt{1+pp} = A \quad \text{und} \quad \int Sdx\sqrt{1+pp} = B,$$

der Differentialwert jenes Zählers $\int Sxdx\sqrt{1+pp}$ aber $= dA$ ist, der Differentialwert des Nenners $\int Sdx\sqrt{1+pp}$ aber $= dB$ ist. Daher wird also der Differentialwert des Ausdruckes des Maximums oder Minimums, der im Fall $x = a = \frac{A}{B}$ wird, $-\frac{BdA-AdB}{BB}$ sein, der irgendeinem Vielfachen des Differentialwertes der gemeinsamen Formel $-nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ gleichgesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben wird. Nun, um die Differentialwerte dA und dB zu finden, wollen wir zuerst die Formel $\int Sdx\sqrt{1+pp}$ betrachten, die sich gemäß der Aufzählung in Paragraph 7 des vorhergehenden Kapitels auf den zweiten Fall bezieht; in diesem wird $Z = S\sqrt{1+pp}$ sein und für $dS = Tds$ gesetzt wird gelten

$$dZ = Tds\sqrt{1+pp} + \frac{Spdp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Nach einem Vergleich wird also sein

$$\Pi = s, \quad L = T\sqrt{1+pp}, \quad M = 0, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{Sp}{\sqrt{1+pp}};$$

dann wird aber wegen $\Pi = s = \int dx\sqrt{1+pp}$ gelten

$$[Z] = \sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad [M] = 0, \quad [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Nun werde das Integral $\int Ldx = \int Tdx\sqrt{1+pp} = \int Tds = S$ genommen, dessen Wert im Fall $x = a = G$ werde, und es wird $V = G - S$ sein. Deswegen wird man den Differentialwert der Formel $\int Sdx\sqrt{1+pp}$ haben

$$dB = -nv \cdot d\left(\frac{Sp}{\sqrt{1+pp}} + \frac{p(G-S)}{\sqrt{1+pp}}\right) = -nv \cdot d \cdot \frac{Gp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Weiter wird die andere Formel $\int Sxdx\sqrt{1+pp}$ gleichermaßen in demselben Fall erfasst und es wird sein

$$Z = Sx\sqrt{1+pp} \quad \text{und} \quad dZ = Txds\sqrt{1+pp} + Sdx\sqrt{1+pp} + \frac{Sxpdp}{\sqrt{1+pp}},$$

woher wird

$$\Pi = s, \quad L = Tx\sqrt{1+pp}, \quad M = S\sqrt{1+pp}, \quad N = 0 \quad \text{und} \quad P = \frac{Sxp}{\sqrt{1+pp}}.$$

Darauf wird wegen $\Pi = s = \int dx\sqrt{1+pp}$ wie zuvor gelten

$$[Z] = \sqrt{1+pp}, \quad [M] = 0, \quad [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Nun werde das Integral $\int Ldx = \int Txdx\sqrt{1+pp} = \int Txds = \int xdS$ genommen, dessen Wert für $x = a$ gesetzt $= H$ sei; es wird $V = H - \int xdS$ gelten und daher wird der Differentialwert dieser Formel hervorgehen

$$dA = -nv \cdot d\left(\frac{Sxp + p(H - \int xdS)}{\sqrt{1+pp}}\right) = -nv \cdot d \cdot \frac{p(H + \int Sdx)}{\sqrt{1+pp}}.$$

Nachdem also die Werte dA und dB gefunden worden sind, wird für die gesuchte Kurve gelten

$$\alpha B^2 d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} - \beta A d \cdot \frac{Gp}{\sqrt{1+pp}} + \beta B d \cdot \frac{p(H + \int Sdx)}{\sqrt{1+pp}} = 0$$

und durch Integrieren

$$\frac{\alpha B^2 p - \beta AGp + \beta BHp + \beta Bp\int Sdx}{\sqrt{1+pp}} = C;$$

in welcher α, β und C beliebige Konstanten und G und H bestimmte Konstanten sind. Wenn daher also $\frac{\alpha B}{\beta} - \frac{AG}{B} + H = b$ $\frac{C}{\beta B} = c$ gesetzt wird, werden b und c beliebige Konstanten sein, und die bestimmten Konstanten G und H, die vom bestimmten Wert der Abszisse $x = a$ abhängen, werden ganz und gar aus der Gleichung verschwinden; so dass die gefundene Kurve sich für jede Abszisse der gewünschten Eigenschaft erfreuen wird, und ihre Gleichung wird diese sein

$$c = \frac{bp + p\int Sdx}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{oder} \quad \frac{c\sqrt{1+pp}}{p} = b + \int Sdx;$$

die differentiert geben werden

$$Sdx = -\frac{cdp}{pp\sqrt{1+pp}} \quad \text{oder} \quad Sdx\sqrt{1+pp} = Sds = -\frac{cdp}{pp}.$$

Es werde wie oben $\int Sds = R$ gesetzt, sodass R das Gewicht der Kette der Länge s darstellt, es wird $R = \frac{c}{p} +$ Konst. sein, welche die Gleichung selbst ist, die wir mit der vorhergehenden Methode gefunden haben. Aus dieser Lösung wird deshalb eingesehen, wie Fragen dieser Art durch die allgemeine Methode aufgelöst werden können, wenn die gemeinsame Eigenschaft nicht in den Ausdruck des Maximums oder Minimums eingeht; damit dies noch klarer eingesehen wird, wird es genügen, noch ein einziges Beispiel dieser Art beigefügt zu haben.

BEISPIEL IV

76. Unter allen Kurven (Fig. 14) DAD derselben Länge, die der gegebenen Abszisse AC = a entsprechen, die zu bestimmen, die die Fläche DAD erfasst, deren Schwerpunkt G entweder am höchsten oder tiefsten gelegen ist oder in welcher $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$ *ein Maximum oder Minimum ist.*

Die gemeinsame Eigenschaft ist also $\int dx\sqrt{1+pp}$, deren Differentialwert, der der Abszisse x entspricht, $= -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ ist. Aber der Differentialwert des Ausdrucks des Maximums oder Minimums $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$ wird von der vorgeschriebenen Länge $x = a$ der Abszisse abhängen; damit dieser im Fall, in dem $x = a$ wird, gefunden wird, werde $\int yxdx = A$ und der Differentialwert dieser Formel sei $= dA$, der durch die oben gegebenen Regeln $= nv \cdot dx \cdot x = nv \cdot xdx$ gefunden wird. Weiter gehe in demselben Fall $x = a$ die andere Formel $\int ydx$ in B über und ihr Differentialwert sei $= dB$, der durch die gegebenen Regeln $= nv \cdot dx$ gefunden wird; sodass $dA = nv \cdot xdx$ und $dB = nv \cdot dx$ ist. Aus diesen wird der Differentialwert des Ausdrucks des Maximums oder Minimums $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$, der im Fall $x = a$ in $\frac{A}{B}$ übergeht, dieser sein

$$= \frac{BdA - AdB}{BB} = \frac{nv(Bxdx - Adx)}{BB},$$

dieser wird einem Vielfachen des Differentialwertes $-nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, der aus der gemeinsamen Eigenschaft hervorging, gleich gesetzt diese Gleichung für die gesuchte Kurve geben

$$\alpha d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{Bxdx - Adx}{BB}.$$

Es sei $\frac{A}{B} = h$, es wird h eine bestimmte konstante Größe sein, die die Formel $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$ liefert, wenn $x = a$ gesetzt wird, und es werde $\alpha B = cc$ gesetzt, es wird cc eine beliebige Größe sein. Daher wird man für die Kurve diese Gleichung haben

$$ccd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = xdx - hdx,$$

die integriert gibt

$$\frac{2ccp}{\sqrt{1+pp}} = xx - 2hx + bb;$$

also

$$4c4^p p = (xx - 2hx + bb)^2(1+pp) \quad \text{und} \quad p = \frac{xx - 2hx + bb}{\sqrt{4c^4 - (xx - 2hx + bb^2)}} = \frac{dy}{dx}.$$

Deshalb wird gelten

$$y = \int \frac{(xx - 2hx + bb)dx}{\sqrt{4c^4 - (xx - 2hx + bb)^2}}.$$

wo sich die Konstante bb nach Belieben entweder positiv oder negativ annehmen lässt. Diese Kure genügt der Frage aber nur in dem Fall, in dem $x = a$ ist; und damit sie genügt, muss dem Buchstaben h der Wert zugeteilt werden, welchen im Fall $x = a$ der Ausdruck $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$ erhalten wird, woher der Wert h bestimmt werden wird. Im Übrigen ist es gefällig zu bemerken, dass diese Kurve die ist, die für gewöhnlich unter dem Namen Elastica bekannt ist.

Kapitel VI

Die Methode, unter allen sich mehrerer gemeinsamer Eigenschaften erfreuender Kurven die zu bestimmen, die mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist

PROPOSITION I THEOREM

I. Dieselbe Kurve, die unter ganz und gar allen Kurven den Ausdruck $\alpha A + \beta B$ zum Maximum oder Minimum hat, wird zugleich so beschaffen sein, dass sie unter allen, die mit derselben Eigenschaft A versehen sind, den maximalen oder minimalen Wert der Formel B enthält.

BEWEIS. Wir wollen festlegen, dass die Kurve gefunden worden ist, in welcher unter allen anderen, die derselben Abszisse entsprechen, der Wert des Ausdrucks $\alpha A + \beta B$ maximal ist; dasselbe, was nämlich über das Maximum gezeigt werden wird, wird entsprechend umformuliert über das Minimum gelten. Es bezeichnen aber die Buchstaben A und B hier für uns Formeln solcher Art oder unbestimmte Ausdrücke, welchen die Frage über Maxima und Minima zufallen kann; dann aber sind α und β irgendwelche konstanten Größen. Wir wollen nun diese Kurve, in welcher $\alpha A + \beta B$ ein Maximum ist, mit dem Buchstaben Q bezeichnen, damit wir sie leichter ohne lästige Wortbeschreibungen kennzeichnen können. Nun werde also irgendeine andere Kurve R aufgefasst, die derselben Abszisse entspricht und die denselben Wert der Formel A erhält, welchen die Kurve Q hat; in dieser Kurve R wird also der Ausdruck $\alpha A + \beta B$ daher einen kleineren Wert annehmen, als in der Kurve Q, weil in der Kurve Q der Ausdruck $\alpha A + \beta B$ den größten Wert von allen erhält. Daher, weil in den Kurven Q und R der Ausdruck A denselben Wert erhält und in Q der Ausdruck $\alpha A + \beta B$ größer sein muss als in der Kurve R, folgt, dass in der Kurve Q der Wert des Ausdrucks B größer sein muss als in der Kurve R. Weil also R irgendeine Kurve bezeichnet, die mit Q den gemeinsamen Wert der Formel A erhält, ist es klar, dass unter all diesen Kurven R die Kurve Q jene ist, in welcher die Formel B den maximalen Wert hat. Aus diesen Dingen schließt man, dass dieselbe Kurve, die unter ganz und gar allen Kurven den maximalen oder minimalen Wert des Ausdrucks $\alpha A + \beta B$ hat, zugleich so beschaffen ist, dass sie unter allen anderen Kurven, die sich der gemeinsamen Eigenschaft A erfreuen, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdrucks B erhält. Denn obwohl der Beweis nur für das Maximum geführt worden ist, wird derselbe dennoch nach den jeweiligen Umformulierungen an das Minimum angepasst werden. Q.E.D.

KOROLLAR I

2. Umgekehrt wird deshalb eingesehen, wenn die Kurve gefunden werden muss, die unter allen, die mit derselben gemeinsamen Eigenschaft A versehen sind, den Ausdruck B zum Maximum oder Minimum haben wird, dass dann dem Geforderten genügt wird, wenn uneingeschränkt unter allen Kurven die bestimmt wird, in welcher $\alpha A + \beta B$ ein Maximum oder Minimum ist.

KOROLLAR II

3. In die Lösung von Problemen dieser Art gehen also die zwei neuen beliebigen Konstanten α und β ein, die in den Ausdrücken A und B selbst nicht vorhanden waren; diese werden aber den Platz höchstens einer Konstante einnehmen, weil nur deren Verhältnis in die Rechnung eingeht.

KOROLLAR III

4. Wenn daher also unter allen Kurven, die sich derselben Eigenschaft A erfreuen, die bestimmt werden muss, in welcher B ein Maximum oder Minimum ist, dann werden die Differentialwerte jedes der beiden Ausdrücke A und B genommen, die einzeln mit beliebigen Konstanten multipliziert und zusammen gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben werden.

KOROLLAR IV

5. Zugleich ist es auch klar, dass es egal ist, ob unter allen Kurven, die sich der gemeinsamen Eigenschaft A erfreuen, die gesucht wird, in welcher B ein Maximum oder Minimum ist, oder umgekehrt unter allen Kurven, die sich der gemeinsamen Eigenschaft B erfreuen, die gesucht wird, in welcher A ein Maximum oder Minimum ist.

BEMERKUNG 1

6. Diese Dinge, die wir sowohl in dieser Proposition als auch in den angehängten Korollaren angegeben haben, sind freilich aus dem vorhergehenden Kapitel schon sehr offenkundig, in welchen natürlich die inverse Methode, Probleme zu

lösen, enthalten ist, in denen unter allen Kurven, die sich einer gemeinsamen Eigenschaft erfreuen, die gesucht wird, die mit der Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums versehen ist. Aber in der Tat dürfen wir nicht glauben, nur denselben Gegenstand wiederholt zu haben; denn dieselbe Wahrheit, die wir zuvor mit einer ziemlichen langwierigen Methode gefunden hatten, haben wir hier sehr kurz und knapp bewiesen. Deshalb wird die eine Beweismethode umso mehr durch die andere wegen der größten Übereinstimmung jeder der beiden bestätigt werden, und wenn jemandem die erste wegen des sehr intensiven Gebrauchs des unendlich Kleinen nicht hinreichend durchsichtige Methode zu schlüpfrig und unsicher scheint, dann wird ihm der hier gegebene Beweis jeden Zweifel nehmen. Darauf, wenn jemand über die Umkehrung der gegenwärtigen Proposition, die in Korollar 1 gemacht worden ist, immer noch zweifelt, wird ihm die erste Methode vollstens genügen. Inzwischen kann aber die Begründung der Umkehrung aus sich selbst heraus sicher gegeben werden. Weil nämlich die Kurve Q, die unter ganz und gar allen Kurven $\alpha A + \beta B$ zum Maximum oder Minimum hat, so beschaffen ist, dass sie unter allen Kurven, die sich der gemeinsamen Eigenschaft A erfreuen, B zum Maximum oder Minimum hat, was auch immer anstelle von α und β angenommen wird, ist es von Nöten, dass die Umkehrung gleichermaßen gilt, wenn freilich den Koeffizienten α und β die größte Ausdehnung zugeschrieben wird. Und es scheint daher ratsam, dies mitzuteilen und die Gültigkeit dieser Begründung zu zeigen, damit im Folgenden, wo wir dieselbe gebrauchen werden, kein Zweifel bestehen bleibt. Denn diese Proposition, auch wenn sie sich eigens auf das vorhergehende Kapitel bezieht, haben wir hierauf übertragen, damit wir mit derselben Methode den diesem Kapitel zu eigenen Gegenstand leichter behandeln können; dieser, wenn er mit der anderen Methode erledigt werden müsste, würde natürlich sehr lange Rechnungen und die größten Verwicklungen von Differentialen aller Ordnungen erfordern. Dennoch, sofern es geschehen kann, werden wir dazwischen sorgsam beweisen, dass alles, was wir hier angeben werden, auch durch die obere Methode bestätigt und gefunden werden kann.

PROPOSITION II THEOREM

7. Dieselbe Kurve, die unter ganz und gar allen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdrucks $\alpha A + \beta B + \gamma C$ hat, wird zugleich so beschaffen sein, dass sie unter allen Kurven, die so den Ausdruck A wie den Ausdruck B gemeinsam haben, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdruckes CS hat.

BEWEIS. Es bezeichnen hier für uns die Buchstaben A, B und C Integralformeln oder unbestimmte Ausdrücke solcher Art, die des Maximums oder Minimums fassungsfähig sind, aber die Buchstaben α, β, γ bezeichnen beliebige konstante Größen. Es sei nun Q die Kurve, die unter ganz und gar allen Kurven den maximalen oder minimalen Wert $\alpha A + \beta B + \gamma C$ hat, und es werde irgendeine andere Kurve R aufgefasst, in welcher sowohl der Ausdruck A als auch der Ausdruck B denselben Wert erhält, welchen sie in der Kurve Q erhält; nach Festlegen davon wird der zusammengesetzte Ausdruck $\alpha A + \beta B$ denselben Wert in jeder der beiden Kurven Q und R haben. Dieser Sache wegen wird der ganze Ausdruck $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in der Kurve R einen kleineren Wert als in der Kurve Q erhalten, wenn freilich $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in der Kurve Q ein Maximum ist; andernfalls wird der Wert des Ausdrucks $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in der Kurve R größer sein als in der Kurve Q, wenn $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in der Kurve Q ein Minimum war. Weil also der Teil $\alpha A + \beta B$ des Ausdruckes jeder der beiden Kurven Q und R gemeinsam ist, wird der übrige Anteil γC und daher der Ausdruck C im Falle des Maximums in Q größer sein als in R, im Falle des Minimums wird aber der Ausdruck C in der Kurve Q größer sein als in der Kurve R. Aus diesen folgt, wenn die Kurve Q unter ganz und gar allen Kurven den maximalen oder minimalen Wert des Ausdrucks $\alpha A + \beta B + \gamma C$ hat, dass dann zugleich diese Kurve Q mit der Gestalt versehen ist, dass sie unter allen Kurven R, die sich desselben Wertes sowohl des Ausdrucks A als auch des Ausdrucks B erfreuen, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdrucks C enthält. Q.E.D.

KOROLLAR I

8. Weil ja die Ausdrücke A, B und C nach Belieben untereinander vertauscht werden können, wird die Kurve, in welcher $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ein Maximum oder Minimum ist, zugleich unter entweder allen Kurven, die sich derselben gemeinsamen Eigenschaften A und B erfreuen, das maximale oder minimale C haben wird, oder das maximale oder minimale B unter allen Kurven haben, die sich den gemeinsamen Eigenschaften A und C erfreuen werden, oder schließlich das maximale oder minimale A unter allen Kurven haben, welchen die beiden Eigenschaften B und C gleichermaßen zufallen.

KOROLLAR II

9. Dieselbe Kurve, die also unter allen, die sich derselben zwei gemeinsamen Eigenschaften A und B erfreuen, das maximale oder minimale C hat, wird unter allen Kurven, die mit den zwei Eigenschaften entweder A und C oder B und C gleichermaßen versehen sind, entweder das maximale oder minimale B oder das maximale oder minimale A haben.

KOROLLAR III

10. Wenn also die Kurve gesucht werden muss, die unter allen anderen, die mit den zwei Eigenschaften A und B gleichermaßen versehen sind, den maximalen oder minimalen Ausdruck C hat, dann wird dem Geforderten genügt werden, wenn die Kurve gesucht wird, die uneingeschränkt unter allen Kurven den Ausdruck $\alpha A + \beta B + \gamma C$ zum Maximum oder Minimum hat.

KOROLLAR IV

11. Weil ja α, β, γ beliebige konstante Größen sind, gehen in die Lösung von Problemen dieser Art drei neue beliebige konstante Größen ein, die in den vorgelegten Formeln A, B und C nicht enthalten waren; aber diese drei Konstanten α, β und γ werden nur zwei gleichwertig sein.

KOROLLAR V

12. Diese Konstanten waren aber schon in der zuerst für die Kurve gefundenen Gleichung enthalten; außer diesen werden aber durch Integration so viele neue

Konstanten eingehen, wie Integrationen von Nöten sind, bevor zu einer endlichen Gleichung gelangt wird.

KOROLLAR VI

13. Auf die gleiche Weise, auf die wir diese Proposition und die vorhergehende bewiesen haben, wird gezeigt werden, dass dieselbe Kurve, die unter uneingeschränkt allen Kurven den maximalen oder minimalen Ausdruck $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ hat, unter allen Kurven, die die drei Ausdrücke A, B und C gemeinsam haben, den maximalen oder minimalen vierten D haben wird.

BEMERKUNG 1

14. Aus dieser Proposition wird schon zur Genüge die Methode erkannt, Probleme, die sich auf die relative Methode beziehen, solcher Art aufzulösen, in denen die Kurve gesucht wird, die unter allen, die derselben Abszisse entsprechen und sich zwei oder mehr gemeinsamen Eigenschaften gleichermaßen erfreuen, den maximalen oder minimalen Wert eines gewissen Ausdrucks hat. Die Frage wird natürlich auf die absolute Methode zurückgeführt werden, so dass unter ganz und gar allen Kurven die zu suchen ist, die einen gewissen maximalen oder minimalen Ausdruck hat. Und mit dieser Reduktion erhalten wir den Vorteil, dass wir alle Probleme dieser Art mit Hilfe von Differentialwerten, welche wir schon oben zu finden gelehrt haben, auflösen können. Die Auflösungsmethode selbst wird aber darauf zurückgehen, dass alle gemeinsamen Eigenschaften, zusammen mit dem Ausdruck des Maximums oder Minimums, einzeln erklärt werden, die einzelnen mit beliebigen Konstanten multipliziert werden und die Produkte zu einer Summe zusammengefasst werden; danach wird unter absolut allen Kurven die gesucht werden müssen, in welcher die Summe maximal oder minimal wird. Dies aber selbst wird durchgeführt werden, indem der Differentialwert jener Summe gefunden wird und gleich null gesetzt wird. Deshalb wird die ganze Operation durchgeführt werden, wenn die Differentialwerte sowohl der einzelnen Ausdrücke, die die gemeinsamen Eigenschaften enthalten, als auch des Ausdrucks des Maximums oder Minimums gemäß der oben gegebenen Regeln genommen werden, die einzelnen jeweils mit beliebigen Konstanten multipliziert werden und das Aggregat all dieser Produkte gleich null gesetzt wird; daher wird die Gleichung für die gesuchte Kurve entstehen. Es könnte deshalb diese eine einzige Vorschrift genügen, um Fragen dieser Art aufzulösen. Aber, bevor wir deren Gebrauch erklären, wird es gefällig sein, dass diese Methode selbst auf dem zuvor verwendeten Weg bestätigt wird.

PROPOSITION III PROBLEM

15. Unter allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden und die gleichermaßen mit den zwei gemeinsamen Eigenschaften A und B versehen sind, die zu bestimmen, in welcher der Wert des Ausdrucks C maximal oder minimal ist.

LÖSUNG. Aus dem Vorhergehenden wird schon eingesehen, dass dieses Problem gelöst wird, wenn unter uneingeschränkt allen Kurven die gesucht wird, in welcher $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ein Maximum oder Minimum ist. Dafür ist es aber nötig, die Differentialwerte der Ausdrücke A, B und C zu kennen. Es sei also der Differentialwert des Ausdrucks $A = nv \cdot dx \cdot P$, des Ausdrucks $B = nv \cdot dx \cdot Q$, des Ausdrucks $C = nv \cdot dx \cdot R$; aus diesen wird die verlangte Gleichung für die Kurve sein $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$.

Aber, damit sich die Gültigkeit dieser Lösung noch mehr zeigt, wollen wir dasselbe Problem mit derselben Methode, die wir oben im vorhergehenden Kapitel benutzt haben, angehen. Zuerst wird aber eingesehen (Fig. 15), um dieses Problem zu lösen, dass drei Ordinaten um unendliche kleine Stücke vermehrt werden müssen, dass den drei vorgeschriebenen Bedingungen genügt werden kann. Zuerst müssen nämlich diese drei hinzugefügten Stücke, mit denen die genügende Kurve az selbst in eine neue sich möglichst wenig von ihr unterscheidende verwandelt wird, so beschaffen sein, dass der Ausdruck A, der eine gemeinsame Eigenschaft enthält, jeder der beiden Kurven gleichermaßen zufällt. Darauf wird aber auch die andere gemeinsame Eigenschaft B in jeder der beiden Kurven denselben Wert erhalten müssen. Drittens muss aus der Natur des Maximums oder Minimums auch der Ausdruck C denselben Wert in der Kurve selbst und der veränderten erhalten; diesen drei Bedingungen kann durch weniger als drei Stücke, die drei Ordinaten hinzugefügt worden sind, nicht genügt werden. Daher werde außer den zwei Ordinaten Nn und Oo, die in der Figur um die Stücke nv und $o\omega$ vermehrt wurden, der folgenden Ordinate Pp das Stück $p\pi$ hinzugefügt zu werden aufgefasst. Und es werde zuerst der Zuwachs gesucht, welcher der Ausdruck A aus diesen drei Stücken erhält, welcher dieser sein wird

$$= ny \cdot Pdx + o\omega \cdot P'dx + p\pi \cdot P''dx.$$

Denn aus dem Stück nv entsteht die Zunahme $nv \cdot Pdx$, die mit dem Differentialwert selbst übereinstimmt, welchen der Ausdruck A aus dem Stück nv allein erhält. Aus dem folgenden Stück $o\omega$ entsteht aber der Zuwachs $o\omega \cdot P'dx$, natürlich derselbe wie zuvor, um seinen Differentialwert vermehrt; weil nämlich $o\omega$ der folgenden Ordinate hinzugefügt wird, werden alle mit $o\omega$ versehenen Größen die folgenden derer sein, die mit dem Stück nv versehen sind; und auf die gleiche Weise wird aus dem Stück $p\pi$ der Zuwachs $p\pi \cdot P''dx$ entstehen; all diese Dinge, wenn es jemandem beliebt, die Rechnung auf die Weise durchzuführen, die wir in Proposition 3 von Paragraph 22 des vorhergehenden Kapitels gebraucht haben, zu verfolgen, werden zur Genüge klar und erkenntlich werden. Auf dieselbe Weise wird also weiter der Ausdruck B, dessen Differentialwert, der aus dem einen Stück nv entsteht, wir $= nv \cdot Qdx$ gesetzt haben, aus den drei Stücken nv, $o\omega$ und $p\pi$ diesen Zuwachs erhalten

$$= nv \cdot Qdx + o\omega \cdot Q'dx + p\pi \cdot Q''dx.$$

Drittens wird der Ausdruck C aus diesen drei Stücken diesen Zuwachs erfahren

$$nv \cdot Rdx + o\omega \cdot R'dx + p\pi \cdot R''dx.$$

Diese drei einzelnen Zuwächse müssen nun jeweils gleich null gesetzt werden, dass allen vorgeschriebenen Bedingungen genügt wird; daher werden die drei folgenden Gleichungen entstehen, nachdem durch dx geteilt wurde;

$$\begin{aligned}0 &= nv\cdot P + o\omega\cdot P' + p\pi\cdot P''\\ 0 &= nv\cdot Q + o\omega\cdot Q' + p\pi\cdot Q''\\ 0 &= nv\cdot R + o\omega\cdot R' + p\pi\cdot R''.\end{aligned}$$

Wenn daher nun die Stücke nv, $o\omega$, $p\pi$, die, um die Lösung durchzuführen, zur Hilfe genommen wurden, eliminiert werden, wird eine Gleichung zwischen den drei der Kurve zu eigenen Größen entstehen, mit denen also die Natur der Kurve ausgedrückt werden wird. Um also die Stücke zu eliminieren, wollen wir die einzelnen Gleichungen jeweils mit den neuen Unbekannten α, β, γ multiplizieren, dass man hat

$$\begin{aligned}0 &= nv\cdot \alpha P + o\omega\cdot \alpha P' + p\pi\cdot \alpha P''\\ 0 &= nv\cdot \beta Q + o\omega\cdot \beta Q' + p\pi\cdot \beta Q''\\ 0 &= nv\cdot \gamma R + o\omega\cdot \gamma R' + p\pi\cdot \gamma R'',\end{aligned}$$

und daher werden diese Gleichungen gebildet

$$\begin{aligned}0 &= \alpha P + \beta Q + \gamma R\\ 0 &= \alpha P' + \beta Q' + \gamma R'\\ 0 &= \alpha P'' + \beta Q'' + \gamma R''.\end{aligned}$$

Daher ist sofort klar, wenn für α, β, γ konstante Größen angenommen werden, dass die erste Gleichung die übrigen zwei weiteren in sich umfasst; wenn nämlich $0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ war, dann wird zugleich sein

$$0 = \alpha dP + \beta dQ + \gamma dR \quad \text{und} \quad 0 = \alpha ddP + \beta ddQ + \gamma ddR;$$

und weil gilt

$$P' = P + dP, \quad Q' = Q + dQ, \quad R' = R + dR$$

und

$$P'' = P + 2dP + ddP, \quad Q'' = Q + 2dQ + ddQ \quad \text{und} \quad R'' = R + 2dR + ddR,$$

wird auch gelten

$$0 = \alpha P' + \beta Q' + \gamma R'$$

und

$$0 = \alpha P'' + \beta Q'' + \gamma R''.$$

Deshalb ist, um das Problem zu lösen, diese Gleichung zu bilden

$$0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R,$$

welche, wenn anstelle von α, β und γ irgendwelche beliebigen konstanten Größen geschrieben werden, die Natur der gesuchten Kurve ausdrücken wird. Diese Gleichung stimmt aber ganz und gar mit der überein, welche wir mit der anderen Methode gefunden haben, und die eine Methode wird durch die andere bestätigt. Q.E.I.

KOROLLAR I

16. Alle Probleme dieser Art können also auch mit Hilfe von Differentialwerten, die aus der Veränderung einer einzigen Ordinate entstehen und welche wir oben ziemlich umfangreich zu finden gelehrt haben, aufgelöst werden.

KOROLLAR II

17. Es ist also klar, wenn die Kurve gefunden werden muss, die, unter allen anderen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden und denen die zwei Ausdrücke A und B gleichermaßen zufallen, den maximalen oder minimalen Wert des Ausdruckes C hat, dass dann die Frage auf diese zurückgeht, die sich auf die absolute Methode bezieht, dass unter ganz und gar allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden, die bestimmt wird, in welcher der Ausdruck $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ein Maximum oder Minimum ist.

KOROLLAR III

18. Zugleich wird daher aber auch die Methode klar, Probleme aufzulösen, in denen unter ganz und gar allen Kurven, in welchen mehr als zwei und daher wie viele Eigenschaften auch immer gleichermaßen zusammenkommen, die verlangt wird, die sich der Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums erfreut.

KOROLLAR IV

19. Wenn daher nämlich unter allen Kurven, in denen die Ausdrücke A, B, C, D gleiche Werte erhalten, die gefunden werden muss, in welcher der Ausdruck E ein Maximum oder Minimum ist, dann wird dem Geforderten genügt werden, wenn unter ganz und gar allen Kurven die gesucht wird, in welcher $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \epsilon E$ ein Maximum oder Minimum ist, während die Buchstaben α, β, γ, δ, ϵ irgendwelche konstanten und beliebigen Größen bezeichnen.

KOROLLAR V

20. Umso mehr Eigenschaften also vorgelegt werden, die den Kurven, aus welcher die gesuchte, die mit der Gestalt des Maximums oder Minimums versehen ist, gefunden werden muss, gemeinsam sein müssen, umso mehr beliebige konstante Größen werden in die Gleichung für die Kurve eingehen und umso mehr genügende Kurven werden in ihr erfasst werden.

BEMERKUNG 1

21. Warum also umso mehr Konstanten in die Lösung eingehen, umso mehr gemeinsame Eigenschaften vorgelegt werden, kann aus dem Vorhergehenden leicht berechnet werden. Wir wollen nämlich festlegen, dass unter allen Kurven, die sich derselben Eigenschaft A erfreuen, die gesucht werden muss, in welcher B ein Maximum oder Minimum sein muss; und zuerst wird freilich bekannt werden, dass dieser Frage die Kurve genügen wird, die unter ganz und gar allen Kurven das maximale oder minimale B hat; diese wird nämlich auch unter all jenen, die sich der gemeinsamen Eigenschaft A erfreuen werden, das maximale oder minimale B haben. Darauf ist es aber auch möglich, dass unzählige Arten von Kurven dieser Art aufgefasst werden, welche einzelnen denselben Wert des Ausdrucks A erhalten; aber in der Art wird auch eine Kurve sein, die in Bezug auf die übrigen den maximalen oder minimalen Wert des Ausdruckes B enthält.

Es ist aber notwendig, dass diese genügenden Kurven alle in der allgemeinen Lösung enthalten sind. Weil also wegen der einen vorgeschriebenen gemeinsamen Eigenschaft die Anzahl der genügenden Kurven unendlich wird, wird sie um Vieles mehr vermehrt werden, wegen desselben Grundes, wenn mehrere gemeinsame Eigenschaften vorgelegt werden. Dennoch wird indes, wenn die Werte, welche diese einzelnen gemeinsamen Eigenschaften in den Kurven haben, aus denen die gesuchte gefunden werden muss, tatsächlich bestimmt werden, natürlich dann die Lösung eine einzige genügende Kurve liefern. Jene Konstanten werden natürlich dafür dienen, dass die Werte, welche die gemeinsamen Eigenschaften in der gefundenen Kurve erhalten werden, nach Belieben bestimmt werden; so wird durch diese Konstanten im Fall von zwei gemeinsamen Eigenschaften A und B die Kurve angegeben werden können, die gegebene Werte der Ausdrücke A und B erhält und darüber hinaus so beschaffen ist, dass unter allen unendlich vielen anderen Kurven, die dieselben Werte jener Ausdrücke A und B erhalten, sie den maximalen oder minimalen Wert irgendeines anderen Ausdrucks C hat. Und diese selbe Anmerkung behält Geltung, wenn mehrere gemeinsame Eigenschaften vorgeschrieben waren; daher ist zur Genüge klar, was mit diesen in die Lösungen eingehenden Konstanten zu machen ist und wie sie zu nutzen sind, was in den folgenden Beispielen deutlicher gezeigt werden können wird.

BEISPIEL I

22. Unter allen Kurven (Fig. 14), die auf dieselbe Abszisse $AC = a$ bezogen wurden und die sowohl von derselben Länge sind als auch gleiche Flächen DAD erfassen, die zu bestimmen, die um die Achse AC rotiert den Festkörper des größten oder kleinsten Fassungsvermögens erzeugt.

Nachdem die Abszisse$AP = x$, die Ordinate $PM = y$ und $dy = pdx$ gesetzt wurden, sind die vorgelegten gemeinsamen Eigenschaften $\int ydx$ und $\int dx\sqrt{1+pp}$; aber die Formel des Maximums oder Minimums ist $\int yydx$. Es werden nun die Differentialwerte dieser drei Formeln gesucht. Und zuerst wird freilich der Differentialwert der Formel $\int ydx = nv \cdot dx$ sein, darauf ist der Differentialwert der Formel $\int dx\sqrt{1+pp} = -nv \cdot d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ und drittens ist der Differentialwert der Formel $\int yydx = 2nv \cdot ydx$. Aus diesen drei Differentialwerten wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung aufgestellt werden

$$0 = \alpha dx - \beta d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} + 2yydx$$

oder

$$ccd \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = bdx + 2ydx = \frac{ccdp}{(1+pp)^{3:2}}.$$

Es werde diese Gleichung mit p multipliziert und integriert; man wird haben

$$ff + by + yy = \frac{-cc}{\sqrt{1+pp}},$$

wo sich so cc wie ff nach Belieben entweder positiv oder negative annehmen lassen. Daher wird weiter werden

$$(ff + by + yy)^2(1+pp) = c^4 \quad \text{und} \quad p = \frac{\sqrt{c^4 - (ff + by + yy)^2}}{ffj + by + yy} = \frac{dy}{dx};$$

und daher

$$dx = \frac{(ff + by + yy)dy}{\sqrt{c^4 - (ff + by + yy)^2}},$$

welches die Gleichung für eine elastische Kurve ist. Es wird aber durch die eine übrige Integration eine neue vierte beliebige Konstante eingehen; und mit diesen vier Konstanten wird bewirkt werden können, dass die Kurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht; darauf wird mit den zwei übrigen Konstanten erhalten werden, dass für $x = a$ gesetzt so die Fläche der Kurve wie ihre Länge eine gegebene Größe erhalten. Darüber hinaus wird aber durch die Zweideutigkeit der Vorzeichen, mit welcher das Wurzelzeichen versehen ist, das eine Vorzeichen die Kurve liefern, die sich der Eigenschaft des Maximums erfreut, das andere die Kurve, die sich der Eigenschaft des Minimums erfreut. Weil ja aber in der gefundenen Gleichung jene gegebene Größe a der Abszisse nicht enthalten ist, folgt, dass jeder Anteil der gefundenen Kurve, der irgendeiner Abszisse entspricht, sich auch dieser Eigenschaft erfreut, dass unter allen anderen Kurven, die derselben Abszisse entsprechen und durch dieselben zwei Punkte hindurchgehen und die zugleich mit jener Kurve so die gleiche Länge wie die Gleiche Fläche umfassen, dass jene, so sage ich, Kurve um ihre Abszisse rotiert den Festkörper des maximalen oder minimalen Fassungsvermögens generiert. Die zwei Punkte, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen soll, sind daher hier in die Betrachtung einzubeziehen, weil die Rechnung eine Differentialgleichung zweiten Grades geliefert hat, die per se eine zweifache Bestimmung verlangt. Es werden aber auch jene zwei übrigen Konstanten, die sofort in der gefundenen Gleichung enthalten waren, durch Punkte bestimmt werden können und auf diese Weise wird eine bestimmte Lösung dieser Art hervorgehen, die lehren wird, durch vier gegebene Punkte die Kurve zu beschreiben, die unter allen anderen, die durch dieselben vier Punkte hindurchgehen und sowohl gleich lang sind als auch gleiche Flächen enthalten, um die Achse rotiert den entweder maximalen oder minimalen Festkörper erzeugt. Denn immer wird die Anzahl der beliebigen Konstanten, die in der gefundenen Gleichung sowohl tatsächlich als auch potentiell enthalten sind, aufzeigen, wie viele Bestimmungen zu verwenden sind, dass die gesuchte Kurve bestimmt wird; und diese wird darauf unter alle anderen Kurven, die mit denselben Bestimmungen versehen sind, dem Geforderten genügen.

BEISPIEL II

23. Unter allen Linien, die derselben Abszisse entsprechen und die erstens gleiche Flächen $\int ydx$ enthalten und außerdem um die Achse rotiert gleiche Festkörper $\int yydx$ erzeugen, die zu bestimmen, die ihren Schwerpunkt entweder am meisten oder am wenigsten emporgehoben hat, das heißt, in welcher $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$ entweder ein Maximum oder Minimum ist.

Es sei die vorgeschriebene Länge der Abszisse, an welche die Lösung angepasst werden muss, $= a$ und für diese Abszisse werde der Wert der Formel $\int ydx = A$, der Formel $\int yydx = B$ und der Formel $\int yxdx = C$. Weiter sei der Differentialwert der Formel $\int ydx = dA = dx$, der Formel $\int yydx = dB = 2ydx$ und der Formel $\int yxdx = dC = xdx$, nachdem natürlich die Differentialwerte dieser Formeln gemäß der oben gegebenen Regeln genommen wurden, indem nur das Stück nv weggelassen wird, welches natürlich immer durch Teilung beseitigt wird. Weil nun der Ausdruck des Maximums oder Minimums keine einfache Formel ist, sondern der Bruch $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$, wird sein Differentialwert sein

$$= \frac{AdC - CdA}{A^2} = \frac{Axdx - Cdx}{A^2};$$

und wegen der gegebenen Differentialwerte der zwei gemeinsamen Eigenschaften $\int ydx$ und $\int yydx$, natürlich $dA = dx$ und $dB = 2ydx$, wird für die gesuchte Kurve die folgende Gleichung entstehen

$$\alpha dx + 2\beta ydx + \frac{\gamma Axdx - \gamma Cdx}{A^2} = 0 \quad \text{oder} \quad (\alpha A^2 - \gamma C)dx + 2\beta A^2 ydx + \gamma Axdx = 0;$$

weil in dieser Gleichung α, β, γ beliebige Konstanten sind, können mit einer Transformation von diesen die bestimmten Konstanten A und C so aus der Rechnung herausgeworfen werden, dass die gefundene Lösung auf alle Abszissen gleichermaßen angepasst wird. Es wird aber zu dieser Gleichung gelangt werden $bdx = mydx + nxdx$ oder nach Teilung durch dx zu dieser $b = my + nx$, welche Gleichung die für irgendeine gerade Linie ist. Die gerade Linie, die zur vertikalen Achse irgendwie gelegen ist, wird also unter allen anderen gekrümmten Linien, die mit der Achse so dieselbe Fläche $\int ydx$ wie dasselbe Volumen $\int yydx$ enthalten, den Schwerpunkt ihre Fläche entweder am meisten oder geringsten emporgehoben haben. Es wird aber der Schwerpunkt am geringsten emporgehoben sein, wenn die gerade Linie sich von oben an die Achse annähert, er wird aber am meisten emporgehoben sein, wenn sie sich von unten an die Achse annähert; und diese sind die beiden Fälle, in denen eine entweder oder minimale Erhebung des Schwerpunktes auftreten. Unter diesen Fällen ist der mittlere der, in welchem jene gerade Linie der Achse parallel ist; es kann darüber noch Zweifel bestehen, ob der Schwerpunkt entweder am meisten herabgedrückt oder am höchsten emporgehoben ist. Aber dieser Fall findet nicht einmal in der Frage einen Platz. Denn, nachdem eine der Achse parallele gerade Linie festgelegt worden ist, so dass $y = b$ ist, kann dann überhaupt keine andere Linie dargeboten werden, die für derselbe Abszisse sowohl die gleiche Fläche $\int ydx$ als auch das gleiche Volumen $\int yydx$ enthält, und dies passiert daher, weil diese gerade Linie unter allen anderen Linien, die dieselbe Fläche $\int ydx$ erfassen, das minimale Volumen $\int yydx$ einschließt.

BEISPIEL III

24. Unter allen Kurven (Fig. 21) DAD derselben Länge, die zwei gegebene Punkte D und D verbinden, die zu bestimmen, deren Eigenschaft diese ist, dass, wenn unter den vertikalen Geraden DB, DB durch die horizontale Gerade NN der Raum $NDADN$ von gegebener Größe abgetrennt wird, der Schwerpunkt dieses Raums $NDADN$ den untersten Platz einnimmt.

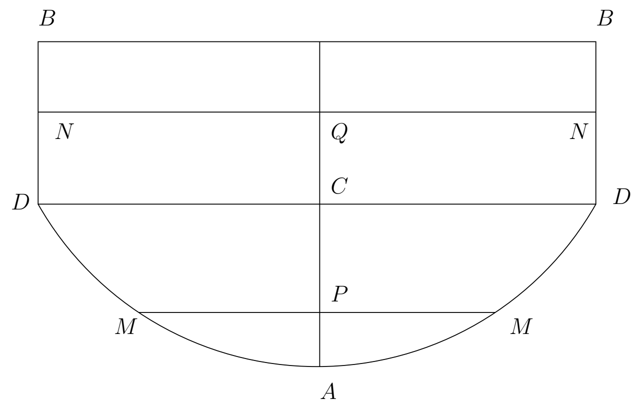

Fig. 21

Die Lösung dieser Frage hat einen außerordentlichen Nutzen in der Hydrostatik und mit ihrer Hilfe wird das Problem gelöst, in welchem die Form des Tuches DAD, das dem Gefäß $BDDB$ in den Punkten D und D angefügt wurde, gefunden werden soll, welche es annimmt, wenn dem Gefäß eine gegebene Menge an Wasser eingefüllt wird. Zuerst nämlich, wahrend das Tuch keine Ausdehnung zulässt, wird die Länge der Kurve DAD gegeben sein, darauf wird auch der Raum $NDADN$, mit welchem die Größe des eingefüllten Wassers gemessen wird, gegeben sein, und drittens wird gemäß der allgemeinen Gesetze der Hydrostatik und der Schwerkraft die Form DAD so beschaffen sein, dass der Schwerpunkt des Raumes $NDADN$ den untersten Platz einnimmt. Um dieses Problem aufzulösen, werde $DC = CD = a$ gesetzt, und nachdem irgendeine Horizontale MPM gezogen wurde, sei $MP = PM = x$ und $AP = y$, der Bogen wird sein

$$MAM = 2\int dx\sqrt{1+pp} \quad \text{nach Setzen von} \quad dy = pdx.$$

Wenn daher nun die Länge der Kurve $DAD = 2b$ gesetzt wird, muss die Gleichung zwischen x und y so beschaffen sein, dass die Integralformel $\int dx\sqrt{1+pp} = b$ wird, nachdem $x = a$ gesetzt wurde. Weiter wird die Fläche $MAM = 2\int xdy = 2\int xpdx$; diese werde $= 2ff$ in dem Fall, in dem $x = a$ gesetzt wird; sodass dann $\int xpdx = ff$ ist. Diese Fläche selbst ist aber nicht gegeben, sondern sie muss mit der Fläche $NDDN$ einen gegebenen Raum erzeugen, welcher $= 2cc$ sei. Wenn also $DN = z$ gesetzt wird, wird gelten

$$az + ff = cc \quad \text{und} \quad z = \frac{cc - ff}{a} = \frac{cc - \int xpdx}{a},$$

nachdem $x = a$ gesetzt wurde. Schließlich wird der Schwerpunkt des ganzen Raumes $NDADN$ vom Punkt A in diesem Intervall entfernt sein

$$= \frac{\int xypdx + az(AC + \frac{1}{2}z)}{cc},$$

nachdem nach der Integration $x = a$ gesetzt wurde; unterhalb des Punktes C wird also der Schwerpunkt in diesem Intervall gelegen sein

$$= \frac{AC(cc - az) - \frac{1}{2}azz - \int xypdx}{cc},$$

was ein Maximum sein muss. Weil aber $z = \frac{cc - \int xpdx}{a}$ ist, wird diese Form ein Maximum sein müssen

$$AC \int xpdx - \frac{c^4}{2a} + \frac{cc \int xpdx}{a} - \frac{(\int xpdx)^2}{2a} - \int xypdx.$$

Das Problem geht deshalb darauf zurück, dass unter allen Kurven derselben Länge, die der Abszisse $DC = a$ entsprechen, die bestimmt wird, in welcher dieser Ausdruck

$$h \int xpdx + \frac{cc}{a} \int xpdx - \frac{1}{2a}(\int xpdx)^2 - \int xypdx$$

ein Maximum ist, während $y = h$ für $x = a$ gesetzt ist. Nun, weil die Länge der Kurve $= \int dx\sqrt{1 + pp}$ ist, wird ihr Differentialwert $= -d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$ sein. Darauf ist der Differentialwert der Formel $\int xpdx = -dx$ und der Differentialwert der Formel $\int xypdx$ ist

$$= xpdx - d \cdot xy = -ydx.$$

Daher geht der Differentialwert des ganzen Ausdrucks, der ein Maximum sein muss, hervor

$$= -hdx - \frac{cc}{a}dx + \frac{ff}{a}dx + ydx,$$

welche wegen der nicht bestimmten Konstanten h und ff in diese übergeht $kdx + ydx$, wo k eine beliebige Konstante ist. Deshalb wird diese Gleichung für die gesuchte Kurve hervorgehen

$$kdx + ydx = -ggd \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + pp}},$$

die mit p multipliziert und integriert $m + 2ky + yy = \frac{2gg}{\sqrt{1+pp}}$ geben wird; diese Kurve ist bekannt, eine Elastica zu sein, und sie wird unverändert bleiben, welchen Wert auch immer die Größe cc erhält. Der vorgelegten Frage wird also so genügt werden, dass durch die gegebenen Punkte D und D eine elastische Kurve hindurchgeführt wird, deren Achse oder orthogonaler Durchmesser die vertikale Gerade AC ist und deren Anteil DAD der gegebenen Länge $2b$ erhält; und auf diese Weise wird die Lösung ganz und gar bestimmt sein und es wird eine einzige genügende Kurve resultieren. Dass aber die Größe des Raumes $NDADN = 2cc$, über dessen Schwerpunkt die Frage ist, völlig aus der Rechnung herausgegangen ist, hätte sich freilich leicht vorhersehen lassen; auf diese Weise wäre die Lösung um Vieles leichter gewesen. Aber wir haben diese, wenn auch unnütze, Bedingung absichtlich hinzugefügt, damit die Art klar werden würde, andere Probleme dieser Art, wo eine solche Reduktion nicht stattfindet, aufzulösen.

BEMERKUNG 2

25. So ist also die ganze unbestimmte Methode der Maxima und Minima erläutert worden, mit welcher die gekrümmte Linie gesucht zu werden pflegt, die mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist. Und diese ganze Methode ist auf das Finden von Differentialwerten zurückgeführt worden, die aus dem Zuwachs nur einer einzigen Ordinate entstehen. Wenn natürlich ein Problem erfordert, unter ganz und gar allen Kurven, die auf dieselbe Abszisse bezogen wurden, die zu bestimmen, in welcher ein gewisser unbestimmter Ausdruck den maximalen oder minimalen Wert erhält, dann ist der Differentialwert jenes Ausdrucks zu suchen; dieser wird gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben. Wenn daher aber unter allen Kurven, die sich einer oder mehrerer gemeinsamer Eigenschaften erfreuen, die bestimmt werden muss, in welcher der Wert eines gewissen vorgelegten Ausdruckes maximal oder minimal ist, dann müssen die Differentialwerte des Ausdruckes, so der einzelnen gemeinsamen Eigenschaften wie des Maximums oder Minimums, gesucht werden und diese einzelnen müssen dann mit beliebigen Konstanten multipliziert werden, die Summe welcher Produkte gleich null gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve geben wird. Um aber den Differentialwert eines unbestimmten Ausdruckes zu finden, haben wir in den oberen Kapiteln genügende und sogar leichte Regeln angegeben. Denn ein unbestimmter Ausdruck solcher Art, der entweder die gemeinsame Eigenschaft oder das Maximum oder Minimum enthält, ist entweder eine einfache Integralformel oder eine Funktion zweier oder mehrerer Integralformeln dieser Art. Was aber einfache Differentialformeln betrifft, haben wir in Paragraph 7 von Kapitel IV die Vorschriften erläutert, mit deren Hilfe Differentialwerte von Formeln solcher Art gefunden werden können; dort haben wir diese Untersuchung auf fünf Fälle zurückgeführt. Wie aber gemäß dieser selben Vorschriften der entsprechende Differentialwert einer Funktion von zwei oder mehreren einfachen Integralformeln bestimmt werden kann, haben wir in Proposition 4 desselben Kapitels IV angegeben und eine der Differentiation ähnliche und hinreichend leichte Methode erläutert; sodass in dieser Art nichts übrig zu sein scheint, was darüber hinaus hinzuzufügen ist.

ENDE

Anhang I

Über elastische Kurven

1. Schon längst haben einige sehr große Geometer erkannt, dass der Gebrauch der in diesem Buch angegebenen Methode nicht nur in der Analysis selbst sehr groß ist, sondern auch zur Auflösung von physikalischen Problemen ein sehr weitreichendes Hilfsmittel darbietet. Weil nämlich die Gestalt der Welt in höchstem Maße vollkommen ist und vom weisesten Schöpfer geschaffen worden ist, geschieht in der Welt überhaupt nichts, worin sich nicht eine gewisse Art des Maximums oder Minimums zeigt; deswegen besteht überhaupt kein Zweifel, dass alle Wirkungen der Welt aus den Zweck betreffenden Gründen mit Hilfe der Methode der Maxima und Minima gleichermaßen glücklich bestimmt werden können. Es existieren aber schon überall verstreut so außerordentliche Beispiele, dass wir für die Bekräftigung der Gültigkeit ganz und gar nicht viele Beispiele brauchen; ja es wird sogar eher darauf die Arbeit zu verwenden sein, dass in jeder Art von natürlichen Fragen die Größe gefunden wird, die den maximalen oder minimalen Wert annimmt; diese Aufgabe scheint sich eher auf die Philosophie als auf die Mathematik zu beziehen. Weil also zwei Wege offenstehen, die Wirkungen der Natur zu erkennen, der eine durch die es bewirkenden Ursachen, welcher die direkte Methode genannt zu werden pflegt, der andere durch den Zweck betreffende Gründe, gebraucht der Mathematiker jeden der beiden mit gleichem Erfolg. Wann immer nämlich die es bewirkenden Ursachen allzu verborgen sind, die den Zweck betreffenden aber sich unserer Erkenntnis weniger entziehen, pflegt die Frage durch die indirekte Methode aufgelöst zu werden; ansonsten wird aber die direkte Methode verwendet, sooft es aus den es bewirkenden Gründen möglich ist, die Wirkung zu bestimmen. Es ist aber besonders viel Arbeit aufzubringen, dass durch jeden der beiden Wege ein Zugang zur Lösung eröffnet wird; so wird nämlich nicht nur die eine Lösung durch die andere im höchsten Maße bestätigt, sondern wir erhalten auch aus der Übereinstimmung jeder der beiden größte Zufriedenheit. Auf diese Weise ist die Krümmung eines herabhängenden Seils oder einer herabhängenden Kette auf zweifachem Wege gefunden worden, zum einem a priori aus den Wirkungen der Schwerkraft, zum anderen aber durch die Methode der Maxima und Minima, weil ja das Seil eingesehen wurde, eine Krümmung solcher Art erhalten zu müssen, deren Schwer-

punkt den untersten Platz einnimmt. Ähnlich ist die Krümmung von Strahlen, die durch ein durchsichtiges Medium verschiedener Dichte hindurchgehen, so a priori bestimmt worden, wie auch aus dem Prinzip, dass sie in kürzester Zeit zu einem gegebenen Ort gelangen müssen. Es sind aber viele andere ähnliche Beispiele von den hochgeehrten Brüdern BERNOULLI und anderen vorgetragen worden, durch welche so die Lösungsmethode a priori wie die Erkenntnis der es bewirkenden Gründe die größten Zuwächse erfahren hat. Obwohl aber wegen dieser so vielen und berühmten Beispiele kein Zweifel zurückblieb, dass bei allen gekrümmten Linien, welche die Lösung von physikalisch-mathematischen Problemen liefert, die Gestalt eines gewissen Maximums oder Minimums einen Platz erhält, wird dennoch oftmals dieses Maximum oder Minimum sehr schwer erkannt, auch wenn sich die Lösung a priori hatte finden lassen. Auch wenn so die Form, welche ein gekrümmtes elastisches Stück Blech annimmt, schon längst bekannt ist, ist es dennoch, wie die Kurve durch die Methode der Maxima und Minima, das heißt durch den Zweck betreffende Gründe gefunden werden kann, bis jetzt von niemandem bemerkt worden. Deswegen, weil der hochgeehrte und in dieser Art, die Natur zu erforschen, sehr scharfsinnige DANIEL BERNOULLI mir angedeutet hatte, dass er die gesamte Kraft, welche in einem gekrümmten elastischen Blech enthalten ist, in einer gewissen Formel, welche er Potentialkraft nennt, erfassen kann, und dieser Ausdruck in einer elastischen Kurve minimal sein muss, weil ja durch diesen Fund meine in diesem Buch angegebene Methode der Maxima und Minima wunderbar illustriert wird und ihr sehr weiterreichender Gebrauch in höchstem Maße aufgezeigt wird, kann ich diese außerordentlich günstige Gelegenheit nicht verstreichen lassen, dass ich, indem diese außerordentliche vom hochgeehrten BERNOULLI beobachtete Eigenschaft der elastischen Kurve publiziert wird, zugleich den Gebrauch meiner Methode deutlicher darlege. Denn diese Eigenschaft enthält in sich Differentiale zweiten Grades, so dass die dafür zu entwickelnden Methoden, ein isoperimetrische Problem zu lösen, die zuvor angegeben wurden, nicht ausreichen.

ÜBER DIE KRÜMMUNG EINES GLEICHFÖRMIGEN ELASTISCHEN BLECHES

2. Es sei AB (Fig. 1) ein irgendwie gekrümmtes elastisches Stück Blech; es werde der Bogen $AM = s$ und der Krümmungsradius der Kurve $MR = R$ genannt; und, nach BERNOULLI, wird die Potentialkraft, die in einem Anteil AM des Bleches enthalten ist, durch diese Formel $\int \frac{ds}{RR}$ ausgedrückt werden, wenn freilich das Blech überall gleichermaßen dick, breit und elastisch und im natürlichen Zustand gerade ausgerichtet ist. Daher wird die Gestalt dieser Kurve AM diese sein, dass in ihr dieser Ausdruck den kleinsten Wert aller erhält. Weil ja aber im Krümmungsradius R Differentiale zweiten Grades vorhanden sind, werden, um die mit dieser Eigenschaft versehene Kurve zu bestimmen, vier Bedingungen von Nöten sein, was mit der Natur der Frage außerordentlich übereinstimmt. Weil nämlich durch die gegebenen Grenzen A und B unendlich viele elastische Bleche und die derselben Länge gebogen werden können, wird

die Frage nicht bestimmt sein, wenn nicht außer den zwei Punkten A und B zugleich zwei andere Punkte oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Lage der Tangenten in den äußersten Punkten A und B zugleich vorgeschrieben wird.

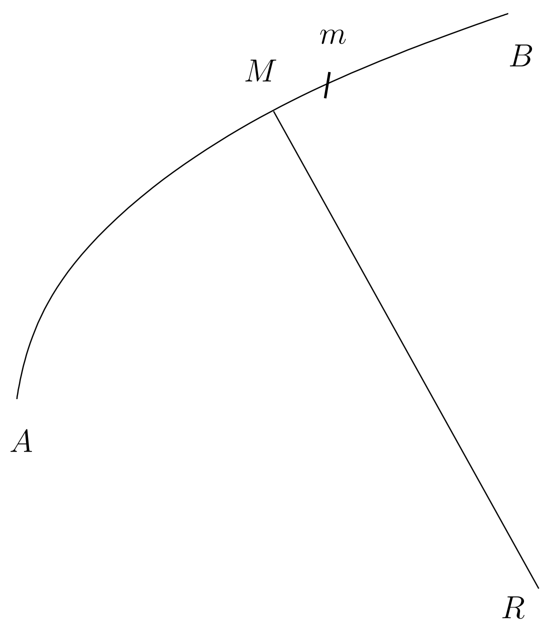

FIG. 1

Nachdem nämlich ein längeres elastisches Blech vorgelegt wurde, als die Distanz der Punkte A und B ist, kann es nicht nur so gekrümmt werden, dass es innerhalb der Grenzen A und B enthalten ist, sondern auch dass seine Tangenten in diesen Punkten gegebene Ausrichtungen haben. Nachdem diese Dinge bemerkt worden sind, muss die über die zu findende Krümmung des elastischen Blechs aus dieser Quelle aufzulösende Frage so vorgelegt werden, *dass unter allen Kurven derselben Länge, die nicht nur durch die Punkte A und B hindurchgehen, sondern auch in diesen Punkten von in Bezug auf die Lage gegebenen Geraden berührt werden, die bestimmt wird, in welcher der Wert dieses Ausdrucks* $\int \frac{ds}{RR}$ *minimal ist*

3. Weil es gefällig ist, dass die Lösung an orthogonale Koordinaten (Fig. 2) angepasst wird, werde irgendeine Gerade AD für die Achse genommen, in welcher die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM =$ sei; es werde, wie es die angegebene Methode befiehlt, $Dy = pdx$, $dp = qdx$ gesetzt; es wird das Kurvenelement $Mm = ds = dx\sqrt{1+pp}$ sein. Zuerst also, weil die Kurven, aus denen die gesuchte gefunden werden muss, isoperimetrisch festgelegt werden, wird man diesen zu betrachtenden Ausdruck haben $\int dx\sqrt{1+pp}$, der mit dem allgemeinen $\int Zdx$ verglichen diesen Differentialwert liefert $\frac{1}{dx}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$.

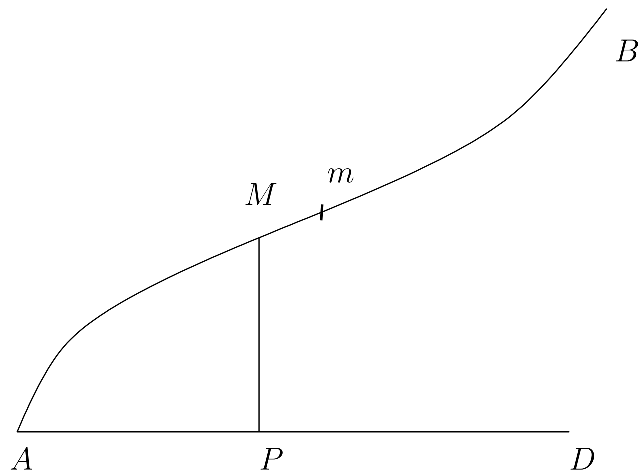

Fig. 2

Weil darauf der Krümmungsradius dieser ist

$$= \frac{dx(1+pp)^{3:2}}{dp} = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q} = R,$$

geht die Formel $\int \frac{ds}{RR}$, die ein Minimum sein muss, in $\int \frac{qqdx}{(1+pp)^{5:2}}$ über. Diese werde mit der allgemeinen $\int Zdx$ verglichen; es wird $Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}$ sein und nach Setzen von

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq,$$

wird gelten

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{-5pqq}{(1+pp)^{7:2}} \quad \text{und} \quad Q = \frac{2q}{(1+pp)^{5:2}}.$$

Der Differentialwert, der aus dieser Formel $\int \frac{qqdx}{(1+pp)^{5:2}}$ entsteht, wird $-\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ sein. Deswegen wird man für die gesuchte Kurve diese Gleichung haben

$$\frac{\alpha}{dx} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dP}{dx} - \frac{ddQ}{dx^2},$$

die mit dx multipliziert und integriert gibt

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{1+pp}} + \beta = P - \frac{dQ}{dx}.$$

Diese Gleichung werde mit $qdx = dp$ multipliziert, dass hervorgeht

$$\frac{\alpha pdp}{\sqrt{1+pp}} + \beta dp = Pdp - qdQ.$$

Weil aber wegen $M = 0$ und $N = 0$ $dZ = Pdp + Qdq$ ist, wird $Pdp = dZ - Qdq$ sein, nach Einsetzen welches Wertes anstelle von Pdp hervorgehen wird

$$\frac{\alpha pdp}{\sqrt{1+pp}} + \beta dp = dZ - Qdq - qdQ;$$

die erneut integriert gibt

$$\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma = Z - Qq.$$

Weil nun gilt

$$Z = \frac{qq}{(1+pp)^{5:2}} \quad \text{und} \quad Q = \frac{2q}{(1+pp)^{5:2}},$$

wird sein

$$\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma = -\frac{qq}{(1+pp)^{5:2}}.$$

Es werden die beliebigen Konstanten α, β und γ negativ genommen und es wird sein

$$q = (1+pp)^{5:4}\sqrt{\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma} = \frac{dp}{dx}.$$

Daher wird also die folgende Gleichung gefunden

$$dx = \frac{dp}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma}}.$$

Darauf wird man wegen $dy = pdx$ auch haben

$$dy = \frac{pdp}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma}};$$

welche zwei Gleichungen genügen würden, um die Kurven durch Quadraturen zu konstruieren.

4. Keine von beiden dieser so im Allgemeinen betrachteten Formeln ist integrierbar; sie können aber auch auf gewisse Weise bestimmt werden, dass das Aggregat eine Integration zulässt. Weil nämlich gilt

$$d \cdot \frac{2\sqrt{\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma}}{\sqrt{\sqrt{1+pp}}} = \frac{dp(\beta - \gamma p)}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma}},$$

wird sein

$$\frac{2\sqrt{\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma}}{(1+pp)^{1:4}} = \beta x - \gamma y + \delta.$$

Weil ja die Lage der Achse beliebig ist, kann die Konstante δ ohne Beschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden. Darauf kann aber die Achse auch so verändert werden, dass

$$\frac{\beta x - \gamma y}{\sqrt{\beta\beta + \gamma\gamma}}$$

die Abszisse wird, und die Ordinate wird sein

$$\frac{\gamma x + \beta y}{\sqrt{\beta\beta + \gamma\gamma}};$$

daher kann auch sicher γ gleich null gesetzt werden, weil nichts daran hindert, dass jene neue Abszisse durch x ausgedrückt wird. Dieser Sache wegen werden wir für die elastische Kurve diese Gleichung haben

$$2\sqrt{\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p} = \beta x(1+pp)^{1:4},$$

die nach Nehmen von Quadraten gibt

$$4\alpha\sqrt{1+pp} + 4\beta p = \beta^2 x^2 \sqrt{1+pp}.$$

Es sei, um Homogenität einzuführen, $\alpha = \frac{4m}{aa}$ und $\beta = \frac{4n}{aa}$, es wird gelten

$$naap = (nnxx - maa)\sqrt{1+pp},$$

woher gilt

$$n^2a^4pp = (nnxx - maa)^2(1+pp)$$

und daher

$$p = \frac{nnxx - maa}{\sqrt{(n^2a^4 - (nnxx - maa)^2}} = \frac{dy}{dx}.$$

Nachdem also die Konstanten geändert worden sind und indem die Abszisse x um eine gegebene Konstante entweder vermehrt oder vermindert wird, wird man eine allgemeine Gleichung dieser Art für die elastische Kurve haben

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2}},$$

aus welcher entsteht

$$ds = \frac{aadx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2}};$$

aus diesen Gleichungen wird sich die Übereinstimmung dieser gefundenen Kurve mit der schon längst gefundenen elastischen Kurve natürlich zeigen.

5. Damit aber diese Übereinstimmung deutlicher vor Augen gestellt wird, werde ich die Natur der elastischen Kurve auch a priori untersuchen; auch wenn dies schon vom großen Herrn Jakob Bernoulli in ausgezeichnetster Weise gemacht worden ist, möchte ich dennoch bei dieser sich ergebenden geeigneten Gelegenheit einige Dinge über die Gestalt von elastischen Kurven und deren verschiedenen Gattungen und Formen hinzufügen, welche ich glaube, von anderen entweder ausgelassen oder nur wenig behandelt worden zu sein.

Es sei das elastische Blech (Fig. 3) AB in B so an einer Mauer oder einer festen Wand befestigt, dass diese Extremität B nicht nur fest gehalten wird, sondern auch die Lage der Tangente in B bestimmt wird. In A habe das Blech aber als Verbindungsstück einen soliden Stab AC, auf welchen normal die Kraft $CD = P$ ausgeübt worden sei, durch welche das Blech in den gekrümmten Zustand BMA gebracht werde. Es werde die verlängerte Gerade AC für die Achse genommen und für $AC = c$ gesetzt sei die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$.

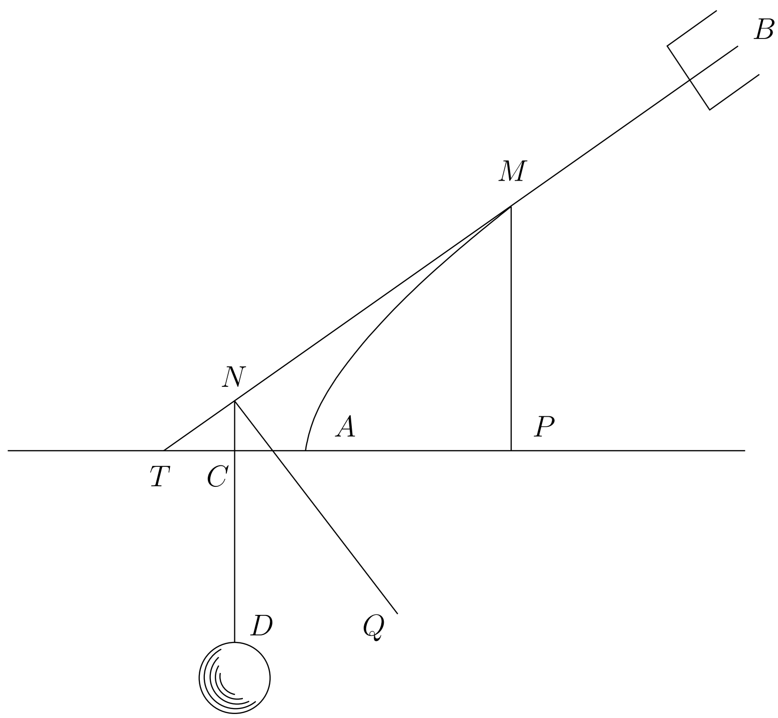

FIG. 3

Wenn daher nun das das Blech in M die ganze Elastizität plötzlich verlöre und vollkommen flexibel werden würde, würde es von der Kraft P natürlich gebogen werden, während die Biegung vom Moment der Kraft $P = P(c+x)$ ihren Anfang nimmt. Dass also diese Biegung tatsächlich folgt, steht sie Elastizität des Bleches in M im Gleichgewicht mit dem Moment der wirkenden Kraft $P(c+x)$. Aber die Elastizität hängt zuerst von der Gestalt des Materials ab, aus welchem das Blech besteht und welches ich überall als dasselbe festlege, ab, dann aber zugleich von der Krümmung des Bleches im Punkt M, so dass sie umgekehrt proportional zum Krümmungsradius in M ist. Es sei also der Krümmungsradius in $M = R = -\frac{ds^3}{dxddy}$, während $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ und dx konstant sind, und es drücke $\frac{Ekk}{R}$ die elastische Kraft des Bleches in M aus, welche mit dem Moment der wirkenden Kraft $P(c + x)$ im Gleichgewicht steht, so dass gilt

$$P(c + x) = \frac{Ekk}{R} = -\frac{Ekkdxddy}{ds^3}.$$

Diese Gleichung wird mit dx multipliziert integrierbar und das Integral wird sein

$$P\left(\frac{xx}{2}+cx+f\right)=\frac{-Ekkdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

woher wird

$$dy=\frac{-Pdx(\frac{1}{2}xx+cx+f)}{\sqrt{E^2k^4-P^2(\frac{1}{2}xx+cx+f)^2}},$$

welche Gleichung ganz und gar mit der übereinstimmt, die ich gerade durch die Methode der Maxima und Minima aus dem Bernoulli'schen Prinzip gefunden habe.

6. Aus einem Vergleich dieser Gleichung mit der zuvor gefundenen wird die Kraft bestimmt werden können, die verlangt wird, um dem Blech eine gegebene Krümmung beizufügen, wenn freilich die Krümmung in der gefundenen allgemeinen Gleichung enthalten ist. Es habe natürlich das elastische Blech die Form AMB, dessen Natur durch diese Gleichung ausgedrückt werden wird

$$dy=\frac{(\alpha+\beta x+\gamma xx)dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma xx)^2}};$$

es drücke aber Ekk die absolute Elastizität dieses Bleches aus, so natürlich, dass Ekk an jeder Stelle durch den Krümmungsradius geteilt die wahre elastische Kraft liefert. Um den Vergleich anzustellen, werde mit $\frac{Ekk}{aa}$ erweitert, dass man hat

$$dy=\frac{Ekkdx(\alpha+\beta x+\gamma xx):aa}{\sqrt{E^2k^4-\frac{E^2k^4}{a^4}(\alpha+\beta x+\gamma xx)^2}}.$$

Nun wird also sein

$$-\frac{1}{2}P=\frac{Ekk\gamma}{aa},\quad -Pc=\frac{Ekk\beta}{aa},\quad -Pf=\frac{Ekk\alpha}{aa}$$

und daher die wirkende Kraft $CD=-\frac{2Ekk\gamma}{aa}$, das Intervall $AC=c=\frac{\beta}{2\gamma}$ und die Konstante $f=\frac{\alpha}{2\gamma}$.

7. Damit also das elastische Blech AM an dem einen Ende B an einer Mauer befestigt zur Figur AMB gebogen wird, deren Natur mit dieser Gleichung ausgedrückt wird

$$dy=\frac{(\alpha+\beta x+\gamma xx)dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma xx)^2}},$$

ist es notwendig, dass dieses Blech in Richtung CD normal zur Achse AP, nachdem die Distanz $AC=\frac{\beta}{2\gamma}$ genommen wurde, von der Kraft $CD=-\frac{2Ekk\gamma}{aa}$ beunruhigt wird; diese Kraft wird natürlich in die entgegengesetzte Richtung, wie die Figur aufzeigt, gerichtet sein, wenn γ eine positive Konstante war. Weil $\frac{Ekk}{R}$ dem Moment der wirkenden Kraft gleichwertig ist, wird der Ausdruck $\frac{Ekk}{aa}$ dem Gewicht oder der reinen Kraft homogen sein, welche Kraft $\frac{Ekk}{aa}$ deshalb aus der Elastizität des Bleches erkannt werden wird. Es sei diese Kraft $=F$, und die neigende Kraft CD wird zu dieser Kraft F sein, wie -2γ zu 1; es wird nämlich γ eine reine Zahl sein.

8. Daher kann weiter die erforderte Kraft bestimmt werden, um den Anteil BM des Bleches in seinem Zustand zu bewahren, wenn der Anteil AM völlig abgetrennt wird. Nachdem dieser Anteil AM abgetrennt wurde, geht das elastische Blech in den soliden Stab MT, der ohne Anteil an der ganzen Biegung ist, über und der aber mit dem Blech so verbunden ist, dass er immer die Tangente im Punkt M darstellt, wie auch immer das Blech gebogen wird. Nachdem dies festgelegt wurde, ist aus dem Vorhergehenden klar, dass für die Bewahrung der Krümmung BM verlangt wird, dass der Stock MT im Punkt N in die Richtung ND mit der Kraft gezogen wird, die sei

$$= -\frac{2Ekk\gamma}{aa};$$

aber die Richtung ND wird normal zur Achse AP sein und das Intervall AC wird $= \frac{\beta}{2\gamma}$ sein. Die Distanz MN wird deshalb werden

$$= \frac{ds}{dx}CP = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{\beta + 2\gamma x}{2\gamma} = \frac{(\beta + 2\gamma x)ds}{2\gamma dx},$$

es ist aber

$$\frac{ds}{dx} = \frac{aa}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2}}.$$

Wenn daher diese Kraft $ND = -\frac{2Ekk\gamma}{aa}$ in die normale NQ zur Tangente MT und die tangentiale NT aufgelöst wird, wird gelten

die Normalkraft $NQ = -\dfrac{2Ekk\gamma}{aa} \cdot \dfrac{dx}{ds}$ und die Tangentialkraft $NT = -\dfrac{2Ekk\gamma}{aa} \cdot \dfrac{dy}{ds}$.

9. Wenn aber der Teil BM abgetrennt wird und der Teil AM zurückgelassen wurde, der in Richtung CD wie zuvor mit nachstehender Kraft beunruhigt wurde

$$= -\frac{2Ekk\gamma}{aa},$$

wird, um die Krümmung AM zu bewahren, die Extremität M, die mit dem soliden Stab als Tangente MN verbunden verstanden werde, im Punkt N gleichermaßen von nachstehender Kraft beunruhigt werden müssen

$$= -\frac{2Ekk\gamma}{aa},$$

aber in gegensätzlicher Richtung zu der, die wir im vorhergehenden Fall gefunden haben. Denn immer müssen die auf jede der beiden Extremitäten ausgeübten Kräfte sich gegenseitig aufheben und daher einander gleiche und entgegengesetzte Ausrichtungen haben. Andernfalls würde nämlich das ganze Blech bewegt werden, um welche Bewegung einzuschränken, eine Kraft von Nöten wäre, die ein Gleichgewicht zwischen den wirkenden Kräften herstellt. Daher können also auf irgendeinen Anteil des beschnittenen Bleches auszuübende Kräfte sehr leicht bestimmt werden, die schon die beigefügte Krümmung bewahren.

10. Es sei AM (Fig. 4) ein gekrümmtes elastisches Blech, das in A und M als Anhänge die soliden Stäbe AD, MN hat, auf die in direkt zueinander entgegengesetzten Richtungen DE, NR die gleichen Kräfte DE, NR ausgeübt worden seien, welche sich in einem Gleichgewicht befindenden dem Blech die Krümmung AM beifügen, für welche die Gleichung gesucht werden soll. Zuerst also werde für die Achse die Gerade AP genommen, die durch den Punkt A hindurchgeht und zur Richtung der wirkenden Kraft ER normal ist.

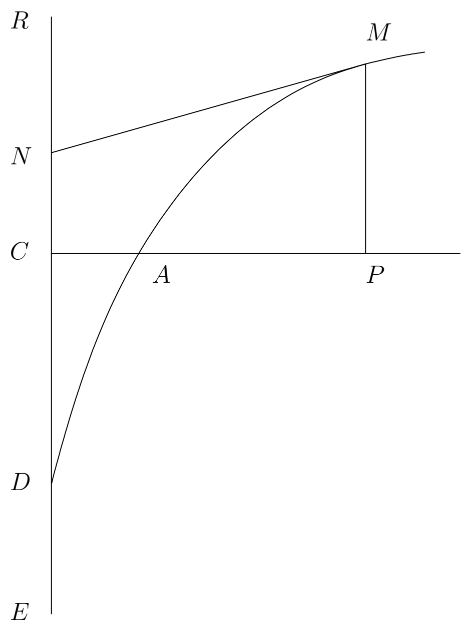

FIG. 4

Die absolute Elastizität des Bleches werde $= Ekk$ gesetzt und es sei der Sinus des Winkels CAD, welchen die Tangente AD in A mit der Achse festlegt und der gegeben ist, $= m$, der Kosinus sei $= n$, während der ganze Sinus $= 1$ ist, sodass $nn+mm = 1$ ist. Weiter werde die Distanz $AC = c$ und die neigende Kraft $DE = NR = P$ genannt, und nachdem die Abszisse $AP = x$ und die Ordinate $PM = y$ gesetzt wurden, wird die Natur der Kurve mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$dy = \frac{-Pdx(\frac{1}{2}xx + cx + f)}{\sqrt{E^2k^4 - P^2(\frac{1}{2}xx + cx + f)^2}}.$$

Weil ja aber die Richtung der Tangente in A gegeben ist, muss für $x = 0$ gesetzt $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}$ werden; daher wird also erhalten werden

$$\frac{m}{n} = \frac{-Pf}{\sqrt{E^2k^4 - P^2f^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-mm}} \quad \text{und} \quad m = -\frac{Pf}{Ekk}.$$

Es wird also daher die Konstante f bestimmt, so dass gilt

$$f = -\frac{mEkk}{P},$$

und daher wird die ganze Kurve bestimmt.

11. Um also die durch die obere Gleichung ausgedrückte Krümmung (Fig. 5) dem Blech AM beizufügen, muss auf die Tangente AD im Punkt D, sodass $AD = \frac{c}{n}$ ist, die Kraft $DE = P$ ausgeübt worden sein, deren Richtung den Ordinaten PM parallel sei.

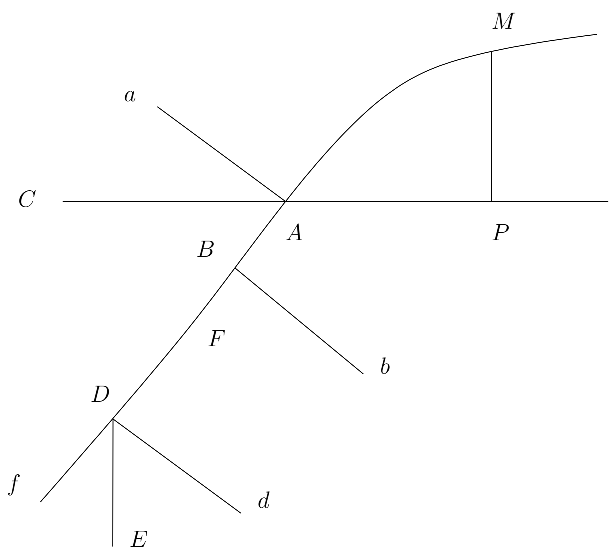

Fig. 5

Es werde die Kraft DE in die zwei lateralen Dd, Df aufgelöst, die zueinander normal sind; es wird gelten

$$\text{Kraft } Dd = Pn \quad \text{und} \quad \text{Kraft} Df = Pm.$$

Damit nun die Betrachtung der Gerade AD aus der Rechnung herausgeworfen wird, können anstelle der Kraft Dd in den Punkten A und B, nachdem das Intervall $AB = h$ genommen wurde, die zwei Kräfte $Aa = p$, $Bb = q$ eingesetzt werden, die in gleicher Weise zum Stock AB normal sind, indem man nimmt

$$ph = Pn \cdot BD = nP\left(\frac{c}{n} - h\right) \quad \text{und} \quad q = p + nP.$$

Weil es darauf egal ist, in welchem Punkt des Stabs AD die Tangentialkraft $Df = mP$ ausgeübt wird, werde sie im Punkt A selbst ausgeübt, indem $AF = nP$ gesetzt wird. Es sei aber diese Kraft $AF = r$, sodass das Blech MA von den drei Kräften $Aa = p$, $Bp = q$ und $AF = r$ beunruhigt wird, was für eine Krümmung von welchen entsteht, wir untersuchen wollen.

12. Zuerst also, weil $mP = r$ ist, wird $P = \frac{r}{m}$, welcher Wert in der ersten Gleichungen eingesetzt geben wird

$$ph = \frac{cr}{m} - \frac{nhr}{m} \quad \text{und} \quad q = p + \frac{nr}{m}.$$

Daher wird sein

$$\frac{n}{m} = \frac{q-p}{r};$$

aus dieser Gleichung wird zuerst die Lage der Achse AP bekannt, es wird nämlich der Tangens des Winkels $CAD = \frac{r}{q-p}$ sein, daher

$$m = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (q-p)^2}} \quad \text{und} \quad n = \frac{q-p}{\sqrt{r^2 + (q-p)^2}}.$$

Darauf wird aus der Gleichung

$$hp = \frac{cr}{m} - \frac{nhr}{m} = \frac{cr}{m} - hq + hp$$

werden

$$c = \frac{mhq}{r} \quad \text{oder} \quad c = \frac{hq}{\sqrt{r^2 + (q-p)^2}}$$

und

$$P = \sqrt{rr + (q-p)^2}.$$

Weil aber gilt

$$f = \frac{-mEkk}{P} = \frac{-Ekkr}{rr + (q-p)^2},$$

wird sein

$$\frac{1}{2}xx + cx + f = \frac{1}{2}xx + \frac{hqx}{\sqrt{r^2 + (q-p)^2}} - \frac{Ekkr}{rr + (q-p)^2};$$

woher für die gesuchte Kurve diese Gleichung erhalten werden wird

$$dy = \frac{dx\left(\frac{Ekkr}{\sqrt{rr+(q-p)^2}} - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{rr + (q-p)^2}\right)}{\sqrt{\left(E^2k^2 - \left(\frac{Ekkr}{\sqrt{rr+(q-p)^2}} - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{rr + (q-p)^2}\right)^2\right)}}.$$

Diese Gleichung ist aber besonders an die höchst übliche Art angepasst, Bleche zu krümmen, während sie entweder mit einer Zange oder zwei Fingern festgehalten werden; von diesen wird der eine das Blech in Richtung Aa, der andere in die Richtung Bb zwingen, außer welchen Kräften das Blech darüber hinaus in die Richtung AF vorwärts gezogen werden kann.

13. Wenn die Tangentialkraft $AF = r$ verschwindet, wird die Achse AP auf die verlängerte Tangente AF selbst fallen und es wird dann sein

$$dy = -\frac{dx(hqx + \frac{1}{2}(q-p)xx)}{\sqrt{E^2k^4 - (hqx + \frac{1}{2}(q-p)xx)^2}}.$$

Wenn aber die normalen Kräfte p und q einander gleich werden, wird die Achse AP normal zur Tangente AF wegen $n = 0$ sein und für die gesuchte Kurve wird diese Gleichung entstehen

$$dy = \frac{dx\left(\frac{Ekkr}{\sqrt{rr+(q-p)^2}} - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{rr+(q-p)^2}\right)}{\sqrt{E^2k^4 - \left(\frac{Ekkr}{\sqrt{rr+(q-p)^2}} - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{rr+(q-p)^2}\right)^2}}.$$

Wenn hier außerdem $f = 0$ war, dass das Blech in den Punkten A und B von den gleichen Kräften Aa, Bb, nur gegensätzlichen, beeinflusst wird, wird die Natur der Kurve mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$dy = \frac{dx(Ekk - hqx)}{\sqrt{hq(2Ekkx - hqxx)}},$$

die integriert gibt

$$y = \sqrt{\frac{2Ekkx - hqxx}{hq}};$$

diese ist für den Kreis, das Blech wird also in diesem Fall zu einem Bogen des Kreises gekrümmt, dessen Radius $= \frac{Ekk}{hq}$ sein wird.

AUFZÄHLUNG DER ELASTISCHEN KURVEN

14. Weil wir also sehen, dass nicht nur der Kreis in der Klasse der elastischen Kurven enthalten ist, sondern auch in selbigen eine unendliche Verschiedenheit auftritt, wird es der Mühe wert sein, hier die Aufzählung aller verschiedenen Gattungen, die in dieser Art von Kurven enthalten sind, vorzunehmen. Auf diese Weise wird nämlich nicht nur die Gestalt der Kurven vollständiger erkannt werden, sondern es wird sich auch in irgendeinem sich ergebenden Fall allein aus der Form entscheiden lassen, zu welcher Gattung die gebildete Kurve gezählt werden muss. Auf dieselbe Weise werden wir aber hier die Verschiedenheit der Gattungen festlegen, auf die für gewöhnlich die Gattungen von algebraischen Linien, die in einer gegebenen Klasse enthalten sind, aufgezählt zu werden pflegen.

15. Die allgemeine Gleichung für elastische Kurven

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2}},$$

nachdem der Anfang der Abszissen auf der Achse um das Intervall $\frac{\beta}{2\gamma}$ vorwärts bewegt wurde und indem für $\frac{aa}{\gamma}$ aa geschrieben wird oder $\gamma = 1$ gesetzt wird, wird diese einfachere Form annehmen:

$$dy = \frac{(\alpha + xx)dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + xx)^2}}.$$

Weil aber gilt

$$a^4 - (\alpha + xx)^2 = (aa - \alpha - xx)(aa + \alpha + xx),$$

werde $aa - \alpha = cc$ gesetzt, dass $\alpha = aa - cc$ ist, und die Gleichung wird in diese Form übergehen

$$dy = \frac{(aa - cc + xx)dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}.$$

Mit dieser Gleichung werde (Fig. 6) die Natur der Kurve AMC ausgedrückt, nachdem die Abszisse $AP = x$ und die Ordinate $PM = y$ gesetzt wurde. Weil also $\beta = 0$ ist, wird die Richtung der Kraft, die das elastische Blech krümmt, zur Achse AP im Punkt A normal sein, und daher wird AD die Richtung der wirkenden Kraft darstellen,

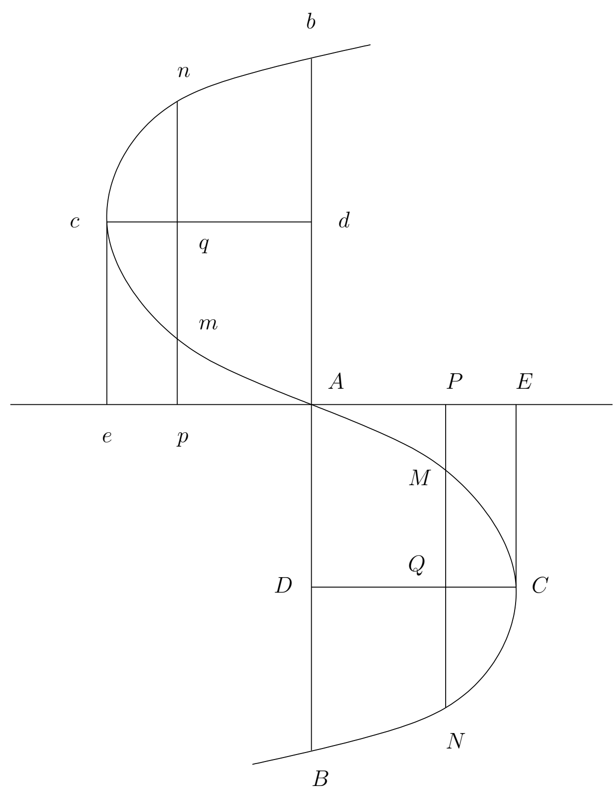

Fig. 6

welche Kraft selbst $= \frac{2Ekk}{aa}$ sein wird, während Ekk die absolute Elastizität ausdrückt.

16. Wenn $x = 0$ gesetzt wird, wird sein

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aa - cc}{c\sqrt{2aa - cc}};$$

dieser Ausdruck liefert den Tangens des Winkels, welchen die Kurve AM in A mit der Achse AP festlegt; der Sinus dieses Winkels wird $= \frac{aa-cc}{aa}$ sein. Daher, wenn $aa = \infty$ war, wird das Blech im Punkt A normal zur Achse AP sein und wird keine Krümmung haben, deshalb weil die krümmende Kraft $= \frac{2Ekk}{aa}$ verschwindet. Im Fall, in dem $a = \infty$ ist, geht also die natürliche Form des Bleches hervor, das heißt eine gerade Linie; diese legt also die erste Gattung der elastischen Kurven fest, welche die Gerade AB nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert darstellen wird.

17. Bevor wir aber die übrigen Gattungen aufzählen, wird es gefällig sein, im Allgemeinen über die Form der Elastica gewisse Bemerkungen zu machen. Es wird aber eingesehen, dass der Winkel PAM, welchen die Kurve in A mit der Achse AP festlegt, abnimmt, je kleiner die Größe aa wird, das heißt, je mehr die krümmende Kraft $\frac{2Ekk}{aa}$ ausgeübt wird. Und, wenn $aa = cc$ wird, dann wird die Achse AP selbst die Kurve in A berühren. Wenn daher aber $aa < cc$ war, dann wird die Kurve AM, die bisher nach unten auslief, nun nach oben verlaufen, bis schließlich $aa = \frac{1}{2}cc$ wird; in diesem Fall fällt die Tangente der Kurve auf die Gerade Ab. Aber wenn $aa < \frac{1}{2}cc$ wird, dann wird der Winkel PAM völlig imaginär werden und daher wird in A kein Anteil der Kurve existieren; diese verschiedenen Fälle werden die Varietät der Gattungen festlegen.

18. Aus der Gleichung wird weiter eingesehen, weil sie ihre Form nicht verändert, wenn die Koordinaten x und y beide negativ festgelegt werden, dass die Kurve um A herum ähnliche und gleiche Zweige AMC und Amc hat, die einander abwechselnd folgen, so dass in A ein Wendepunkt ist; daher, nachdem der Anteil der Kurve AMC bekannt geworden ist, wird zugleich seine Fortsetzung Amc über A erkannt werden, die natürlich jenem ähnlich und gleich ist. Nachdem so $Ap = AP$ genommen wurde, wird auch $pm = PM$ sein. Indem aber von A aus zurückgegangen wird, wird die Kurve sich auf beiden Seiten immer mehr von der Achse entfernen, bis schließlich, nachdem die Abszisse $= AE = c$ genommen wurde, die Ordinate EC die Kurve berührt; denn für $= c$ gesetzt wird $\frac{dy}{dx} = \infty$. Es ist aber klar, dass die Abszisse x nicht über AE hinaus wachsen kann; andernfalls würde nämlich $\frac{dy}{dx}$ imaginär werden; daher wird also die ganze Kurve zwischen diesen äußersten Ordinaten EC und c enthalten sein, über welche Schranken sie nicht herausgehen kann. Nun haben wir also allgemein die zwei Zweige der Kurve AC und Ac erkannt, die auf beiden Seiten von A bis hinzu den Schranken verlängert worden sind.

19. Wir wollen also sehen, in welchem Verlauf die sich Kurve über C und c weiter erstreckt. Für dieses Ziel wollen wir die Gerade CD, die AE parallel ist, für die Achse nehmen und wollen diese neuen Koordinaten $CQ = t$, $QM = u$

festlegen; und es wird gelten

$$t + x = AE = CD = c \quad \text{und} \quad y + u = CE = AD = b;$$

daher wird $x = c - t$ und $y = b - u$ oder $dy = -du$. Nach Einsetzen dieser Werte wird die Gleichung für die Kurve zwischen den Koordinaten $CQ = t$ und $QM = u$ entstehen, welche diese sein wird

$$du = \frac{(aa - 2ct + tt)dt}{\sqrt{t(2c - t)(2aa - 2ct + tt)}}.$$

Hier ist zuerst klar, wenn t unendlich klein genommen wird, dass gelten wird

$$du = \frac{aadt}{2a\sqrt{ct}} \quad \text{und daher} \quad u = a\sqrt{\frac{t}{c}};$$

diese Gleichung zeigt auf, dass die Kurve über C auf die gleiche Weise zu N zu konvergieren beginnt, wie sie aus C zu M verläuft. Aber die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens $\sqrt{}$ im Nenner der Gleichung zeigt in glänzender Weise auf, dass die Ordinate u gleichermaßen negativ angenommen werden kann; daher ist klar, dass die Gerade CD der Durchmesser der Kurve ist und daher der Bogen CNB dem Bogen CMA ähnlich und gleich sein wird.

20. Auf die gleiche Weise wird aber die Gerade cd, die aus dem anderen der Achse AE parallelen Teil durch c gezeichnet wurde, ein Durchmesser der Kurve sein, deshalb weil der Zweig Acb dem Zweig ACB ähnlich und gleich ist. In den Punkten B und b werden auch Wendepunkte sein wie in A; daher wird sich die Kurve in gleicher Weise weiter ausdehnen. Die Kurve wird also unendlich viele Durchmesser CD, cd etc. haben, die in demselben Intervall Dd voneinander entfernt und einander parallel sind; und dieser Sache wegen wird die Kurve aus unendlich vielen einander ähnlichen und gleichen Teilen bestehen und daher wird die ganze Kurve erkannt werden, wenn nur der eine einzige Anteil AMC betrachtet wurde.

21. Weil in A ein Wendepunkt ist, wird eben dort der Krümmungsradius unendlich groß sein; das ist auch aus der Natur der Kurve selbst klar. Weil nämlich die Kurve in A von der Kraft $= \frac{2Ekk}{aa}$ in der Richtung AD beunruhigt wird, wird in jedem Punkt M, wenn der Krümmungsradius dort $= R$ gesetzt wird, aus der Natur der Elastizität gelten

$$\frac{2Ekk}{aa}x = \frac{Ekk}{R};$$

daher wird $R = \frac{aa}{2x}$. Im Punkt A ist also der Krümmungsradius unendlich; aber in den Punkten C, c, wegen $AE = Ae = c$, wird in der Tat der Krümmungsradius $= \frac{aa}{2c}$ sein; an diesen Stellen, die am weitesten von der Gerade BAb entfernt sind, ist die Krümmung am größten.

22. Auch wenn für den Punkt C die Abszisse $AE = c$ bekannt ist, kann dennoch die Distanz EC außer durch Integration der Gleichung

$$dy = \frac{(aa - cc + xx)dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$$

nicht bestimmt werden. Wenn nämlich nach der Integration $x = c$ gesetzt wird, wird der Wert von y die Distanz CE geben, die zweimal genommen die Distanz AB oder das Intervall Dd geben wird, das zwischen den Durchmesser liegt. Auf die gleiche Weise wird eine Integration von Nöten sein, um die Länge des gekrümmten Bleches AC zu bestimmen. Weil aber, nachdem der Bogen $AM = s$ gesetzt wurde, gilt

$$ds = \frac{aadx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}},$$

wird das Integral von diesem für $x = c$ gesetzt die Länge der Kurve AC geben.

23. Weil aber diese Formeln keine Integration zulassen, wollen wir uns darauf verlegen, durch Approximation die Werte des Intervalls SD und des Kurvenbogens angenehm durch Reihen auszudrücken. Wir wollen zu diesem Zweck $\sqrt{cc - xx} = z$ setzen, und es wird sein

$$PM = y = \int \frac{(aa - zz)dx}{z\sqrt{2aa - zz}} \quad \text{und} \quad AM = s = \int \frac{aadx}{z\sqrt{2aa - zz}}.$$

Es ist aber durch eine Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2aa - zz}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{4} \times \frac{zz}{aa} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \times \frac{z^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \times \frac{z^6}{a^6} + \text{ etc.}\right),$$

woher werden wird

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx \left(\frac{a}{z} + \frac{1}{4} \times \frac{z}{a} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \times \frac{z^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \times \frac{z^5}{a^5} + \text{ etc.}\right) \\ s - y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx \left(\frac{a}{z} + \frac{1}{4} \times \frac{z^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \times \frac{z^5}{a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \times \frac{z^7}{a^7} + \text{ etc.}\right). \end{aligned}$$

24. Weil wir ja aber diese Integrale nur für den Fall $x = c$ verlangen, in welchem Fall $z = 0$ wird, werden sie angenehm mit Hilfe der Peripherie des Kreises ausgedrückt werden können. Nachdem nämlich das Verhältnis des Durchmessers zu Peripherie $= 1 : \pi$ gesetzt wurde, wird gelten

$$\int \frac{dx}{z} = \int \frac{dx}{\sqrt{cc - xx}} = \frac{\pi}{2}$$

nachdem nach der Integration $x = c$ gesetzt worden ist. Auf die gleiche Weise werden aber die folgenden Integrale so bestimmt werden, dass ist

$$\begin{aligned} \int z \; dx &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} cc, \\ \int z^3 dx &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \frac{\pi}{2} c^4, \\ \int z^5 dx &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \times \frac{\pi}{2} c^6, \\ \int z^7 dx &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \times \frac{\pi}{2} c^8 \end{aligned}$$

etc.

Unter Zuhilfenahme dieser Integrale wird also sein

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2} \times \frac{cc}{2aa} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} \times \frac{c^4}{4a^4} + \text{ etc.}\right)$$

$$AC{-}AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(\frac{cc}{2aa} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \times \frac{c^4}{4a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} \times \frac{c^5}{8a^6} + \text{ etc.}\right)$$

Aus diesen werden AD und AC gefunden wie folgt:

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{cc}{2aa} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} \times \frac{c^4}{4a^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} \times \frac{c^6}{8a^6} + \text{ etc.}\right)$$

$$AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1} \times \frac{cc}{2aa} - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} \times \frac{5}{3} \times \frac{c^4}{4a^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} \times \frac{7}{5} \times \frac{c^6}{8a^6} - \text{ etc.}\right)$$

Wenn deshalb $AE = c$ und $AD = b$ gegeben ist, wird aus diesen Gleichungen sowohl die konstante Gerade a als auch die Länge der Kurve AC bestimmt werden. Umgekehrt werden aber auch aus der gegebenen Länge der Kurve AC und der Gerade a, durch welche die krümmende Kraft bestimmt wird, die Geraden AD und CD gefunden werden können.

ERSTE GATTUNG

25. Weil wir ja also die erste Gattung festgelegt haben, wenn in der allgemeinen Gleichung

$$dy = \frac{(aa - cc + xx)dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$$

$c = 0$ oder $\frac{a}{c} = \infty$ war, in welchem Fall eine Linie resultiert, die den natürlichen Zustand des elastischen Bleches darstellt, wollen wir zu derselben ersten Gattung auch die Fälle zählen, in denen c eine möglichst kleine Größe ist, sodass sie in Bezug auf a für verschwindend gehalten werden kann. Weil also x c nicht übersteigen kann, wird auch x in Bezug auf a verschwinden und daher wird diese Gleichung hervorgehen

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{2(cc - xx)}},$$

deren Integral ist

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} A \sin \frac{x}{c},$$

welche die Gleichung für eine Trochoide ist, die nach vorne ins Unendliche verlängert worden ist. Es wird aber $AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ werden, von welcher sich die Länge der Kurve nur unendlich wenig unterscheidet, deshalb weil der Winkel DAM unendlich klein ist. Es sei die Länge des Bleches $ACB = 2f$ und seine absolute Elastizität sei $= Ekk$; wegen $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$, wird die erforderte Kraft, um diese unendlich kleine Krümmung dem Blech beizufügen, von endlicher Größe und zwar $= \frac{Ekk}{ff} \cdot \frac{\pi\pi}{4}$ sein. Natürlich, wenn die Extremitäten A und B mit der Sehne AB verbunden werden, wird diese Sehne mit der Kraft $= \frac{Ekk}{ff} \cdot \frac{\pi\pi}{4}$ zusammengezogen werden müssen.

ZWEITE GATTUNG

26. Die zweite Gattung lege der Fall fest, in dem $c > 0$, aber dennoch $c < a$ ist, natürlich, wenn c innerhalb der Grenzen 0 und a enthalten ist. In diesen Fällen wird der Winkel DAM kleiner als der rechte Winkel sein; es ist nämlich der Sinus des Winkels PAM oder der Kosinus der Winkels $CAM = \frac{aa-cc}{aa}$. In diesem Fall wird also die Form der gekrümmten Linie eine solche sein, wie Figur 6 darstellt. Weil also $c < a$ ist, wird $\frac{cc}{2aa}$ sein; weil aber $\frac{cc}{2aa} > 0$ ist, wird natürlich $AC = f > \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ sein, woher $aa < \frac{8ff}{\pi\pi}$ ist; daher wird die Kraft, mit welcher die Extremitäten des Bleches A und B mit Hilfe der Sehne AB zusammengezogen werden, größer sein als im vorhergehenden Fall, nämlich $> \frac{Ekk}{ff} \cdot \frac{\pi\pi}{4}$.

DRITTE GATTUNG

27. In der dritten Gattung erfasse ich den einen Fall, in dem $c = a$ ist, weil in diesem Fall die Achse AP die Kurve im Punkt A berührt; und diese Gattung hat den einzigartigen Namen der rechtwinkligen elastischen Kurve erhalten. Es wird also sein

$$dy = \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}} \quad \text{und} \quad ds = \frac{aadx}{\sqrt{a^4 - x^4}};$$

in diesem Fall werden sich also AD und AC so verhalten, dass gilt

$$AC = f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{1}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{1}{8} + \text{ etc.}\right)$$
$$AD = b = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{5}{3 \cdot 4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{7}{5 \cdot 8} - \text{ etc.}\right).$$

Obwohl aber daher weder b noch f durch a genau angegeben werden kann, habe ich dennoch schon anderenortes gezeigt, dass eine außergewöhnliche Relation zwischen diesen Größen Geltung hat. Natürlich habe ich bewiesen, dass $4bf = \pi aa$ ist oder das aus AD und AC gebildete Rechteck wird gleich der Fläche des Kreises sein, dessen Durchmesser $= AE$ ist. Es wird aber durch Ausführung der Rechnung näherungsweise $f = \frac{5a}{6} \times \frac{\pi}{2}$ gefunden werden, sodass $a = \frac{12f}{5\pi}$ ist; daher wird die Kraft, mit welcher die Extremitäten A, B zueinander zusammengezogen werden müssen, sein

$$= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{25}{72}\pi\pi.$$

Näher wird aber gefunden

$$f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \cdot 1,1803206$$

und daher

$$b = \frac{\pi aa}{4f} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times 1,1803206;$$

woher in reinen Zahlen sein wird

$$\frac{f}{a} = 1,311006 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0,834612.$$

VIERTE GATTUNG

28. Wenn $c > a$ ist, wird die vierte Gattung entstehen, die sich bis dahin erstreckt, bis $AD = b = 0$ wird; die andere Grenze von c wird durch diese Gleichung bestimmt werden:

$$1 = \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1} \times \frac{cc}{2aa} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{5}{3} \times \frac{c^4}{4a^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{7}{5} \times \frac{c^6}{8a^6} + \text{ etc.}$$

In dieser Gattung (Fig. 7), weil $c < a$ ist, wird die Kurve in A über die Achse AE aufsteigen und den Winkel PAM festlegen, dessen Sinus $= \frac{cc-aa}{aa}$ sein wird; bald werden wir aber sehen, dass dieser Winkel PAM kleiner als $40°41'$ ist; weil ja, wenn er diesen Wert annimmt, das Intervall AD verschwindet, welchen Fall ich zur fünften Gattung zähle.

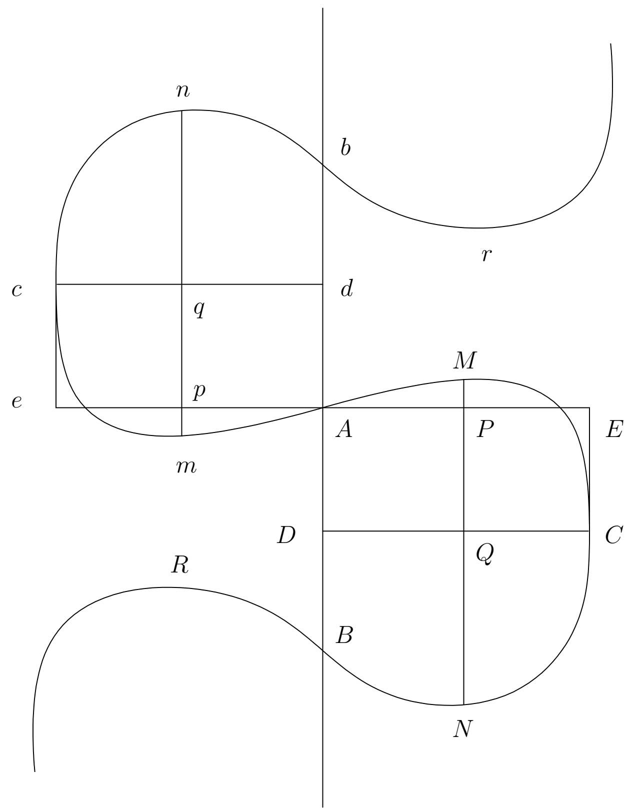

Fig. 7

Daher sind in der vierten Gattung die Fälle enthalten, in denen $\frac{cc}{aa}$ zwischen diesen Grenzen 1 und $1,651868$ erfasst wird. Die Form dieser Kurven wird aber aus der Figur eingesehen, solange bemerkt wird, dass, umso näher $\frac{cc}{aa}$ an die Grenze $1,651868$ herangekommen ist, dass das Intervall AD umso kleiner sein wird und die Grenzen A und B umso näher aneinander herangerückt werden.

Es kann also geschehen, dass die Wölbungen des Bleches m und R so M und r nicht nur berühren, sondern auch scheiden, und die Überscheidungen dieser Art werden ins Unendliche vermehrt werden, bis schließlich alle Durchmesser DC, dc zusammenfallen und mit der Achse AE verschmolzen werden.

FÜNFTE GATTUNG

29. Wenn dies passiert ist, wird (Fig. 8) die fünfte Gattung entstehen,

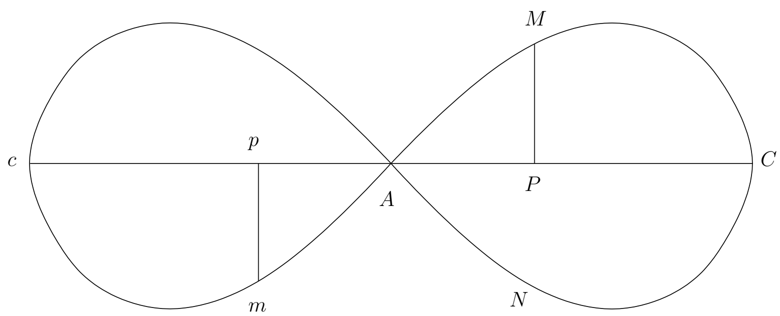

FIG. 8

deren Natur mit dieser Gleichung zwischen den Koordinaten $AP = x$ und $PM = y$ ausgedrückt werden wird:

$$dy = \frac{(cc - aa - xx)dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}},$$

während die Relation zwischen a und c diese ist, dass das Intervall $AD = b = 0$ ist. Es werde $\frac{cc}{2aa} = v$ gesetzt und v muss aus dieser Gleichung bestimmt werden

$$1 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}v + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}v^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}v^3 + \text{ etc.}$$

Es werden zuerst durch die einem gewohnten Methoden, oder zumindest durch Probieren, die Grenzen gesucht, zwischen welchen der wahre Wert von v enthalten ist, und es werden Grenzen dieser Art gefunden werden $v = 0,824$ und $v = 0,828$. Wenn daher nun jede der beiden in die Gleichung aus den zwei entstehenden Fehlern eingesetzt wird, wird gefolgert werden, dass schließlich gelten wird

$$v = 0,825934 = \frac{cc}{2aa};$$

woher wird

$$\frac{cc}{aa} = 1,651868 \quad \text{und} \quad \frac{cc - aa}{aa} = 0,651868;$$

weil dieser Ausdruck der Sinus des Winkels PAM ist, wird aus Tabellen dieser Winkel $= 40°41'$ gefunden werden; und daher wird das Doppelte dessen oder der Winkel $MAN = 81°22'$ sein. Daher, wenn die Extremitäten des elastischen Bleches bis dahin aneinander herangeführt werden, dass sie sich berühren, dann werden sie die Kurve $AMCNA$ bilden und die beiden Extremitäten werden in A den Winkel $= 81°22'$ festlegen.

SECHSTE GATTUNG

30. Wenn die beiden Extremitäten des Bleches A und B (Fig. 9), nachdem sie aufeinander zugeführt worden sind und die Kraft vermehrt wurde, in entgegengesetzten Richtungen voneinander wegbewegt werden, wird eine Kurve dieser Form $AMCNB$ entstehen, welche die sechste Gattung festlege.

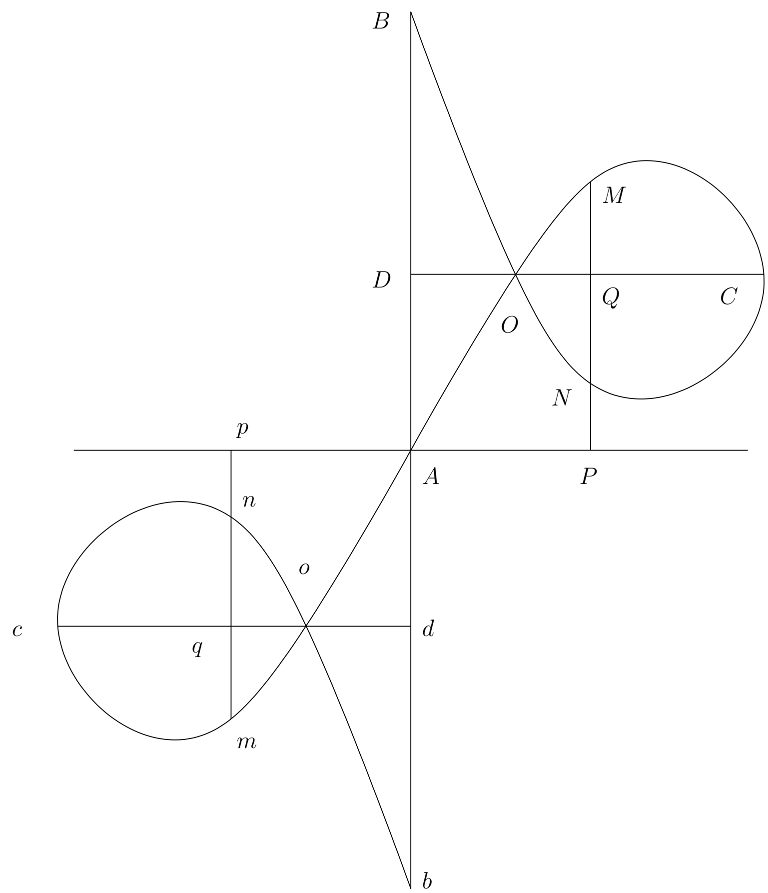

Fig. 9

In Kurven, die sich also auf diese Gattung beziehen, wird gelten

$$\frac{cc}{2aa} > 0,825934,$$

so dennoch, dass $\frac{cc}{2aa} < 1$ ist. Wenn daher nämlich $cc = 2aa$ ist, wird die siebte bald mehr zu erklärende Gattung entstehen. Es wird also in diesen Kurven der Winkel PAM, welchen die Kurve in A mit der Achse festlegt, größer als $40°41'$ sein, aber dennoch kleiner als der rechte; weil nämlich sein Sinus $= \frac{cc-aa}{aa}$ ist, ist wegen $cc < 2aa$ dieser Sinus notwendigerweise kleiner als der ganze Sinus und daher kann der Winkel PAM kein rechter werden, wenn nicht $cc = 2aa$ gesetzt wird.

SIEBTE GATTUNG

31. Es sei nun $cc = 2aa$, in welchem Fall die siebte Gattung festgelegt wird, und die Natur der Kurve wird mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$dy = \frac{(aa - xx)dx}{x\sqrt{2aa - xx}};$$

aus dieser wird gefolgert, dass die Zweige der Kurve (Fig. 10) A und B so ins Unendliche auslaufen werden, dass die Gerade AB die Asymptote der Kurve wird. Es wird also jeder der beiden Zweige AMC und BNC unendlich, was aus der oben für den Bogen AC gefundenen Reihe eingesehen wird; es wird nämlich sein

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{ etc.}\right),$$

die Summe welcher Reihe unendlich ist. Wenn daher also die Länge des Bleches AC endlich $= f$ war, ist es notwendig, dass $a = 0$ ist und daher auch $CD = c = 0$; das Blech, nachdem es zu einem Knoten gekrümmt worden ist, wird in diesem Fall also wiederum gerade ausgedehnt werden, zu welcher Ausdehnung eine unendlich große Kraft von Nöten sein wird. Wenn aber das Blech unendlich lang war, wird es eine zur Asymptote AB konvergierende verknotete Kurve bilden, während $CD = c$ ist. Aber die Gleichung für diese Kurve kann mithilfe von Logarithmen integriert werden, es wird nämlich erhalten werden

$$y = \sqrt{cc - xx} - \frac{c}{2}l\frac{c + \sqrt{cc - xx}}{x},$$

nachdem die Abszisse x auf dem Durchmesser DC so genommen wurde, dass $DQ = x$ und $QM = y$ ist; es verschwindet nämlich die Ordinate y für $x = CD = c$ gesetzt. Im Knoten O verschwindet aber die Ordinate y gleichermaßen; um diese Stelle zu finden, werde festgelegt

$$\frac{2\sqrt{cc - xx}}{c} = l\frac{c + \sqrt{cc - xx}}{x}.$$

Es sei ϕ der Winkel, dessen Kosinus $= \frac{x}{c}$ und Sinus $= \frac{\sqrt{cc - xx}}{c}$ ist, es wird gelten

$$2\sin\phi = l\,\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\phi),$$

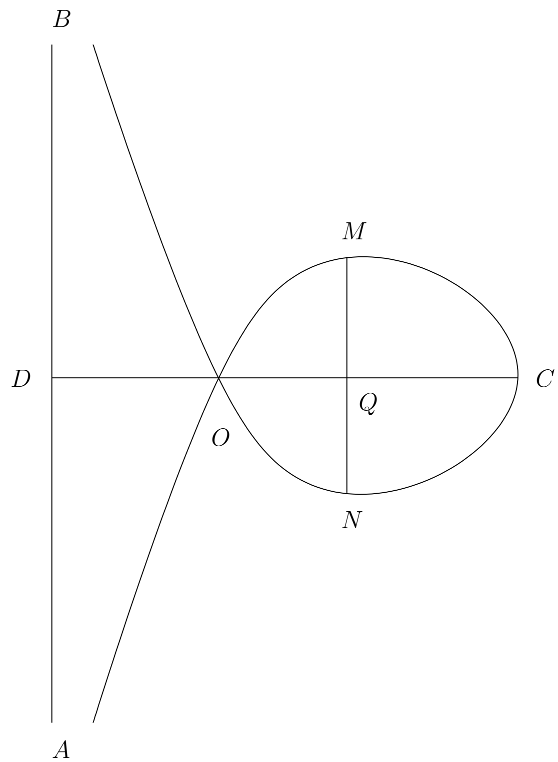

Fig. 10

welcher Logarithmus aus der Art der hyperbolischen genommen werden muss; wenn eine Tabelle solcher Art fehlt, werde aus der gewöhnlichen Tabelle der Logarithmus des Tangens des Winkels $45° + \frac{1}{2}\phi$ genommen, von dessen Charakteristik jede Zehnerpotenz weggenommen werde, und der Rest sei $= \omega$; danach wird $2\sin\phi = \omega \cdot 2,30258509$ sein, indem also wiederum gewöhnliche Logarithmen genommen werden, wird gelten

$$l2 + l\sin\phi = l\omega + 0,3622156886$$

oder

$$l\sin\phi = l\omega + 0,0611856930.$$

Mit diesem Kunstgriff wird durch Probieren in der Tat bald ein sehr guter Näherungswert des Winkels ϕ gefunden werden; daher wird weiter durch die Regula falsi der wahre Wert des Winkels ϕ und aus ihm die Abszisse $x = DO$ bestimmt werden. Es wird aber auf diese Weise der Winkel $\phi = 73°14'12''$ gefunden, woher hervorgeht

$$\frac{x}{c} = 0,2884191 \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{cc-xx}}{c} = 0,9575042;$$

$$\text{aber der Winkel } QOM \text{ wird } = 2\phi - 90 = 56°28'24''$$

und daher

$$\text{der Winkel } MON = 112°56'48''.$$

Weil also in der fünften Gattung der Winkel des Knotens $81°22'$ war, wird in der sechsten Gattung der Winkel des Knotens MON zwischen den Grenzen $81°22'$ und $112°56'48''$ enthalten sein. In der vierten Gattung aber, wenn freilich der Knoten gegeben ist, wird der Winkel kleiner als $81°22'$ sein.

ACHTE GATTUNG

32. Es sei nun $cc > 2aa$, beispielsweise $cc = 2aa + gg$; es wird die Gleichung für die Kurve wegen $aa = \frac{cc-gg}{2}$ diese sein:

$$dy = \frac{(xx - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}gg)dx}{\sqrt{(cc-xx)(xx-gg)}},$$

in welcher Gleichung die achte Gattung enthalten ist, und es wird (Fig. 11), wenn die Gerade dDd die Richtung der wirkenden Kraft darstellt, $x = DQ$ und $y = QM$ sein. Zuerst ist also klar, dass die Ordinate y nicht reell sein kann, wenn nicht $x > g$ ist, dann aber kann x nicht die Gerade $DC = c$ überschreiten, woher nach Nehmen von $DF = g$ die ganze Kurve zwischen den dd parallelen durch die Punkte C und F gezogenen Geraden enthalten sein wird, die zugleich die Kurve berühren wird. Es ist aber egal, welche der beiden Geraden c und g kleiner ist, solange sie ungleich waren, wird die Gleichung wird nämlich nicht verändert, wenn die Geraden c und g miteinander vertauscht werden. Darauf wird aber diese Kurve unendlich viele zueinander parallele Durchmesser DC, dc, dc haben und die Geraden, die durch den einzelnen Punkte G und H gleichermaßen zu dDd normal gezogen wurden, sind Durchmesser; aber nie wird auf der ganzen Kurve ein Wendepunkt gegeben sein und daher schreitet die ununterbrochene Krümmung nach beiden Seiten ins Unendliche fort, wie die Figur aufzeigt; aber die Winkel, die in den Knoten festgelegt werden, MON sind größer als $112°56'42''$.

NEUNTE GATTUNG

33. Weil ja in dieser Gattung nicht nur die Fälle enthalten sind, in denen $gg < cc$ ist, sondern auch die, in denen $gg > cc$ ist, ist noch ein einziger Fall übrig, in dem $c = g$ ist, in welchem die ganze Kurve in eine verschwindenden Raum, wegen $CF = 0$, übergeht. Wenn wir daher aber jede der beiden c und g und unendlich festlegen, so dennoch, dass deren Differenz endlich wird, wird die Kurve einen endlichen Raum einnehmen.

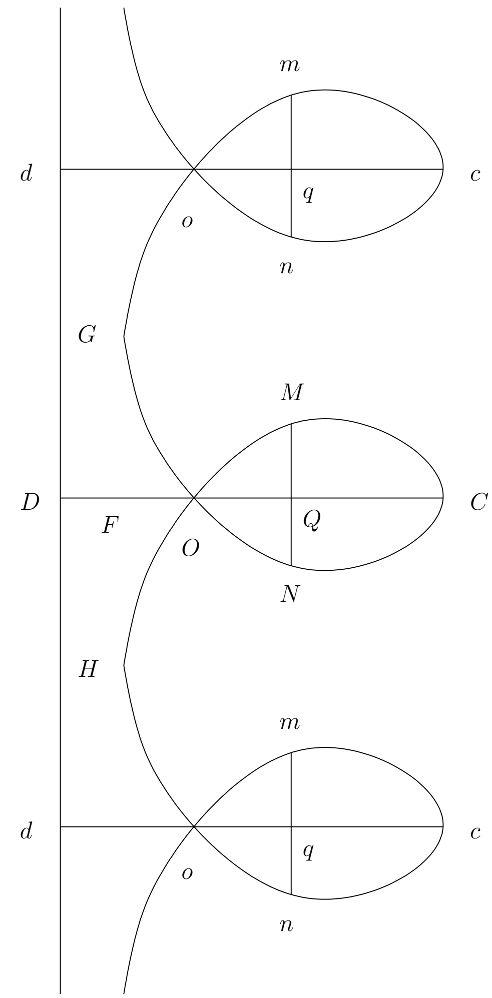

FIG. 11

Um diese also zu finden, werde $g = c - 3h$ und $x = c - h - t$ gesetzt und wegen $c = \infty$, aber der endlichen Größen h und t, wird gelten

$$\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}gg = cc - 2ch \quad \text{und} \quad xx - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}gg = -2ct;$$

dann aber

$$cc - xx = 2c(h+t) \quad \text{und} \quad xx - gg = 2c(h-t);$$

aus diesen wird die folgende Gleichung

$$dy = \frac{dtd}{\sqrt{hh - tt}}$$

für den Kreis hervorgehen. Das elastische Blech wird also in diesem Fall zu einem Kreis gekrümmt, wie wir schon oben angemerkt haben; der Kreis wird also die neunte und letzte Gattung festlegen.

34. Nachdem diese Gattungen aufgezählt worden sind, wird es leicht sein, für jeden sich ergebenden Fall anzugeben, auf welche Gattung sich die gebildete Kurve bezieht. Es sei das elastische Blech (Fig. 12) in G an einer Mauer befestigt, an dem Ende A werde aber das Gewicht P angebracht, damit das Blech zur Form GA gekrümmt wird. Es werde die Tangente AT gezogen, und aus dem Winkel TAP wird das ganze Urteil zu entnehmen sein. Wenn nämlich dieser Winkel ein spitzer Winkel war, wird die Kurve zur zweiten Gattung gezählt werden; wenn er ein rechter Winkel war, zur dritten, und sie wird eine rechtwinklige elastische Kurve sein. Wenn daher der Winkel TAP ein stumpfer Winkel war, aber dennoch kleiner als $130°41'$, dann wird die Kurve sich auf die vierte Gattung beziehen; auf die fünfte aber, wenn der Winkel $TAP = 130°41'$ ist; wenn der Winkel TAP aber größer war, wird die Kurve in der sechsten Gattung enthalten sein.

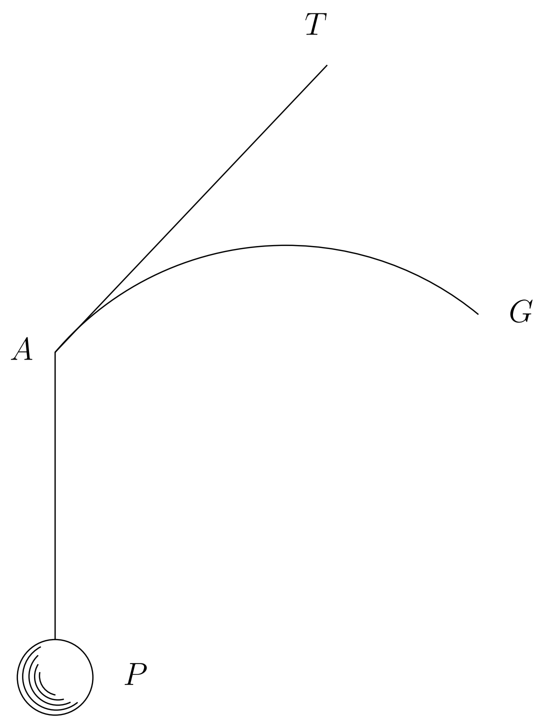

Fig. 12

Sie bezöge sich aber auf die siebte, wenn dieser Winkel zwei rechten gleich werden würde, was aber niemals geschehen kann. Diese Gattung kann also zusammen mit den zwei folgenden nicht erzeugt werden, indem dem Blech unmittelbar ein Gewicht angebracht wird.

35. Damit also klar wird (Fig. 3), wie die übrigen Gattungen, indem das Blech gekrümmt wird, erzeugt werden können, werde dem in B befestigten Blech, nicht unmittelbar, sondern einem soliden Stab AC, der dem Blech am Ende A sehr fest angefügt wurde, in C das Gewicht P angebracht, welches in die Richtung

CD ziehe. Es sei das Intervall $AC = h$, die absolute Elastizität $= Ekk$ und der Sinus des Winkels MAP, welchen das Blech in A mit der Horizontalen festlegt, $= m$. Nach Festlegen dieser Dinge, wenn die Abszisse $AP = t$ und die Ordinate $PM = y$ gesetzt wird, wird für die Kurve diese Gleichung gefunden werden

$$dy = \frac{dt(mEkk - Pht - \frac{1}{2}Ptt)}{\sqrt{E^2k^4 - (mEkk - Pht - \frac{1}{2}Ptt)^2}}.$$

Es werde nun $CP = x = h + t$ gesetzt, damit die Gleichung auf die Form, die wir in der Aufteilung der Gattungen gebraucht haben, zurückgeführt wird; es wird sein

$$dy = \frac{dx(mEkk + \frac{1}{2}Pht - \frac{1}{2}Pxx)}{\sqrt{E^2k^4 - (mEkk + \frac{1}{2}Phh - \frac{1}{2}Pxx)^2}}$$

die verglichen mit der Form

$$dy = \frac{dx(aa - cc + xx)}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$$

oder

$$dy = \frac{dx(aa - cc + xx)}{\sqrt{(a^4 - (aa - cc + xx)^2)}}$$

$\frac{1}{2}Paa = Ekk$ geben wird oder

$$aa = \frac{2Ekk}{P} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}Pcc - \frac{1}{2}Paa = mEkk + \frac{1}{2}Phh;$$

also

$$cc = \frac{2(1+m)Ekk}{P} + hh.$$

36. Die Kurve wird sich also auf die zweite Gattung beziehen, wenn galt

$$\frac{2mEkk}{P} + hh < 0 \quad \text{oder} \quad P < -\frac{2mEkk}{hh};$$

wenn also der Winkel PAM negativ ist, muss die Kraft P negativ sein und der Stab in C nach oben gezogen werden. Auf die dritte Gattung wird sich die Kurve beziehen, wenn gilt

$$P = -\frac{2mEkk}{hh}.$$

Die vierte Gattung wird aber hervorgehen, wenn war

$$2mEkk + Phh > 0, \text{ zugleich aber } \quad 2mEkk + Phh < 2\alpha Ekk,$$

während $\alpha = 0,651868$ ist. Wenn aber gilt

$$P = \frac{2(\alpha - m)Ekk}{hh},$$

dann wird sich die Kurve auf die vierte Gattung beziehen. Wenn daher aber galt

$$Phh > 2(\alpha - m)Ekk, \text{ zugleich aber } \quad Phh < 2(1 - m)Ekk,$$

ist die Kurve zur sechsten Gattung zu zählen. Und die siebte Gattung wird hervorgehen, wenn gilt

$$Phh = 2(1 - m)Ekk.$$

Die achte Gleichung wird aber erhalten werden, wenn gilt

$$Phh > 2(1 - m)Ekk;$$

daher, wenn der Winkel PAM ein rechter war, wird sich wegen $1 - m = 0$ die Kurve immer auf die achte Gattung beziehen. Die neunte Gattung wird schließlich entstehen, wenn $h = \infty$ war, wie ich schon oben angemerkt habe.

ÜBER DAS TRAGVERMÖGEN VON SÄULEN

37. Was zuvor über die erste Gattung angemerkt worden ist, kann dazu dienen, die Tragfähigkeit von Säulen zu beurteilen. Es sei nämlich (Fig. 13) AB eine über der Basis A vertikal aufgestellte Säule, die das Gewicht P trägt. Wenn daher nun die Säule so aufgestellt worden ist, dass sie nicht vorwärts bewegt werden kann, von der Last P, wenn sie nicht allzu groß war, wird nichts anderes zu befürchten sein,

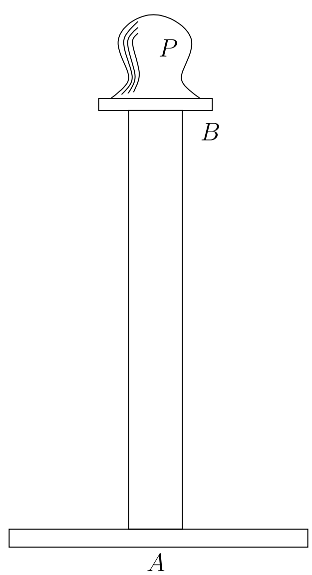

Fig. 13

außer die Neigung der Säule; in diesem Fall wird also die Säule als mit einer Elastizität versehen betrachtet werden können. Es sei also die absolute Elastizität der Säule $= Ekk$ und ihre Höhe $AB = 2f = a$, und oben in Paragraph 25 haben wir gesehen, dass die erforderte Kraft, um diese Säule auch nur minimal zu neigen diese ist

$$= \frac{\pi\pi Ekk}{4ff} = \frac{\pi\pi}{aa} \cdot Ekk.$$

Wenn also die zu tragende Last P nicht größer ist als $E \cdot \frac{\pi\pi kk}{aa}$ ist, wird überhaupt keine Neigung zu befürchten sein; andernfalls aber, wenn das Gewicht P zu groß war, wird die Säule der Neigung nicht widerstehen können. Während aber die Elastizität der Säule und daher ihre Dicke dieselbe bleibt, wird das Gewicht P, was ohne Gefahr getragen werden kann, umgekehrt proportional zum Quadrat der Höhe der Säule sein und eine doppelt so hohe Säule wird nur den vierten Teil der Last tragen können. Diese Erkenntnisse können also besonders bezüglich dünnerer Säulen benutzt werden, die natürlich einer Neigung unterworfen sind.

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER ABSOLUTEN ELASTIZITÄT DURCH EXPERIMENTE

38. Damit also die Kraft und die Krümmung jedes elastischen Blechs a priori bestimmt werden kann, ist es notwendig, dass die absolute Elastizität, welche wir bisher durch Ekk ausgedrückt haben, bekannt ist; dies wird mit einem einzigen Experiment angenehm geleistet werden. Es werde also ein gleichmäßiges elastisches Blech (Fig. 14) FH, dessen absolute Elastizität gefunden werden muss, am einen Ende F an der soliden Wand GK befestigt, so dass es eine horizontale Lage FH hat; hier lässt sich nämlich die natürliche Schwerkraft missachten.

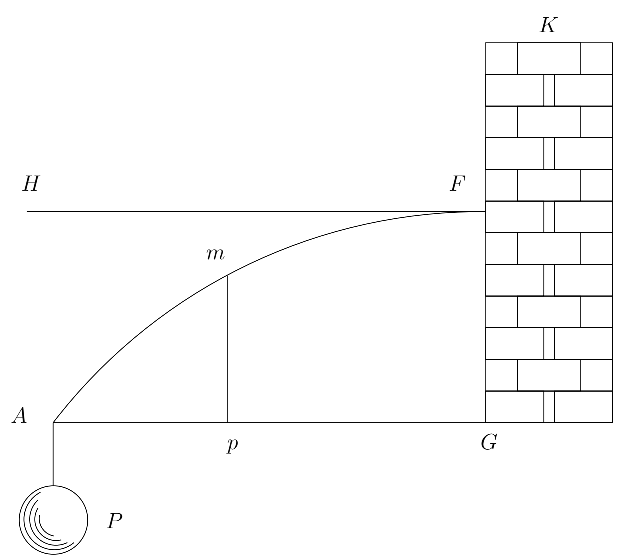

Fig. 14

Am anderen Ende H werde das nach Belieben genommene Gewicht P angebracht, mit welchem das Blech in den Zustand AF gekrümmt werde. Es sei die

Länge des Blechs $AF = HF = f$, die horizontale Gerade $AG = g$ und die vertikale Gerade $GF = h$, welche Werte alle durch das Experiment bekannt sein werden. Es werde nun diese Kurve mit der allgemeinen Gleichung verglichen

$$dy = \frac{(cc - aa - xx)dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}},$$

wenn in welcher a und c durch f, g, h bestimmt waren, wird die beugende Kraft $P = \frac{2Ekk}{aa}$ und daher die absolute Elastizität $Ekk = \frac{1}{2}Paa$ sein.

39. Weil nun die Tangente in F horizontal ist, wird hier $\frac{dy}{dx} = 0$ und daher $x = \sqrt{cc - aa}$ sein. Daher wird also gelten

$$AG = g = \sqrt{cc - aa} \quad \text{und} \quad aa = cc - gg$$

und daher

$$dy = \frac{(gg - xx)dx}{\sqrt{(cc - xx)(cc - 2gg + xx)}},$$

nachdem aber hier $x = g$ gesetzt wurde, wird $y = GF = h$ oder $s = AF = J$ sein müssen; es ist aber

$$ds = \frac{(cc - gg)dx}{\sqrt{(cc - xx)(cc - 2gg + xx)}}.$$

Wenn nun ein sehr kleines Gewicht P genommen wird, dass das Blech nur sehr wenig herabgedrückt wird, dann wird c eine sehr große Größe sein und daher wird näherungsweise sein

$$\frac{1}{\sqrt{(cc - xx)(cc - 2gg + xx)}} = (c^4 - 2ccgg + 2ggxx - x^4) - \frac{1}{2} = \frac{1}{cc} + \frac{gg}{c^4} - \frac{ggxx}{c^6} + \frac{x^4}{2c^6},$$

und daher durch Integrieren auch näherungsweise

$$s = \frac{(cc - gg)x}{cc} + \frac{(cc - gg)ggx}{c^4} - \frac{(cc - gg)ggx^3}{3c^6} + \frac{(cc - gg)x^5}{10c^6}$$

und

$$y = \frac{ggx}{cc} + \frac{g^4x}{c^4} - \frac{g^4x^3}{3c^6} + \frac{ggx^5}{10c^6} - \frac{x^3}{3cc} - \frac{ggx^3}{3c^4} + \frac{ggx^5}{5c^6} - \frac{x^7}{14c^6}.$$

Es sei nun $x = g$, und es wird werden

$$f = g - \frac{37g^5}{30c^4} \quad \text{und} \quad h = \frac{2g^3}{3cc} + \frac{2g^5}{3c^4}.$$

Wenn daher also die Gerade $FG = h$ benutzt wird, wird gelten

$$cc = \frac{2g^3}{3h} \quad \text{und} \quad aa = \frac{g(2gg - 3gh)}{3h},$$

woher die absolute Elastizität gefunden wird

$$Ekk = \frac{Pgg(2g - 3h)}{6h};$$

dieser Wert wird sich vom wahren aber kaum merklich unterscheiden, solange dem Blech nicht eine allzu große Krümmung beigefügt wird.

40. Diese absolute Elastizität Ekk hängt aber zuerst von der Natur des Materials ab, aus welchem das Blech gefertigt worden ist, woher das eine Material mehr, das andere weniger elastisch zu sein gesagt zu werden pflegt. Zweitens hängt sie auch von der Breite des Bleches ab, dass der Ausdruck Ekk überall der Breite des Blechs proportional sein muss, wenn alles übrige gleich ist. Drittens aber trägt die Dicke des Bleches sehr stark zur Bestimmung des Wertes von Ekk bei, welche so beschaffen zu sein scheint, dass, während alles übrige gleich ist, Ekk wie das Quadrat der Dicke ist. Zusammengenommen wird also der Ausdruck Ekk ein zusammengesetztes Verhältnis aus der Art des elastischen Materials, der Breite des Bleches zur einfachen Potenz und der Dicke des Bleches zur zweiten Potenz sein. Daher werden durch Experimente, in denen sich die Breite und die Dicke messen lässt, die Elastizitäten aller Materialien untereinander verglichen werden und bestimmt werden können.

ÜBER DIE KRÜMMUNG EINES UNGLEICH ELASTISCHEN BLECHES

41. Wie ich also bisher die absolute Elastizität des Bleches, dessen Krümmung ich bestimmt habe, Ekk durch die ganze Länge hindurch konstant festgelegt habe, so wird die Lösung mit derselben Methode durchgeführt werden können, wenn die Größe Ekk irgendwie variabel festgelegt wird. Natürlich, wenn die absolute Elastizität wie irgendeine Funktion des Bleches AM (Fig. 2) war, welche Funktion $= S$ sei, wird, nachdem der Bogen $AM = s$ gesetzt wurde und während der Krümmungsradius in $M = R$ ist, die Kurve AM, welche das Blech annimmt, so beschaffen sein, dass in ihr unter allen anderen derselben Länge $\int \frac{Sds}{RR}$ ein Minimum ist. Dieser Fall wird also durch die zweite allgemeine Formel aufgelöst. Es sei $dy = pdx$, $dp = qdx$, aber $dS = Tds$, und unter allen Kurven, in denen $\int dx\sqrt{1+pp}$ von derselben Größe ist, wird die bestimmt werden müssen, in welcher

$$\int \frac{Sqqdx}{(1+pp)^{5:2}}$$

ein Minimum ist. Die erste Formel $\int dx\sqrt{1+pp}$ gibt für die Differentialformel

$$\frac{1}{dx} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Die andere aber $\int \frac{Sqqdx}{(1+pp)^{5:2}}$ mit $\int Zdx$ verglichen wird geben

$$Z = \frac{Sqq}{(1+pp)^{5:2}}.$$

Weil also gesetzt wurde

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq, \quad \Pi = \int [Z]dx$$

und

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp,$$

wird gelten

$$Ld\Pi = \frac{qqTds}{(1+pp)^{5:2}},$$

woher ist

$$L = \frac{qqT}{(1+pp)^{5:2}}, \quad d\Pi = ds = dx\sqrt{1+pp}$$

und daher

$$[Z] = \sqrt{1+pp}, \quad [M] = 0, \quad [N] = 0 \quad \text{und} \quad [P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}.$$

Darauf aber ist

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = -\frac{5Sqqp}{(1+pp)^{7:2}} \quad \text{und} \quad Q = \frac{2Sq}{(1+pp)^{5:2}},$$

so dass gilt

$$dZ = \frac{qqdS}{(1+pp)^{5:2}} + Pdp + Qdq.$$

42. Nun nehme man das Integral

$$\int Ldx = \int \frac{qqTdx}{(1+pp)^{5:2}} = \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3}$$

und es sei H sein Wert, wenn $x = a$ gesetzt wird, die Betrachtung welcher Konstante a freilich bald völlig aus der Rechnung verschwinden wird. Es wird also gelten

$$V = H - \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3}.$$

Daher wird der Differentialwert werden

$$= -\frac{dP}{dx} - \frac{1}{dx} d \cdot [P]V + \frac{ddQ}{dx^2}.$$

Deswegen wird aus diesen zwei Differentialwerten diese Gleichung für die gesuchte Kurve entstehen

$$\frac{\alpha}{dx} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = +\frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \cdot [P]V - \frac{ddQ}{dx^2},$$

die integriert gibt

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{1+pp}} + \beta = P + [P]V - \frac{dQ}{dx}$$

oder

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{1+pp}} + \beta = \frac{Hp}{\sqrt{1+pp}} - \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3} + P - \frac{dQ}{dx},$$

wo die andernfalls bestimmte Konstante H in der beliebigen Konstante α erfasst werden kann, wodurch also die Konstante a aus der Rechnung herausgeht. Deshalb wird also diese Gleichung hervorgehen müssen

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{1+pp}} + \beta = P - \frac{dQ}{dx} - \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3}.$$

43. Diese Gleichung werde also mit $dp = qdx$ multipliziert und es wird hervorgehen:

$$\frac{\alpha pdp}{\sqrt{1+pp}} + \beta dp = Pdp - qdQ - \frac{pdp}{\sqrt{1+pp}} \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3}.$$

Weil aber gilt

$$dZ = \frac{qqdS}{(1+pp)^{5:2}} + Pdp + Qdq,$$

es wird sein

$$Pdp = dZ - Qdq - \frac{qqdS}{(1+pp)^{5:2}};$$

nach Einsetzen welches Wertes diese integrierbare Gleichung hervorgehen wird:

$$\frac{\alpha pdp}{\sqrt{1+pp}} + \beta dp = dZ - qdQ - Qdq - \frac{qqdS}{(1+pp)^{5:2}} - \frac{pdp}{\sqrt{1+pp}} \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3},$$

deren Integral ist:

$$\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma = Z - Qq - \sqrt{1+pp} \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3}$$

oder

$$\alpha\sqrt{1+pp} + \beta p + \gamma = -\frac{Sqq}{(1+pp)^{5:2}} - \sqrt{1+pp} \int \frac{qqdS}{(1+pp)^3}.$$

Um das Integralzeichen zu beseitigen, werde nach Division der Gleichung durch $\sqrt{1+pp}$ sie erneut differenziert:

$$\frac{\beta dp}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{\gamma pdp}{(1+pp)^{3:2}} + \frac{2qqdS}{(1+pp)^3} + \frac{2Sqdq}{(1+pp)^3} - \frac{6Spqqdp}{(1+pp)^4} = 0,$$

die mit $\frac{(1+pp)^{3:2}}{2q}$ multipliziert liefert:

$$\frac{\beta dp}{2q} - \frac{\gamma pdp}{2q} + \frac{qdS + Sdq}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{3Spqdp}{(1+pp)^{5:2}} = 0,$$

deren, wegen $dp = qdx$ et $dy = pdx$, Integral sein wird

$$\alpha + \frac{1}{2}\beta x - \frac{1}{2}\gamma y + \frac{Sq}{(1+pp)^{3:2}} = 0.$$

Aber es ist $-\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$ = dem Krümmungsradius R, woher, indem die Konstanten β und γ verdoppelt werden, diese Gleichung entstehen wird

$$\frac{S}{R} = \alpha + \beta x - \gamma y;$$

welche Gleichung wunderbar mit der übereinstimmt, welche die direkte Methode liefert. Es wird nämlich $\alpha + \beta x - \gamma y$ das Moment des krümmenden Potentials ausdrücken, nachdem irgendeine Gerade für die Achse angenommen wurde, welchem Moment natürlich die absolute Elastizität S durch den Krümmungsradius R geteilt gleich sein muss. So ist also nicht nur die beobachte Eigenschaft der hochgeehrten BERNOULLIS vollständigst aufgezeigt worden, sondern auch der sehr große Nutzen meiner sehr schweren Formeln in diesem Beispiel demonstriert worden.

44. Wenn also die Kurve (Fig. 3) gegeben war, welche das ungleichmäßig elastische Blech von dem Potential $CD = P$ beunruhigt bildet, wird daher die absolute Elastizität des Blechs in jedem Punkt bestimmt werden können. Nachdem nämlich die Gerade CP, die zur Richtung der wirkenden Kraft normal ist, für die Achse genommen wurde und $CP = x$, $PM = y$, der Kurvenbogen $AM = s$ und der Krümmungsradius in $M = R$ gesetzt wurden, wird wegen des Moments des Potentials P, das auf den Punkt M bezogen wurde, $= Px$ $\frac{S}{R} = Px$ sein; und daher ist die absolute Elastizität im Punkt M, die S ist, $= PRx$. Daher, weil, nachdem die Kurve gegeben worden ist, in den einzelnen Punkten auch der Krümmungsradius R gegeben ist, wird die absolute Elastizität an jeder Stelle bekannt. Wenn daher also das Material zusammen mit der Dicke überall dasselbe war, die Breite aber variabel ist, weil de absolute Elastizität der Breite proportional ist, wird aus der gebildeten Kurve die Breite des Bleches an den einzelnen Stellen berechnet.

45. Es sei aus dem elastischen Blech (Fig. 15) die dreieckige Zunge fAf überall derselben Dicke herausgeschnitten worden. Weil ja also die Breite mm an jeder Stelle M der Länge AM proportional ist, wird für $AM = s$ gesetzt die absolute Elastizität im M wie s sein. Es sei sie gleich Eks und dem Blech werde am Ende ff, das an einer Mauer horizontal befestigt wurde, an der Spitze A das Gewicht P angehängt, durch welches die Mittelgerade des Bleches AF (Fig. 14) zur Kurve Fma gekrümmt werde, deren Natur gesucht wird. Nachdem nämlich auf der horizontalen Achse die Abszisse $Ap = x$, die Ordinate $pm = y$ und der Bogen $Am = s$ gesetzt wurden, wird $Px = \frac{Eks}{R}$ sein, während R den Krümmungsradius in m bezeichnet. Diese Gleichung werde also mit dx multipliziert und wegen $R = -\frac{ds^3}{dxddy}$, für konstant gesetztes dx, wird gelten

$$Pxdx = -\frac{Eksdx^2ddy}{ds^2} \quad \text{oder} \quad \frac{Pxdx}{Ek} + \frac{sdx^2ddy}{ds^3} = 0.$$

Aber weil ist

$$d \cdot \frac{sdy}{ds} = \frac{sddy}{ds} - \frac{sdydds}{ds^2} + dy = \frac{sdx^2ddy}{ds^3} + dy$$

wegen $dds = \frac{dyddy}{ds}$, wird gelten

$$\int \frac{sdx^2ddy}{ds^3} = \frac{sdy}{ds} - y,$$

woher man durch Integrieren haben wird

$$\frac{Pxx}{2Ek} + a = -\frac{sdy}{ds} + y.$$

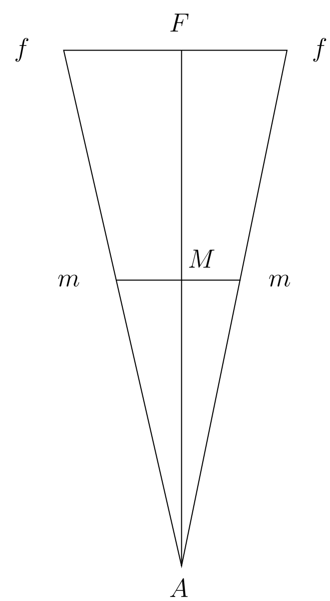

FIG. 15

46. Es sei $dy = pdx$, es wird $ds = dx\sqrt{1+pp}$ sein und für $\frac{2Ek}{P} = c$ gesetzt wird werden

$$a + \frac{xx}{c} = y - \frac{sp}{\sqrt{1+pp}};$$

und daher wird sein

$$\frac{a\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{xx\sqrt{1+pp}}{cp} = \frac{y\sqrt{1+pp}}{p} - s;$$

welche differenziert gibt

$$-\frac{adp}{pp\sqrt{1+pp}} + \frac{2xdx\sqrt{1+pp}}{cp} - \frac{xxdp}{cpp\sqrt{1+pp}}$$

$$= \frac{dy\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{ydp}{pp\sqrt{1+pp}} - dx\sqrt{1+pp} = -\frac{ydp}{pp\sqrt{1+pp}}.$$

Daher entsteht

$$a - y = \frac{2pxdx(1+pp)}{cdp} - \frac{xx}{c}.$$

es werde dp konstant gesetzt und durch Differenzieren wird sein

$$-pdx = \frac{2pxddx(1+pp)}{cdp} + \frac{2pdx^2(1+pp)}{cdp} + \frac{2xdx(1+3pp)}{c} - \frac{2xdx}{c}$$

oder

$$0 = cdxdp + 2xddx(1+pp) + 2dx^2(1+pp) + 6pxdxdp,$$

die weitere Auflösung welcher Gleichung nicht bekannt ist. Aber die einfachste Gleichung für eine Kurve ist diese

$$\frac{yds - sdy}{ds} = \frac{Pxx}{2Ek};$$

weil nämlich für $x = 0$ gesetzt sowohl y als auch s verschwinden müssen, muss die Konstante $a = 0$ sein.

ÜBER DIE KRÜMMUNG VON NATÜRLICH NICHT GERADEN ELASTISCHEN BLECHEN

47. Auf die gleiche Weise wird also die Krümmung eines entweder gleichmäßig oder ungleichmäßig elastischen Bleches bestimmt, wenn es von einem Potential beunruhigt wird, was besonders zu bemerken ist, wenn das Blech natürlich gerade ausgerichtet war. Wenn daher nämlich das Blech in seinem natürlichen Zustand schon eine Kurve war, dann wird es natürlich, von der wirkenden Kraft beeinflusst, eine andere Krümmung annehmen;

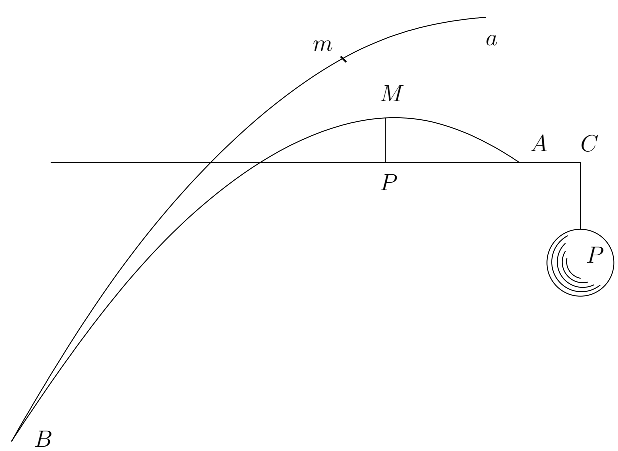

Fig. 16

um diese zu finden, muss außer der Wirkung und der Elastizität zugleich ihre natürliche Form bekannt sein. Es sei also das elastische Blech (Fig. 16) natürlicherweise die Kurve Bma, deren Elastizität freilich überall dieselbe $= Ekk$ sei, die von der wirkenden Kraft P zur Figur BMA gekrümmt werde. Durch A werde die Gerade CAP gezogen, die zur Richtung der wirkenden Kraft normal ist und die man für die Achse halte, und es sei das Intervall $AC = c$, die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = s$; es wird das Moment der wirkenden Kraft für den Punkt $M = P(c + x)$ sein.

48. Es sei weiter der Krümmungsradius der gesuchten Kurve in $M = r$, es werde im natürlichen Zustand der Bogen $am = AM = s$ genommen und es sei im Punkt m der Krümmungsradius $= r$, der wegen der bekannten Kurve amB durch den Bogen s gegeben sein wird. In M also, weil die Krümmung größer ist, ist der Krümmungsradius R kleiner als r und der Übertrag des elementaren Winkels in M über den Winkel im natürlichen Zustand wird $= \frac{ds}{R} - \frac{ds}{r}$ sein, welcher Übertrag ein vom wirkenden Potential erzeugter Effekt sein wird. Deswegen wird sein

$$P(c + x) = Ekk\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right),$$

welche, weil r durch s gegeben ist, die Gleichung für die gesuchte Kurve sein wird; diese kann aber so im Allgemeinen betrachtet nicht weiter reduziert werden.

49. Wir wollen festlegen, dass das Blech im natürlichen Zustand amB eine Kreisform hat; es wird r sein Radius der des Kreises sein, der $= a$ sei, woher wird

$$P(c + x) = Ekk\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right).$$

Diese Gleichung werde mit dx multipliziert und integriert; es wird entstehen

$$\frac{P}{Ekk}\left(\frac{1}{2}xx + cx + f\right) = -\frac{dy}{ds} - \frac{x}{a};$$

diese Gleichung, wenn anstelle von c $c + \frac{Ekk}{Pa}$ geschrieben wird, wird in diese übergehen

$$\frac{P}{Ekk}\left(\frac{1}{2}xx + cx + f\right) = -\frac{dy}{ds},$$

welche dieselbe Gleichung ist, die wir oben für das in natürlicher Weise gerade Blech gefunden haben. Ein in natürlicher Weise kreisförmiges Blech wird also zu denselben Kurven gekrümmt, die einem in natürlicher Weise geraden Blech beigefügt werden; es wird natürlich nur der Ort der Potentialanwendung oder das Intervall $AC = c$ für jeden der beiden Fälle nach einem gegebenen Gesetz variiert werden müssen. Es werden also die neun selben Gattungen von Kurven für die Formen hervorgehen, welche ein in natürlicher Weise kreisförmiges Blech annehmen kann, welche wir oben aufgezählt haben. Denn ein kreisförmiges Blech, wenn das Intervall AC unendlich genommen wird, kann zuerst zu einer geraden Linie ausgedehnt werden; dann wird irgendein Potential darüber hinaus angewandt dieselbe Wirkung haben, als wenn es allein auf ein in natürlicher Weise gerades Blech angewandt werden würde.

50. Wir wollen aber festlegen, was auch immer für eine natürliche Form das Blech hat, dass der Punkt C unendlich weit entfernt ist, so dass das Moment der

wirkenden Kraft überall dasselbe ist, was durch Ekk geteilt $= \frac{1}{b}$ gesetzt werde; und es wird sein

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{r}.$$

Daher wird gelten

$$\int \frac{ds}{R} = \frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r} = \text{ der Amplitude des Bogens } AM,$$

so wie $\int \frac{ds}{r}$ die Amplitude des Bogens am ausdrückt; wie freilich der hochgeehrte Johann Bernoulli diese Bezeichnung der Amplitude in seinem ausgezeichnetem Werk *De motu reptorio* zu gebrauchen pflegte. Es sei also $\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r}$ ein Bogen im Kreis, dessen Radius $= 1$ genommen wurde, der wegen des durch s gegebenen r auch in s bekannt sein wird. Daher werden aber orthogonale Koordinaten x und y gefunden werden, so dass gilt

$$x = \int ds \sin\left(\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r}\right) \quad \text{und} \quad y = \int ds \cos\left(\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r}\right);$$

woher die gesuchte Kurve durch Quadraturen konstruiert werden können wird.

51. Daher kann die Form amB (Fig. 17)

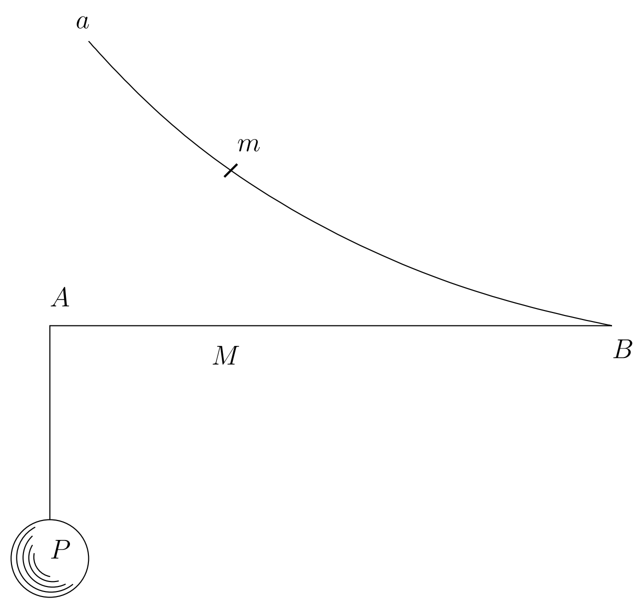

Fig. 17

bestimmt werden, welche das Blech in der natürlichen Position haben muss, dass es vom Potential P, das in Richtung AP wirkt, zur geraden Linie AMB gemacht wird. Nachdem nämlich die Länge $AM = s$ genommen wurde, wird das Moment des wirkenden Potentials für den Punkt $M = Ps$ sein; der Krümmungsradius in M aber, nach der Annahme, wird unendlich oder $\frac{1}{R} = 0$ sein.

Nachdem nun im natürlichen Zustand der Bogen $am = s$ genommen wurde und der Krümmungsradius in $m = r$ gesetzt worden ist, weil diese Kurve zur Gerade AB konvex ist, muss in der vorhergehenden Rechnung r negativ genommen werden. Daher wird gelten

$$Ps = \frac{Ekk}{r} \quad \text{oder} \quad rs = aa;$$

welche die Gleichung ist, die die Natur der Kurve amB erfasst.

52 . Weil also $\frac{1}{r} = \frac{s}{aa}$ ist, wird gelten

$$\int \frac{ds}{r} = \frac{ss}{2aa}$$

oder die Amplitude des Bogens am wird wie das Quadrat des Bogens sein. Daher werden die orthogonalen Koordinaten x und y für diese Kurve amB so bestimmt werden, dass gilt

$$x = \int ds \sin \frac{ss}{2aa} \quad \text{und} \quad y = \int ds \cos \frac{ss}{2aa}.$$

So muss im Kreis, dessen Radius $= 1$ ist, der Bogen $= \frac{ss}{2aa}$ abgetrennt werden, dessen Sinus und Kosinus, um die Koordinaten zu bestimmen, angenommen werden müssen. Daraus aber, weil der Krümmungsradius ununterbrochen schrumpft, je größer der Bogen $am = s$ genommen wird, ist klar, dass sich die Kurve nicht ins Unendliche erstreckt, auch wenn der Bogen s unendlich genommen wird. Die Kurve wird also aus der Art der Spiralen sein, sodass sie nach Durchlaufen unendlich vieler Spiralen in einem gewissen Punkt als Zentrum zusammengezogen wird, welcher Punkt aus dieser Konstruktion sehr schwer zu finden scheint. Es wird also zu glauben sein, dass die Analysis einen nicht geringen Zuwachs erfährt, wenn jemand eine Methode fände, mit deren Hilfe, zumindest näherungsweise, der Wert dieser Integrale

$$\int ds \sin \frac{ss}{2aa} \quad \text{et} \quad \int ds \cos \frac{ss}{2aa}.$$

im Fall angegeben werden könnte, in dem s unendlich gesetzt wird; dieses Problem scheint dessen nicht unwürdig, dass die Geometer daran ihre Kräfte erproben.

53. Es sei $2aa = bb$, und weil gilt

$$\sin \frac{ss}{bb} = \frac{s^2}{b^2} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3b^6} + \frac{s^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5b^{10}} - \frac{s^{14}}{1 \cdot 2 \ldots 7b^{14}} + \text{ etc.},$$
$$\cos \frac{ss}{bb} = 1 - \frac{s^4}{1 \cdot 2b^4} + \frac{s^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^8} - \frac{s^{12}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6b^{12}} + \text{ etc.},$$

werden die Koordinaten x und y der gesuchten Kurve angenehm durch unendliche Reihen ausgedrückt werden können, es wird nämlich gelten

$$x = \frac{s^3}{1 \cdot 3b^2} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7b^6} + \frac{s^{11}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11b^{10}} - \frac{s^{15}}{1 \cdot 2 \ldots 7 \cdot 15b^{14}} + \text{ etc.},$$
$$y = s - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 5b^4} + \frac{s^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9b^3} - \frac{s^{13}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6 \cdot 13b^{12}} + \text{ etc.},$$

aus welchen sehr stark konvergierenden Reihen, wenn nicht ein sehr großer Bogen s genommen wird, die Werte der Koordinaten x und y in der Tat näherungsweise hinreichend bequem bestimmt werden können. Aber Werte welcher Art x und y erhalten, wenn der Bogen s unendlich groß festgelegt wird, kann aus diesen Reihen auf keine Weise gefolgert werden.

54. Weil ja also die zu machende Festlegung des Unendlichen anstelle von s die größte Schwierigkeit bereitet, kann diesem Umstand freilich auf die folgende Weise entgegengewirkt werden. Es werde $\frac{ss}{bb} = v$ gesetzt, dass $s = b\sqrt{v}$, es wird $ds = \frac{bdv}{2\sqrt{v}}$ sein und es wird werden

$$x = \frac{b}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} \sin v \quad \text{und} y = \frac{b}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} \cos v.$$

Nun sage ich aber, dass die entsprechenden Werte für x und y, wenn $s = \infty$ gesetzt wird, aus diesen Integralformeln gefunden werden werden,

$$x = \frac{b}{2}\int dv \left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{\pi + v}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi + v}} - \frac{1}{\sqrt{3\pi + v}} + \text{ etc.}\right) \sin v,$$
$$y = \frac{b}{2}\int dv \left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{\pi + v}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi + v}} - \frac{1}{\sqrt{3\pi + v}} + \text{ etc.}\right) \cos v,$$

wenn nach der Integration $v = \pi$ gesetzt wird, während π einen zwei rechten gleichen Winkel bezeichnet. Auf diese Weise wird also zwar die Festlegung des Unendlichen vermieden, aber andererseits wird die unendliche Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{\pi + v}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi + v}} - \text{ etc.}$$

in die Rechnung eingeführt, weil deren Summe noch im Verborgenen liegt, ist eine Auflösung dieser Art noch der größten Schwierigkeit unterworfen.

ÜBER DIE KRÜMMUNG EINES IN DEN EINZELNEN PUNKTEN VON IRGENDWELCHEN KRÄFTEN BEUNRUHIGTEN ELASTISCHEN BLECHES

55. Nachdem nun die Methode angegeben worden ist, die Krümmung jedes elastischen Bleches zu finden, wenn es von einer Kraft, die an einer gegebenen Stelle ausgeübt wurde, beunruhigt wurde, wird es gefällig sein, auch die von mehreren, sogar unendlichen vielen, Potentialen dem elastischen Blech beigefügte Krümmung zu untersuchen. Weil ja aber noch nicht bekannt ist, ein Ausdruck von welcher Art in diesen Fällen maximal oder minimal sein wird, werde ich nur die direkte Methode gebrauchen, damit aus der Lösung selbst vielleicht die Eigenschaft gefunden werden kann, die maximal oder minimal ist. Es sei also das in natürlicher Weise gerade elastische Blech (Fig. 18) in den Zustand AmM gebracht worden, und dies zuerst von den endlichen Kräften P und Q, die gemäß der Richtungen CE und CF, die normal zueinander sind, wirken, dann aber von den einzelnen unendlich kleinen Kräften, die auf die Elemente $m\mu$ angewendet

worden sind und gemäß der Richtungen mp und mq, die jenen CE und CF parallel sind, ziehen; nach Festlegen von diesen wird die Natur der Kurve AmM verlangt, die dem Blech beigefügt wurde.

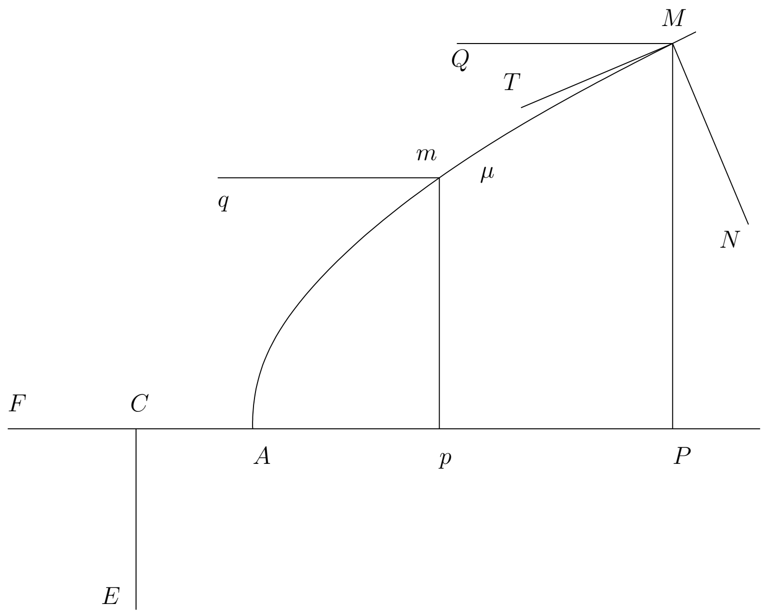

FIG. 18

56. Es werde die verlängerte Gerade FCA für die Achse genommen, $AC = c$ gesetzt und die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, der Kurvenbogen $AM = s$ und der Krümmungsradius in $M = R$ genannt. Es sei die konstante absolute Elastizität des Bleches $= Ekk$, und die Summe der Momente, die aus allen wirkenden Kräften in Anbetracht des Punktes M entstehen, muss gleich $\frac{Ekk}{R}$ sein. Zuerst entsteht freilich von der endlichen Kraft P, die in die Richtung CE zieht, das Moment $= P(c + x)$, das in die Richtung wirkt, in welcher die elastische Kraft ins Gleichgewicht gebracht wird. Aber das Moment, das aus der anderen Kraft Q entsteht, natürlich Qp, ist in die entgegengesetzte Richtung ausgerichtet, woher aus den endlichen Kräften P und Q zusammengenommen das Moment $P(c+x)-Qy$ entsteht. Nun werde ein Zwischenelement des Bleches $m\mu$ betrachtet, dessen entsprechende Abszisse $Ap = \zeta$ und Ordinate $pm = \eta$ gesetzt werde, es sei aber die Kraft, die das Element $m\mu$ in die Richtung $=$ dp zwingt und die in die es Richtung mq zwingende Kraft $= dq$; es wird das Moment, das aus diesem diesen Kräften für den Punkt M entsteht, sein

$$= (x - \zeta)dp - (y - \eta)dq.$$

57. Um also die Summe aller dieser Momente zu finden, müssen der Punkt M genauso wie x und y solange für Konstanten gehalten werden, während allein die Koordinaten ζ und η zusammen mit den Kräften dp und dq als Variablen betrachtet werden. Es wird also die Summe aller Momente, die von den Kräften,

die den Bogen Am beunruhigen, entstehen, diese sein

$$= xp - \int \zeta dp - yp + \int \eta dq,$$

wo p die Summe aller verschiedenen Kräfte, die den Bogen AM in den Ordinaten pm parallelen Richtungen beunruhigen, und q die Summe aller Kräfte, die den Bogen Am in der Achse Ap parallelen Richtungen beunruhigen, ausdrückt. Aber es ist

$$\int \zeta dp = \zeta p - \int p d\zeta \quad \text{et} \quad \int \eta dq = \eta q - \int q d\eta;$$

woher die Summe der Momente, die aus den auf den Bogen Am ausgeübten Kräften entstehen, wird

$$= (x - \zeta)p + \int p d\zeta - (y - \eta)q - \int q d\eta.$$

Es werde nun der Punkt m nach M vorwärts bewegt und es wird $\zeta = x$, $\eta = y$ und $d\zeta = dx$ und auch $d\eta = dy$ werden; daher wird die Summe aller Kräfte durch den ganzen Bogen AM hindurch genommen sein

$$= \int p dx - \int q dy.$$

Deshalb wird für die gesuchte Kurve diese Gleichung erhalten werden

$$\frac{Ekk}{R} = P(c + x) - Qy + \int p dx - \int q dy,$$

wo also p die Summe aller vertikalen Kräfte oder in den Richtungen der Ordinaten MP wirkenden Kräfte und q die Summe aller horizontalen oder in den Richtungen MQ, die der Achse AP parallel sind, wirkenden Kräfte durch den ganzen Bogen AM hindurch ausdrückt.

58. Wenn die Formeln pdx und qdy keine Integration zulassen, dann wird die gefundene Gleichung durch Differentiation von diesen Integralformeln befreit werden müssen, woher man diese Gleichung haben wird:

$$-\frac{EkkdR}{RR} = Pdx - Qdy + pdx - qdy.$$

Wenn aber weder p noch q durch endliche Ausdrücke dargeboten werden können, welche natürlich schon die Summen unendlich vieler unendlich kleiner Kräfte ausdrücken, dann werden durch eine weitere Differentiation die endlichen Werte p und q eliminiert werden müssen, dass nur die Werte dp und dq mit den Differenzen-Differentialen ddp und ddq vorhanden sind. Es wird aber nach der ersten Differentiation entstehen

$$-Ekkd \cdot \frac{dR}{RRdx} = dp - (Q + q)d \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} dq.$$

Es sei $\frac{dy}{dx} = \omega$, und es wird nach erneuter Differentiation der Gleichung sein:

$$-Ekkd \cdot \frac{d \cdot \frac{dR}{RRdx}}{d\omega} = d \cdot \frac{dp}{d\omega} - 2dq - \omega d \cdot \frac{dq}{d\omega},$$

welche Gleichung zur Differentialen vierter Ordnung aufsteigt.

59. Es seien an den einzelnen Punkten des Bleches, anstelle der vertikalen und horizontalen Potentiale p und q, M zwei Potentiale angewandt worden, das eine normale $MN = dv$ und das andere tangentiale $MT = dt$. Daher wird sein

$$dp = \frac{dxdv}{ds} + \frac{dydt}{ds} \quad \text{und} \quad dq = \frac{dxdt}{ds} - \frac{dydv}{ds}$$

und wegen $dy = \omega dx$ und $ds = dx\sqrt{1+\omega\omega}$ wird man haben

$$dp = \frac{dv}{\sqrt{1+\omega\omega}} + \frac{\omega dt}{\sqrt{1+\omega\omega}} \quad \text{und} \quad dq = \frac{dt}{\sqrt{1+\omega\omega}} - \frac{\omega dv}{\sqrt{1+\omega\omega}};$$

nachdem diese in der Gleichung des vorhergehenden Paragraphen eingesetzt worden sind, wird die folgende Gleichung hervorgehen

$$-Ekkd \cdot \frac{d \cdot \frac{dR}{RRdx}}{d\omega} = -\frac{dt}{\sqrt{1+\omega\omega}} + \frac{2\omega dv}{\sqrt{1+\omega\omega}} + \sqrt{1+\omega\omega}d \cdot \frac{dv}{d\omega},$$

die mit $\sqrt{1+\omega\omega}$ multipliziert integrierbar wird; nachdem nämlich der Kürze wegen $z = \frac{dR}{RRdx}$ gesetzt wurde, wird dieses Integral gefunden werden

$$\begin{aligned} A - t + \frac{dv(1+\omega\omega)}{d\omega} &= -Ekk\left(\frac{dz\sqrt{1+\omega\omega}}{d\omega} - \frac{\omega z}{\sqrt{1+\omega\omega}} + \frac{1}{2RR}\right) \\ &= -Ekk\left(\frac{1+\omega\omega}{d\omega}d \cdot \frac{dR}{RRdx\sqrt{1+\omega\omega}} + \frac{1}{2RR}\right). \end{aligned}$$

Weil aber gilt

$$R = -\frac{(1+\omega\omega)^{3:2}dx}{d\omega},$$

wird sein

$$d\omega = -\frac{(1+\omega\omega)^{3:2}dx}{R};$$

nach Einsetzen dieses Wertes anstelle von $d\omega$ wird man haben:

$$A - t - \frac{Rdv}{ds} = -Ekk\left(\frac{1}{2RR} - \frac{R}{ds}d \cdot \frac{dR}{RRds}\right),$$

wegen $dx\sqrt{1+\omega\omega} = ds$. Deshalb wird nach Ordnen der Gleichung für die gesuchte Kurve diese Gleichung hervorgehen

$$t + \frac{Rdv}{ds} - A = Ekk\left(\frac{1}{2RR} - \frac{R}{ds}d \cdot \frac{dR}{RRds}\right).$$

60. Zuerst ist freilich klar, wenn die elastische Kraft Ekk verschwindet, dass das Blech in einen vollkommen beweglichen Faden verwandelt wird; und daher sind in diesen Gleichungen alle Kurven enthalten, welche ein vollkommen beweglicher Faden von irgendwelchen Kräften beunruhigt bilden kann. Wenn so beispielsweise der Faden nur vom eigenen Gewicht nach unten gezwungen wird, wird $q = 0$ sein und p wird das Gewicht des Seils AM ausdrücken. Und es wird daher $\frac{pdx}{dy} = Q =$ einer Konstanten sein, nachdem $P = 0$ gesetzt wurde, welches die allgemeine Gleichung für Kettenlinien jeder Art ist. Wenn aber der vollkommen bewegliche Faden in den einzelnen Punkten von den Kräften, deren Richtungen zur Kurve selbst normal sind, beunruhigt wird, so dass im Punkt M der Faden gemäß der Richtung MN mit der Kraft $= dv$ beunruhigt wird, wird wegen $t = 0$ $\frac{Rdv}{ds} = A =$ einer Konstante sein, welches die Eigenschaft von Muldenkurven ist und allen ist, in denen Kraftwirkungen dieser Art auftreten.

ÜBER DIE KRÜMMUNG EINES ELASTISCHEN BLECHES, DIE AUS DEM EIGENGEWICHT ENTSTEHT

61. Ich kehre aber zu elastischen Blechen zurück, über welche sich bald diese in Bezug auf die übrigen bemerkenswerte Frage auftut, eine Form welcher Art ein elastisches Blech von seinem eigenen Gewicht gekrümmt annimmt. Es sei AmM diese Kurve, die gesucht wird, und weil allein die aus der Schwerkraft entstehenden vertikalen Kräfte wirken, wird $P = 0$, $Q = 0$, $q = 0$ werden und p wird das Gewicht des Bleches AM ausdrücken. Daher, wenn F das Gewicht des Bleches der Länge a ist, weil ein gleichmäßiges Blech angenommen wird, wird $p = \frac{Fs}{a}$ sein; daher wird die Natur der Kurve mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$-\frac{EkkdR}{RR} = \frac{Fsdx}{a}.$$

Es sei die Amplitude der Kurve $\int \frac{ds}{R} = u$, es wird $R = \frac{ds}{du}$ und $dx = ds \sin u$ sein; daher wird für konstant genommenes Element ds diese Gleichung gefunden werden

$$sds \sin u + \frac{Eakk}{F} \cdot \frac{ddu}{ds} = 0,$$

die aber, wie auf den ersten Blick klar ist, nicht weiter reduziert werden kann.

62. Besonders verdient aber die Kurve bemerkt zu werden, welche ein Fluid gleichsam unendlicher Höhe dem elastischen Blech aufzwingt. Es sei (Fig. 19) AMB diese Form, die gesucht wird, und für $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ gesetzt wird das Element Mm in die normale Richtung MN von einer ds proportionalen Kraft gezwungen werden;

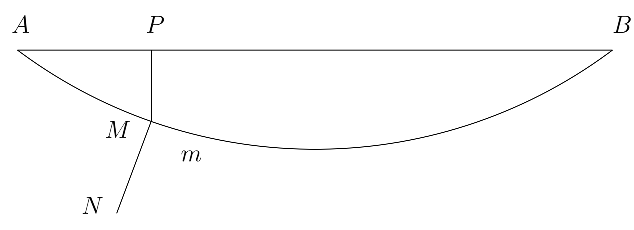

Fig. 19

daher wird $dv = nds$ und $dt = 0$ sein. Daher wird die vertikale Kraft $dp = ndx$ und die horizontale Kraft $dq = -ndy$ entstehen; aus diesen wird sofort $P = nx$ und $q = -ny$; und daher wird in der ersten Gleichung werden

$$\frac{Ekk}{R} = P(c+x) - Qy + \frac{1}{2}nxx + \frac{1}{2}nyy.$$

Die Koordinaten x und y können aber um konstante Größen so vermehrt oder vermindert werden, dass die Gleichung für die Kurve eine Gestalt dieser Art erhält $xx + yy = A + \frac{B}{R}$. wenn diese Gleichung aber mit $xdx + ydy$ multipliziert wird, wird sie integrierbar werden; denn es ist

$$\int \frac{xdx + ydy}{R} = -\int \frac{x + y\omega}{(1+\omega\omega)^{3:2}} d\omega \quad \text{[nach Setzen von } dy = \omega dx\text{]}$$
$$= \frac{y - \omega x}{\sqrt{1+\omega\omega}} = \frac{ydx - xdy}{ds}.$$

Dieser Sache wegen, nachdem nach der Integration die Konstanten geändert worden sind, wird hervorgehen

$$(xx + yy)^2 = A(xx + yy) + \frac{B(ydx - xdy}{ds} + C.$$

Es sei $\sqrt{xx + yy} = z$ und $y = uz$, es wird $x = z\sqrt{1 - uu}$ sein; daher ist

$$ydx - xdy = -\frac{zzdu}{\sqrt{1-uu}} \quad \text{und} \quad ds = \sqrt{dz^2 + \frac{zzdu^2}{1-uu}}.$$

Also wird für $\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = dr$ gesetzt sein

$$z^4 - Az^2 - C = -\frac{Bzzdr}{\sqrt{dz^2 + zzdr^2}};$$

und daher

$$dr = \frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{dz(z^4 - Az^2 - C)}{z\sqrt{B^2zz - (z^4 - Az^2 - C)^2}}.$$

Diese Kurve also, wenn $A = 0$ und $C = 0$ war, wird algebraisch sein; man wird nämlich diese Gleichung haben

$$\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{zzdz}{\sqrt{B^2 - z^6}} = \frac{3zzdz}{3\sqrt{a^6 - z^6}},$$

die integriert gibt

$$A\sin u = \frac{1}{3}A\sin\frac{z^3}{a^3} \quad \text{oder} \quad \frac{z^3}{a^3} = 3u - 4u^3 = \frac{3y}{z} - \frac{4y^3}{z^3};$$

woher diese Gleichung $z^6 = 3a^3yzz - 4a^3y^3$ oder wegen $zz = xx + yy$ diese resultiert

$$x^6 + 3x^4y^2 + 3xxy^4 + y^6 = 3a^3xxy - a^3y^3.$$

ÜBER DIE OSZILLATORISCHE BEWEGUNG ELASTISCHER BLECHE

63. Aus diesen Dingen kann auch die oszillatorische Bewegung wie auch immer in Bewegung gebrachter elastischer Bleche bestimmt werden, welchen wahrlich äußerst interessanten Gegenstand zuerst der hochgeehrte Herr DANIEL BERNOULLI zu entwickeln begonnen hat und mir schon vor vielen Jahren das Problem über die Bestimmung der Schwingungen eines elastischen Bleches, das an dem einen Ende an einer soliden Wand angebracht worden ist, vorgelegt hat, dessen Lösung ich in den Comment. Petropol. Tomo VII dargeboten habe. In dieser Zeit gelang es sowohl mir diese Problem angenehm zu behandeln, als auch sind durch den Briefverkehr mit den hochgeehrten Herren BERNOULLI viele andere Fragen und Betrachtungen hinzugekommen, deren Aufklärung ich wegen der Affinität der Materie hier hinzufügen möchte. Wann immer aber eine vibratorische Bewegung hinreichend schnell ist, dann wird zugleich vom vibrierenden Blech ein Klang erzeugt, dessen Verlauf und Relation zu anderen mit Hilfe der Lehre über Klänge aus diesen Prinzipien bestimmt werden wird. Und weil ja die Gestalt der Töne sehr leicht auf Experimente zurückgeführt wird, wird mit diesem selbst die Übereinstimmung der Rechnung untersucht werden und daher die Theorie bestätigt werden können; auf diese Weise wird unsere Erkenntnis über die Natur von elastischen Körpern nicht unwesentlich erweitert werden.

64. Zuerst ist aber zu ermahnen, dass hier nur über minimale Schwingungen gefragt wird und daher das Intervall, durch welches das Blech beim Schwingen hindurchläuft, quasi unendlich klein ist. Und durch diese Einschränkung wird der Gebrauch und die Anwendungsfähigkeit in keinster Weise geschmälert; denn nicht nur würden Schwingungen, wenn die durch größere Räume hindurch geschehen würden, dem Isochronismus entbehren, sondern auch die Bildung verschiedener Klänge, auf welche wir hier hauptsächlich schauen, verlangt minimale Schwingungen. Ich werde also hier zuerst ein gleichmäßiges in natürlicher Weise gerades Blech betrachten (Fig. 20), dessen eines Ende B an einer soliden Wand fest angebracht worden sei, so dass das Blech sich selbst überlassen die gerade Lage AB hat. Es sei die Länge dieses Bleches $AB = a$ und seine absolute Elastizität an den einzelnen Stellen $= Ekk$; sein Gewicht werden wir aber entweder nicht mit einbeziehen oder eine Befestigung solcher Art festsetzen, dass sein Zustand von der Schwerkraft nicht beeinflusst werden kann.

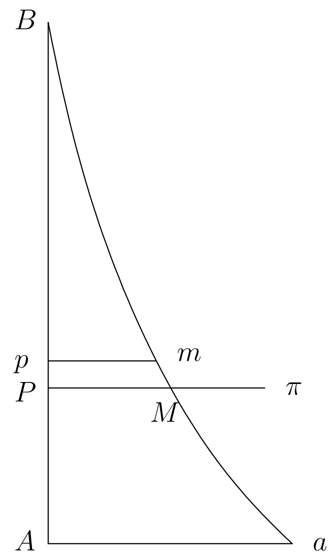

Fig. 20

ÜBER SCHWINGUNGEN EINES AN EINEM ENDE AN EINER MAUER ANGEBRACHTEN ELASTISCHEN BLECHES

65. Nun führe diese Blech von irgendeiner Kraft angeregt sehr kleine Vibrationen um den natürlichen Zustand BA nach beiden Seiten aus, indem es durch sehr kleine Intervalle Aa hindruchläuft. Und es sei BMa ein gewisser Zustand, welchen das Blech beim Schwingen einnimmt; weil dieser ja nur unendlich wenig vom natürlichen Zustand BPA, der Gerade MP, entfernt ist, werden Aa zugleich die Wege darstellen, welche die Punkte M und a des Bleches durchlaufen, oder besser, diese Geraden werden zu den wahren Wegen ein Verhältnis haben, dass vom Verhältnis der Gleichheit nur unendlich wenig abweicht. Um aber die oszillatorische Bewegung zu bestimmen, ist es absolut notwendig, die Natur der Kurve BMa, welche das Blech beim Schwingen annimmt, zu kennen. Es sei also $AP = x$, $PM = y$, der Bogen $aM = s$ und der Krümmungsradius in $M = R$ und das sehr kleine Intervall $Aa = b$; und aus der erwähnten Bedingung wird der Bogen s näherungsweise der Abszisse x gleich sein, und daher wird für ds dx genommen werden können; in Bezug auf dx wird nämlich dy verschwinden. Und weil für konstant gesetztes dx der Krümmungsradius ist

$$= \frac{ds^3}{dxddy},$$

wird im gegenwärtigen Fall $R = \frac{dx^2}{ddy}$ sein; denn die Kurve BMa ist zur Achse BA konvex und, weil das Blech in B fest an der Mauer angebracht worden ist, wird die Gerade AB die Tangente der Kurve im Punkt B sein.

66.Nachdem diese Sachen festgelegt worden sind, um so die Natur Kurve BMa wie die oszillatorische Bewegung selbst zu bestimmen, sei f die Länge eines einfachen isochronen Pendels; dass nämlich die minimalen Schwingungen isochron sein müssen, zeigt sowohl die Natur der Sache auf, als auch wird die durchzuführende Rechnung es zeigen. Die Beschleunigung also, mit welcher der Punkt M zum Punkt P gezwungen werden wird, wird $= \frac{PM}{f} = \frac{y}{f}$ sein. Daher, wenn die Masse des ganzen Bleches $= M$ gesetzt wird, die durch sein Gewicht ausgedrückt wird, wird die Masse des Elements $Mm = ds = dx = \frac{Mdx}{a}$ sein; und so werden die Kräfte, mit den die einzelnen Stücke des Bleches in Bewegung gebracht werden, sowohl aus der Kurve BMa, als auch aus der Länge des einfaches isochronen Pendels f bekannt werden. Weil ja aber das elastische Blech in Wirklichkeit von der elastischen Kraft zur Bewegung angeregt wird, wird aus dieser bekannt gewordenen umgekehrt die Natur der Kurve NMa und die Länge des einfachen isochronen Pendels bestimmt werden können.

67. Weil ja alo das Blech genauso bewegt wird, als wenn auf die einzelnen Elemente Mm desselbigen in der Richtung MP die Kräfte $= \frac{Mydx}{af}$ ausgeübt worden wären, folgt, wenn auf die einzelnen Elemente des Bleches Mm in entgegengesetzten Richtungen $M\pi$ die gleichen Kräfte $\frac{Mydx}{af}$ ausgeübt werden würden, dass das Blech sich im Zustand BMa im Gleichgewicht befindet. Daher wird das Blech beim Schwingen dieselbe Krümmung annehmen, als wenn es ruhig wäre, wenn es in den einzelnen Punkten M von den Kräften $\frac{Mydx}{af}$ in den Richtungen $M\pi$ beunruhigt werden würde. Durch die oben in Paragraph 56 gefundene Regel werden also alle diese ausgeübten Kräfte durch den Bogen am hindurch gesammelt, und es wird die Summe hervorgehen

$$= \frac{M}{af} \int ydx,$$

welche dort anstelle von p eingesetzt werden muss. Daher, weil die übrigen Kräfte P, Q und q, die man dort hatte, verschwinden, wird die Natur der Kurve mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$\frac{Ekk}{R} = \int pdx,$$

woher man haben wird

$$\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af} \int dx \int ydx.$$

Weil aber $R = \frac{dx^2}{ddy}$ ist, wird sein

$$\frac{Ekkddy}{dx^2} = \frac{M}{af} \int dx \int ydx$$

und durch Differenzieren

$$\frac{Ekkd^3y}{dx^2} = \frac{Mdx}{af} \int ydx$$

und durch erneutes Differenzieren wird schließlich diese Differentialgleichung vierter Ordnung hervorgehen

$$Ekkd^4y = \frac{Mydx^4}{af}.$$

68. Mit dieser Gleichung wird also sowohl die Natur der Kurve BMa ausgedrückt als auch wird aus derselben, wenn sie an den sich ergebenden Fall angepasst wird, die Länge f bestimmt werden; nach Bekanntwerden von dieser wird zugleich die oszillatorische Bewegung selbst bestimmt werden. Vor allem Allem muss aber diese Gleichung integriert werden; weil diese sich auf auf die Art von höheren Differentialgleichung bezieht, deren allgemeine Integration ich in Miscell. Berol. Volumine VII dargeboten habe, wird daher die folgende Integralgleichung gefunden werden, indem der Kürze wegen also $\frac{Ekk \cdot af}{M} = c^4$ gesetzt wird; es wird natürlich hervorgehen

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\sin\frac{x}{c} + D\cos\frac{x}{c},$$

wo e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, und $\sin\frac{x}{c}$ und $\cos\frac{x}{c}$ den Sinus und Kosinus des Bogens $= \frac{x}{c}$ bezeichnen, der im Kreis, dessen Radius $= 1$ ist, angenommen wurde. Dann aber sind A, B, C und D vier beliebige Konstanten, die durch Integration eingegangen sind und welche aus der Anpassung der Rechnung an den gegenwärtigen Fall bestimmt werden müssen.

69. Aber die Bestimmung der Konstanten wird auf die folgende Weise unternommen werden. Zuerst muss nämlich für $x = 0$ $y = b$ werden; daher entsteht also diese Gleichung $b = A + B + D$, welche die erste ist.

Zweitens, weil gilt

$$\frac{c^4ddy}{dx^2} = \int dx \int ydx,$$

muss für $x = 0$ gesetzt $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ werden, aber es ist

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{A}{cc}e^{\frac{x}{c}} + \frac{B}{cc}e^{-\frac{x}{c}} - \frac{C}{cc}\sin\frac{x}{c} - \frac{D}{cc}\cos\frac{x}{cc},$$

woher diese zweite Gleichung entsteht $0 = A + B - D$.

Drittens, weil gilt

$$\frac{c^4d^3y}{dx^3} = \int ydx,$$

muss für $x = 0$ gesetzt $\frac{d^3y}{dx^3}$ verschwinden; weil also sein wird

$$\frac{c^3d^3y}{dx^3} = Ae^{\frac{x}{c}} - Be^{-\frac{x}{c}} - C\cos\frac{x}{c} + D\sin\frac{x}{c},$$

geht die dritte Gleichung hervor $0 = A - B - C$.

Viertens aber, wenn $x = a$ gesetzt wird, verschwindet die Ordinate y, woher diese vierte Gleichung erhalten werden wird

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + C\sin\frac{a}{c} + D\cos\frac{a}{c}.$$

Fünftens, weil AB die Tangente der Kurve im Punkt B ist, muss für $x = a$ gesetzt $\frac{dy}{dx} = 0$ werden; daher geht die fünfte Gleichung hervor

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} + C\cos\frac{a}{c} - D\sin\frac{a}{c}.$$

Aus diesen fünf Gleichungen werden also zuerst die vier Konstanten A, B, C, D bestimmt werden; dann aber, worin der Kern der Sache liegt, wird der nachstehende Wert bestimmt werden

$$c = \sqrt[4]{\frac{Ekk \cdot af}{M}};$$

daher wird Länge des einfachen isochronen Pendels f gefunden werden, wodurch wiederum die Dauer der Schwingungen erkannt werden wird.

70. Aus der zweiten und dritten Gleichung werden die Konstanten C und D aus A und B so bestimmt werden, dass gilt

$$C = A - B \quad \text{und} \quad D = A + B,$$

welche Werte in der vierten und fünften Gleichung eingesetzt geben werden

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + (A - B)\sin\frac{a}{c} + (A + B)\cos\frac{a}{c},$$

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} + (A - B)\cos\frac{a}{c} - (A + B)\sin\frac{a}{c};$$

aus welchen man findet

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-\frac{a}{c}} + \sin\frac{a}{c} - \cos\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} + \sin\frac{a}{c} + \cos\frac{a}{c}} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} + \cos\frac{a}{c} + \sin\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} + \cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c}},$$

woher diese Gleichung erhalten werden wird

$$0 = 2 + \left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right)\cos\frac{a}{c}$$

oder

$$e^{\frac{2a}{c}}\cos\frac{a}{c} + 2e^{\frac{a}{c}} + \cos\frac{a}{c} = 0,$$

die gibt

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{-1 \pm \sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}}.$$

Weil also $e^{\frac{a}{c}}$ eine positive Größe ist, wird der Kosinus des Winkels $\frac{a}{c}$ negativ sein und daher der Winkel $\frac{a}{c}$ größer als der rechte.

71. Aus dieser Gleichung wird eingesehen, dass unendlich viele dem Geforderten genügende Winkel $\frac{a}{c}$ gegeben sind, aus welchen unendlich vielen verschiedene Arten an Schwingungen desselben Bleches entstehen. Die Kurve kann nämlich in einem oder mehreren Punkten die Achse AB schneiden, bevor es die Achse in B berührt; daher sind mehrere, sogar unendlich viele, Schwingungsarten desselben elastischen Bleches möglich. Weil wir also hier besonders den Fall betrachten, in dem B der erste Punkt ist, wo das Blech von der Achse AB berührt wird, wird diesem Fall der kleinste Winkel $\frac{a}{c}$ genügen, der die gefundene Gleichung auflöst; weil dieser Winkel größer als ein rechter ist, werde $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi + \phi$ gesetzt, während ϕ einen kleineren Winkel als den rechten bezeichnet. Daher wird wegen $\sin\frac{a}{c} = \cos\phi$ und $\cos\frac{a}{c} = -\sin\phi$ diese zweifache Gleichung erhalten werden

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \mp \cos\phi}{\sin\phi},$$

die entweder $e^{\frac{a}{c}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi$ oder $e^{\frac{a}{c}} = \cot\frac{1}{2}\phi$ liefert, deren zweite den kleineren Wert für den Winkel ϕ geben wird, die also an den vorgelegten Fall angepasst sein wird.

72. Die folgenden möglichen Arten an Schwingungen werden aber gefunden werden, wenn für $\frac{a}{c}$ größere Winkel als zwei rechte, aber kleiner als drei rechte festgelegt werden. So wird für $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi - \phi$ gesetzt gelten

$$\sin\frac{a}{c} = -\cos\phi \quad \text{und} \quad \cos\frac{a}{c} = -\sin\phi;$$

woher wird

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 + \cos\phi}{\sin\phi} \quad \text{oder entweder} \quad e^{\frac{a}{c}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi \quad \text{oder} \quad e^{\frac{a}{c}} = \cot\frac{1}{2}\phi.$$

Auf die gleiche Weise werden andere Schwingungsarten gefunden werden, indem Nachfolgendes festgelegt wird

$$\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi + \phi; \quad \frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi - \phi \text{ etc.}$$

Aus all diesen, wenn hyperbolische Logarithmen genommen werden, werden die folgenden Gleichungen gefunden werden:

$$\begin{array}{rlrl}
\text{I.} & \frac{1}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi & \text{II.} & \frac{1}{2}\pi + \phi = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi \\
\text{III.} & \frac{3}{2}\pi - \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi & \text{IV.} & \frac{3}{2}\pi - \phi = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi \\
\text{V.} & \frac{5}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi & \text{VI.} & \frac{5}{2}\pi + \phi = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi \\
\text{VII.} & \frac{7}{2}\pi - \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi & \text{VIII.} & \frac{7}{2}\pi - \phi = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi
\end{array}$$

etc.

Aber die dritte dieser Gleichungen stimmt mit der zweiten überein; denn für $\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$ gesetzt, dass $\cot\frac{1}{2}\phi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ ist, geht die dritte in $\frac{1}{2}\pi + \theta = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ über, welches die zweite selbst ist. Auf die gleiche Weise stimmt die vierte mit der ersten überein, dann stimmen die fünfte und die achte miteinander überein und die sechste mit er siebten. Deswegen werden die folgenden verschiedenen Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & \frac{1}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\
\text{II.} & \frac{1}{2}\pi + \phi = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi \\
\text{III.} & \frac{5}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\
\text{IV.} & \frac{5}{2}\pi + \phi = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi \\
\text{V.} & \frac{9}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\
\text{VI.} & \frac{9}{2}\pi + \phi = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi \\
& \text{etc.}
\end{array}$$

72. Aber der hyperbolische Logarithmus eines Tangens oder Kotangens eines gewissen Winkels wird gefunden werden, indem der tabellierte Logarithmus genommen wird und davon der Logarithmus des ganzen Sinus weggenommen wird und der Rest mit $2,302585092994$ multipliziert wird; damit diese Arbeit erleichtert wird, wird es gefällig sein, erneut Logarithmen zu benutzen. Es sei u der hyperbolische Logarithmus des Tangens oder des Kotangens des Winkels $\frac{1}{2}\phi$, der gesucht wird; es werde aus Tabellen der Logarithmus desselben Tangens oder Kotangens genommen, der um den Logarithmus des ganzen Sinus vermindert $= v$ gesetzt werde. Weil also $u = 2,302585092994 \cdot v$ gesetzt wird, wird durch Nehmen gewöhnlicher Logarithmen gelten

$$lu = lv + 0,3622156886.$$

Nachdem dieser Logarithmus gefunden wurde, weil $u = \frac{n}{2}\pi + \phi$ ist, wird gelten

$$lu = l\left(\frac{n}{2}\pi + \phi\right).$$

Um dies zu entwickeln, muss der Winkel ϕ in Teilen des Radius ausgedrückt werden, wie auch π auf dieselbe Weise ausgedrückt wird, während $\pi = 3,1415926535$ und deshalb $\frac{1}{2}\pi = 1,57079632679$ ist. Der Winkel ϕ wird aber auf dieselbe Weise ausgedrückt werden, wenn er in Minutensekunden verwandelt wird und vom Logarithmus dieser Zahl beständig $5,3144251332$ abgezogen wird; so wird nämlich $l\phi$ hervorgehen, aus welcher, indem zu Zahlen zurückgegangen wird, der Wert von ϕ gefunden wird. Es wird aber beständig für irgendeine Art von Schwingungen gelten

$$\frac{a}{c} = u = \frac{n}{2}\pi + \phi.$$

74. Nachdem diese Sachen über die zu unternehmende Rechnung erwähnt worden sind, wird durch Approximationen der Wert des Winkels ϕ für jede Art an Schwingungen nicht schwer gefunden werden. Indem nämlich nach Belieben ϕ einige Werte zugeteilt werden und durch Rechnung sowohl $\frac{n}{2}\pi + \phi$ als auch $l\,{}^{\text{tang}}_{\text{cot}}\,\frac{1}{2}\phi$ bestimmt werden, wird bald der fast wahre Wert von ϕ erkannt werden. Wenn man daher aber wie weit auch immer entfernte Grenzen des Winkels ϕ hat, werden sofort nähere Grenzen und aus diesen schließlich der wahre Wert von ϕ gefunden werden. So habe ich für die erste Gleichung

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi$$

die folgenden Grenzen des Winkels ϕ gefunden $17°26'$ und $17°27'$, aus welchen durch die folgende Rechnung der wahre Wert von ϕ erhalten werden wird:

ϕ	=	$17°26'0''$	$17°27'0''$
in min. sec.	=	$62760''$	$62820''$
log.	=	4,7976829349	4,7980979321
subtr.		5,3144251332	5,3144251332
$l\phi$	=	9,4832578017	9,4836727989
ϕ	=	0,3042690662	0,3045599545
$\frac{1}{2}\pi$	=	1,5707963268	1,5707963268
$\frac{1}{2}\pi + \phi$	=	1,8750653930	1,8753562813
$\frac{1}{2}\phi$	=	$8°43'0''$	$8°43'30''$
$l\cot.\frac{1}{2}\phi$	=	10,8144034109	10,8139819342
v	=	0,8144034109	0,8139819342
lv	=	9,9108395839	9,9106147660
add.	=	0,3622156886	0,3622156886
lu	=	0,2730552725	0,2728304546
u	=	1,8752331540	1,8742626675
Diff.		+ 1677610	-10936138

Aus diesen Fehlern jeder der beiden Grenzen wird also gefolgert, dass gelten wid

$$\phi = 17°26'7''\frac{98}{100} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\pi + \phi \quad \text{oder} \quad \frac{a}{c} = 107°26'7''\frac{98}{100}.$$

Weil aber in Minutensekunden $\phi = 62767,98$ ist, wird gelten

$l\phi$	=	4,7977381525
subtr.	=	5,3144251332
		9,4833130193
ergo ϕ	=	0,3043077 545
add. $\frac{1}{2}\pi$	=	1,5707963268
$\frac{a}{c}$	=	1,8751040813

nach Finden von welchem sein wird

$$\frac{A}{B} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi = 0,1533390624.$$

Es wird also das Verhältnis der Konstanten A und B gefunden, aus welchem auch das Verhältnis der übrigen Konstanten C und D zu jenen erkannt werden wird.

75. Es ist noch die erste Gleichung $b = A+B+D$ übrig, die wegen $D = A+B$ in $b = 2A+2B$ übergeht; und daher ist $A+B = \frac{1}{2}b$; weil also $\frac{A}{B} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi$, ist, wird werden

$$B(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi) = \frac{1}{2}b \quad \text{und} \quad B = \frac{b}{2+2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi}.$$

Woher aus $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi = 0,1533390624$ die einzelnen Konstanten der Gleichung auf die folgende Weise bestimmt werden werden:

$$\begin{aligned}
\frac{A}{b} &= \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi}{2(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi)} = \frac{0,533390624}{2,3066781248}\\
\frac{B}{b} &= \frac{1}{2(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi)} = \frac{1,0000000000}{2,3066781248}\\
\frac{C}{b} &= \frac{-1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi}{2(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi)} = -\frac{0,8466609376}{2,3066781248}\\
\frac{D}{b} &= \frac{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi}{2(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi)} = -\frac{1,1533390624}{2,3066781248}
\end{aligned}$$

nach Finden von welchen die Natur der Kurve aMB, welche das Blech beim Schwingen annimmt, mit dieser Gleichung ausgedrückt werden wird

$$\frac{y}{b} = \frac{A}{b}e^{\frac{x}{c}} + \frac{B}{b}e^{-\frac{x}{c}} + \frac{C}{b}\sin\frac{x}{c} + \frac{D}{b}\cos\frac{x}{c}.$$

76. Was aber die Geschwindigkeit der Schwingungen betrifft, wird sie aus der Gleichung $\frac{a}{c} = 1,8751040813$ erkannt werden. Es werde der Kürze wegen $n = 1,8751040813$ gesetzt, dass $a = nc$ ist.

Und weil $c^4 = \frac{Ekk\cdot af}{M}$ ist, wo $\frac{M}{a}$ die spezifische Schwere des Bleches und Ekk die absolute Elastizität des Bleches ausdrückt, wird auf die Weise, die wir bisher benutzt haben, sein

$$a^4 = n^4\cdot Ekk\cdot\frac{a}{M}\cdot f \quad \text{und daher} \quad f = \frac{a^4}{n^4}\cdot\frac{1}{Ekk}\cdot\frac{M}{a},$$

woher die Länge des einfachen isochronen Pendels ein zusammengesetztes Verhältnis aus der vierten Potenz der Länge des Bleches, der einfachen Potenz der spezifischen Schwere und der inversen ersten Potenz der absoluten Elastizität haben wird. Es sei g die Länge des einfachen Pendels, das in Minutensekunden schwingt, sodass $g = 3,16625$ Rheinische Fuß sind; weil die Dauer in einem

Quadratwurzelverhältnis zur Länge der Pendels ist, wird die Zeit einer einzigen von unserem elastischen Blech ausgeführten Schwingung diese sein

$$= \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}} \text{ secund. } = \frac{aa}{nn}\sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{1}{Ekk} \cdot \frac{M}{a};$$

daher wird die Anzahl der in einer Minutensekunde erzeugten Schwingungen diese sein

$$= \frac{nn}{aa}\sqrt{g} \cdot Ekk \cdot \frac{a}{M},$$

diese Zahl drückt die Höhe des Tones aus, welchen das Blech erzeugt, aus. Töne, die also von verschiedenen elastischen Blechen, die an einem Ende an einer Wand befestigt worden sind, erzeugt werden, werden in einem zusammengesetzten Verhältnis aus der halben Potenz der absoluten Elastizitäten in direkter Weise, aus der inversen halben Potenz der spezifischen Schweren und der inversen doppelten Potenz der Längen stehen. Daher, wenn zwei elastische Bleche sich nur in der Länge unterscheiden, werden die Klänge umgekehrt wie die Quadrate der Längen sein; natürlich wird ein doppelt so langes Blech einen um zwei Oktaven tieferen Ton erzeugen. Aber eine doppelt solange gespannte Saite erzeugt einen nur um eine Oktave tieferen Ton, wenn die Spannung dieselbe bleibt. Daher ist klar, dass Klänge von elastischen Blechen einem weit anderem Verhältnis folgen, als die Töne gespannter Saiten.

77. Was aber die Natur der Kurve aMB, die über die Grenzen a und B hinaus fortgesetzt wurde, betrifft, ist zuerst freilich klar, dass Kurve sich über a beim Entfernen von der verlängerten Achse BA ausdehnt. Für negativ gesetztes x wird nämlich werden

$$y = Be^{\frac{x}{c}} + Ae^{-\frac{x}{c}} - C\sin\frac{x}{c} + D\cos\frac{x}{c}.$$

Hier sind nun alle Terme positiv, weil allein der Koeffizient C zuvor einen einen negativen Wert erhalten hat; daher, während x wächst, muss auch y wachsen, weil die Zahl B größer ist als A und daher der Term $Be^{\frac{x}{c}}$ größeren Einfluss hat. Sobald aber $\frac{x}{c}$ einen zumindest mittelmäßig großen Wert erhalten hat, wächst dann dieser Term $Be^{\frac{x}{c}}$ dermaßen, dass die übrigen Terme in Bezug auf ihn quasi verschwinden. Desselben Grundes wegen, weil der Krümmungsradius der Kurve in B nicht $= \infty$ ist, es gilt nämlich

$$\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af}\int dx \int ydx,$$

wird die Kurve in B keinen Wendepunkt haben und sich daher zum selben Teil der Achse AB weiter ausdehnen; nachdem aber die Abszisse x weiter als $AB = a$ vermehrt wurde, wird dann der erste Term $Ae^{\frac{x}{c}}$ bald so groß, dass die übrigen in Bezug auf ihn einfach verstoßen werden können.

78. Diese ist also die erste Art von Schwingungen unter jenen unzähligen, zu welchen dasselbe Blech sich zusammensetzen kann. Die zweite Art, in der Figur

(Fig. 21) dargestellt, in welcher das in B angebrachte Blech die Achse AB in einem Punkt O durchläuft, wird aus dieser Gleichung abgeleitet werden

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi + \phi = l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\phi \quad \text{oder dieser} \quad \frac{3}{2}\pi - \phi = l \cot \frac{1}{2}\phi = \frac{a}{c}.$$

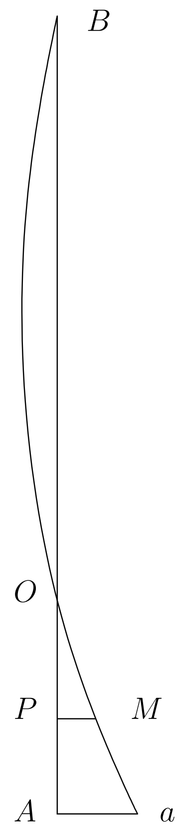

Fig. 21

Hier habe ist duch einige Versuche gefunden, dass der Winkel ϕ innerhalb dieser Grenzen enthalten ist: $1°2'40''$ und $1°3'0''$, aus denen wie zuvor der wahre Wert von ϕ gefunden werden wird:

ϕ	$=$	$1^\circ 2' 40''$	$1^\circ 3' 0''$
in min. sec.	$=$	$3760''$	$3780''$
log.	$=$	3,5751878450	3,5774917998
subtr.	$=$	5,3144251332	5,3144251332
$l\phi$	$=$	8,2607627118	8,2630666666
ϕ	$=$	0,0182289944	0,0183259571
$\frac{3}{2}\pi$	$=$	4,7123889804	4,7123889804
$\frac{a}{c}$	$=$	4,6941599860	4,6940630233
$\frac{1}{2}\phi$	$=$	$31' 20''$	$31' 30''$
$l\cot.\frac{1}{2}\phi$	$=$	2,0402552577	2,0379511745
lv	$=$	0,3096845055	0,3091937748
add.	$=$	0,3622156886	0,3622156886
lu	$=$	0,6719001941	0,6714094634
u	$=$	4,6978613391	4,6925559924
$\frac{a}{c}$	$=$	4,6941599860	4,6940630233
Fehler		+ 37013531	-15070309

Aus diesen Fehlern wird der wahre Wert des Winkels gefolgert

$$\phi = 1^\circ 2' 54'' \frac{213}{1000} \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} = 268^\circ 57' 5'' \frac{787}{1000}.$$

Weil also $\phi = 3774,213''$ ist, wird sein

$l\phi$	$=$	3,5768264061
subtr.	$=$	5,3144251332
		8,2624012729
ϕ	$=$	0,0182979009
$a\frac{3}{2}\pi$	$=$	4,7123889804
$\frac{a}{c}$	$=$	4,6940910795

Der Ton des auf die erste Weise schwingenden Bleches wird also zum Ton desselben auf diese Weise vibrierenden Bleches sein, wie das Quadrat der Zahl $1,8751040813$ zum Quadrat der Zahl $4,6940910795$ ist, das heißt wie 1 zu $6,266891$ oder in kleinsten Zahlen wie 4 zu 25 oder wie 1 zu $6\frac{4}{15}$. Daher wird der zweite Ton zum ersten eine doppelte Oktave mit einer Quint und fast einem Hemiton sein

79. Für die folgenden Arten an Schwingungen desselben elastischen Bleches, in denen das Blech beim Schwingen die Achse AB in zwei oder mehreren Punkten schneidet, wird der Winkel ϕ um Vieles kleiner. So hat man für die dritte Weise diese Gleichung

$$\frac{5}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi = \frac{a}{c}.$$

Weil also gilt

$$e^{\frac{5}{2}\pi+\phi} = \cot\frac{1}{2}\phi,$$

wird wegen des sehr kleinen Winkels ϕ gelten

$$e^{\frac{5}{2}\pi+\phi} = e^{\frac{5}{2}\pi} = (1 + \phi + \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\phi^3 + \text{ etc.})$$

und

$$\cot\frac{1}{2}\phi = \frac{1 - \frac{1}{8}\phi\phi}{\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{48}\phi^3} = \frac{2}{\phi} - \frac{\phi}{6}.$$

Daher wird näherungsweise $e^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{2}{\phi}$ und daher $\phi = 2e^{-\frac{5}{2}\pi}$ und näher $\phi = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}\pi}}$ sein; daher wird gelten

$$\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi + \frac{2}{e^{\frac{5}{2}\pi} + 2},$$

welcher letzte Term möglichst klein ist. Auf die gleiche Weise wird für die vierte Art an Schwingungen näherungsweise sein

$$\frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi - 2e^{-\frac{7}{2}\pi}$$

und so weiter; wegen dieser anderen verschwindenden Terme werden die Werte von $\frac{a}{c}$ $\frac{9}{2}\pi$, $\frac{11}{2}\pi$ etc. sein, die umso weniger von der Wahrheit abweichen werden, je weiter sie fortschreiten werden.

ÜBER SCHWINGUNGEN EINES FREIEN ELASTISCHEN BLECHES

80. Wir wollen nun nie ein befestigtes elastisches Blech (Fig. 22) betrachten, sondern ein freies, das entweder auf einer reibungsfreien Fläche ruht oder sich von der Schwerkraft entfernt in einem luftleeren Raum befindet. Es ist aber leicht klar, dass ein Blech dieser Art, eine oszillatorische Bewegung erhalten kann, während das Blech acb sich beim Krümmen abwechselnd unter und über den Zustand der Ruhe AB bewegt. Diese oszillatorische Bewegung wird also auf die gleiche Weise, wie im vorhergehenden Fall, bestimmt werden können, solange die Rechnung auf entsprechende Weise an diesen Fall angepasst wird.

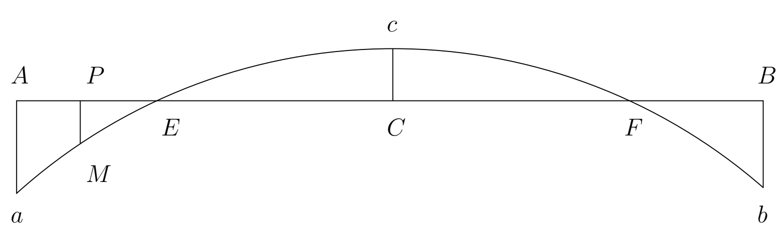

Fig. 22

Es sei also acb die Form des gekrümmten Bleches, welche es beim Schwingen erhält, aber es sei ACB die Lage desselben Bleches in Gleichgewichtszustand, durch welchen es bei jeder Schwingung hindurchgeht. Es werde wie zuvor die

Länge des Bleches $AB = a$, seine absolute Elastizität $= Ekk$ und sein Gewicht oder seine Masse $= M$ gesetzt. Darauf sei die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, der Bogen $aM = s$, der mit der Abszisse x vermischt werden wird, sodass $ds = dx$ gesetzt werden kann; daher wird der Krümmungsradius in M $= \frac{dx^2}{ddy} = R$ entstehen. Es sei aber weiter die erste Ordinate $Aa = b$. Nach Festlegen von all diesem wird, indem die Rechnung wie zuvor durchgeführt wird, zu derselben Gleichung gelangt werden

$$\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{a} \int dx \int ydx = \frac{Ekkddy}{dx^2}.$$

81. Wenn wir also $\frac{Ekk \cdot af}{M} = c^4$ setzen, wo f wie zuvor die Länge eines einfachen ischronen Pendels ausdrückt, wird man durch Integrieren für die Kurve diese Gleichung haben

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C \sin \frac{x}{c} + D \cos \frac{x}{c},$$

die an den gegenwärtigen Fall so angepasst werden wird. Zuerst, wenn $x = 0$ gesetzt wird, muss $y = b$ werden; daher wird

$$b = A + B + D.$$

Zweitens, weil gilt

$$\frac{c^4 ddy}{dx^2} = \int dx \int ydx,$$

muss für $x = 0$ gesetzt $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ werden, woher hervorgeht

$$0 = A + B - D.$$

Drittens, weil gilt

$$\frac{c^4 d^3y}{dx^3} = \int ydx,$$

muss für $x = 0$ gesetzt auch $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ werden, woher entsteht:

$$0 = A - B - C,$$

Viertens, wenn $x = a$ gesetzt wird, muss $\int ydx$ oder $\frac{d^3y}{dx^3}$ werden, deshalb weil $\int ydx$ die Summe aller Kräfte ausdrückt, die das Blech in der zur Achse AB normalen Richtung ziehen, wenn welche Summe nicht $= 0$ wäre, würde das Blech selbst durch lokale Bewegung entgegen der Festlegung vorwärts bewegt werden; es wird also dieses Grundes wegen sein

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - C \cos \frac{a}{c} + D \sin \frac{a}{c}.$$

Fünftens, weil das Blech in der Extremität B frei ist, wird es dort keine Krümmung haben können und es wird daher für $x = a$ gesetzt auch $\frac{ddy}{dx} = 0$ sein, woher gelten wird

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - C \sin \frac{a}{c} - D \cos \frac{a}{c}.$$

Nachdem also diese fünf Bedingungen ins Kalkül gezogen worden sind, werden nicht nur die vier Konstanten A, B, C und D bestimmt werden, sondern auch der Wert des Bruches $\frac{a}{c}$ wird gefunden werden; daher wird also die Länge des einfachen isochronen Pendels bekannt werden.

82. Aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen erhält man $D = A + B$ und $C = A - B$, welche in den folgenden eingesetzt liefern werden

$$\begin{aligned} 0 &= Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - (A-B)\cos\frac{a}{c} + (A+B)\sin\frac{a}{c}, \\ 0 &= Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - (A-B)\sin\frac{a}{c} - (A+B)\cos\frac{a}{c}, \end{aligned}$$

aus welchen gefunden wird:

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} - \cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} - \cos\frac{a}{c} + \sin\frac{a}{c}} = -\frac{e^{-\frac{a}{c}} + \sin\frac{a}{c} - \cos\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} - \sin\frac{a}{c} - \cos\frac{a}{c}};$$

aus welcher Gleichheit diese Gleichung gefunden wird

$$0 = 2 - e^{\frac{a}{c}}\cos\frac{a}{c} - e^{-\frac{a}{c}}\cos\frac{a}{c}; \text{ oder } \quad e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \pm \sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}},$$

woher die folgenden Gleichungen gebildet werden werden

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi - \phi = l\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\phi, \\ \text{welche} \quad & \frac{a}{c} = 0 \quad \text{für die natürliche Lage des Bleches gibt,} \\ \text{II.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi - \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{III.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{IV.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{V.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{VI.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{9}{2}\pi - \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

83. Diese Gleichungen zeigen wiederum unzählige Arten an Schwingungen auf, in der zweiten von welchen das Blech die Achse AB nur einmal schneiden wird, in der dritten zweimal, in der vierten dreimal, in der fünften viermal und so weiter. Aus diesen wird also eingesehen, dass die zweite, vierte, sechste etc. Art an das gegenwärtige Unternehmen nicht angepasst sind. Weil ja nämlich in diesen die Anzahl der Überscheidungen ungerade ist, wäre die Lage des Bleches beim Schwingen eine solche, wie sie Figur 23 darstellt,

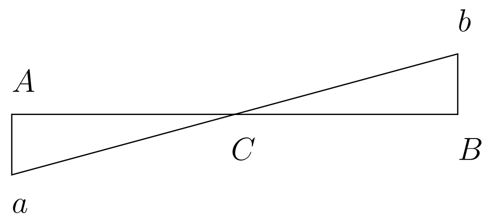

Fig. 23

in welcher, obwohl die Summe alle wirkenden Kräfte durch das ganze Blech hindurch verschwindet, das Blech dennoch von ihnen eine Rotationsbewegung um den Punkt C herum erhielte, weil die Kräfte, die auf jede der beiden Hälften aC und bC ausgeübt worden sind, um dem Blech dieselbe Rotationsbewegung zuzuführen, zusammenwirken würden. Dieses Grundes wegen, weil die Rotationsbewegung ganz und gar ausgeschlossen werden muss, muss die Form des Bleches (Fig. 22), welche es beim Schwingen annimmt, so beschaffen sein, dass nicht nur Summe aller wirkenden Kräfte, die auf das ganze Blech ausgeübt wurden, $= 0$ ist, sondern auch dass Summe derer Momente verschwindet; dies wird erreicht, wenn die Kurve im Mittelpunkt c mit dem Durchmesser Cc versehen ist. Das passiert, wenn die Kurve die Achse AB entweder in zwei oder vier oder allgemein in einer geraden Anzahl von Punkten schneidet; daher werden nur die dritte, fünfte, siebte etc. Gleichung entsprechende Lösungen liefern.

84. Diese in der Vorlage des Problems enthaltene Proposition selbst wird gefunden werden, wenn wir nur Kurven solcher Art zulassen, die die Gerade Cc zum Durchmesser haben oder in denen derselbe Wert von y hervorgeht, wenn anstelle von x $x - a$ geschrieben wird. Wir wollen also in der allgemeinen Gleichung $x - a$ anstelle von x setzen, und es wird hervorgehen

$$y = Ae^{\frac{a}{c}}e^{-\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}}e^{\frac{x}{c}} + C\sin\frac{a}{c}\cdot\cos\frac{x}{c} - C\cos\frac{a}{c}\cdot\sin\frac{x}{c} + D\cos\frac{a}{c}\cdot\cos\frac{x}{c} + D\sin\frac{a}{c}\cdot\sin\frac{x}{c},$$

welche mit dieser Gleichung übereinstimmen muss

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\sin\frac{x}{c} + D\cos\frac{x}{c},$$

es wird werden

$$Ae^{\frac{a}{c}} = B, \quad C\left(1 + \cos\frac{a}{c}\right) = D\sin\frac{a}{c} \quad \text{und} \quad C\sin\frac{a}{c} = D\left(1 - \cos\frac{a}{c}\right),$$

deren zwei letzte übereinstimmen. Weil also $\frac{A}{B} = e^{-\frac{a}{c}}$ ist, wird nach Vergleich dieses Wertes mit den oberen hervorgehen:

$$e^{-\frac{a}{c}} - \cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c} = 1 - e^{-\frac{a}{c}}\cos\frac{a}{c} + e^{-\frac{a}{c}}\sin\frac{a}{c}$$

oder

$$e^{-\frac{a}{c}} = \frac{1 + \cos\frac{a}{c} + \sin\frac{a}{c}}{1 + \cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c}} = \frac{1 + \sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}} = \frac{\cos\frac{a}{c}}{1 - \sin\frac{a}{c}}.$$

85. Es wird also gelten

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1-\sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}},$$

und so werden in der zuerst gefundenen Gleichung

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1\pm\sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}}$$

nur die Hälfte f der oben dargebotenen Fälle, natürlich die, die den ungeraden Zahlen entsprechen, das gegenwärtige Problem auflösen. Daher, weil die erste Gleichung den natürlichen Zustand des Bleches enthält, werden alle Schwingungsarten in den folgenden Gleichungen enthalten sein:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & \frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{II.} & \frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{III.} & \frac{a}{c} = \frac{11}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ & \quad\text{etc.} \end{array}$$

Die erste dieser Gleichungen wird also die erste und grundlegende Schwingungsart liefern, für welche der Wert des Winkels ϕ auf die gleich Weise, wie oben, durch Approximationen gefunden werden wird. Die Grenzen des Winkels ϕ werden aber bald errechnet, $1°0'40''$ und$1°1'0''$ zu sein, aus welchen durch die folgende Rechnung der wahre Wert von ϕ gefunden wird

ϕ	=	$1°0'40''$	$1°1'0''$
oder		$3640''$	$3660''$
log.	=	3,5611013836	3,5634810854
subtr.	=	5,3144251332	5,3144251332
$l\phi$	=	8,2466762504	8,2490559522
ϕ	=	0,0176472180	0,0177441807
$\frac{3}{2}\pi$	=	4,7123889804	4,7123889804
$\frac{a}{c}$	=	4,7300361984	4,7301331611
$\frac{1}{2}\phi$	=	$30'20''$	$30'30''$
v	=	2,0543424 7 42	2,0519626482
lv	=	0,3126728453	0,3121694510
add.		0,3622156886	0,3622156886
lu	=	0,6748885339	0,6743851396
u	=	4,7302983543	4,7248186037
Fehler		+ 636341	+ 53145574
			636341
			diff. 52509233

Daher wird eingesehen, dass der wahre Wert von ϕ nicht innerhalb dieser Grenzen enthalten ist, sondern ein wenig kleiner ist als $1°0'40''$. Nichtsdestoweniger wird er aus diesen Fehlern gefunden werden. Es sei nämlich $\phi = 1°0'40'' - n''$; es wird gelten

$$20'' : 52509233 = n'' : 636341;$$

woher $n = \frac{2423}{10000}$ gefunden wird, sodass gilt

$$\phi = 1°0'39''\frac{7576}{10000}.$$

Weil also $\phi = 3639,7576''$ ist, wird gelten

$$\begin{array}{rcl} l\phi & = & 3{,}5610724615 \\ \text{subtr.} & & \underline{5{,}3144251332} \\ & & 8{,}24664\ 73283 \\ \phi & = & 0{,}0176460428 \\ \frac{3}{2}\pi & = & \underline{4\ {,}7123889804} \\ \frac{a}{c} & = & 4{,}7300350232\ . \end{array}$$

86. Es sei diese Zahl $= m$, es wird, wegen $c^4 = \frac{Ekk \cdot af}{M}$; gelten

$$a^4 = \frac{m^4 Ekk \cdot af}{M} \quad \text{und} \quad f = \frac{a^4}{m^4} \cdot \frac{1}{Ekk} \cdot \frac{M}{a}.$$

Daher wird auf gleiche Weise die Anzahl der von diesem Blech in einer Minutensekunde erzeugten Töne sein

$$= \frac{mm}{aa}\sqrt{g} \cdot Ekk \cdot \frac{a}{M}.$$

während $g = 3,16625$ Rheinische Fuß sind. Wenn daher also dasselbe Blech, nachdem das eine Ende B an einer Mauer befestigt worden ist, nun frei, um einen Klang zu erzeugen, angeregt wird, werden die Töne zueinander sein wie nn zu mm, dass heißt wie die Quadrate der Zahlen $1,8751040813$ und $4,7300350232$, das heißt wie 1 zu $6,363236$. Das Verhältnis all dieser Töne wird also näherungsweise wie 11 zu 70 sein; das Intervall dieser Klänge wird also zwei Oktaven mit einer Quinte und einem Hemiton festlegen. Wenn aber das zweite freie Blech doppelt so lang genommen wird wie das erste befestigte, wird das Intervall der Töne fast eine Sexte kleiner sein.

87. Nach Finden dieses Wertes des Bruches $\frac{a}{c}$ wird die Gleichung für die bisher unbestimmte Kurve, welche das Blech beim Schwingen bildet, bestimmt werden können. Weil nämlich gilt

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 - \sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}}, \text{ wird gelten } \quad B = \frac{1 - \sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}} A$$

und

$$C = A - B = A\left(\cos\frac{a}{c} + \sin\frac{a}{c} - 1\right) : \cos\frac{a}{c}$$

und

$$D = A + B = A\left(\cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c} + 1\right) : \cos\frac{a}{c}.$$

Nun ist

$$b = A + B + D = 2D = 2A\left(\cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c} + 1\right) : \cos\frac{a}{c};$$

woher wird

$$\begin{aligned}
A &= \frac{b\cos\frac{a}{c}}{2\left(\cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(1 + \sin\frac{a}{c} - \cos\frac{a}{c}\right)}{4\sin\frac{a}{c}},\\
B &= \frac{b\left(1 - \sin\frac{a}{c}\right)}{2\left(\cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(-1 + \sin\frac{a}{c} + \cos\frac{a}{c}\right)}{4\sin\frac{a}{c}},\\
C &= \frac{b\left(-1 + \sin\frac{a}{c} + \cos\frac{a}{c}\right)}{2\left(\cos\frac{a}{c} - \sin\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(1 - \cos\frac{a}{c}\right)}{2\sin\frac{a}{c}},\\
D &= \frac{b}{2} = \frac{b\sin\frac{a}{c}}{2\sin\frac{a}{c}}.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von diesen entsteht diese Gleichung:

$$\frac{y}{b} = \frac{e^{\frac{x}{c}}\cos\frac{a}{c} + e^{-\frac{x}{c}}\left(1 - \sin\frac{a}{c}\right)}{2\left(1 - \sin\frac{a}{c} + \cos\frac{a}{c}\right)} + \frac{\left(1 - \cos\frac{a}{c}\right)\sin\frac{x}{c} + \sin\frac{a}{c}\cos\frac{x}{c}}{2\sin\frac{a}{c}}.$$

88. Weil aber die Gerade Cc der Durchmesser der Kurve ist, werde, nachdem die Abszisse vom Mittelpunkt C aus genommen wurde, $CP = z$ gesetzt, es wird $x = \frac{a}{c}a - z$ sein. Daher wird

$$e^{\frac{x}{c}} = e^{\frac{a}{2c}}e^{-\frac{x}{c}} = e^{-\frac{x}{c}}\sqrt{\frac{1 - \sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}}}$$

und

$$e^{-\frac{x}{c}} = e^{\frac{x}{c}}\sqrt{\frac{\cos\frac{a}{c}}{1 - \sin\frac{a}{c}}};$$

daher wird sein

$$\frac{Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}}}{b} = \frac{\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)\sqrt{\cos\frac{a}{c}\left(1 - \sin\frac{a}{c}\right)}}{2\left(1 - \sin\frac{a}{c} + \cos\frac{a}{c}\right)} = \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2\left(e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}}\right)}.$$

Dann wird aber sein

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \cos\frac{a}{c}\right)\sin\frac{x}{c} + \sin\frac{a}{c}\cos\frac{x}{c} = \sin\frac{x}{c} + \sin\frac{a-x}{c}\\
&= \sin\left(\frac{a}{2c} - \frac{z}{c}\right)\sin\left(\frac{a}{2c} + \frac{z}{c}\right) = 2\sin\frac{a}{2c}\cos\frac{z}{c};
\end{aligned}$$

nach Einsetzen von diesen entsteht diese Gleichung

$$\frac{2y}{b} = \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}}} + \frac{\cos\frac{z}{c}}{\cos\frac{a}{2c}},$$

welche die einfachste Form ist, mit welcher die Natur der Kurve $aMcb$ ausgedrückt werden kann; es ist aber klar, ob z entweder positiv oder negativ genommen wird, dass derselbe Wert der Ordinate y hervorgehen wird. Es ist in der Tat

$$e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}} = \frac{2\cos\frac{a}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{a}{c}}}.$$

Wir haben aber den Winkel $\frac{a}{c} = 271°0'39''\frac{3}{4}$ gefunden.

89. Wenn nun $z = 0$ gesetzt wird, wird y den Wert der Ordinate Cc liefern; es wird also sein

$$\frac{2 \cdot Cc}{b} = \frac{2\sqrt{\cos\frac{a}{c}}}{2\cos\frac{a}{2c}} + \frac{1}{\cos\frac{a}{2c}}$$

oder

$$\frac{Cc}{Aa} = \frac{1+\sqrt{\cos\frac{a}{c}}}{2\cos\frac{a}{2c}} = \frac{1}{2}\sec\frac{a}{2c} + \frac{1}{2}\sec\frac{a}{2c}\sqrt{\cos\frac{a}{c}}.$$

Aber es ist

$$\cos\frac{a}{c} = \sin 1°0'39''\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{a}{2c} = \sin 45°30'19''\frac{7}{8}.$$

Daher wird $\frac{Cc}{Aa} = 0,607815$ gefunden. Darauf, wenn $y = 0$ gesetzt wird, werden die Punkte E und F gefunden werden, in welchen die Kurve die Achse schneidet. Es wird also sein

$$e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = -\frac{\cos\frac{z}{c}}{\cos\frac{a}{2c}}\left(e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}}\right) = \frac{2\cos\frac{x}{c}}{\sqrt{\cos\frac{a}{c}}},$$

aus welcher durch Approximation gefunden wird

$$\frac{CE}{CA} = 0,551685 \quad \text{und} \quad \frac{AE}{AC} = 0,448315.$$

Während also das Blech Schwingungen ausführt, werden diese Punkte E und F unbewegt bleiben; daher wird eine oszillatorische Bewegung dieser Art, die anders kaum erzeugt werden kann, leicht erzeugt werden können. Wenn nämlich das Blech in den auf diese Weise bestimmten Punkten E und F befestigt wird, dann wird es genauso schwingen, als wenn es völlig frei wäre.

90. Wenn auf dieselbe Weise die zweite der oben gefundenen Gleichungen behandelt wird

$$\frac{a}{c} = \frac{7\pi}{2} + \phi = l\cot\phi,$$

in welchem Fall freilich näherungsweise $\phi = 0$ gefunden werden wird, dann wird die zweite Art hervorgehen, in welcher ein freies Blech Vibrationen vollführen kann, indem natürlich die Achse AB in vier Punkten geschnitten wird; und daher wird das Blech genauso schwingen, als wenn es in diesen vier Punkten befestigt worden wäre. Umgekehrt also, wenn das Blech an diesen vier Punkten oder nur zwei bestimmten von diesen befestigt wird, dann wird es auf dieselbe Weise schwingen, als wenn es frei wäre; es wird aber ein um Vieles höherer Ton erzeugt werden, der natürlich zum vorhergehenden gerade erzeugten Ton ein Verhältnis wie 7^2 zu 3^2 haben wird, das heißt, das Intervall wird die Hälfte zweier Oktaven mit einer Quarte und eines Hemitons sein. Die dritte Schwingungsart, in welcher gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{11}{2}\pi + \phi = l \cot \phi,$$

wird sechs Überschneidungen der Kurve acb mit der Achse AB haben und es wird ein mehr als eine Oktave mit einer kleinen Terz höherer Ton erzeugt werden; und diesen Ton wird das Blech erzeugen, wenn es in zwei jener sechs Punkte befestigt wird. Daher ist klar, wie verschiedene Klänge von demselben Blech, je nachdem wie es in zwei Punkten in unterschiedlicher Weise befestigt wird, erzeugt werden können, und wenn nicht zwei Punkte, an denen es befestigt wird, mit den Überschneidungen in der ersten oder zweiten oder dritten Art übereinstimmen, und daher die Schwingungen sich zu zu einer anderen der folgenden Arten oder sogar zu der infinitesimalen zusammensetzen, dass dann der Ton dermaßen hoch sein wird, dass er überhaupt nicht wahrgenommen werden kann, oder was auf dasselbe hinausläuft, das Blech überhaupt keine oszillatorische Bewegung erhalten können wird; oder es wird wie bei der schwingenden Saite, welcher ein Steg so untergeschoben wird, dass die Teile zueinander kein rationales Verhältnis haben, ein wenig geordneter Ton erzeugt werden.

ÜBER SCHWINGUNGEN EINES AN JEDEM DER BEIDEN ENDEN BEFESTIGTEN BLECHES

90. Es sei nun das elastische Blech (Fig. 24) an jedem der beiden Enden A und B befestigt worden, so dennoch, dass die Tangenten der Kurve in diesen Punkten nicht bestimmt werden.

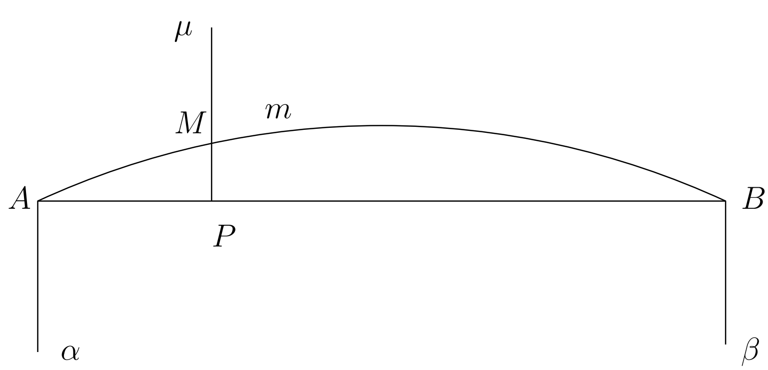

Fig. 24

Um natürlich diesen Fall in Experimenten zu erzeugen, werden dem Blech an jedem der beiden Enden sehr feine Spitzen $A\alpha$, $B\beta$ angefügt, die an der Wand befestigt die äußersten Grenzen A und B des Bleches unbeweglich machen sollen. Um aber die oszillatirische Bewegung dieses elastischen Bleches zu finden, werde wie zuvor die absolute Elastizität des Bleches $= Ekk$, die Länge $AB = a$ und das Gewicht $= M$ und die Länge es einfachen isochronen Pendels $= f$ gesetzt. Es sei AMB die krummlinige Form, welche das Blech beim Schwingen annimmt, und es werde die Abszisse $AP = AM = x$, die Ordinate $PM = y$ und der Krümmungsradius in $M = R$ gesetzt. Es sei weiter P die Kraft, welche die Spitze $A\alpha$ in der Richtung $A\alpha$ erfährt, und weil die Kraft, mit welcher das Element Mm in die Richtung $M\mu$ gezwungen werden muss, damit das Blech in diesem Zustand bewahrt wird, $= \frac{Mydx}{af}$ ist, wird durch die oben beschriebenen Regeln die Gleichung für die Kurve diese sein

$$\frac{Ekk}{R} = Px - \frac{M}{af}\int dx \int ydx.$$

Es ist aber $R = -\frac{dx^2}{ddy}$, weil die Kurve zur Achse konkav ist; daher wird

$$\frac{Ekkddy}{dx^2} = \frac{M}{af}\int dx \int ydx - Px.$$

Für $x = 0$ gesetzt wird der Krümmungsradius R in A unendlich und daher $ddy = 0$ sein.

91. Wenn diese Gleichung zweimal differenziert wird, geht dieselbe Gleichung hervor, die wir für die vorhergehenden Fälle gefunden haben

$$Ekkd^4y = \frac{M}{af} ydx^4.$$

Wenn daher also $\frac{Ekk \cdot af}{M} = c^4$ gesetzt wird, wird die Integralgleichung diese sein

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\sin\frac{x}{c} + D\cos\frac{x}{c}.$$

Um diese zu bestimmen, werde $x = 0$ gesetzt, und weil y zugleich verschwinden muss, wird $0 = A + B + D$ sein

Zweitens werde $x = a$ gesetzt, und weil in gleicher Weise $y = 0$ werden muss, wird gelten

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + C\sin\frac{a}{c} + D\cos\frac{a}{c}.$$

Drittens, weil $\frac{ddy}{dx^2}$ verschwinden muss, wird sowohl für $x = 0$ als auch $x = a$ gesetzt werden

$$0 = A + B - D \quad \text{und} \quad 0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} - C\sin\frac{a}{c} - D\cos\frac{a}{c}.$$

Nun geben die Gleichungen $0 = A + B - D$ und $0 = A + B + D$ $D = 0$ und $B = -A$; diese Werte liefern in den übrigen zwei Gleichungen eingesetzt

$$0 = A\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right) + C\sin\frac{a}{c}$$

und

$$0 = A\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right) - C\sin\frac{a}{c};$$

diesen kann nicht genügt werden, wenn nicht $A = 0$ ist, weil nicht $e^{\frac{a}{c}} = e^{-\frac{a}{c}}$ sein kann, außer in dem Fall, in dem $\frac{a}{c} = 0$ ist; dann muss aber $C\sin\frac{a}{c} = 0$ sein. Weil hier nicht $C = 0$ gesetzt werden kann, weil die oszillatorische Bewegung keine wäre, wird $\sin\frac{a}{c} = 0$ und daher entweder $\frac{a}{c} = \pi$ oder $\frac{a}{c} = 2\pi$ etc. sein, woher wiederum unendlich viele verschiedene Arten an Schwingungen entstehen, je nachdem ob entweder die Kurve AMB die Achse entweder niemals außer den Enden A und B schneidet oder in einem oder zwei oder in unendlich vielen Punkten, wie aus der Gleichung $y = C\sin\frac{x}{c}$ berechnet wird. Aber die Punkte der Überscheidungen, wie viele es auch immer waren, werden in gleichen Intervallen voneinander entfernt sein.

93. Weil also für die erste und die grundlegende Schwingungsart $\frac{a}{c} = \pi$ ist, wird gelten

$$a^4 = \pi^4 c^4 = \pi^4 \times Ekk \times \frac{a}{M} \times f,$$

woher wird

$$f = \frac{a^4}{\pi^4} \times \frac{1}{Ekk} \times \frac{M}{a}.$$

Daher werden die Klänge in Bezug auf die Länge des Bleches wiederum im Verhältnis zur inversen zweiten Potenz der Länge stehen. Der auf diese Weise erzeugte Klang dieses Bleches wird sich aber zum Ton desselben Bleches verhalten, wenn es an dem einen Ende B an einer Mauer befestigt worden ist, wie $\pi\pi$ zum Quadrat der Zahl $1,8751040813$, das heißt wie $2,807041$ zu 1 oder in kleinsten Zahlen wie 47 zu 160, welches Intervall eine Oktave mit fast einem Triton ist. Wenn sich die Schwingungen zur zweiten Art, in welcher $\frac{a}{c} = 2\pi$ ist, zusammensetzen, wird der Klang um zwei Oktaven höher werden; wenn $\frac{a}{c} = 3\pi$ ist, wird der Ton um drei Oktaven mit einem kleineren Ton als im Fall, in dem $\frac{a}{c} = \pi$ ist, höher werden und so weiter. Damit diese leichter auf Experimente zurückgeführt werden können, ist zu bemerken, dass hier möglichst kleine Schwingungen festgelegt werden, so dass keine Verlängerung des Bleches von Nöten ist. Daher, damit nicht die Festigkeit des Bleches, mit welcher es sich auch der minimalen Ausdehnung, ohne welche diese Schwingungen nicht vollführt werden können, widersetzt, hier eine Veränderung verursacht, müssen jene Spitzen so festgelegt werden, dass die kleinste Ausdehnung nicht verhindert wird; dies passiert, wenn sie auf einem sehr glatten Untergrund ruhen. So wird dieses elastische Blech AB, das in A und B mit den Spitzen $A\alpha$ und $B\beta$ befestigt wurde, wenn die Spitzen auf einen Spiegel gestellt werden, einen mit der Rechnung konformen Ton erzeugen.

ÜBER SCHWINGUNGEN EINES AN JEDEM DER BEIDEN ENDEN AN EINER WAND BEFESTIGTEN ELASTISCHEN BLECHES

94. Nachdem dieser Fall erledigt worden ist, schließe diese Behandlung über elastische Bleche die oszillatorische Bewegung eines elastischen Bleches ab, das

an jedem der beiden Enden A und B an einer Mauer befestigt wurde (Fig. 25), sodass beim Schwingen die Punkte A und B nicht nur unbewegt bleiben, sondern auch die Gerade AB immer eine Tangente der Kurve AMB in den Punkten A und B ist. Hier ist also dafür zu sorgen, dass die Riegel, die die Enden A und B erfassen, nicht zu fest sind, sondern eine sehr kleine Ausdehnung, eine so große wie für die Krümmung verlangt wird, zulassen.

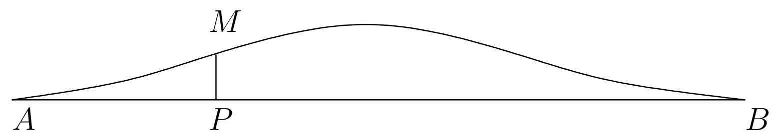

Fig. 25

Was für Kräfte also auch immer in den Enden A und B, um das Blech festzuhalten, verlangt sind, es wird zur folgenden Differentialgleichung vierter Ordnung gelangt werden

$$Ekkd^4y = \frac{M}{af} ydx^4;$$

deren Integral, wenn $\frac{Ekk \cdot af}{M} = c^4$ gesetzt wird, wie oben dieses sein wird

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C \sin \frac{x}{c} + D \cos \frac{x}{c}.$$

95. Die Konstanten A, B, C und D müssen aber so beschaffen sein, dass für $x = 0$ gesetzt nicht nur y verschwindet, sondern auch $dy = 0$ wird, weil in A die Kurve von der Achse AB berührt wird. Dieses selbe muss aber passieren, wenn $x = a$ gesetzt wird; daher werden diese vier Gleichungen entstehen

$$\begin{aligned}
\text{I.} \quad & 0 = A + B + D \\
\text{II.} \quad & 0 = A - B + C \\
\text{III.} \quad & 0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + C \sin \frac{a}{c} + D \cos \frac{a}{c} \\
\text{IV.} \quad & 0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} + C \cos \frac{a}{c} - D \sin \frac{a}{c}.
\end{aligned}$$

Aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen entsteht $C = -A + B$ und $D = -A - B$, welche Werte in den zwei übrigen eingesetzt geben werden

$$\begin{aligned}
0 &= Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B) \sin \frac{a}{c} - (A + B) \cos \frac{a}{c} \\
0 &= Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B) \cos \frac{a}{c} + (A + B) \sin \frac{a}{c},
\end{aligned}$$

deren Summe und Differenz ist

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + B \sin \frac{a}{c} - A \cos \frac{a}{c} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} = \frac{\sin \frac{a}{c}}{\cos \frac{a}{c} - e^{\frac{a}{c}}}$$

$$0 = Be^{-\frac{a}{c}} - A \sin \frac{a}{c} - B \cos \frac{a}{c} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} - \cos \frac{a}{c}}{\sin \frac{a}{c}},$$

woher wird

$$2 = \left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right)\cos\frac{a}{c} \quad \text{oder} \quad e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \pm \sin\frac{a}{c}}{\cos\frac{a}{c}}.$$

Weil diese Gleichung mit der übereinstimmt, die wir im Paragraph 82 gefunden haben, werden die folgenden in der Anzahl unendlich vielen Lösungen genügen

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi - \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{II.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ \text{III.} \quad & \frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

96. Der ersten dieser Gleichungen kann nicht genügt werden, wenn nicht $\phi = 90^\circ$ und daher $\frac{a}{c} = 0$ ist; daher entsteht die erste Schwingungsart aus dieser Gleichung

$$\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \phi = l\cot\frac{1}{2}\phi;$$

weil diese eine schon oben behandelte ist, wird $\frac{a}{c} = 4,7300350232$ sein. Deswegen wird das elastische Blech, jedes von beiden an einer Wand befestigten Enden von welchem festgehalten werden, seine Vibrationen in gleicher Weise vollführen, als wenn es völlig frei wäre. Diese Übereinstimmung bezieht sich aber nur auf die erste Schwingungsweise; die zweite Schwingungsweise, in welcher gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - \phi = \log\cot\frac{1}{2}\phi$$

und das Blech die Achse AB beim Schwingen nur in einem Punkt schneidet, hat beim freien Blech keine gleiche; aber die dritte Art, eines auf beiden Seiten befestigten Bleches wird mit der zweiten Art des freien Bleches übereinstimmen, und so weiter.

97. Diese zwei letzten Arten von Schwingungen können wegen der erwähnten Gründe nicht passend durch Experimente erforscht werden: Die erste ist nämlich nicht nur, um Experimente durchzuführen, besonders geeignet, sondern kann auch verwendet werden, um die absolute Elastizität eines jedes vorgelegten Bleches, welche wir durch Ekk gekennzeichnet haben, zu finden. Wenn daher nämlich der Klang bemerkt wird, welchen ein an dem einen Ende an einer Mauer befestigtes Blech erzeugt, und ihm in einer Saite ein Begleitton an die Seite gestellt wird, wird zugleich die Anzahl der in einer Minutensekunde erzeugten Töne erkannt werden. Wenn diese diesem Ausdruck gleich gesetzt wird

$$\frac{nn}{aa}\sqrt{g} \cdot Ekk \cdot \frac{a}{M},$$

wird wegen der bekannten Zahl n und der durch Messungen gefundenen Größen g, a und M der Wert des Ausdrucks Ekk gefunden werden und so wird dann die absolute Elastizität bekannt; diese kann mit der, die wir oben aus der Krümmung zu finden gelehrt haben, verglichen werden.

Anhang II

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER AKTION VON BEWEGTEN KÖRPERN IN EINEM NICHT RESISTIERENDEN MEDIUM DURCH DIE METHODE DER MAXIMA UND MINIMA

1. Weil ja alle Wirkungen der Natur einem gewissen Gesetz des Maximums oder Minimums folgen, besteht kein Zweifel, dass bei gekrümmten Linien, welche bewegte Körper, wenn sie von irgendwelchen Kräften beunruhigt werden, beschreiben, eine gewisse Eigenschaft des Maximums oder Minimums auftritt. Welche diese Eigenschaft aber ist, scheint aus metaphysischen Prinzipien a priori nicht so leicht zu bestimmen; weil es aber möglich ist, diese Kurven selbst mit Hilfe der direkten Methode zu finden, wird daher, nachdem entsprechende Aufmerksamkeit walten gelassen wurde, das selbst, was in diesen Kurven ein Maximum oder Minimum ist, gefolgert werden können. Es muss aber hauptsächlich der Effekt betrachtet werden, der aus den wirkenden Kräften entsteht; weil dieser in der erzeugten Bewegung des Körpers besteht, scheint es mit der Wahrheit verträglich, dass diese Bewegung selbst oder zumindest das Aggregat aller Bewegungen, die in dem bewegten Körper enthalten sind, minimal sein

muss. Auch wenn diese Folgerung nicht zur Genüge bestätigt scheint, wird sie dennoch, wenn ich sie mit einer schon a priori bekannten Wahrheit übereinzustimmen zeigen werde, so großes Gewicht erhalten, dass alle Zweifel, die über sie entstehen können, völlig verschwinden. Ja es wird sogar, nachdem ihre Gültigkeit aufgezeigt worden ist, leichter sein, nach tieferen Naturgesetzen und den Zweck betreffenden Gründen zu suchen und dieses Versicherte mit strengsten Begründungen zu untermauern.

2. Es sei die Masse des bewegten Körpers $= M$ und seine, während er das kleine Stück $= ds$ zurücklegt, der Höhe entsprechende Geschwindigkeit $= v$, es wird die Größe des bewegten Körpers an dieser Stelle $= M\sqrt{v}$ sein; diese wird mit kleinen Strecke ds selbst multipliziert $Mds\sqrt{v}$ geben, die gesammelte Bewegung des Körpers durch den kleinen Raum ds. Nun sage ich, dass die vom Körper beschriebene Linie so beschaffen sein wird, dass unter allen anderen gekrümmten Linien, die in denselben Grenzen enthalten sind, $\int Mds\sqrt{v}$ oder, wegen des konstanten M, $\int ds\sqrt{v}$ ein Minimum ist. Wenn daher aber die gesuchte Kurve, als wäre sie gegeben, betrachtet wird, kann aus den wirkenden Kräften die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ durch sich auf die Kurve beziehende Größen definiert werden und daher die Kurve selbst durch die Methode der Maxima und Minima bestimmt werden. Im Übrigen wird dieser aus der Größe der Bewegung hergeholte Ausdruck in gleicher Weise auf natürliche Kräfte übertragen werden können; nachdem nämlich der winzig kleine Zeitabschnitt, in welchem das Element ds passiert wird, $= dt$ gesetzt wurde, weil $ds = dt\sqrt{v}$ ist, wird werden

$$\int ds\sqrt{v} = \int vdt,$$

sodass in der vom bewegten Körpern beschriebenen Kurve die Summe aller natürlichen Kräfte, die in den einzelnen Zeitmomenten des Körpers enthalten sind, minimal ist. Deswegen werden weder die, die Kräfte durch die Geschwindigkeiten, noch jene, die Kräfte durch die Quadrate der Geschwindigkeiten eingeschätzt werden zu müssen festlegen, hier irgendetwas, wodurch sie verärgert werden, finden.

3. Zuerst also, wenn wir den Körper von überhaupt keinen Kräften beunruhigt zu werden festlegen, wird auch seine Geschwindigkeit, auf welche ich hier achte (die Richtung wird nämlich die Methode der Maxima und Minima selbst erfassen), keine Veränderung erfahren; und es wird daher v selbst eine konstante Größe sein, beispielsweise $= b$. Daher wird ein von keinen Kräften beeinflusster Körper, wenn er irgendwie bewegt wird, eine Linie solcher Art beschreiben, in welcher $\int ds\sqrt{b}$ oder $\int ds = s$ ein Minimum ist. Dieser Weg unter allen in denselben Grenzen enthaltenen Kurven selbst wird also minimal sein und daher eine Gerade, genauso wie es das erste Prinzip der Mechanik erfordert. Diesen Fall führe ich freilich nicht daher hier an, damit mein Prinzip bestätigt zu werden glaube; was für eine andere Funktion von v auch immer ich nämlich anstelle der Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ angenommen hätte, es wäre derselbe gerade Weg hervorgegangen; aber, indem von einfachsten Fällen aus begonnen wird, wird die Art der Überstimmung leichter eingesehen werden können.

4. Ich schreite also zum Fall gleichmäßiger Schwerkraft oder dem voran, in

welchem der bewegte Körper überall (Fig. 26) gemäß zur Horizontale normalen Richtungen nach unten von der konstanten Beschleunigung $= g$ beeinflusst wird. Es sei AM die Kurve, welche der Körper in dieser Annahme beschreiben wird, und es werde die vertikale Gerade AP für die Achse genommen und es werde die Abszisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$ und ein Kurvenelement $Mm = ds$ gesetzt;

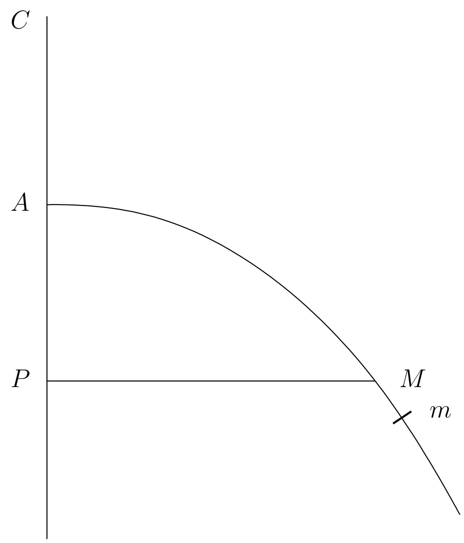

FIG. 26

es wird also aus der Natur der Beeinflussung $dv = gdx$ und $v = a + gx$ sein. Daher wird die Kurve so beschaffen sein, dass in ihr

$$\int ds\sqrt{a+gx}$$

ein Minimum ist. Es werde $dy = pdx$ gesetzt, dass $ds = dx\sqrt{1+pp}$ ist, und es muss dann dies ein Minimum sein

$$\int dx\sqrt{(a+gx)(1+pp)};$$

dieser Ausdruck gibt mit der allgemeinen Form $\int Zdx$ verglichen

$$Z = \sqrt{(a+gx)(1+pp)};$$

daher, weil $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ gesetzt worden ist, wird sein

$$N = 0 \quad \text{et} \quad P = \frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+pp}}.$$

Weil also der Differentialwert $N - \frac{dP}{dx}$ ist, wird wegen $N = 0$ im gegenwärtigen Fall $dP = 0$ und $P = \sqrt{C}$ werden. Man wird also haben

$$\sqrt{C} = \frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dy\sqrt{a+gx}}{ds};$$

daher wird

$$Cdx^2 + Cdy^2 = dy^2(a + gx) \quad \text{und} \quad dy = \frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{a - C + gx}};$$

diese gibt integriert

$$y = \frac{2}{g}\sqrt{C}a - C + gx.$$

5. Es ist freilich klar, dass diese die Gleichung für eine Parabel ist. Aber ihre Übereinstimmung mit der Wahrheit genauer betrachtet zu haben, wird förderlich sein. Zuerst ist es also klar, dass die Tangente dieser Kurve horizontal oder $dx = 0$ ist; dort ist $a-C+gx = 0$. Weil also der Anfang der Abszissen A von unserem Belieben abhängt, werde er in diesem Punkt selbst genommen, sodass für $x = 0$ gesetzt zugleich $y = 0$ wird. Nachdem dies betrachtet wurde, wird die Gleichung für die Kurve diese sein $y = 2\sqrt{\frac{ax}{g}}$; diese ist nicht nur offenkundig, die für eine Parabel zu sein, sondern auch, weil die Geschwindigkeit im Punkt A $\sqrt{a}$ ist, wird die Höhe CA, aus welcher der Körper beim Absinken von derselben Kraft g beeinflusst die Geschwindigkeit erhält, mit welcher er im Punkt A bewegt wird, $= \frac{a}{g}$ sein, das heißt, dem vierten Teil des Parameters gleich.

6. Es werde wie zuvor der Körper überall vertikal nach unten beeinflusst, aber die wirkende Kraft sei nicht konstant, sondern hänge irgendwie von der Höhe CP ab. Natürlich, nachdem die Abszisse $CP = x$ gesetzt wurde, sie die Kraft, mit welcher der Körper in M nach unten gedrückt wird, $= X$, irgendeiner Funktion von x. Wenn also die Ordinate $PM = y$ genannt wird, das Bogenelement $Mm = ds$ und $dy = pdx$, wird $dv = Xdx$ und $v = A + \int Xdx$ sein; daher muss dieser Ausdruck ein Minimum sein

$$\int dx\sqrt{(A + \int Xdx)(1 + pp)},$$

aus welcher für die beschriebene Kurve AM diese Gleichung erhalten werden wird

$$\sqrt{C} = \frac{p\sqrt{A + \int Xdx}}{\sqrt{1 + pp}}$$

und

$$p = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A - C + \int Xdx}} = \frac{dy}{dx}$$

oder

$$y = \int \frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{A - C + \int Xdx}}.$$

Die Tangente der Kurve wird also horizontal sein, wo $\int Xdx = C - A$ ist. Aber diese selbe Gleichung der Bahnkurve des Körpers durch die direkte Methode gefunden.

7. Es werde nun der Körper (Fig. 27) in M von zwei Kräften beeinflusst, der einen horizontalen $= Y$ gemäß der Richtung MP, der anderen vertikalen $= X$ gemäß der Richtung MQ. Es sei aber X irgendeine Funktion der vertikalen Gerade $MQ = CP = x$ und Y irgendeine Funktion der Ordinate $PM = y$.

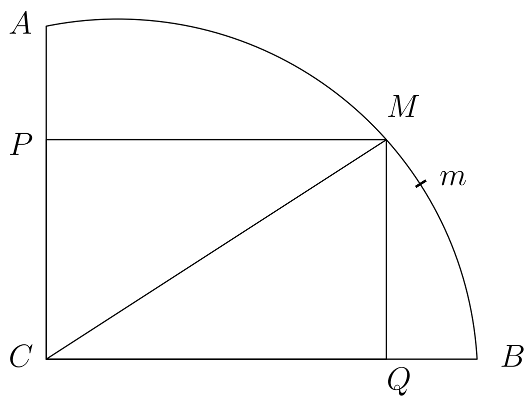

Fig. 27

Nachdem also wie zuvor $dy = pdx$ gesetzt wurde, wird gelten

$$dv = -Xdx - Ydy$$

und es wird werden

$$v = A - \int Xdx - \int Ydy;$$

woher diese Formel ein Minimum sein muss

$$\int dx\sqrt{(1+pp)(A - \int Xdx - \int Ydy)}.$$

Man differenziere

$$\sqrt{(1+pp)(A - \int Xdx - \int Ydy)}$$

und es wird hervorgehen

$$-\frac{Xdx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A - \int Xdx - \int Ydy}} - \frac{Ydy\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A - \int Xdx - \int Ydy}} + \frac{pdp\sqrt{A - \int Xdx - \int Ydy}}{\sqrt{1+pp}}$$

Daher wird für

$$N = -\frac{Y\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A - \int Xdx - \int Ydy}} \quad \text{und} \quad P = \frac{p\sqrt{A - \int Xdx - \int Ydy}}{\sqrt{1+pp}}$$

gesetzt die Gleichung für die gesuchte Kurve diese sein

$$0 = N - \frac{dP}{dx} \quad \text{oder} \quad N dx = dP.$$

Daher wird also

$$-\frac{Y\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A - \int X dx - \int Y dy}} = \frac{dp\sqrt{A - \int X dx - \int Y dy}}{(1+pp)\sqrt{1+pp}} - \frac{pX dx + pY dy}{2\sqrt{(1+pp)(A - \int X dx - \int Y dy}}$$

oder

$$\frac{dp\sqrt{A - \int X dx - \int Y dy}}{(1+pp)\sqrt{1+pp}} = \frac{X dx - Y dy}{2\sqrt{(1+pp)(A - \int X dx - \int Y dy)}}$$

und daher

$$\frac{2dp}{1+pp} = \frac{X dx - Y dy}{A - \int X dx - \int Y dy}.$$

Dass diese Gleichung mit der Wahrheit verträglich ist, wird klar werden, wenn anstelle von $A - \int X dx - \int Y dy$ v gesetzt wird; es wird nämlich sein

$$\frac{2v dp}{(1+pp)^{3:2}} = \frac{X dx - Y dy}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Aber der Krümmungsradius ist

$$r = -\frac{(1+pp)^{3:2} dx}{dp},$$

nach Einführen von welchem gilt

$$\frac{2v}{r} = \frac{Y dx - X dy}{ds},$$

wo $\frac{2v}{r}$ die Zentrifugalkraft des Körpers ist und $\frac{Y dx - X dy}{ds}$ die Normalkraft ausdrückt, die aus den wirkenden Kräften entsteht; die Gleichheit dieser Kräfte tritt bei jeder Bewegung von auf diese Weise bewegten Körpern auf.

8. Aber die gefundene Gleichung

$$\frac{2dp}{1+pp} = \frac{X dx - Y dy}{A - \int X dx - \int Y dy}$$

ist so allgemein integrierbar, wenn sie mit Nachstehendem multipliziert wird

$$\frac{p(A - \int X dx - \int Y dy)}{1+pp},$$

es wird nämlich werden

$$\frac{2pdp(A - \int X dx - \int Y dy)}{(1+pp)^2} - \frac{ppX dx - Y dy}{1+pp} = 0,$$

welche integriert gibt

$$\frac{-p^2 \int X dx + \int Y dy - A}{1+pp} = C,$$

oder

$$\int Y dy - p^2 \int X dx = A + C + Cpp,$$

woher ist

$$p = \frac{\sqrt{B + \int Y dy}}{\sqrt{C + \int X dx}}$$

nachdem B für $-A - C$ gesetzt wurde. Weil also $p = \frac{dy}{dx}$ ist, wird

$$\int \frac{dy}{\sqrt{B + \int Y dy}} = \int \frac{dx}{\sqrt{C + \int X dx}}$$

die Gleichung für die gesuchte Kurve sein, in welcher die Variablen x und y schon voneinander getrennt sind. Oder wenn die Konstanten B und C in negative verwandelt werden, wird gelten

$$\int \frac{dy}{\sqrt{B - \int Y dy}} = \int \frac{dx}{\sqrt{A - \int X dx}}.$$

Aus diesen, auch wenn man eine leichte Konstruktion der Kurve hat, werden dennoch algebraische Gleichungen, sooft sie freilich in ihnen enthalten sind, nicht so leicht gefunden. Es seien X und Y die gleichen Funktionen und zwar Potenzen von x und y, sodass gilt

$$\int \frac{dy}{\sqrt{b^n - y^n}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^n - x^n}},$$

welche Gleichung, wenn $n = 1$ ist, die Parabel liefert, wenn $n = 2$ ist, eine Ellipse, die das Zentrum in C hat, auch wenn in diesem Fall jede der beiden Integrationen die Quadratur des Kreises erfordert. Es scheint also äußerst wahrscheinlich, dass auch in anderen Fällen, in denen keine der beiden Integrationen gelingt, algebraische Kurven genügen; aber die Methode, diese zu finden, wird noch vermisst.

9. Der Körper werde in M ununterbrochen zum Fixpunkt gemäß der Richtung MC mit der Kraft gezwungen, die wie irgendeine Funktion der Distanz MC sei. Nachdem wie zuvor $CP = x$, $PM = y$ und $dy = pdx$ gesetzt worden

sind, sei $CM = \sqrt{x^2 + y^2} = t$ und T sei die Funktion von t, die die Zentripetalkraft ausdrückt. Diese Kraft werde in laterale gemäß MQ und MP aufgelöst, es wird die gemäß MQ ziehende Kraft $= \frac{Tx}{t}$ und die gemäß MP ziehende Kraft $= \frac{Ty}{t}$ sein; aus diesen entsteht diese Beschleunigung

$$dv = -\frac{Txdx}{t} - \frac{Tydy}{t} = -Tdt,$$

wegen $xdx + ydy = tdt$; daher wird

$$v = A - \int Tdt.$$

Deswegen muss dieser Ausdruck ein Minimum sein

$$\int dx \sqrt{(1+pp)(A - \int Tdt)}.$$

Nun werde gemäß der Vorschrift der Regel diese Größe differenziert

$$\sqrt{(1+pp)(A - \int Tdt)},$$

und es wird hervorgehen

$$-\frac{Tdt\sqrt{1+pp}}{(2\sqrt{A - \int Tdt}} + \frac{pdpy(A - \int Tdt)}{\sqrt{1+pp}}.$$

Wegen $dt = \frac{xdx+ydy}{t}$ wird gelten

$$N = -\frac{Ty\sqrt{1+pp}}{2t\sqrt{A - \int Tdt}} \quad \text{und} \quad P = \frac{p\sqrt{A - \int Tdt}}{\sqrt{1+pp}};$$

aus welchen für die Kurve die Gleichung $Ndx = dP$ entsteht, die liefert

$$-\frac{Tydx\sqrt{1+pp}}{2t\sqrt{A - \int Tdt}} = \frac{dp\sqrt{A - \int Tdt}}{(1+pp)\sqrt{1+pp}} - \frac{pTdt}{2\sqrt{(1+pp)(A - \int Tdt)}},$$

diese wird reduziert in diese übergehen

$$\frac{T(xdy - ydx)}{2t(A - \int Tdt)} = \frac{dp}{1+pp}.$$

10. Obwohl diese Gleichung vier verschiedene Buchstaben enthält, kann sie dennoch mit entsprechendem Geschick integriert werden. Weil nämlich gilt

$$ydy + xdx = tdt = pydx + xdx,$$

wird sein

$$dx = \frac{tdt}{x+py} \quad \text{und} \quad dy = \frac{ptdt}{x+py},$$

welche Werte in der Gleichung eingesetzt geben werden

$$\frac{(px-y)Tdt}{2(x+py)(A-\int Tdt)} = \frac{dp}{1+pp}$$

oder

$$\frac{Tdt}{2(A-\int Tdt)} = \frac{dp(py+x)}{(1+pp)(px-y)}.$$

Jeder dieser beiden Ausdrücke ist durch Logarithmen integrierbar, es ist nämlich

$$\int \frac{Tdt}{2(A-\int Tdt)} = -\frac{1}{2}l(A-\int Tdt)$$

und

$$\int \frac{dp(x+py)}{(1+pp)(px-y)}$$

wird aufgelöst in

$$\int \frac{xdp}{px-y} - \int \frac{pdp}{1+pp} = l\frac{px-y}{\sqrt{1+pp}};$$

sodass gilt

$$\frac{C}{\sqrt{A-\int Tdt}} = \frac{px-y}{\sqrt{1+pp}};$$

durch diese Gleichung wird aufgezeigt, dass die Geschwindigkeit des Körpers in M, die diese ist

$$= \sqrt{A-\int Tdt},$$

umgekehrt wie das Lot ist, das aus C zur Tangente gefällt wurde; dies ist die vorzügliche Eigenschaft dieser Bewegungen.

11. Dieses selbe Problem kann aber angenehmer aufgelöst werden, indem die Gerade CM selbst für die andere Variable angenommen wird. In der Tat erfordert die oben angegebene Methode nicht, dass die beiden Variablen orthogonale Koordinaten sind, solange sie zwei Größen solcher Art sind,

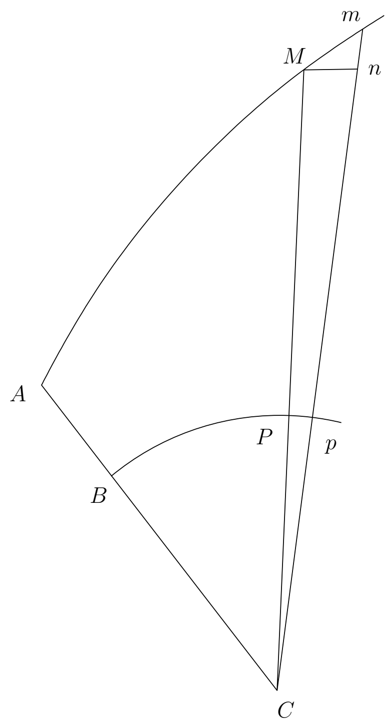

FIG. 28

nach Bestimmen von welchen zugleich ein Punkt der Kurve bestimmt wird. Diese Grundes wegen wäre es nicht erlaubt, die Distanz CM mit dem aus C zur Tangente gefällten Lot für jene zwei Variablen anzunehmen, weil ja, auch wenn die Distanz vom Zentrum und das Lot zur Tangente gegeben sind, daher dennoch der Ort eines Punktes der Kurve nicht bestimmt wird. Es hindert aber nichts daran, dass die Distanz CM (Fig. 28) und der Bogen des um das Zentrum C beschriebenen Kreises BP anstelle der zwei Variablen eingesetzt werden, weil; nachdem der Bogen BP und die Distanz CM gegeben worden sind, ein Punkt M der Kurve gleichermaßen bestimmt wird, wie durch orthogonale Koordinaten. Mit dieser Bemerkung wird also der Gebrauch unserer Methode um Vieles weiter ausgedehnt, als es andernfalls erscheinen kann.

12. Es sei also die Distanz des Körpers vom Zentrum $MC = x$ und die Kraft, mit welcher der Körper zum Zentrum C bewegt wird, sei $= X$, irgendeiner Funktion von x. Um das Zentrum C, nachdem nach Belieben der Radius $BC = c$ angenommen wurde, werde der Kreis beschrieben, dessen Bogen BP den Platz der anderen Variable y einnehme, so dass $Pp = dy = pdx$ wird. Aus der wirkenden Kraft ist aber $dv = -Xdx$, woher $v = A - \int Xdx$ ist. Um das Zentrum C, mit dem Radius $CM = x$, werde der kleine Bogen Mn beschrieben, es wird gelten

$$mn = dx \quad \text{und} \quad CP : Pp = CM : Mn,$$

woher wird

$$Mn = \frac{pxdx}{c}$$

und das Element des Raumes

$$Mn = dx\sqrt{1 + \frac{ppxx}{cc}}.$$

Deswegen muss diese Formel ein Minimum sein

$$\int dx\sqrt{(A - \int Xdx)\left(1 + \frac{ppxx}{cc}\right)},$$

aus welcher dieser Differentialwert entsteht

$$\frac{1}{dx}d \cdot \frac{pxx\sqrt{A - \int Xdx}}{c\sqrt{cc + ppxx}},$$

der, nach der Regel gleich null gesetzt, diese Gleichung liefern wird:

$$\sqrt{C} = \frac{pxx\sqrt{A - \int Xdx}}{c\sqrt{cc + ppxx}}$$

oder

$$Cc^4 + Cccppxx = (A - \int Xdx)ppx^4,$$

aus welcher wird

$$p = \frac{cc\sqrt{C}}{\sqrt{(A - \int Xdx)x^4 - Cccxx}} = \frac{cc\sqrt{C}}{x\sqrt{(A - \int Xdx)xx - Ccc}}$$

oder

$$dy = \frac{ccdx\sqrt{C}}{x\sqrt{(A - \int Xdx)xx - Ccc}},$$

welche selbe Gleichung durch die direkte Methode gefunden wird.

13. Aus diesen Fällen wird sich also die vollkommenste Übereinstimmung des hier aufgestellten Prinzips mit der Wahrheit zeigen; ob aber diese Übereinstimmung auch in komplizierteren Fällen Geltung behalten wird, darüber kann noch Zweifel bestehen. Deswegen, wie weit sich dieses Prinzip erstreckt, wird umso sorgfältiger zu untersuchen sein, dass diesem nicht mehr zugeteilt wird, als seine Natur zulässt. Um dies zu erklären, muss die Aktion aller in Bewegung versetzen Körper in zwei Arten aufgeteilt werden, in der einen von welchen die Geschwindigkeit des Körpers, welche er an einer gewissen Stelle hat, allein von der Lage abhängt; sodass, wenn er zur selben Lage zurückkehrt, auch dieselbe Geschwindigkeit erhalten wird; dies passiert, wenn der Körper entweder zu einem oder mehreren Fixzentren von Kräften gezogen wird, die wie irgendwelche

Funktionen der Distanzen von diesen Zentren seien. Zu der anderen Art zähle ich aber die Aktion von bewegten Körpern, in welchen die Geschwindigkeit des Körpers durch den Ort allein, in welchem er sich befindet, nicht bestimmt wird; das passiert entweder, wenn jene Zentren, zu welchen der Körper bewegt wird, beweglich waren, oder, wenn die Bewegung in einem resistierenden Medium geschieht. Nachdem diese Aufteilung vorgenommen wurde, ist zu bemerken, sooft die Bewegung des Körpers sich auf die erste Art bezieht, das heißt, wenn der Körper nicht nur zu einem, sondern zu wie vielen Fixzentren auch immer von irgendwelchen Kräften bewegt wird, dass sooft in dieser Aktion die Summe alle elementaren Bewegungen minimal sein wird.

14. Dieses selbst erfordert aber die Gestalt der Proposition; während nämlich zwischen gegebenen Grenzen die Kurve gesucht wird, in welcher $\int ds\sqrt{v}$ ein Minimum ist, wird daher angenommen, dass die Geschwindigkeit an jeder der beiden Enden dieselbe ist, was für eine Kurve auch immer den Weg des Körpers festlegt. Wie viele Fixzentren an Kräften es aber auch immer waren, die Geschwindigkeit des Körpers an jeder Stelle M (Fig. 27) wird mit einer bestimmten Funktion der beiden Variablen $CP = x$ und $PM = y$ ausgedrückt. Es sei also v irgendeine Funktion von x und y, sodass $dV = Tdx + Vdy$ ist, und wir wollen sehen, ob unserer Prinzip die wahre Bewegungskurve des Körpers darbieten wird. Weil aber $dv = Tdx + Vdy$ ist, wird der Körper genauso bewegt werden, als wenn er in M von zwei Kräften beeinflusst werden würde, der einen T in der den Abszissen x parallelen Richtung, aber der anderen V in der den Ordinaten y parallelen Richtungen, aus welchen dies entsteht

$$\text{Tangentialkraft } = \frac{Tdx + Vdy}{ds} \quad \text{und Normalkraft } = \frac{-Vdx + Tdy}{ds}.$$

Es muss aber aus der Natur einer freien Bewegung sein

$$\frac{2v}{r} = \frac{-Vdx + Tdy}{ds} = \frac{-V + Tp}{\sqrt{1+pp}};$$

wenn die Methode der Maxima und Minima auf diese Gleichung führt, wird natürlich unserer Prinzip mit der Wahrheit konform sein.

15. Weil also durch dieses Prinzip $\int dx\sqrt{v(1+pp)}$ ein Minimum sein muss, werde die Größe $\sqrt{v(1+pp)}$ differenziert und wegen $dv = Tdx + Vdy$ wird entstehen:

$$\frac{Tdx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{v}} + \frac{Vdy\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{v}} + \frac{pdp\sqrt{v}}{\sqrt{1+pp}},$$

woher für die gesuchte Kurve die folgende Gleichung gemäß der angegebenen Vorschriften erhalten werden wird

$$\frac{Vdx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{v}} = d \cdot \frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dp\sqrt{v}}{(1+pp)^{3:2}} + \frac{p(Tdx + Vdy)}{2\sqrt{v(1+pp)}}$$

oder

$$-\frac{dp\sqrt{v}}{(1+pp)^{3:2}} = \frac{Tpdx - Vdx}{2\sqrt{v(1+pp)}}.$$

Aber der Krümmungsradius in M ist

$$= -\frac{(1+pp)dx\sqrt{1+pp}}{dp};$$

wenn dieser $= r$ gesetzt wird, wird sein

$$\frac{2v}{r} = \frac{Tp - V}{\sqrt{1+pp}},$$

ganz und gar wie durch die direkte Methode gefunden wird. Solange also die wirkenden Kräfte so beschaffen waren, dass sie auf die zwei Kräfte T und V zurückgeführt werden können, die gemäß der den Koordinaten x und y parallelen Richtungen wirken und die wie irgendwelche Funktionen dieser Variablen x und y sind, dann wird immer in der gefundenen Kurve die Aktion des Körpers durch alle Elemente hindurch gesammelt minimal sein.

16. Dieses Prinzip erstreckt sich also so weit, dass allein die von dem Widerstand eines Mediums gestörte Aktion auszunehmen scheint; die Begründung dieser Ausnahme wird freilich leicht erkannt, deshalb weil in diesem Fall der Körper, der durch verschiedene Wege hindurch zum selben Ort gelangt, nicht dieselbe Geschwindigkeit erhält. Deswegen, nach Beiseiteschaffen jeden Widerstandes in der Aktion eines ein Bewegung gebrachten Körpers, wird immer diese konstante Eigenschaft Geltung haben, dass die Summe aller elementaren Aktionen minimal ist. Und in der Tat wird diese Eigenschaft nicht nur bei der Aktion eines Körpers wahrgenommen, sondern auch bei der Aktion mehrerer Körper zusammengenommen, die auf irgendeine Weise interagieren, ist die Summe aller Aktionen immer minimal. Dies, weil eine Aktion dieser Art schwer auf eine Rechnung zurückgeführt wird, wird leichter aus den ersten Prinzipien eingesehen, als aus der Übereinstimmung der gemäß jeder der beiden Methoden unternommenen Rechnung. Weil ja nämlich Körper sich wegen der Trägheit jeder Veränderung des Zustandes widersetzen, werden sie den wirkenden Kräften nur so wenig gehorchen, wie es geschehen kann, wenn sie freilich frei sind; daher wird aber bewirkt, dass in der erzeugten Bewegung die von den Kräften entstandene Wirkung kleiner sein muss, als wenn der Körper oder die Körper auf eine andere Weise bewegt worden wären. Vermöge dieser Begründung, auch wenn sie noch nicht zur Genüge erkannt wird, zweifle ich dennoch, weil sie mit der Wahrheit übereinstimmt, nicht, dass sie mit Hilfe verständiger Metaphysik zu einem höheren Maß an Evidenz erhoben werden kann; diese Aufgabe überlasse ich anderen, die sich mit Metaphysik beschäftigen.