Beobachtungen über den Vergleich von Bögen irrektifizierbarer Kurven*

Leonhard Euler

Einleitung

§0 Mathematische Beobachtungen scheinen, wenn wir auf deren Nützlichkeit achten, auf zwei Klassen zurückgeführt werden zu müssen; zur ersten sind die zu zählen, die sowohl für das allgemeinen Leben als auch für andere Künste irgendeinen außerordentlichen Nutzen bringen, deren Wert deshalb aus der Größe dieses Nutzens festgesetzt zu werden pflegt. Die andere Klasse umfasst die Beobachtungen, die, auch wenn sie mit keinem außerordentlichen Nutzen verbunden sind, dennoch so beschaffen sind, dass sie, um die Grenzen der Analysis zu erweitern und die Fähigkeiten unseres Geistes zu schärfen eine Gelegenheit bieten. Weil wir nämlich gezwungen sind die meisten Untersuchungen, woher ein sehr großer Nutzen erwartet werden könnte, wegen des Fehlens der Analysis aufzuhören, die einen nicht zu verachtenden Zuwachs für die Analysis brachten. Für diesen Zweck scheinen aber die Beobachtungen solcher Art besonders geeignet, weil sie in einem Fall gemacht und von einem späteren entdeckt worden sind, die Methode zu denselben vom ersten und durch einen direkten Weg zu gelangen wenig oder gar nicht durchschaut worden ist. So wird sich nämlich mit einer schon bekannten Wahrheit die Methoden leichter finden lassen, die direkt zu dieser führen werden; daran,

*Originaltitel: „Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificibilium", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, 1761, pp. 58-84", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 20, pp. 80 - 107", Eneström-Nummer E252, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener (Korrektur: Janos Tien, Euler-Seminar WS 2013/14), im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

dass aber durch das Finden neuer Methoden die Grenzen der Analysis nicht gerade unwesentlich erweitert werden, besteht natürlich kein Zweifel.

Beobachtungen solcher Art, die durch keine bestimmte Methode gemacht worden sind und deren Wesen nicht wenig mysteriös scheint, habe ich im Werk von Fagano, welches neulich erschien, einige entdeckt; diese sind deshalb als der ganzen Aufmerksamkeit würdig anzusehen und Eifer, der bei einer weiteren Untersuchung von diesen verbraucht wird, wird als nicht unnütz verwendet zu beurteilen sein. Es werden aber in dem Buch einige außergewöhnliche Eigenschaften, mit denen die Ellipse, die Hyperbel und die Lemniskate versehen sind, mitgeteilt und verschiedene Bögen dieser Kurven untereinander verglichen; weil also die Art dieser Eigenschaften besonders verborgen scheint, glaube ich, dass es nicht unpassend sein wird, wenn ich diese sorgfältiger untersuchen werde, und das, was mir darüber hinaus geglückt ist über diese Kurven herauszufinden, mit der Allgemeinheit teile.

Was also zuerst diese Kurven angeht, ist bekannt, dass deren Rektifikation alle Möglichkeiten der Analysis übersteigt, sodass deren Bögen nicht nur nicht algebraisch ausgedrückt werden können, sondern auch nicht einmal auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel zurückgeführt werden können. Daher muss es umso wundersamer scheinen was Fagano gefunden hat, dass bei Ellipse und Hyperbel auf unendlich viele Arten zwei Bögen solcher Art beschafft werden können, die unter sich entweder gleich seien oder die eine zur anderen im doppelten Verhältnis steht, woher man eine Art berechnet, bei dieser Kurve auch Bögen solcher Art anzugeben, die in einem anderen Verhältnis zueinander stehen.

Für die Ellipse und die Hyperbel war es mir freilich nicht möglich, außerdem etwas zu finden; daher werde ich zufrieden sein, eine leichtere Konstruktion dieser Bögen gegeben zu haben, deren Differenz geometrisch beschafft werden soll. Für die Lemniskate aber, habe ich denselben Weg folgend viel mehr, sogar unendlich viele Formeln gefunden, mit deren Hilfe ich nicht nur auf unendlich viele Weisen zwei Winkel solcher Art bestimmen kann, die einander entweder gleich seien oder im doppelten Verhältnis zueinander stehen, sondern die auch in einem beliebigen Zahlenverhältnis sein können.

I. Über die Ellipse

§1 Es sei ABC der elliptische Quadrant, dessen Zentrum in C ist, und man setze seine Halbachse $CA = 1$ und $CB = c$; nachdem also eine beliebige

Abszisse $CP = x$ genommen wurde, wird die ihr entsprechende Ordinate $PM = y = c\sqrt{1-xx}$ sein; weil ihr Differential $\mathrm{d}y = -\frac{cx\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}}$ ist, wird der der Abszisse $CP = x$ enstprechende Ellipsenbogen

$$BM = \int \frac{\mathrm{d}x\sqrt{1-(1-cc)xx}}{\sqrt{1-xx}}$$

sein. Man setze der Kürze wegen $1 - cc = n$, sodass der Bogen

$$BM = \int \mathrm{d}x\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}$$

ist, und es wird, nachdem eine andere Abszisse $CQ = u$ genommen wurde, auf die gleiche Weise der ihr entsprechende Bogen

$$BN = \int \mathrm{d}u\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$$

sein. Nachdem diese so gesetzt wurden, ist gesucht, wie diese zwei Abszissen x und u zu einer in Beziehung gesetzt werden müssen, sodass die Summe der Bögen

$$BM + BN = \int \mathrm{d}x\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + \int \mathrm{d}u\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$$

integrierbar wird oder geometrisch beschafft werden kann.

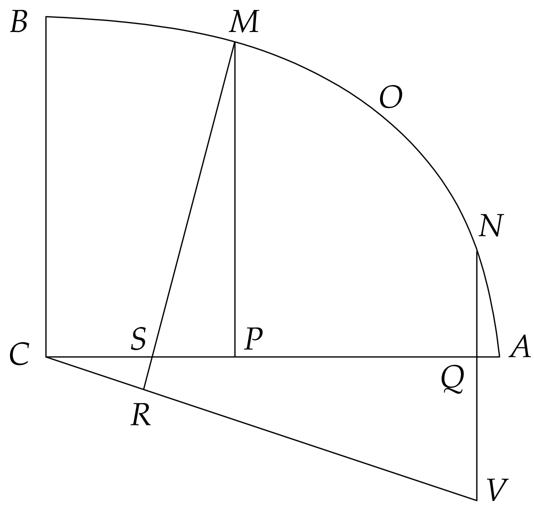

Fig. 1

§2 Die Frage geht also darauf zurück, dass man bestimmt, eine Funktion welcher Art von x anstelle von u eingesetzt werden muss, dass die Differentialformel

$$dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}+du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$$

eine Integration zulässt. Man sieht aber leicht ein, wenn man diese Frage im Allgemeinen betrachtet, dass ihre Lösung auf der Integration jeder der beiden Formeln beruht und daher genauso über die Grenzen der Analysis hinausgeht wie die Rektifikation der Ellipse selbst. Weil also eine allgemeine Lösung in keiner Weise erwartet werden kann, werden Teillösungen zu suchen sein; wie diese aber auf keine bestimmte Art gefunden werden können, so wird auch ein Spezialfall und eine Vermutung sehr zu schätzen sein; daraus wird aber deren wahres Fundament, auch wenn sie selbst bekannt sind, kaum erkannt werden können.

§3 Zuerst ergibt sich freilich der Fall $u=-x$, in welchem unsere Differentialformel verschwindet; aber weil daher zwei absolut gleiche Ellipsenbögen entstehen, ist, wie dieser Fall zu offensichtlich ist, er so auch anzusehen der vorgelegten Frage keineswegs zu genügen. Weil also durch Versuche die ganze Aufgabe bewältigt werden muss, setze man

$$\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}=\alpha u$$

an und verstehe α so, dass andererseits

$$\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}=\alpha x$$

wird; so wird man nämlich

$$BM+BN=\alpha\int u\mathrm{d}x+\alpha\int x\mathrm{d}u=\alpha xu+\text{const}$$

haben, genauso wie gefordert. Für den wahren Wert von α werden wir aber so

$$1-nxx-\alpha\alpha uu+\alpha\alpha uuxx=0 \quad \text{wie} \quad 1-nuu-\alpha\alpha xx+\alpha\alpha xxuu=0$$

haben, woher klar ist, dass $\alpha\alpha=n$ und $\alpha=\sqrt{n}$ gesetzt werden muss, sodass

$$u=\sqrt{\frac{1-nxx}{n-nxx}} \quad \text{ist und} \quad BM+BN=xu\sqrt{n}+\text{const.}$$

§4 Auch wenn auf diese Weise der Frage genügt scheint, können dennoch diese Bestimmungen bei einer Ellipse keine Geltung haben. Denn weil $n < 1$ ist, weil $n = 1 - cc$ war, wird $n - nxx < 1 - nxx$ sein und daher $u > 1$; die Abszisse CQ würde also die Achse CA überragen und ihr würde deshalb ein imaginärer Bogen entsprechen, sodass daher keine sichere Schlussfolgerung abgeleitet werden könnte.

§5 Wir wollen also andere Formeln versuchen und es sei so

$$\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} = \frac{\alpha}{u} \quad \text{wie} \quad \sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} = \frac{\alpha}{x},$$

woher wir wegen

$$\alpha\alpha - \alpha\alpha xx - uu + nxxuu = 0 \quad \text{und} \quad \alpha\alpha - \alpha\alpha uu - xx + nxxuu = 0$$

$\alpha = 1$ berechnen, sodass

$$1 - uu - xx + nxxuu = 0 \quad \text{ist und daher} \quad u = \sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}.$$

Daher geht aber

$$BM + BN = \int \frac{\mathrm{d}x}{u} + \int \frac{\mathrm{d}u}{x} = \int \frac{x\mathrm{d}x + u\mathrm{d}u}{xu}$$

hervor. Aber die Gleichung $uu + xx = 1 + nxxuu$ gibt differentiert

$$x\mathrm{d}x + u\mathrm{d}u = nxu(x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x) \quad \text{oder} \quad \frac{x\mathrm{d}x + u\mathrm{d}u}{xu} = n(x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x),$$

woher wir

$$BM + BN = n\int (x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x) = nxu + \text{const.}$$

folgern.

§6 Diese Lösung ist mit keiner Unannehmlichkeit verbunden; weil nämlich $n < 1$ ist, wird $1 - nxx > 1 - xx$ sein und daher $u < 1$, wie es die Natur der Sache erfordert. Nachdem also irgendeine Abszisse $CP = x$ genommen wurde, nehme man für die andere

$$CQ = u = \sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$$

und die Summe der Bögen wird $BM + BN = nxu + \text{const}$ sein. Um diese Konstante zu bestimmen, sei $x = 0$, sodass $BM = 0$ wird; und es wird $u = 1$ sein und der Bogen BN geht über in den Quadranten $BMNA$; daher wird $0 + BMNA = 0 + \text{const}$ und die Konstante wird gleich $BMNA$ sein. Nach Einsetzen dieses Wertes an ihre Stelle werden wir

$$BM + BN = nxu + BMNA$$

haben und daher

$$BM - AN = nxu = (1 - cc)xu = BN - AM.$$

§7 Nachdem also in einem elliptischen Quadranten ACB irgendein Punkt M gegeben wurde, können wir einen anderen Punkt N angeben, sodass die Differenz der Bögen $BM - AN$, oder was dieser gleich ist, $BN - AM$, geometrisch ausgedrückt werden kann. Damit das leichter geleistet werden kann, wollen wir zur Ellipse im Punkt M die Normale MS führen; es wird die Subnormale $PS = ccx$ sein und wegen $PM = c\sqrt{1 - xx}$ die Normale selbst

$$MS = c\sqrt{1 - xx + ccxx} = c\sqrt{1 - nxx}$$

und daher wird für den anderen Punkt N die Abszisse $CQ = u = \frac{PM}{MS}CA$ sein. Oder man fälle zur fortgeführten Normale von C aus das Lot CR, welches man bis zu V fortführe, sodass $CV = CA = 1$ ist, und wegen $\frac{CR}{CS} = \frac{PM}{MS}$ wird $CQ = \frac{CR}{CS}CV$ sein. Daher führe man von dem Punkt V aus zur Achse CA die Senkrechte VQ, welche den Punkt Q und fortgeführt den Punkt N selbst bezeichnen wird.

§8 Weil $PS = ccx$ ist, wird $CS = x - ccx = nx$ sein und daher

$$CR = \frac{CQ \cdot CS}{CV} = \frac{u \cdot nx}{1} = nux.$$

Diese Senkrechte CR selbst also wird die Differenz der Bögen $BM - AN$ oder $BN - AM$ beschaffen. Die Differenz der auf diese Weise bezeichneten Bögen wird gleich $nx\sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$ sein, welche also so im Fall $x = 0$ wie $x = 1$ verschwindet, in welchen die Punkte M und N auf die Punkte B und A selbst fallen. Diese Differenz wird aber am größten, wenn $nx^4 - 2xx + 1 = 0$ ist, das heißt, wenn $x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$ ist, in welchen Fall $x = u$ wird und die beiden Punkte M und N zu einem Punkt O zusammenlaufen; und es wird in diesem die

Differenz der Bögen $BO - AO = nxx = 1 - c$ sein und daher der Differenz $CA - CB$ der Halbachse selbst gleich werden, sodass $CA + AO = CB + BO$ ist.

§9 Wenn der Punkt M in diesem Punkt O selbst genommen wird, sodass

$$CP = x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$$

ist, so wird

$$PM = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}} \quad \text{und} \quad PS = \frac{cc}{\sqrt{1+c}}$$

sein und daher $MS = c\sqrt{c}$, woher auf verschiedene Weisen die Lage des Punktes O angenehm bestimmt werden können wird. Weil also

$$CM = CO = \frac{\sqrt{1+c^3}}{\sqrt{1+c}} = \sqrt{1-c+cc} = \sqrt{1+cc-2c\cos 60^\circ}$$

ist, woher man eine leichte Konstruktion ableitet, schien es also die folgenden Theoreme hinzuzufügen, deren Beweis aus dem erwähnten schon klar ist.

Theorem 1

§10 Wenn in einem elliptischen Quadranten ACB an einem beliebigen Punkt M die Tangente HMK angelegt wird, die die eine Achse CB in H schneide, und sie der anderen Halbachse CA gleich genommen wird, dass $HK = CA$ ist, dann aber durch K eine Paralle KN zur Achse CB, die die Ellipse in N schneidet, geführt wird, dann wird die Differenz $BM - AN$ der Bögen BM und AN geometrisch angegeben werden können; nachdem nämlich vom Mittelpunkt C aus zur Tangente ein Lot CT gefällt worden ist, wird diese Differenz der Bögen $BM - AN = MT$ sein.

Der Beweis ist aus der Figur von selbst klar, weil die Tangente HMK zur jener Geraden CRV parallel und ihr gleich ist; dann ist in der Tat klar, dass $MT = CR$ ist.

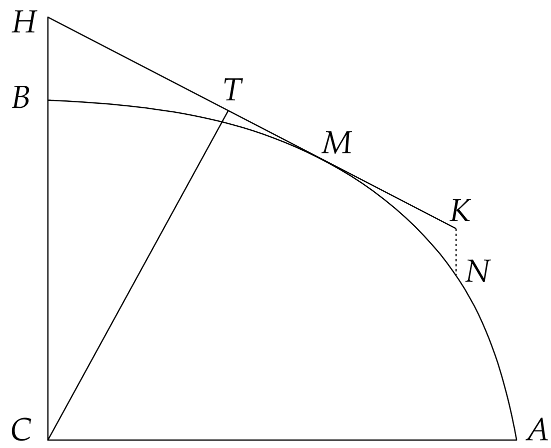

FIG. 2

THEOREM 2

§11 Wenn über der einen Halbachse CA des elliptischen Quadranten ACB ein gleichseitiges Dreieck CAE kontruiert wird und bei seiner Seite AE ein Teil $AF = CB$ genommen wird und man eine der Strecke CF gleich Gerade CO auf der Ellipse abträgt, dann wird der Punkt O die Eigenschaft haben, dass

$$CA + \text{arc } AO = CB + \text{arc } BO$$

ist.

Der Beweis ist aus §9 klar. Weil nämlich $CA = 1$, $AF = c$ und $\measuredangle CAF = 60^\circ$ ist, wird

$$CF = \sqrt{1 + cc - 2c\cos 60^\circ}$$

sein und daher gleich CO.

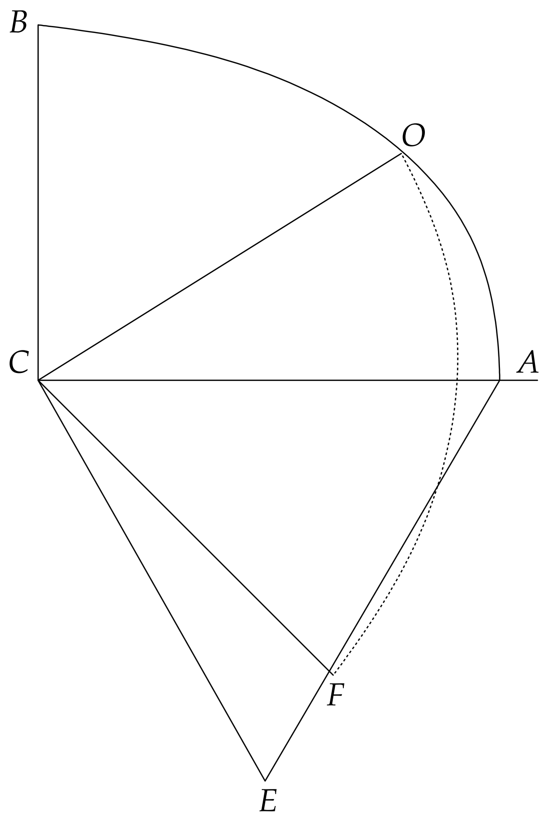

FIG. 3

II. ÜBER DIE HYPERBEL

§12 Es sei C das Zentrum der Hyperbel AMN und ihre querliegende Halbachse $CA = 1$, die konjugierte Halbachse gleich c; es wird, nachdem irgendeine Abszisse $CP = x$ genommen wurde, die Ordinate $PM = c\sqrt{xx-1}$ sein und ihr Differential $\frac{cx\mathrm{d}x}{\sqrt{xx-1}}$; daher wird der Bogen

$$AM = \int \frac{\mathrm{d}x\sqrt{(1+cc)xx-1}}{\sqrt{xx-1}}.$$

Man setze der Kürze wegen $1 + cc = n$; es wird

$$AM = \int \mathrm{d}x\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}}$$

sein. Wenn also auf die gleiche Weise eine Abszisse $CQ = u$ genommen wird, wird der ihr entsprechende Bogen

$$AN = \int \mathrm{d}u \sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}}$$

sein.

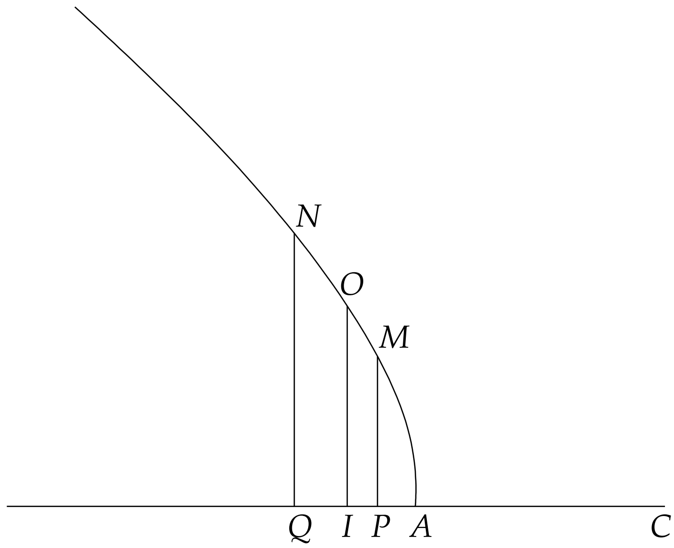

FIG. 4

§13 Nachdem dies so festgesetzt wurde, sei uns nun diese Frage vorgelegt, dass, nachdem ein Punkt M gegeben wurde, ein anderer N so bestimmt wird, dass die Summe der Bögen $AM + AN$ oder der Ausdruck

$$\int \mathrm{d}x \sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} + \int \mathrm{d}u \sqrt{\frac{nuu1}{uu-1}}$$

uneingeschränkt eine Integration zuässt; dass das im Fall $u = -x$ passiert, ist von selbst klar, aber daraus lässt sich für unser Unternehmen nichts schließen.

§14 Wir wollen daher

$$\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} = u\sqrt{n}$$

setzen, weil daher andererseits

$$\sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}} = x\sqrt{n}$$

wird; daher wird bei beiden nämlich diese Gleichung $nuuxx - n(uu + xx) + 1 = 0$ hervorgehen. Nachdem aber diese Annahme gemacht wurde, geht die Summe der Bögen

$$AM + AN = \int u\mathrm{d}x\sqrt{n} + \int x\mathrm{d}u\sqrt{n} = ux\sqrt{n} + \mathrm{const}$$

hervor. Damit diese Integrierbarkeit also Geltung hat, muss $u = \sqrt{\frac{nxx-1}{nxx-n}}$ sein, woher, weil wegen $n > 1$ auch $u > 1$ hervorgeht, aus einem gegebenen Punkt M immer ein anderer Punkt N angegeben können wird.

§15 Um die Konstante zu bestimmen, ist klar, dass der Fall $x = 1$, in welchen der Punkt M auf den Scheitel A fällt, nichts hilft, weil daher $u = \infty$ entsteht und der Punkt N ins Unendliche wegbewegt wird. Damit deshalb diese Konstante enstprechend bestimmt wird, muss ein anderer Fall betrachtet werden; es ergibt sich aber kein besserer als der, wo die Punkte M und N zu einem zusammenlaufen oder in dem $x = u$ und $nx^4 - 2nxx + 1 = 0$ wird. Daher entsteht aber

$$xx = 1 + \frac{c}{\sqrt{1+cc}} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{1 + \frac{c}{\sqrt{1+cc}}}.$$

§16 Es sei also O dieser Punkt, in dem die beiden Punkte M und N zusammenlaufen, und nachdem die Ordinate OI genommen wurde, wird die Abszisse $CI = \sqrt{1 + \frac{c}{\sqrt{1+cc}}}$ sein und $2AO = c + \sqrt{1+cc} + \mathrm{const}$. Daher werden wir also die gesuchte Konstante gleich

$$2AO - c - \sqrt{1+cc}$$

erhalten, wegen $\sqrt{n} = \sqrt{1+cc}$. Nach Einsetzen dieses Wertes wird für alle verschiedenen so genommenen Punkte M und N, sodass $u = \sqrt{\frac{nxx-1}{nxx-n}}$ ist, die Summe der Bögen

$$AM + AN = ux\sqrt{n} + 2AO - c - \sqrt{1+cc}$$

sein oder

$$ON - OM = ux\sqrt{n} - c - \sqrt{1+cc}.$$

So haben wir also zwei Bögen ON und OM erhalten, deren Differenz $ON - OM$ geometrisch angegeben werden kann.

§17 Damit aber leichter klar wird, wie so der Punkt O aus dem Punkt M der Punkt N bestimmt werden kann, fälle man in A das Lot $AD = c$ und es wird die Gerade CD die Asymptote der Hyperbel sein; dann, nachdem $CP = x$ und $PM = y$ gesetzt wurde, bilde man die Tangente MT; es wird wegen

$$y = c\sqrt{xx-1} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = \frac{cx\mathrm{d}x}{\sqrt{xx-1}}$$

die Subtangente

$$PT = \frac{y\sqrt{xx-1}}{cx} = x - \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad CT = \frac{1}{x}$$

sein und die Tangente selbst

$$MT = \frac{y\sqrt{nxx-1}}{cx}.$$

Daher geht

$$\sqrt{\frac{xx-1}{nxx-1}} = \frac{PT}{MT} \quad \text{hervor und daher} \quad u = \frac{MT}{PT\sqrt{1+cc}} = \frac{CA^2 \cdot MT}{CD \cdot PT} = CQ.$$

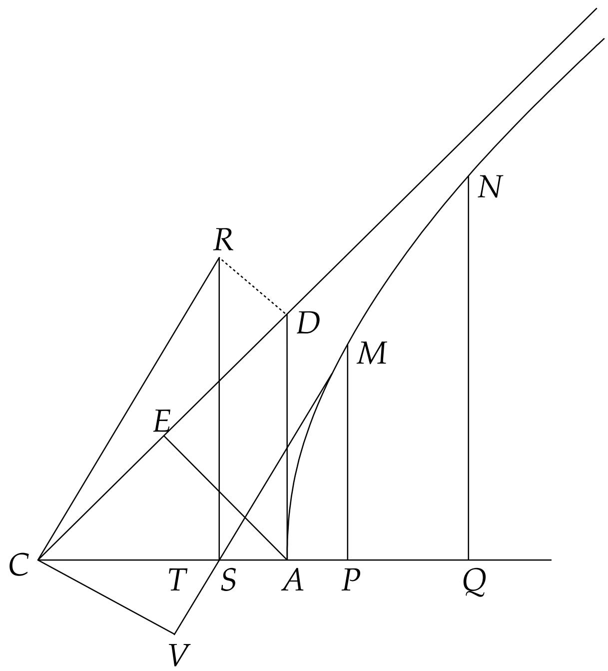

Fig. 5

§18 Man ziehe vom Zentrum C aus eine Parallele $CR = CD$ zur Tangente TM und, nachdem von R aus zur Achse das Lot RS gefällt wurde, wird $CS = \frac{CD \cdot PT}{MT}$ sein und daher $CQ = \frac{CA^2}{CS}$. Daher wird eine dritte CQ proportional zu CS und CA zu nehmen sein. Angenehmer aber wird die Sache auf die folgende Weise ohne Zuhilfenahme von Tangenten erledigt werden; denn weil

$$QN = \frac{cc}{\sqrt{n(xx-1)}} = \frac{c^3}{y\sqrt{n}}$$

ist, wird

$$PM \cdot QN = \frac{c^3}{\sqrt{1+cc}} = \frac{AD^3}{CD}$$

sein und es wird, nachdem von A aus zur Asymptote das Lot AE gefällt wurde,

$$PM \cdot QN = AD \cdot DE$$

sein, wegen $DE = \frac{AD^2}{CD}$, woher das folgende Theorem ensteht.

THEOREM 3

§19 Während AOZ eine Hyperbel wird, C ihr Zentrum, A der Scheitel und CDZ ihre Asymptote, zu welcher von A aus zur Achse senkrecht die Gerade AD gezogen worden sei und so die Senkrechte AE zur Asymptoten, wenn die Ordinate IO als mittlere Proportionale zwischen AD und DE festgesetzt wird und auf beiden Seiten die Ordinaten PM und QN so gesetzt werden, dass zwischen ihnen IO die mittlere Proportionale ist, dann wird die Differenz der Bögen ON und OM geometrisch angegeben werden können. Es wird nämlich

$$ON - OM = \frac{CP \cdot CQ - CI \cdot CI}{CE}$$

sein.

Der Beweis ist aus dem vorhergehenden Paragraphen klar. Weil nämlich, während die Punkte M und N in O zusammenlaufen, $IO \cdot IO = AD \cdot DE$ ist, wird IO die mittlere Proportionale zwischen AD und DE sein; und nachdem diese gefunden wurde, muss $PM \cdot QN = OI \cdot OI$ sein. Dann sieht man aber aus §16 ein, dass $ON - OM = (CP \cdot CQ - CI \cdot CI)\sqrt{n}$ ist und wegen $\sqrt{n} = CD$ wird, indem man die Homogenität erfüllt, $ON - OM = (CP \cdot CQ - CI \cdot CI)\frac{CD}{CA^2}$ sein. Aber es ist $\frac{CA^2}{CD} = CE$ und so steht die Gültigkeit des Theorems fest.

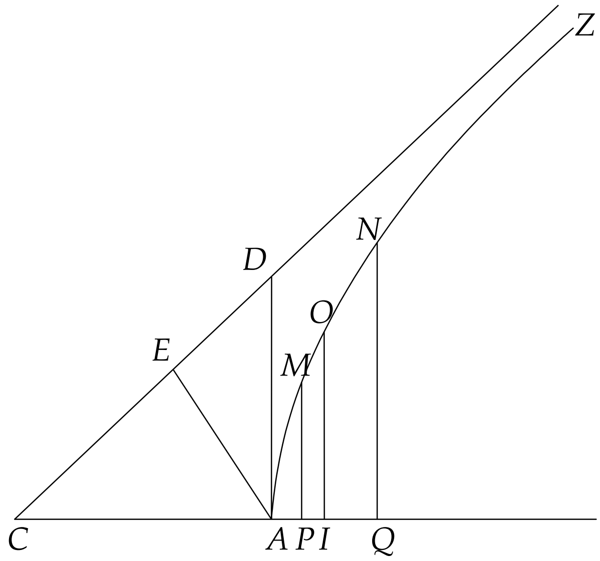

FIG. 6

III. ÜBER DIE LEMNISKATE

§20 Die Kurve ist wegen der vielen ausgezeichneten Eigenschaften, mit denen sie versehen ist, unter den Mathematikern gefeiert, besonders aber, weil ihr Bogen den Bögen der Curva elastica gleich sind. Die Gestalt dieser Kurve ist so beschaffen, dass, nachdem die orthogonalen Koordinaten $CP = x$ und $PM = y$ gesetzt worden sind, sie durch diese Gleichung ausgedrückt wird

$$(xx + yy)^2 = xx - yy.$$

Daher ist klar, dass diese Kurve eine Linie vierten Grades ist, die in C, welcher Punkt als ihr Zentrum bezeichnet wird, mit der Achse CA einen halbrechten Winkel einschließt, in A aber, nachdem $CA = 1$ genommen wurde, die Achse orthogonal schneidet. Die Figur $CMNA$ aber beschafft den vierten Teil der ganzen Lemniskate, welchem die übrigen drei Teile über dem Zentrum C gleich zu verstehen sind; das ist daher klar, weil, ob die Abszisse x oder die Ordinate y oder jede von beiden einen negativen Wert annimmt, die Gleichung dieselbe bleibt.

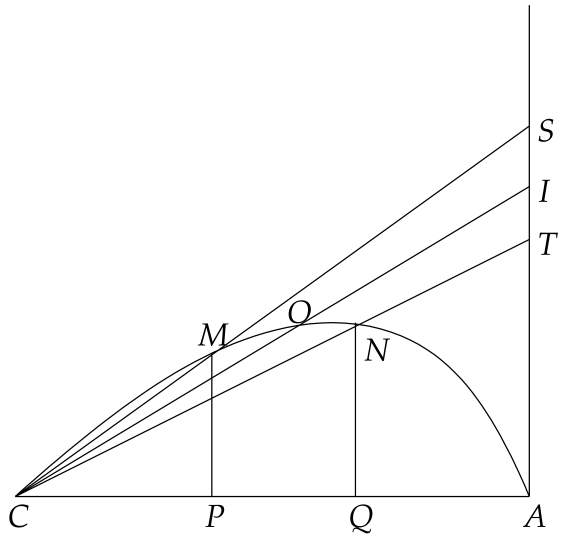

FIG. 7

§21 Was also den Ausdruck eines bestimmten Bogen CM dieser Kurve betrifft, so wird er am angenehmsten aus der Schleife CM bestimmt. Wenn wir nämlich diese Schleife $CM = z$ setzen, werden wir wegen $xx + yy = zz$ den Ausdruck $z^4 = xx - yy = 2xx - zz = zz - 2yy$ haben, woher wir

$$x = z\sqrt{\frac{1+zz}{2}} \quad \text{und} \quad y = z\sqrt{\frac{1-zz}{2}}$$

finden und durch Differenzieren

$$dx = \frac{dz(1+2zz)}{\sqrt{2(1+zz)}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{dz(1-2zz)}{\sqrt{2(1-zz)}}.$$

Daher berechnet man den Anfang des Bogens CM

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dz\sqrt{\frac{(1-zz)(1+2zz)^2 + (1+zz)(1-2zz)^2}{2(1+zz)(1-zz)}}$$

oder

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

§22 Wenn also eine Schleife, die vom Zentrum C aus anfängt, $CM = z$ gesetzt wird, wird der Bogen, der von ihr beschrieben wird, $CM = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$ sein. Wenn also auf die gleiche Weise eine andere Schleife $CN = u$ genannt wird, wird der von ihr beschriebene Bogen $CN = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ sein, dessen Komplement zum ganzen Quadranten der Bogen AN ist. Schon Fagano hat gelehrt, eine Funktion von welcher Art von z für u genommen werden muss, dass entweder der Bogen AN dem Bogen CM gleich wird, oder dass der Bogen CN das Doppelte des Bogens CM ist, oder auch dass der Bogen AN dem doppelten Bogen CM gleich ist. Ich möchte also zuerst diese Fälle betrachten, darauf aber werde ich das, was mir geglückt ist über andere Eigenschaften von Bögen dieser Art herauszufinden, hervorheben.

THEOREM 4

§23 Wenn in der bis hierher beschriebenen Lemniskate eine beliebige Schleife $CM = z$ abgetragen wird und darüber hinaus eine andere abgetragen wird, welche

$$CN = u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$$

sei, wird der Bogen CM dem Bogen AN gleich sein oder auch der Bogen CN dem Bogen AM.

Beweis

Weil die Schleife $CM = z$ ist, wird der Bogen $CM = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$ sein und wegen der Schleife $CN = u$ wird der Bogen $CN = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ sein. Aber er ist $u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; daher wird

$$\mathrm{d}u = \frac{-2z\mathrm{d}z}{(1+zz)\sqrt{1-z^4}}.$$

Außerdem aber ist

$$u^4 = \frac{1-2zz+z^4}{1+2zz+z^4} \quad \text{und} \quad 1-u^4 = \frac{4zz}{(1+zz)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-u^4} = \frac{2z}{1+zz}.$$

Nach Einsetzen dieser Werte wird man

$$\text{arc } CN = -\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}} = -\text{arc } CM + \text{const}$$

haben, sodass arc $CN +$ arc $CM =$ const ist. Um die Konstante zu bestimmen, betrachte man den Fall, in dem $z = 0$ ist und daher auch der Bogen $CM = 0$; in diesem Fall aber wird die Schleife $CN = u = 1 = CA$ und daher geht der Bogen CN in den Quadranten $CMNA$ über, woraus man für den Fall $CMNA + 0 =$ const haben wird. Nach Einsetzen dieses Wertes wird also im Allgemeinen arc $CN +$ arc $CM =$ arc $CMNA$ hervorgehen und daher

$$\text{arc } CM = \text{arc } AN$$

und, indem man den Bogen MN auf beiden Seiten hinzuaddiert,

$$\text{arc } CMN = \text{arc } ANM.$$

Q.E.D.

Korollar 1

§24 Nachdem also irgendein Bogen CM in einem bestimmten Zentrum C gegeben wurde, deren Schleife $CM = z$ ist, wird vom anderen Teil oder vom Scheitel A ein ihr gleicher Bogen AN abgetrennt werden, indem man die Schleife

$$CN = u = \sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}} \quad \text{oder} \quad CN = CA\sqrt{\frac{CA^2 - CM^2}{CA^2 + CM^2}}$$

nimmt und indem man die Homogenität durch die Achse $CA = 1$ vollständig macht.

Korollar 2

§25 Weil $u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ ist, wird andererseits $z = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$ sein; daher werden sich die Schleifen CM und CN untereinander vertauschen lassen, sodass, wenn beide Schleifen $CM = z$ und $CN = u$ so beschaffen waren, dass

$$uuzz + uu + zz = 1$$

ist, auch die Punkte M und N untereinander vertauscht werden können und daher so arc $CM =$ arc AN wie arc $CN =$ arc AM hervorgeht.

Korollar 3

§26 Weil $CN = u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ ist, wird

$$\sqrt{\frac{1+uu}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+zz}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1-uu}{2}} = \frac{z}{\sqrt{1+zz}}$$

sein. Daher, weil aus der Gestalt der Lemniskate für den Punkt N die Koordinaten

$$CQ = u\sqrt{\frac{1+uu}{2}} \quad \text{und} \quad QN = u\sqrt{\frac{1-uu}{2}}$$

sind, wird

$$CQ = \frac{u}{\sqrt{1+zz}} \quad \text{und} \quad QN = \frac{uz}{\sqrt{1+zz}} \quad \text{sein und daher} \quad \frac{QN}{CQ} = z.$$

Wenn daher in A zur Achse CA die Normale AT verlängert wird, bis sie schließlich die fortgesetzte Schleife CN in T schneidet, wird $AT = z = CM$ sein.

Korollar 4

§27 Aus einem gegebenen Punkt M wird sehr leicht ein anderer Punkt N so bestimmt: Man nehme eine der Tangente AT gleiche Schleife CM und die Gerade CT wird die Kurve im gesuchten Punkt N schneiden. Wegen derselben Begründung ist aber klar: wenn die Schleife CM fortgeführt wird, bis sie schließlich in S die Tangente in A trifft, wird in gleicher Weise $AS = CN$ sein.

Korollar 5

§28 Es ist auch klar, dass die Punkte M und N in einem Punkt O zusammenlaufen können, in dem deshalb der ganze Quadrant COA in zwei gleiche Teile geteilt wird. Man wird also diesen Punkt O finden, wenn $u = z$ gesetzt wird, woher

$$z^4 + 2zz = 1 \quad \text{wird und daher} \quad zz + 1 = \sqrt{2};$$

es geht also die Schleife $CO = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ hervor, welcher zugleich die Tangente AI gleich sein wird, woher zugleich die Position dieses Punktes O leicht angegeben wird.

Korollar 6

§29 Nachdem also dieser Punkt O ermittelt worden ist, durch den der ganze Quadrant COA in die zwei gleiche Teile CMO und ANO geteilt wird, wird auch, nachdem die Punkte M und N durch die erörterte Regel bestimmt worden sind, arc $MO =$ arc ON sein, sodass dieser selbe Punkt O alle Bogen MN in zwei gleiche Teile aufteilt.

THEOREM 5

§30 Wenn bei der Lemniskate, deren Achse $CA = 1$ ist, die Ordinate eine Schleife $CM = z$ ist und darüber hinaus die andere Schleife

$$CM^2 = u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$$

angewendet wird, wird der von dieser Schleife beschriebene Bogen CM^2 um das Doppelte größer sein als der Bogen der von jener Schleife CM abgetrennt wird.

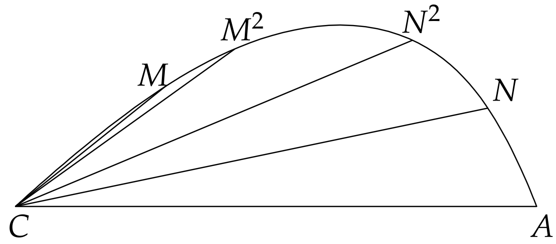

FIG. 8

Beweis

Weil die Schleife $CM = z$ ist, wird der Bogen $CM = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ sein und in der gleichen Weise, wegen der Schleife $CM^2 = u$, wird der Bogen $CM^2 = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ sein. Weil aber $u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$ ist, wird

$$uu = \frac{4zz - 4z^6}{1 + 2z^4 + z^8}$$

sein und daher

$$\sqrt{1-uu} = \frac{1 - 2zz - z^4}{1+z^4} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+uu} = \frac{1 + 2zz - z^4}{1+z^4},$$

woher

$$\sqrt{1-u^4} = \frac{1-6z^4+z^8}{(1+z^4)^2}$$

wird. Dann berechnet man aber durch Differenzieren

$$\mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{d}z(1-z^8) - 4z^4\mathrm{d}z(1+z^4) - 8z^4\mathrm{d}z(1-z^4)}{(1+z^4)^2\sqrt{1-z^4}}$$

oder

$$\mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{d}z - 12z^4\mathrm{d}z + 2z^8\mathrm{d}z}{(1+z^4)^2\sqrt{1-z^4}} = \frac{2\mathrm{d}z(1-6z^4+z^8)}{(1+z^4)^2\sqrt{1-z^4}}.$$

Daher erhalten wir also

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{2\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

und durch Integrieren wird arc $CM^2 = 2 \cdot$ arc $CM +$ const sein. Weil aber für $z = 0$ gesetzt auch $u = 0$ wird und daher beide Bögen CM und CM^2 verschwinden, verschwindet auch die Konstante. Und nachdem die Schleife $CM^2 = u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$ genommen wurde, wird

$$\text{arc } CM^2 = 2\text{arc } CM$$

sein.

Q.E.D.

Korollar 1

§31 Wenn also die Schleife $CN = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ genommen wird, wird der Bogen $AN =$ arc CM sein und daher wird auch der Bogen $CM^2 = 2 \cdot$ arc AN sein. Wenn auf ähnliche Weise die Schleife $CN^2 = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$ genommen wird, wird der Bogen $AN^2 =$ arc CM^2 sein und so wird auch arc $AN^2 = 2$arc AN vom Scheitel A sein. Auf diese Weise erhält man 4 einander gleiche Bögen, natürlich arc CM, arc MM^2, arc AN und arc NN^2.

Korollar 2

§32 Weil aber

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}, \quad \sqrt{1-uu} = \frac{1-2zz-z^4}{1+z^4} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+uu} = \frac{1+2zz-z^4}{1+z^4}$$

ist, wird man diese vier so ausgedrückten Schleifen haben, dass

$$CM = z, \quad CN = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}, \quad CM^2 = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}, \quad CN^2 = \frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$$

ist.

Korollar 3

§33 Es kommen die beiden Punkte M^2 und N^2 im Mittelpunkt O der Kurve zusammen, für den wir oben gesehen haben, dass die Schleife $CO = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ ist, und man teile in diesem Fall die ganze Kurve COA in vier gleiche Teile bei den Punkten M, O und N auf. Das passiert also, wenn $CM^2 = CN^2 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ ist, sodass, nachdem der Kürze wegen $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ gesetzt wurde, wir haben

$$1-2zz-z^4 = \alpha + 2\alpha zz - \alpha z^4 \quad \text{oder} \quad z^4 = \frac{-2(1+\alpha)zz + 1 - \alpha}{1-\alpha}$$

und

$$zz = \frac{-(1+\alpha)+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1-\alpha} \quad \text{oder} \quad zz = \frac{-1-\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2\sqrt{2}}}{1-\sqrt{\sqrt{2}-1}}.$$

Daher berechnen wir

$$CM = z = \sqrt{\frac{-1-\alpha+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1-\alpha}} \quad \text{und} \quad CN = \sqrt{\frac{-1+\alpha+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1+\alpha}}$$

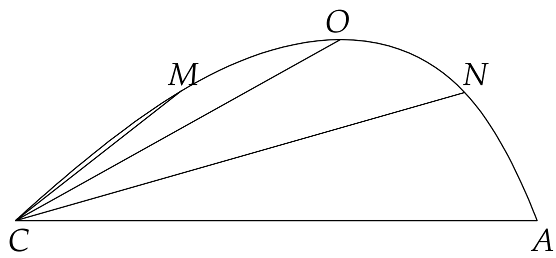

FIG. 9

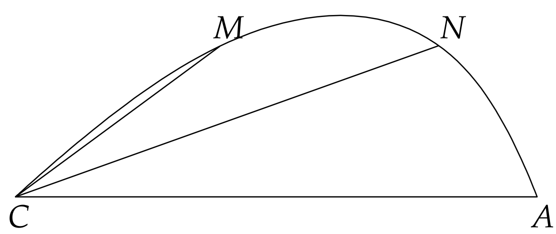

FIG. 10

Korollar 4

§34 Es mögen die beiden Punkte M^2 und N aufeinander fallen und in gleicher Weise werden die Punkte M und N^2 zusammenlaufen und so wird die ganze Kurve $CMNA$ in den Punkten M und N dreigeteilt. Für diesen Fall wird man also

$$\frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} \quad \text{oder} \quad z = \frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$$

haben, von denen die letzte $1-z-2zz-2z^3-z^4+z^5=0$ gibt und diese durch $1+z$ geteilt $1-2z-2z^3+z^4=0$. Man fasse deren Faktoren zusammen

$$(1-\mu z+zz)(1-\nu z+zz)=0$$

und es wird $\mu+\nu=2$ und $\mu\nu=-2$ sein, woher $\mu-\nu=2\sqrt{3}$ wird und daher

$$\mu = 1+\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \nu = 1-\sqrt{3}.$$

Es wird also

$$z = \frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} = CM$$

sein und wegen

$$zz = \frac{4+4\sqrt{3}\pm 2(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}{4}$$

wird

$$CN = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} = \sqrt{\frac{-2\sqrt{3}\mp(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}\pm(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{\mp\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}}$$

entstehen. Es ist deshalb

$$CM = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \quad \text{und} \quad CN = \sqrt{\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}}.$$

Korollar 5

§35 Nachdem auch ein beliebiger Bogen CM^2 gegeben wurde, kann seine Hälfte CM bestimmt werden; wenn nämlich die Schleife jenes Bogens $CM^2 = u$ gesetzt wurde und die Schleife des gesuchten Bogens $CM = z$, wird es

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{4zz}{uu} + 2z^4 + \frac{4z^6}{uu} + z^8 = 0$$

sein, deren Faktoren man zuammenfasse

$$(1 - \mu zz - z^4)(1 - \nu zz - z^4) = 0,$$

woher man $\mu + \nu = \frac{4}{uu}$ und $\mu\nu = 4$ erhält; es wird also

$$\mu - \nu = 4\sqrt{\frac{1}{u^4} - 1} = \frac{4}{uu}\sqrt{1-u^4}$$

sein und daher

$$\mu = \frac{2 + 2\sqrt{1-u^4}}{uu} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{2 - 2\sqrt{1-u^4}}{uu},$$

also

$$zz = \frac{-1 - \sqrt{1-u^4} + \sqrt{2(1+\sqrt{1-u^4})}}{uu},$$

woher für z zwei reelle Werte gefunden werden, zum einen

$$z = \frac{\sqrt{-1 - \sqrt{1-u^4} + \sqrt{2(1+\sqrt{1-u^4})}}}{u} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{1-uu})(\sqrt{1+uu}-1)}}{u}$$

zum anderen

$$z = \frac{\sqrt{(-1 + \sqrt{1-u^4}) + \sqrt{2(1-\sqrt{1-u^4})}}}{u} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{1-uu})(\sqrt{1+uu}-1)}}{u}.$$

Korollar 6

§36 Dieser zweifache Wert hat in der Tat Geltung, weil nämlich dieselbe Schleife CM^2 und Cm^2 zwei verschiedene Bögen CM^2 und CM^2m^2 beschreibt, wird der eine Wert von z die Schleife des Bogens CM liefern, der die Hälfte des Bogens CM^2 ist, der andere Wert von z aber gibt die Schleife des Bogen Cm, welcher die Hälfte des Bogens CM^2m^2 ist; und der erste Wert hat freilich für jenen Fall Geltung, die letzte in der Tat für diesen.

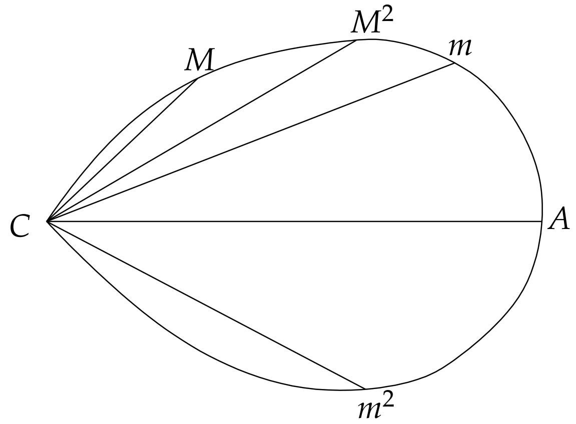

FIG. 11

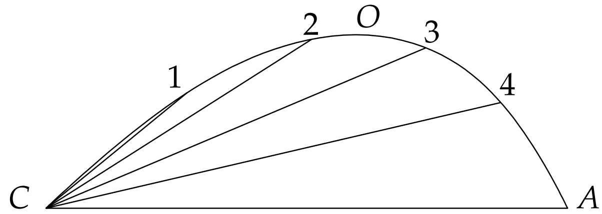

FIG. 12

Korollar 7

§37 Auf diese Weise kann auch die Lemniskate CA in 5 gleiche Teile geteilt werden. Es sei nämlich die Schleife des einfachen Teils $C1 = z$, die Schleife des zweifachen Teils

$$C2 = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} = u;$$

es wird die Schleife des vierfachen Teils

$$C4 = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$$

sein, weil $A4 = C1$ ist, daher wird die Schleife z bestimmt; nach dem Fund von dieser wird, weil $C2 = A3$ ist, die Schleife $C3 = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$ sein.

Korollar 8

§38 Weil daher, nachdem eine Schleife gleich z gesetzt worden ist, die Schleifen der zweifachen, vierfachen, achtfachen, sechzehnfachen Bögen usw gefunden werden können, ist klar, dass auf diese Weise auch diese Lemniskate in soviele Teile geteilt werden kann, deren Anzahl $2^m(1+2^n)$ ist. In dieser Form sind aber die folgenden Zahlen enthalten

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20,\ 24,\ 32,\ 33,\ \text{etc}$$

Aber daher lassen sich nicht immer alle Teilungspunkte angeben.

Bemerkung

Das sind also die Dinge, die Fagano über die Lemniskate bemerkt hat oder was sich aus seinen Funden berechnen lässt. Auch wenn nur, nachdem ein Bogen vorgelegt wurde, er nur gelehrt hat, sein Doppeltes anzugeben, berechnet man dennoch, indem man diesen Bogen immer wieder verdoppelt, die Schleifen der vierfachen, achtfachen, sechzehnfachen Bögen usw daraus. Denn wenn die Schleife des einfachen Bogens gleich z gesetzt wird, des zweifachen Bogens gleich u, des vierfachen Bogens gleich p, des achtfachen Bogens gleich q, des sechzehnfachen Bogens gleich r etc, wird

$$\begin{aligned} u &= \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} \\ p &= \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} = \frac{4z(1+z^4)(1-6z^4+z^8)\sqrt{1-z^4}}{(1+z^4)^4+16z^4(1-z^4)^2} \\ q &= \frac{2p\sqrt{1-p^4}}{1+p^4} \\ r &= \frac{2q\sqrt{1-q^4}}{1+q^4} \end{aligned}$$

Die Schleifen der anderen vielfachen Bögen lassen sich aus diesen nicht ergeben. Wie also die Schleifen von beliebigen vielfachen Bögen ausgedrückt werden, werde ich hier untersuchen, um dieses Thema, wie sehr die Grenzen der Analysis das freilich zulassen, vollkommen abzuschließen. Zuerst habe ich freilich durch Probieren gefunden, wenn die Schleife des einfachen Bogen gleich z ist, dass dann die Schleife des dreifachen Bogens gleich $\frac{z(3-6z^4-z^8)}{1+6z^4-3z^8}$ sein wird; aber danach habe ich verstanden, dass die Sache auf die folgende Weise allgemein erledigt werden kann.

THEOREM 6

§40 Wenn die Schleife des einfachen Bogens CM gleich z ist und die Schleife des n-fachen Bogens $CM^n = u$, wird die Schleife des $(n+1)$-fachen Bogens

$$CM^{n+1} = \frac{z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} + u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}}{1 - uz\sqrt{\frac{(1-uu)(1-zz)}{(1+uu)(1+zz)}}}$$

sein.

Beweis

Es wird also jener einfache Bogen selbst

$$CM = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

sein und der n-fache Bogen

$$CM^n = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = n\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

und daher haben wir $\mathrm{d}u = \frac{n\mathrm{d}z\sqrt{1-u^4}}{\sqrt{1-z^4}}$. Wir wollen der Kürze wegen

$$z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} = P \quad \text{und} \quad u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} = Q$$

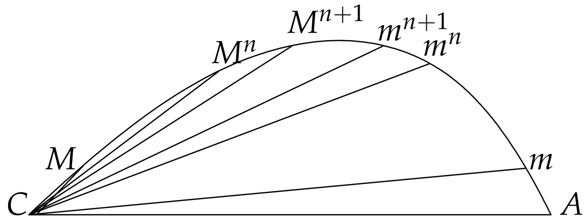

FIG. 13

setzen, dass die für den $(n+1)$-fachen Bogen beschaffte Schleife $CM^{n+1} = \frac{P+Q}{1-PQ}$ ist, die man gleich s nenne, und es muss gezeigt werden, dass der dieser Schleife entsprechende Bogen

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}} = (n+1)\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}} = \frac{(n+1)\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

ist. Weil aber $s = \frac{P+Q}{1-PQ}$ ist, wird

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}P(1+QQ) + \mathrm{d}Q(1+PP)}{(1-PQ)^2}$$

sein, dann findet man aber

$$\begin{aligned} 1 - s^4 &= \frac{(1-PQ)^4 - (P+Q)^4}{(1-PQ)^4} \\ &= \frac{(1+PP+QQ+PPQQ)(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}{(1-PQ)^4} \end{aligned}$$

also

$$\sqrt{1-s^4} = \frac{\sqrt{(1+PP)(1+QQ)(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}}{(1-PQ)^2},$$

woraus man

$$\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}} = \frac{\mathrm{d}P\sqrt{\frac{1+QQ}{1+PP}} + \mathrm{d}Q\sqrt{\frac{1+PP}{1+QQ}}}{\sqrt{1-PP-QQ-4PQ+PPQQ}}$$

findet, den Wert welches Ausdrucks wir also untersuchen wollen. Und zuerst ist freilich

$$1 + PP = \frac{1+uu+zz-uuzz}{1+uu} \quad \text{und} \quad 1+QQ = \frac{1+uu+zz-uuzz}{1+zz},$$

sodass $\frac{1+PP}{1+QQ} = \frac{1+zz}{1+uu}$ ist und daher

$$\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}} = \frac{\mathrm{d}P\sqrt{\frac{1+uu}{1+zz}} + \mathrm{d}Q\sqrt{\frac{1+zz}{1+uu}}}{\sqrt{1-PP-QQ+PPQQ-4PQ}}.$$

Darauf wird aber wegen

$$1 - PP = \frac{1+uu-zz+uuzz}{1+uu} \quad \text{und} \quad 1-QQ = \frac{1+zz-uu+uuzz}{1+zz}$$

die Gleichung

$$(1-PP)(1-QQ) = 1 - P^2 - Q^2 + P^2Q^2 = \frac{1-z^4-u^4+4uuzz+u^4z^4}{(1+zz)(1+uu)}$$

sein und

$$4PQ = \frac{4uz\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}}{(1+zz)(1+uu)}$$

und daher schließt man den Nenner

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-PP-QQ+PPQQ-4PQ}\\
=&\frac{\sqrt{(1-z^4-u^4)+4uuzz+u^4z^4-4uz\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}}}{\sqrt{(1+zz)(1+uu)}}\\
=&\frac{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}{\sqrt{(1+zz)(1+uu)}},
\end{aligned}$$

woraus man

$$\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}} = \frac{\mathrm{d}P(1+uu)+\mathrm{d}Q(1+zz)}{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}$$

erhalten wird. Nun finden wir aber durch Differentieren

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P &= \mathrm{d}z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} - \frac{2zu\mathrm{d}u}{(1+uu)\sqrt{1-u^4}}\\
\mathrm{d}Q &= \mathrm{d}u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} - \frac{2zu\mathrm{d}u}{(1+zz)\sqrt{1-z^4}},
\end{aligned}$$

woher wegen

$$\mathrm{d}u = \frac{n\mathrm{d}z\sqrt{1-u^4}}{\sqrt{1-z^4}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P &= \mathrm{d}z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} - \frac{2nuz\mathrm{d}z}{(1+uu)\sqrt{1-z^4}}\\
\mathrm{d}Q &= \frac{n\mathrm{d}z\sqrt{1-u^4}}{1+zz} - \frac{2uz\mathrm{d}z}{(1+zz)\sqrt{1-z^4}}
\end{aligned}$$

sein wird, woraus man den Zähler bekommt

$$\mathrm{d}P(1+uu)+\mathrm{d}Q(1+zz) = \mathrm{d}z\sqrt{1-u^4} - \frac{2nuz\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}} + n\mathrm{d}z\sqrt{1-u^4} - \frac{2uz\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

oder

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P(1+uu)+\mathrm{d}Q(1+zz) &= (n+1)\mathrm{d}z\sqrt{1-u^4} - \frac{2(n+1)uz\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}\\
&= \frac{(n+1)\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}\left(\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz\right),
\end{aligned}$$

woher klar ist, dass

$$\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}} = \frac{(n+1)\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

ist und

$$\text{arc } CM^{n+1} = (n+1) \cdot \text{arc } CM$$

Q.E.D.

Korollar 1

§41 Wenn vom Scheitel A die Bögen Am, Am^n, Am^{n+1} abgetrennt werden, die jeweils den Bogen CM, CM^n, CM^{n+1} gleich sind, wird Cm die Schleife des komplementären Bogens CM sein, Cm^n die Schleife des komplementären Bogens CM^n, Cm^{n+1} die Schleife des komplementären Bogens CM^{n+1}. Es werden aber wegen der Schleifen $CM = z$, $CM^n = u$, $CM^{n+1} = s$ die Schleifen der Komplemente

$$Cm = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}, \quad Cm^n = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}, \quad Cm^{n+1} = \sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}}$$

sein. Weil aber

$$s = \frac{z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} + u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}}{1 - zu\sqrt{\frac{(1-uu)(1-zz)}{(1+uu)(1+zz)}}} = \frac{P+Q}{1-PQ}$$

ist, wird

$$\sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}} = \sqrt{\frac{1-PP-QQ-4PQ+PPQQ}{(1+PP)(1+QQ)}} = \frac{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)} - 2uz}{1+uu+zz-uuzz}$$

sein, was man auf diese Form zurückführt

$$\sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}} = \frac{\sqrt{\frac{(1-zz)(1-uu)}{(1+zz)(1+uu)}} - uz}{1 + uz\sqrt{\frac{(1-zz)(1-uu)}{(1+zz)(1+uu)}}}.$$

Korollar 2

§42 Wenn also die Schleife des einfachen Bogens gleich z gesetzt wird, die Schleife des Komplements gleich Z, die Schleife des n-fachen Bogens gleich u, die Schleife des Komplementes gleich Z, sodass

$$Z = \sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}} \quad \text{und} \quad U = \sqrt{\frac{1 - uu}{1 + uu}}$$

ist, wird die Schleife des $(n+1)$-fachen Bogens gleich

$$\frac{zU + uZ}{1 - zuUZ},$$

die Schleife des Komplements gleich

$$\frac{ZU - zu}{1 + zuZU}$$

sein.

Korollar 3

§43 Der Fund der Schleifen von den vielfachen Bogen wird sich zusammen mit den Schleifen des Komplements also so verhalten:

Schleife des Bogens	Schleife des Komplements
einfach = a	einfach = A
zweifach = $b = \frac{2aA}{1-aaAA}$	zweifach = $\frac{AA-aa}{1+aaAA} = B$
dreifach = $c = \frac{aB+bA}{1-abAB}$	dreifach = $\frac{AB-ab}{1+abAB} = C$
vierfach = $d = \frac{aC+cA}{1-acAC}$	vierfach = $\frac{AC-ac}{1+acAC} = D$
fünffach = $e = \frac{aD+dA}{1-adAD}$	fünffach = $\frac{AD-ad}{1+adAD} = E$
etc.	etc.

Korollar 4

§44 Wenn auf ähnliche Weise die Schleife des m-fachen Bogens gleich r ist, die Schleife des Komplements gleich R und die Schleife des n-fachen Bogens gleich s und die Schleife ihres Komplements gleich S, sodass

$$R = \sqrt{\frac{1 - rr}{1 + rr}} \quad \text{und} \quad S = \sqrt{\frac{1 - ss}{1 + ss}}$$

ist, wird die Schleife des $(m+n)$-fachen Bogens gleich $\frac{rS+sR}{1-rsRS}$ und die Schleife des Komplements $\frac{RS-rs}{1+rsRS}$. Ja es wird sogar, indem man für n eine negative Zahl nimmt, weil dann die Schleife s in ihr Negatives übergeht, die Schleife der Differenz jener Bogen beschafft werden können; es wird natürlich die Schleife des $(m-n)$-fachen Bogens gleich $\frac{rS-sR}{1+rsRS}$ sein und die Schleife ihres Komplements gleich $\frac{RS+rs}{1-rsRS}$.

Korollar 5

§45 Nachdem also die Bezeichnungen genommen wurden, die im ersten Korollar 3 verwendet wurden, wird auch

$$d = \frac{2bB}{1-bbBB} \quad \text{und} \quad D = \frac{BB-bb}{1+bbBB}$$

$$e = \frac{bC+cB}{1-bcBC} \quad \text{und} \quad E = \frac{BC-bc}{1+bcBC}$$

sein.

Korollar 6

§46 Daraus berechnet man, wenn die Schleife des einfachen Bogen gleich z gesetzt wird, dass die Werte der in Korollar 3 verwendeten Schleifen

$$a = z \quad A = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$$

$$b = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} \quad B = \frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$$

$$c = \frac{z(3-6z^4-z^8)}{1+6z^4-3z^8} \quad C = \frac{(1+z^4)^2-4zz(1+zz)^2}{(1+z^4)^2+4zz(1-zz)^2}\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$$

$$d = \frac{4z(1+z^4)(1-6z^4+z^8)\sqrt{1-z^4}}{(1+z^4)^4+16z^4(1-z^4)^2} \quad D = \frac{(1-6z^4+z^8)^2-8zz(1-z^4)(1+z^4)^2}{(1-6z^4+z^8)^2+8zz(1-z^4)(1+z^4)^2}$$

sein wird.

Bemerkung 1

§47 Die Methode der Zusammensetzung der Formeln $\frac{rS+sR}{1-rsRS}$ und $\frac{RS-rs}{1+rsRS}$ verdient besonders bemerkt zu werden, weil sie der Regel ähnlich ist, nach welcher der Tangens einer Summe oder Differenz zweier Winkel zu bestimmt werden pflegt. Wenn nämlich $rS = \tan\alpha$ und $sR = \tan\beta$ ist, wird $\frac{rS+sR}{1-rsRS} = \tan(\alpha+\beta)$ sein und für die in Korollar 4 beschaffte Differenz $\frac{rS-sR}{1+rsRS} = \tan(\alpha-\beta)$. Und wenn auf die gleiche Weise $RS = \tan\gamma$ gesetzt wird und $rs = \tan\delta$, wird

$$\frac{RS-rs}{1+rsRS} = \tan(\gamma-\delta) \quad \text{und} \quad \frac{RS+rs}{1-rsRS} = tan(\gamma+\delta)$$

sein. Gefälliger wird die Methode der Zusammensetzung dargestellt werden, wenn die Schleife des m-fachen Bogens $r = M\sin\mu$ gesetzt wird, die Schleife des Komplements $R = M\cos\mu$, die Schleife des n-fachen Bogens $s = N\sin\nu$, die Schleife des Komplements $S = N\cos\nu$; dann wird nämlich

die Schleife des $(m+n)$-fachen Bogens $= \frac{MN\sin(\mu+\nu)}{1-M^2N^2\sin\mu\sin\nu\cos\mu\cos\nu}$

die Schleife ihres Komplements $= \frac{MN\cos(\mu+\nu)}{1+M^2N^2\sin\mu\cos\mu\cos\nu\sin\nu}$

die Schleife des $(m-n)$-fachen Bogens $= \frac{MN\sin(\mu-\nu)}{1-M^2N^2\sin\mu\sin\nu\cos\mu\cos\nu}$

die Schleife ihres Komplements $= \frac{MN\cos(\mu-\nu)}{1+M^2N^2\sin\mu\sin\nu\cos\mu\cos\nu}$

sein. Weil aber $1 - rr - RR = rrRR$ ist, wird $1 - MM = M^4(\sin^2\mu)(\cos^2\mu)$ sein und daher

$$M^2\sin\mu\cos\mu = \sqrt{1-MM} \quad \text{und} \quad N^2\sin\nu\cos\nu = \sqrt{1-NN},$$

woher die Nenner dieser Formeln übergehen werden in

$$1 - \sqrt{(1-MM)(1-NN)} \quad \text{und} \quad 1 + \sqrt{(1-MM)(1-NN)}.$$

Außerdem wird aber aus jener Gleichung $1 - MM = M^4\sin^2\mu\cos^2\mu$

$$\frac{1}{MM} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 2\mu\sin 2\mu},$$

wegen $\sin 2\mu = 2\sin\mu\cos\mu$. Aber daher werden jene Formeln nicht gefälliger.

Bemerkung 2

§48 Aus diesen Beobachtungen erhält die Integralrechnung einen nicht zu verachtenden Zuwachs, weil wir ja daher partikuläre Integrale vieler Differentialgleichungen beschaffen können, deren Integration im Allgemeinen kaum erhofft werden kann. Nachdem die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

vorgelegt wurde, wissen wir, außer dass der Fall $u = z$ per se offensichtlich ist, dass ihr auch $u = -\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ genügt. Weil aber im Allgemeinen also die Integration eine beliebige Konstante, man setze sie C, involviert, wird u einer Funktion der Größen z und C gleich sein, diese wird dennoch nichtsdestoweniger so beschaffen sein, dass $u = z$ für einen bestimmten Wert von C wird und so $u = -\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ für einen anderen Wert von C. Es sind also zwei Werte gegeben, die dieser Konstanten C zugeteilt jene Funktion in einen einfachen algebraischen Ausdruck umwandeln. Nachdem auf ähnliche Weise diese Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{2\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

geworden ist, haben wir zwei Werte, welche wir wissen, ihr zu genügen,

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} \quad \text{und} \quad u = \frac{-1+2zz+z^4}{1+2zz-z^4}$$

und haben in gleicher Weise gelehrt zwei Werte zu beschaffen, die im Allgemeinen dieser Gleichung

$$\frac{m\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{n\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}$$

genügen, woher ein Weg, um die allgemeinen Integrale dieser Formeln zu finden, nicht wenig vorbereitet scheint.

Was darauf über die Ellipse und Hyperbel erwähnt worden ist, liefern die folgenden spezielle Integrationen der Differentialgleichungen.

Nachdem nämlich aus §3 diese Gleichung

$$\mathrm{d}x\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + \mathrm{d}u\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} = (x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x)\sqrt{n}$$

vorgelegt wurde, wissen wir, dass ihr diese Gleichung

$$1 - nxx - nuu + nuuxx = 0$$

genügt. Dieser aus §5 hergeholten Gleichung

$$\mathrm{d}x\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + \mathrm{d}u\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} = n(x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x)$$

ist diese Gleichung

$$1 - xx - uu + nuuxx = 0$$

gefunden worden zu genügen. Darauf genügt der folgenden aus der Hyperbel in §14 hergeholten Gleichung

$$dx\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} + du\sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}} = (xdu + udx)\sqrt{n}$$

auch

$$1 - nxx - nuu + nuuxx = 0,$$

welche freilich mit der ersten aus der Ellipse hergeholten übereinstimmt, weil

$$\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} = \sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}$$

ist. Daher lässt sich aber leicht folgern, dass dieser Gleichung

$$dx\sqrt{\frac{f-gxx}{h-kxx}} + du\sqrt{\frac{f-guu}{h-kuu}} = (xdu + udx)\sqrt{\frac{g}{h}}$$

diese spezielle

$$fh - gh(xx + uu) + gkxxuu = 0$$

genügt, dieser anderen Gleichung

$$dx\sqrt{\frac{f-gxx}{n-kxx}} + du\sqrt{\frac{f-guu}{n-kuu}} = (xdu + udx)\frac{g}{\sqrt{fk}}$$

aber diese spezielle

$$fh - fk(xx + uu) + gkxxuu = 0$$

genügt. Diese habe ich also freilich für die vorzulegende gehalten, weil mir sie mir beide schienen Hilfsmittel zu liefern die Analysis weiter zu entwickeln.