

ÜBER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITEN GRADES*

Leonhard Euler

§1 Von allen Fragen, die in der Mathematik in Angriff genommen werden, besteht die Lösung aus zwei Teilen, deren einer darin besteht, dass die Bedingungen, von denen die Frage bestimmt wird, in analytische Gleichungen überführt werden, welche gesagt werden die Lösung zu enthalten; der andere Teil wird hingegen von der Auflösung dieser Gleichungen eingenommen. Wenn die Frage sich auf die gemischte oder auch angewandte Mathematik bezieht, ist der erste Teil aus den Prinzipien zu entnehmen, auf die die mathematische Lehre gestützt ist und dieser Wissenschaft quasi eigen ist; der zweite Teil ist aber immer zur reinen Analysis zu zählen, weil sie ganz in der Auflösung von Gleichungen besteht. Wenn also die Frage, entweder aus der Mechanik, oder aus der Hydrodynamik, oder aus der Astronomie, entnommen war, muss aus den jeder dieser Disziplinen eigenen Prinzipien die Frage zuerst auf Gleichungen zurückgeführt werden, dann ist aber die Lösung dieser Gleichungen allein den Kunstgriffen, die wir freilich in der Analysis in Erfahrung gebracht haben, zu überlassen. Daraus ist es hinreichend klar, von wie großer Bedeutung die Analysis über alle Teilgebiete der Mathematik hinweg ist.

§2 Die Prinzipien fast aller Teile der angewandten Mathematik sind schon so entwickelt, dass kaum eine sich dorthin erstreckende Frage gestellt werden

*Originaltitel: "De aequationibus differentialibus secundi gradus", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Band 7 (1761, verfasst 1756): pp. 163–202, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 22, pp. 295 – 333, Eneström-Nummer E265, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

kann, deren Lösung nicht mit Gleichungen erfasst werden kann. Ob nämlich die Frage über das Gleichgewicht oder über die Bewegung von Körpern beliebiger Gestalt, fester wie flüssiger, handelt, sind sowohl von anderen als auch von mir die sichersten Prinzipien etabliert worden, mit deren Hilfe sich immer zu Gleichungen gelangen lässt: Und wenn Himmelskörper mit beliebigen Kräften aufeinander einzuwirken festgelegt werden, werden alle Störungen, die sich daraus in deren Bewegungen niederschlagen, ohne Mühe auf Gleichungen zurückgeführt, sodass, wenn wir diese Gleichungen auflösen könnten, nichts weiter übrig wäre, was in diesen Wissenschaften noch verlangt werden könnte. Deshalb kann der ganze Eifer, welcher in der Mathematik aufgebracht wurde, nicht nützlicher verwendet werden als wenn wir an der Erweiterung der Grenzen der Analysis arbeiten.

§3 Sooft aber ein sich auf die angewandte Mathematik beziehendes Problem behandelt wird, stoßen wir sehr selten auf algebraische Gleichungen, deren Auflösung, auch wenn sie noch nicht weiter als bis hin zum vierten Grad entwickelt worden ist, dennoch mithilfe von Approximationen so exakt erledigt werden kann, dass sie für vollständig zu halten ist. Fast immer aber geraten wir zu Differentialgleichungen, und zwar zum größten Teil zu Differentialgleichungen zweiter Ordnung; die Prinzipien der Mechanik implizieren nämlich unmittelbar Differentiale zweiten Grades, sodass sich ohne die Analysis des Unendlichen in diesen Wissenschaften nahezu nichts leisten lässt. Weil wir aber in der Auflösung von Differentialgleichungen ersten Grades noch nicht allzu weit vorgedrungen sind, ist um vieles weniger verwunderlich, wenn wir stecken bleiben, wannimmer die Fragen auf Differentialgleichungen zweiten Grades zurückgeführt werden. Denn die Regeln, die für die Auflösung von Gleichungen dieser Art gefunden worden sind, und welche ich freilich für mich beanspruchen kann, sind so beschränkt, dass sie nur in gewissen Fällen, die nicht so häufig auftreten, angewandt werden können. Ich habe Regeln von dieser Art in der Tat in den *Commentariis Academiae Petropolitanae* et *Volumine VII. Miscellaneorum Berolinensium* erläutert.

§4 Dennoch haben sich mir indes des Öfteren Fälle von Differentialgleichungen zweiten Grades von solcher Art gezeigt, auch wenn sie sich mithilfe jener Regeln nicht behandeln ließen, ich dennoch anderswoher deren Integrale erkannt habe; und es stand kein direkter Weg offen, auf welchem diese Integrale hätten gefunden werden können. Fälle von dieser Art sind umso

bemerkenswerter, weil ein Vergleich jener Gleichungen mit ihren Integralen einen sehr sicheren Weg zu ebnen scheint, deren Auflösung mit bestimmten Methoden zu erledigen. Bei dieser Aufgabe, wenn der Ausgang die Hoffnung nicht trübt, besteht kein Zweifel, dass die für dieses Ziel entdeckten Methoden sich um vieles weiter erstrecken, und sie unsere unser Vermögen, Differentiale zweiten Grades handzuhaben, nicht unwesentlich voranbringen. Also glaube ich, dass es jenen, die Studien dieser Art erfreuen, es nicht unangenehm sein wird, wenn ich die sich mir gezeigten Fälle mitgeteilt haben werde, dass sie daher die Möglichkeit erlangen, diesen Teil der Analysis zu erweitern, dann werde ich aber die Methode erläutern, welche die Betrachtung dieser Fälle mir an die Hand gegeben hat.

§5 Das erste Beispiel von dieser Art ist mir im ersten Buch meiner Mechanik¹ auf Seite 465 begegnet, wo ich zu dieser Differentialgleichung zweiten Grades gelangt bin:

$$2Bx\,ddx - 4Bdx^2 = x^{n+5}dp^2(1 + pp)^{\frac{n-1}{2}},$$

in welcher das Differential dp als konstant angenommen worden ist. Ihr Integral war mir aber aus anderer Quelle bekannt, in dieser Form enthalten zu sein:

$$x^{n+5}dp^2(1 + pp)^{\frac{n+1}{2}} + Cds^2 = 0,$$

während

$$ds^2 = (1 + pp)dx^2 + 2pxdpdx + xxdp^2$$

ist. Ich konnte sogar bemerken, dass der Wert dieser Konstante C hier $-(n+1)B$ ist. Ich habe zu dieser Zeit vergebens viel Mühe investiert nach einer direkten Methode zu suchen, mit deren Hilfe ich diese Integralgleichung aus jener Differentialgleichung zweiten Grades finden könnte, und es schien kein bekannter Kunstgriff hierhin zu führen. Außerdem ist es ratsam anzumerken, dass das hier dargebotene Integral nur ein partikuläres ist, weil es keine von unserem Belieben abhängende Konstante beinhaltet, die durch eine Integration eingeführt worden wäre, unten werde ich aber zeigen, dass wegen einer solchen Konstante ein Term von dieser Art Ex^4dp^2 hinzugefügt werden kann.

¹Euler meint sein Buch: *Mechanica sive motus schientia analytice exposita*.

§6 Ich bin in der ersten Sammlung meiner Opusculorum auf Seite 82 auf ein anderes ähnliches Beispiel gestoßen, wo ich die Bewegung von Körpern auf beweglichen Oberflächen untersucht habe: Ich bin in der Tat bei der Diskussion eines bestimmten Falls zu dieser Differentialgleichung zweiten Grades gelangt:

$$\frac{ddr}{r} + \frac{(F + Mkk)^2 \theta^2 du^2}{(Mkkrr + F + 2Gu + HUU)^2} = 0,$$

wo das Differential du als konstant angenommen worden ist, aber die Buchstaben F , G , H , Mkk und θ irgendwelche konstanten Größen bezeichnen. Ich hatte auch in keiner Weise das Integral dieser Gleichung finden können, anderswoher wusste ich jedoch, dass ihr Integral dieses ist:

$$\begin{aligned} \frac{(F + Mkk)^2 \theta^2 du^2}{Mkkrr + F + 2Gu + HUU} + \frac{dr^2}{r^2} (F + 2Gu + HUU) - \frac{2dudr}{r} (G + HU) + Hdu^2 \\ = \frac{Hdu^2}{r^2} + \frac{(F + Mkk)\theta^2 du^2}{rr}, \end{aligned}$$

welches freilich auch partikulär ist, und weil es dermaßen kompliziert ist, ist um vieles weniger klar, wie es über Integration aus jener Gleichung gefunden werden kann. Im Anschluss habe ich aber bewiesen, dass das Integral vollständig gemacht wird, wenn anstelle des Terms $\frac{Hdu^2}{r^2}$ dieser $\frac{Cdu^2}{rr}$ hinzugefügt wird, sodass C eine konstante Größe bezeichnet, die von den übrigen, die in der Differentialgleichung zweiten Grades enthalten sind, überhaupt nicht abhängen.

§7 Darauf auch andere Probleme behandelnd bin ich zu Differentialgleichungen zweiten Grades von dieser Art geleitet worden, deren Integration nicht gerade wenig vertrackt erschienen. Wie beispielsweise ich für diese Differentialgleichung zweiten Grades

$$rrddr + rdr^2 = n^3 sds^2,$$

für konstant angenommenes Element ds , ein partikuläres Integral gefunden habe zu sein:

$$rdr + nrds + nnsds = 0,$$

welche Gleichung, weil die beiden Variablen r und s überall dieselbe Dimension haben, mit einer einst von mir erläuterten Methode behandelt werden könnte. Weiter hat sich mir auch diese Differenzdifferentialgleichung gezeigt:

$$ds^2(\alpha ss + \beta s + \gamma) = r r dr^2 + 2r^3 ddr,$$

wobei das Element ds als konstant angenommen worden ist, deren vollständiges Integral ich entdeckt habe zu sein:

$$C = -\frac{1}{2} \left(\frac{r dr^2}{ds^2} + \frac{\alpha ss + \beta s + \gamma}{r} \right)^2 + \frac{2r dr(2\alpha s + \beta)}{ds} - 2\alpha r r,$$

was, wie ich es daraus finden kann, nicht leicht klar wird. Ja sogar die Integralgleichung selbst, auch wenn sie nur eine Differentialgleichung von erstem Grad ist, scheint wenig hilfreich zu sein, wegen der starken Verwicklung der Variablen.

§8 Diese vier Beispiele genügen, um zu zeigen, dass immer noch viele Methoden fehlen, mit denen Differentialgleichungen zweiten Grades integriert werden können, aber zugleich, weil in diesen Fällen die Integrale bekannt ja sind, ist über das Auffinden derer nicht zu verzweifeln. Ich für meine Person habe nach verschiedenen Ansätzen, mit denen ich die Gleichungen behandelt habe, in Erfahrung gebracht, dass sich die ganze Aufgabe darauf reduziert, dass geeignete Größen gesucht werden, mit welchen multipliziert diese Gleichungen eine Integration zulassen; nachdem aber ein solcher Multiplikator gefunden worden ist, bereitet die Integration keine weiteren Schwierigkeiten. Wie nämlich die Integration von allen Differentialgleichungen ersten Grades darauf zurückgeführt werden kann, dass eine bestimmte Funktion von zwei Variablen ausfindig zu machen ist, mit welcher multipliziert die Gleichung integrierbar wird, so bezweifle ich auch für alle Differentialgleichungen zweiten Grades nicht, diese Regel als allgemein gültig zu formulieren, dass ich festlege, dass immer eine Funktion der entsprechenden Variablen solcher Art gegeben ist, mit welcher multipliziert die Gleichung integrierbar gemacht wird.

§9 Ich rede aber hier nur von Gleichungen solcher Art, die nur zwei Variablen beinhalten, und die schon dorthin geführt worden sind, dass die Differentiale des höchsten Grades nur eine Dimension haben. Wir wollen festlegen, dass

x und y die beiden Variablen sind, und für $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$, $dr = s dx$ gesetzt etc. ist bekannt, dass alle Differentialgleichungen eines jeden Grades auf die folgenden Formen zurückgeführt werden können:

I. Allgemeine Form von Differentialgleichungen ersten Grades

$$p = \text{Funk.}(x \text{ und } y)$$

II. Allgemeine Form von Differentialgleichungen zweiten Grades

$$q = \text{Funk.}(x, y \text{ und } p)$$

III. Allgemeine Form von Differentialgleichungen dritten Grades

$$r = \text{Funk.}(x, y, p \text{ und } q)$$

IV. Allgemeine Form von Differentialgleichungen ersten Grades

$$s = \text{Funk.}(x, y, p, q \text{ und } r)$$

und so weiter für die folgenden der höheren Grade.

§10 Weil also nach Vorlage irgendeiner Differentialgleichung ersten Grades $p = \text{Funk.}(x \text{ und } y)$ immer eine Funktion von x und y solcher Art gegeben ist, mit welcher multipliziert jene Gleichung integrierbar gemacht wird, auch wenn wir oftmals diese Funktion nicht angeben können, besteht kein Zweifel, dass auch für die Differentialgleichungen zweiten Grades $q = \text{Funk.}(x, y \text{ und } p)$ ein Multiplikator solcher Art existiert, der sie integrierbar macht, und daher auf Differential ersten Grades zurückführt. Nun müssen hier aber Fälle unterschieden werden, in denen dieser Multiplikator entweder nur von den zwei Variablen x und y existiert, oder darüber hinaus die Größe p oder das Verhältnis der Differentiale $\frac{dy}{dx}$ involviert: denn wegen dieses Unterschieds wird das Finden des Multiplikators mal leichter, mal schwerer werden. Aber den am leichtesten zu entwickelnden Fall wird man haben, wenn der Multiplikator nur eine Funktion der einen Variablen allein war.

§11 Wenn also die Buchstaben P, Q, R, S, T genommen werden, um irgendwelche Funktionen der Variablen x und y zu bezeichnen, werden die einfacheren Ordnungen von Multiplikatoren für die Differentialgleichungen zweiten Grades festgelegt werden:

Ein Multiplikator erster Ordnung	P
Ein Multiplikator zweiter Ordnung	$Pdx + Qdy$
Ein Multiplikator dritter Ordnung	$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$
Ein Multiplikator vierter Ordnung	$Pdx^3 + Qdx^2dy + Rdxdy^2 + Sdy^3$
	etc.

Dies sind freilich die einfacheren Ordnungen, in denen $p = \frac{dy}{dx}$ entweder zu keiner oder einer oder zwei oder drei Dimensionen ansteigt: Leicht folgert man aber, dass es geschehen kann, dass der Buchstabe p entweder über Brüche oder irrationale oder aber transzendente Größen auf den Multiplikator einwirkt, Fälle welcher Art ein riesiges Feld für neue Untersuchungen eröffnen. Hier habe ich freilich beschlossen mich nur mit den dargelegten Formeln zu beschäftigen, weil sie ausreichen um die erwähnten Beispiele abzuhandeln und uns zugleich zu um vieles allgemeineren mit ihrer Hilfe lösbaeren Gleichungen führen werden.

§12 Nachdem also irgendeine Differentialgleichung zweiten Grades vorgelegt worden ist,

$$q = \text{Funk.}(x, y \text{ und } p),$$

welche für konstant angenommenes dx auf diese Form gebracht werden wird

$$ddy = dx^2 \text{ Funkt.} \left(x, y \text{ und } \frac{dy}{dx} \right),$$

versuche man zuerst einen Multiplikator der ersten Form P , ob mit seiner Hilfe die Integration gelingt; wenn nicht, nehme man einen Multiplikator der zweiten Form $Pdx + Qdy$, wenn welcher die Aufgabe nicht löst, kehre man zu Multiplikator der dritten Form zurück, dann der vierten etc.; bald wird sich aber erschließen lassen, ob die Integration mit Faktoren dieser Form durchgeführt werden kann oder nicht; im zweiten Fall wird auf kompliziertere Formen auszuweichen sein, und wenn wir uns an eine Rechnung dieser Art gewöhnt haben, werden wir uns die Möglichkeit eröffnen, für jeden Fall einen geeigneten Multiplikator zu erkennen: An diesen Zweck wird die Entwicklung der vorgelegten Beispiele angepasst sein.

PROBLEM 1

§13 Nachdem diese Differentialgleichung zweiten Grades vorgelegt worden ist:

$$2ayddy - 4ady^2 - y^{n+5}dx^2(1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

in welcher das Differential dx konstant angenommen ist, ihr Integral zu finden.

LÖSUNG

Demjenigen, der den Faktor der ersten Form P probiert, wird bald klar werden, dass die Aufgabe nicht gelingt, wenn nicht $n = -2$ ist, in welchem Fall $P = \frac{1}{y^3}$ wäre und das Integral der Gleichung

$$\frac{2ayddy - 4ady^2}{yy} - \frac{dx^2}{(1 + xx)\sqrt{1 + xx}} = 0$$

wäre

$$\frac{2ady}{yy} - \frac{xdx}{\sqrt{1 + xx}} = \alpha dx,$$

und durch erneutes Integrieren hätte man

$$-\frac{2a}{y} - \sqrt{1 + xx} = \alpha x + \beta,$$

so dass dieser Spezialfall keine Schwierigkeiten bereitet. Im Allgemeinen versuche man also für einen beliebigen Wert des Exponenten n den Faktor der zweiten Form $Pdx + Qdy$, und nach Reduktion der Gleichung auf diese Form

$$2addy - \frac{4ady^2}{y} - y^{n+4}dx^2(1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

wird das Produkt sein:

$$\left. \begin{aligned} &+2aPdxddy - \frac{4aPdx dy^2}{y} - Py^{n+4}dx^3(1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} \\ &+2aQdyddy - \frac{4aQdy^3}{y} - Qy^{n+4}dx^2dy(1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \right\} = 0,$$

welches nach der Annahme integrierbar sein muss. Die ersten Terme, was für Funktionen auch immer P und Q von x und y sind, werden aber nur aus der Differentiation von dieser $2aPdx dy + aQdy^2$ entspringen können; daher werden wir *den ersten Teil des Integrals* $2aPdx dy + aQdy^2$ haben.

Wir wollen also das Differential von dieser von unser Gleichung abziehen und wegen

$$dP = dx \left(\frac{dP}{dx} \right) + dy \left(\frac{dP}{dy} \right), \quad dQ = dx \left(\frac{dQ}{dx} \right) + dy \left(\frac{dQ}{dy} \right)$$

wird die Gleichung in Ordnung gebracht diese sein:

$$\left. \begin{aligned} -Py^{n+4}dx^3(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - Qy^{n+4}dx^2dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{4aPdx dy^2}{y} - \frac{4aQdy^3}{y} \\ -2adx^2dy \left(\frac{dP}{dx} \right) - 2adx dy^2 \left(\frac{dP}{dx} \right) - ady^3 \left(\frac{dQ}{dy} \right) \\ - adx dy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) \end{aligned} \right\} = 0,$$

welche wegen des konstant angenommenen dx auf keine Weise integrierbar sein kann, wenn sich nicht die mit dy^3 und dy^2 behafteten Terme jeweils aufheben. Es ist also notwendig, dass gilt:

$$\frac{4Q}{y} + \left(\frac{dQ}{dy} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad 4Qdy + ydy \left(\frac{dQ}{dy} \right) = 0$$

und

$$\frac{4P}{y} + 2 \left(\frac{dP}{dy} \right) + \left(\frac{dQ}{dx} \right) = 0.$$

Damit wir nun aus der ersten Gleichung den Wert von Q finden, wollen wir x wie eine Konstante ansehen, und es wird

$$dy \left(\frac{dQ}{dy} \right) = dQ$$

sein, denn $dy \left(\frac{dQ}{dy} \right)$ bezeichnet des Inkrement von Q , welches allein aus der Veränderlichkeit von y entspringt; weil daher $4Qdy + ydQ = 0$ ist, werden wir durch Integrieren $Qy^4 = K$ einer Funktion nur von x erhalten, sodass

$$Q = \frac{K}{y^4} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1}{y^4} \left(\frac{dK}{dx}\right)$$

ist, wo $\left(\frac{dK}{dx}\right)$ eine Funktion von x sein wird. Nun nehme man in der anderen Gleichung auch x als konstant an, und es wird werden:

$$4Pdy + 2y dP + \frac{dy}{y^3} \left(\frac{dK}{dx}\right) = 0,$$

welche mit y multipliziert und integriert gibt:

$$2Pyy - \frac{1}{y} \left(\frac{dK}{dx}\right) = 2L,$$

und daher

$$P = \frac{L}{yy} + \frac{1}{2y^3} \left(\frac{dK}{dx}\right),$$

wo L eine Funktion nur von x bezeichnet. Nachdem also diese Glieder gestrichen worden sind, wird wegen

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{yy} \left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{2y^3} \left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$

der *der andere Teil des Integrals* sein:

$$-dx^2 \int \left((1+xx)^{\frac{n-1}{2}} (Ly^{n+2}dx + \frac{1}{2}y^{n+1}dx \left(\frac{dK}{dx}\right) + Ky^n dy) - 2adx^2 \int \left(\frac{dy}{yy} \left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{dy}{2y^3} \left(\frac{ddK}{dx^2}\right) \right) \right),$$

weil welches aus zwei Termen besteht, muss für das erste $L = 0$ sein, und das Integral des Terms

$$\int (1+xx)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{2}y^{n+1}dx \left(\frac{dK}{dx}\right) + Ky^n dy \right)$$

wird

$$\frac{Ky^{n+1}}{n+1} (1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$$

sein. Es ist also übrig, dass

$$\frac{y^{n+1}dK}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{(n-1)Ky^{n+1}xdx}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-3}{2}} = \frac{1}{2}y^{n+1}dK(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$$

oder

$$2(n-1)Kxdx = (n-1)dK(1+xx)$$

gemacht wird. Und daher findet man $K = 1 + xx$, sodass das erste Glied des anderen Teils des Integrals

$$-\frac{1}{n+1}y^{n+1}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}}$$

ist; aber das zweite Glied wird wegen $L = 0$ und $\left(\frac{dK}{dx^2}\right) = 2$

$$-2adx^2 \int \frac{dy}{y^3} = \frac{adx^2}{yy}$$

werden; weil dessen Integration direkt gelingt, ist die ganze Aufgabe erledigt, und der andere Teil des Integrals wird sein:

$$-\frac{1}{n+1}y^{n+1}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{adx^2}{yy}.$$

Weil darauf $L = 0$ und $K = 1 + xx$ ist, wird $\left(\frac{dK}{dx}\right) = 2x$ sein, und daher wird werden:

$$P = \frac{x}{y^3} \quad \text{und} \quad Q = \frac{1+xx}{y^4};$$

daher wird man als ersten Teil des Integrals

$$\frac{2axdx dy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4}$$

haben. Deshalb wird das vollständige Integral der vorgelegten Differenzdifferentialgleichung unter Verwendung des konstanten Terms Cdx^2 sein:

$$\frac{adx^2}{yy} + \frac{2axdx dy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4} - \frac{1}{n+1}y^{n+1}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = Cdx^2;$$

oder durch Multiplizieren mit y^4 :

$$\frac{1}{n+1}y^{n+5}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = a(yydx^2 + 2xydxdy + (1+xx)dy^2) - Cy^4dx^2,$$

was hervorragend mit dem übereinstimmt, was ich zuvor [§ 5] mit einer indirekten Methode erreicht hatte.

KOROLLAR 1

§14 Die Differenzendifferentialgleichung

$$2addy - \frac{4ady^2}{y} - y^{n+4}dx^2(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

wird integrierbar gemacht, wenn sie mit diesem Faktor

$$\frac{xdx}{y^3} + \frac{(1+xx)dy}{y^4}$$

multipliziert wird, wenn welcher anderswoher hätte erkannt werden können, hätte die vollständige Integration ohne eine Schwierigkeit durchgeführt werden können.

KOROLLAR 2

§15 Wenn also umgekehrt die gefundene Integralgleichung

$$\frac{a yy dx^2 + 2 a xy dx dy + a (1 + xx) dy^2}{y^4} - \frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1 + xx)^{\frac{n+1}{2}} = C dx^2$$

für konstant genommenes Element dx differenziert wird, wonach die Konstante C aus der Rechnung herausgeht, wird das Differential durch diese Formel

$$\frac{xdx}{y^3} + \frac{(1+xx)dy}{y^4}$$

oder diese

$$xydx + (1+xx)dy$$

teilbar sein, und erst nach der Teilung wird die vorgelegte Differenzendifferentialgleichung hervorgehen.

KOROLLAR 3

§16 Wenn die vorgelegte Gleichung $\frac{\sqrt{1+xx}}{y^4}$ multipliziert wird, dass man

$$2a \left(ddy - \frac{2dy^2}{y} \right) \frac{\sqrt{1+xx}}{y^4} - y^n dx^2 (1+xx)^{\frac{n}{2}} = 0$$

hat, wird der sie integrierbar machende Multiplikator sein:

$$\frac{xydx}{\sqrt{1+xx}} + dy\sqrt{1+xx} = d \cdot y\sqrt{1+xx}.$$

Wenn

$$y\sqrt{1+xx} = z$$

gesetzt wird, wird man diese Gleichung erhalten:

$$\frac{2addz(1+xx)^2}{z^4} - \frac{4adz^2(1+xx)^2}{z^5} + \frac{4axdx dz(1+xx)}{z^4} - \frac{2adx^2}{z^3} - z^n dx^2 = 0,$$

welche mit dz multipliziert eine Integration zulässt. Das Integral wird nämlich sein:

$$\frac{adz^2(1+xx)^2}{z^4} + \frac{adx^2}{zz} - \frac{1}{n+1} z^{n+1} dx^2 = C dx^2.$$

KOROLLAR 4

§17 Daher ist also klar, wie mit einer geeigneten Substitution die Integration erleichtert werden kann; nachdem nämlich die vorgelegte Gleichung mit der Substitution $y = \frac{z}{\sqrt{1+zz}}$ in diese letzte Form transformiert worden ist, wäre es nicht weiter schwierig, die Integration durchzuführen. Aber weil eine solche Substitution außerdem nicht so leicht zutage tritt, wenn der Multiplikator von dritter oder höherer Ordnung war, wird eine solche Reduktion nicht einmal einen Platz finden können.

SCHOLION

§18 In dieser Lösung habe ich eine einzigartige Art von Kalkül verwendet, mit welcher, um die Einführung von vielen Buchstaben zu vermeiden, ich das Differential der Funktion P der zwei Variablen x und y ausgedrückt habe als

$$dP = dx \left(\frac{dP}{dx} \right) + dy \left(\frac{dP}{dy} \right),$$

wo in gewohnter Weise $dx \left(\frac{dP}{dx} \right)$ das Inkrement von P bezeichnet, das allein aus der Veränderlichkeit von x entspringt, und $dy \left(\frac{dP}{dy} \right)$ ihr Inkrement, was allein aus der Veränderlichkeit von y entsteht; es ist aber bekannt, dass diese Inkremente addiert das vollständige Differential von P liefern, das aus jeder der beiden Variablen x und y entsteht. Daher werden die Formeln $\left(\frac{dP}{dx} \right)$ und $\left(\frac{dP}{dy} \right)$ endliche Funktionen der Variablen x und y bezeichnen, welche man natürlich durch Differentiation nach Weglassen der Differentiale hat; wenn also

$$P = y\sqrt{1+xx}$$

ist, wird

$$\left(\frac{dP}{dx} \right) = \frac{xy}{\sqrt{1+xx}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dP}{dy} \right) = \sqrt{1+xx}$$

sein. Dann wird aber nach Erkennen des einen Teils eines Differentials von dieser Art wie beispielsweise $dx \left(\frac{dP}{dx} \right)$ die Größe P daher aus dem Teil heraus erkannt. Denn nachdem nämlich allein x als variable betrachtet worden ist, wird

$$P = \int dx \left(\frac{dP}{dx} \right) + Y$$

sein, während Y eine Funktion nur von y bezeichnet, und aus dieser Quelle habe ich die Lösung die Werte der Größen P und Q bestimmt. Es ist auch offensichtlich, wenn K eine Funktion nur von x war, dass dann $dx \left(\frac{dK}{dx} \right)$ ihr vollständiges Integral bedeutet, sodass $dx \left(\frac{dK}{dx} \right) = dK$ ist; weiter bezeichnet aber dieses Zeichen $\left(\frac{ddK}{dx^2} \right)$ dasselbe wie $\left(\frac{d \cdot (dK : dx)}{dx} \right)$, oder wenn $\left(\frac{dK}{dx} \right) = k$ gesetzt wird, wird $\left(\frac{ddK}{dx^2} \right) = \left(\frac{dk}{dx} \right)$ sein. Es wird nämlich k gleichermaßen eine Funktion nur von x sein; wenn also $K = \sqrt{1+xx}$ ist, wird

$$\left(\frac{dK}{dx} \right) = \frac{x}{\sqrt{1+xx}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) = \frac{1}{(1+xx)\sqrt{1+xx}}$$

sein; und auf diese Weise wird sich weiter fortschreiten lassen, dass

$$\left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = \frac{-3x}{(1+xx)^2\sqrt{1+xx}}$$

ist, und es scheint ratsam, dies zum Verständnis so dieser Lösung wie der folgenden Lösungen angemerkt zu haben. Weiterhin führt die Betrachtung dieser Lösung leicht zum folgenden allgemeineren Theorem.

THEOREM 1

§19 Diese Differentialgleichung zweiten Grades, für konstant festgelegtes dx ,

$$addy - \frac{mady^2}{y} + y^n dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0$$

wird integrierbar gemacht, wenn sie mit diesem Faktor multipliziert wird:

$$\frac{(\beta + \gamma x)dx}{(m-1)y^{2m-1}} + \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dy}{y^{2m}},$$

und die Integralgleichung wird sein:

$$\frac{a\gamma y^2 dx^2 + 2(m-1)a(\beta + \gamma x)y dx dy + (m-1)^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dy^2}{2(m-1)y^{2m}} + \frac{y^{n-2m+1} dx^2}{n-2m+1} (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-2m+1}{2m-2}} = C dx^2.$$

KOROLLAR 1

§20 Wenn $n = 1$ war, wird diese Differentialgleichung zweiten Grades hervorgehen:

$$addy - \frac{mady^2}{y} + \frac{y dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2} = 0,$$

welche also mit

$$\frac{(\beta + \gamma x)dx}{(m-1)y^{2m-1}} + \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}{y^{2m}}$$

multipliziert integrierbar wird, während ihr Integral ist:

$$\frac{a\gamma yydx^2 + 2(m-1)a(\beta + \gamma x)ydx dy + (m-1)^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dy^2}{2(m-1)^2 y^{2m}} - \frac{yydx^2}{2(m-1)y^{2m}(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)} = Cdx^2.$$

KOROLLAR 2

§21 Nachdem $m - 1 = \mu$ gesetzt worden ist, wenn wir $y = e^{\int v dx}$ festlegen, wird unsere Gleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung werden:

$$adv - \mu avv dx + \frac{dx}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2} = 0,$$

deren Integral also

$$a\gamma yydx^2 + 2\mu a(\beta + \gamma x)ydx dy + \mu^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dy^2 - \frac{\mu yydx^2}{\alpha + 2\beta x + \gamma xx} = 2\mu \mu C y^{2m} dx^2$$

sein wird oder nach Einsetzen seines Wertes für y

$$a\gamma + 2\mu a(\beta + \gamma x)v + \mu^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)vv - \frac{\mu}{\alpha + 2\beta x + \gamma xx} = 2\mu \mu C e^{2\mu \int v dx}.$$

KOROLLAR 3

§22 Wir haben also sofort eine partikuläre Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung:

$$adv - \mu avv dx + \frac{dx}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2} = 0,$$

nachdem $C = 0$ gesetzt worden ist, welche ist:

$$0 = a\gamma + 2\mu a(\beta + \gamma x)v + \mu^2 a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)vv - \frac{\mu}{\alpha + 2\beta x + \gamma xx},$$

aus welcher mit einer von mir anderenorts dargestellten Methode das vollständige Integral gefunden werden kann. Ja, wenn jene Differentialgleichung durch die Integralform geteilt wird, wird sie sogar integrierbar gemacht werden.

PROBLEM 2

§23 Nachdem diese Differentialgleichung zweiten Grades vorgelegt worden ist:

$$\frac{ddy}{y} + \frac{adx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^2} = 0,$$

in welcher das Differential dx als konstant angenommen worden ist, ihr Integral zu finden.

LÖSUNG

Man versuche die Integration wiederum mit dem Faktor $Pdx + Qdy$, und nachdem der Kürze wegen

$$\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy = Z$$

gesetzt worden ist, verwandle man diese Gleichung in diese Form:

$$ddy + \frac{aydx^2}{ZZ} = 0,$$

welche mit $Pdx + Qdy$ multipliziert liefert:

$$Pdxddy + Qdyddy + \frac{aPydx^3}{ZZ} + \frac{aQydx^2dy}{ZZ} = 0.$$

Weil diese integrierbar sein muss, wird sie sofort

I. den ersten Teil des Integrals = $Pdx dy + \frac{1}{2}Qdy^2$ geben;
es ist also übrig, dass der folgende Ausdruck integrierbar gemacht wird:

$$-\frac{1}{2}dy^3 \left(\frac{dQ}{dy} \right) - \frac{1}{2}dxdy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) + \frac{aQydx^2dy}{ZZ} + \frac{aPydx^3}{ZZ} - dxdy^2 \left(\frac{dP}{dy} \right) - dx^2dy \left(\frac{dP}{dx} \right).$$

Es ist also als erstes notwendig, dass $\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$ ist, woher Q eine Funktion nur von x wird, die $Q = K$ sei; dann sind aber auch die dy^2 involvierenden Terme zu zerstören, aus denen wird:

$$\left(\frac{dK}{dx}\right) + 2\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$$

oder für allein variablel angenommenes y :

$$dy\left(\frac{dK}{dx}\right) + 2dP = 0,$$

deren Integral

$$P = L - \frac{1}{2}y\left(\frac{dK}{dx}\right)$$

ist, wobei L auch eine Funktion von x bezeichnet. Daher wird wegen

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \left(\frac{dL}{dx}\right) - \frac{1}{2}y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right)$$

und des als konstant angenommenen dx der andere Teil des Integrals sein:

$$dx^2 \int \frac{ay}{ZZ} \left(Ldx - \frac{1}{2}ydx\left(\frac{dK}{dx}\right) + Kdy \right) - dx^2 \int dy \left(\left(\frac{dL}{dx}\right) - \frac{1}{2}y\left(\frac{ddK}{dx^2}\right) \right),$$

aber es ist

$$\int \frac{aKydy}{ZZ} = aK \int \frac{ydy}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^2},$$

woher für das Integral der

II. Teil als $= \frac{a}{2c} \cdot \frac{Kdx^2}{\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy}$ entsteht, und daher muss sein:

$$\frac{ay}{ZZ} \left(Ldx - \frac{1}{2}y dK \right) = -\frac{a}{2c} \cdot \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)dK - 2Kdx(\beta + \gamma x)}{ZZ}$$

oder

$$acLydx - \frac{1}{2}acyydK = aKdx(\beta + \gamma x) - \frac{1}{2}adK(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)$$

oder auch

$$acLydx = aKdx(\beta + \gamma x) - \frac{1}{2}adK(\alpha + 2\beta x + \gamma xx).$$

Es ist also ersichtlich, dass $L = 0$ und $K = \alpha + 2\beta x + \gamma xx$ sein muss. Daher wird wegen $\left(\frac{dK}{dx^2}\right) = 2\gamma$

III. der letzte Teil des Integrals $= \frac{1}{2}\gamma yydx^2$ sein. Weil also gilt:

$$P = -y(\beta + \gamma x) \quad \text{und} \quad Q = \alpha + 2\beta x + \gamma xx,$$

wird unser Multiplikator sein:

$$-ydx(\beta + \gamma x) + dy(\alpha + 2\beta x + \gamma xx),$$

und man wird das gesuchte Integral haben:

$$\begin{aligned} -ydx dy(\beta + \gamma x) + \frac{1}{2}dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) - \frac{a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2}{2c(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)} \\ + \frac{1}{2}\gamma yydx^2 = Cdx^2. \end{aligned}$$

Aber wenn $C = \frac{-a}{2c} + C$ gesetzt wird, wird das Integral dieses sein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma yydx^2 - ydx dy(\beta + \gamma x) + \frac{1}{2}dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) \\ + \frac{ayydx^2}{2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)} = Cdx^2. \end{aligned}$$

Diese Form stimmt mit der überein, die ich oben [§ 6] dargeboten habe.

THEOREM 2

§24 Diese Differentialgleichung zweiten Grades für konstantes dx

$$ddy + \frac{ay^{n+1}dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^{\frac{n+4}{2}}} = 0$$

wird mit diesem Multiplikator integrierbar gemacht werden:

$$-ydx(\beta + \gamma x) + dy(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$

und das Integral wird sein:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\gamma yydx^2 - ydxdy(\beta + \gamma x) + \frac{1}{2}dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) \\ & + \frac{ay^{n+2}dx^2}{(n+2)(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cyy)^{\frac{n+2}{2}}} = Cdx^2. \end{aligned}$$

KOROLLAR 1

§25 Der Fall des Problem entsteht aus diesem Theorem, wenn $n = 0$ gesetzt wird. Im Übrigen wird das im Theorem dargebotene Integral auf die gleiche Weise gefunden, auf die wir die Lösung des Problem gegeben haben; daher wäre es überflüssig, seinen Beweis hier hinzuzufügen.

KOROLLAR 2

§26 Wenn $c = 0$ gesetzt wird, wird man den Fall haben, welcher sich auch aus dem ersten Theorem ableiten lässt, wenn dort $m = 0$ gesetzt wird. Während nämlich $\frac{1}{a}$ für a und $n + 1$ anstelle von n geschrieben wird, stimmt das dort gegebene Integral vollkommen mit diesem überein, welches das Theorem für den Fall $c = 0$ an die Hand gibt.

KOROLLAR 3

§27 Dieses Theorem umfasst sogar das erste in sich: Denn die Gleichung des ersten

$$addy - \frac{mady^2}{y} + y^n dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0,$$

wenn $y = z^{\frac{1}{1-m}}$ gesetzt wird, geht in diese über:

$$\frac{a}{1-m} z^{\frac{m}{1-m}} ddz + z^{\frac{n}{1-m}} dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0$$

oder

$$\frac{addz}{1-m} + z^{\frac{n-m}{1-m}} dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n-4m+3}{2m-2}} = 0.$$

Wenn also nun $\frac{n-m}{1-m} = n+1$ gesetzt wird, dass $n = 1 - n(m-1)$ wird, wird diese Gleichung in diese Form übergehen:

$$\frac{addz}{1-m} + z^{n+1} dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{-n-4}{2}} = 0,$$

welches ein partikulärer Fall des gegenwärtigen Theorems ist, aus welchem sie entsteht, indem $c = 0$ gesetzt wird.

KOROLLAR 5

§29 Hier tritt ein besonders bemerkenswerter Fall auf, wenn $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = c = 1$ ist, in welchem man diese Gleichung hat:

$$ddy + \frac{ay^{n+1} dx^2}{(xx + yy)^{\frac{n+4}{2}}} = 0,$$

deren Integration also ist:

$$\frac{1}{2} (ydx - xdy)^2 + \frac{ay^{n+2} dx^2}{(n+2)(xx + yy)^{\frac{n+2}{2}}} = Cdx^2.$$

Man setze $y = ux$, es wird $ydx - xdy = -xxdu$ sein, und das Integral wird werden:

$$\frac{1}{2} x^4 du^2 + \frac{au^{n+2} dx^2}{(n+2)(1+uu)^{\frac{n+2}{2}}} = Cdx^2$$

und daher

$$\frac{dx}{xx} = \frac{du(1+uu)^{\frac{n+2}{4}}}{\sqrt{2C(1+uu)^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2a}{n+2} u^{n+2}}},$$

welche wegen der getrennten Variablen erneut integriert werden kann.

SCHOLIION

§30 Auch hier liefert die Form des Multiplikators eine geeignete Substitution, mit deren Hilfe die Differenzen-Differentialgleichung in eine andere leichter zu händelnde Form überführt werden wird. Es muss natürlich

$$y = z\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma xx}$$

gesetzt werden. Die Natur der Formel suggeriert aber diese Substitution an

$$(\alpha + 2\beta x + \gamma xx + cy) \frac{n+4}{2},$$

weil auf diese Weise eine einzige Variable in der Klammer übrig bleibt. Aber durch diese Substitution wird die Gleichung selbst um vieles komplizierter, sodass, auch wenn die mit dem einfacheren Faktor

$$dz(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{3}{2}}$$

integrierbar gemacht wird, das dennoch weniger klar ist. Aber wenn der Multiplikator von dritter oder höherer Ordnung war, kann eine Substitution von dieser Art nicht einmal in bequemer Weise gefunden werden, wie es in den beiden anderen Beispielen passiert ist.

PROBLEM 3

§31 Nachdem diese Differentialgleichung zweiten Grades vorgelegt worden ist:

$$yyddy + mydy^2 = axdx^2,$$

in welcher das Differential dx als konstant festgelegt worden ist, ihr Integral zu finden.

LÖSUNG

Weil weder der Multiplikator erster noch zweiter Ordnung zum Erfolg führt, entnehme man ihn aus der dritten Ordnung. Nachdem also die Gleichung auf diese Form gebracht worden ist:

$$ddy + \frac{m dy^2}{y} - \frac{ax dx^2}{yy} = 0,$$

werde sie mit $Pdx^2 + 2Qdxdy + 2Rdy^2$ multipliziert, woher man sofort haben wird:

I. Der erste Teil des Integrals $Pdx^2dy + Qdxdy^2 + Rdy^3$ und durch Integrieren bleibt diese Form zurück:

$$\begin{aligned} & \frac{aPxdx^4}{yy} - \frac{2aQxdx^3dy}{yy} - \frac{3aRxdx^2dy^2}{yy} \\ & \quad + \frac{mPdx^2dy^2}{y} + \frac{2mQdxdy^3}{y} + \frac{3mRdy^4}{y} \\ & - dx^3dy \left(\frac{dP}{dx} \right) - dx^2dy^2 \left(\frac{dP}{dy} \right) - dx^2dy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) - dx^2dy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) \\ & - dx^2dy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) - dx^2dy^2 \left(\frac{dR}{dx} \right) \end{aligned}$$

Aber diese Form kann nur integrierbar sein, wenn die Glieder, die dy^2 , dy^3 und dy^4 verwickeln, sich aufheben. Zuerst werden wir also für dy^4 haben:

$$\frac{3mR}{y} - \left(\frac{dR}{dy} \right) = 0, \quad \text{oder} \quad 3mRdy = ydR,$$

wo x als konstant angenommen wird, woher $R = Ky^{3m}$ wird, während K eine Funktion nur von x bezeichnet, und so wird sein:

$$\left(\frac{dR}{dx} \right) = y^{3m} \left(\frac{dK}{dx} \right).$$

Nun wird für die Zerstörung der dy^3 enthaltenden Terme werden:

$$\frac{2mQ}{y} - \left(\frac{dQ}{dy} \right) - y^{3m} \left(\frac{dK}{dx} \right) = 0$$

oder für konstant angenommenes x :

$$2mQdy - ydQ = y^{3m+1}dy \left(\frac{dK}{dx} \right),$$

welche durch y^{2m+1} geteilt und integriert gibt:

$$\frac{-Q}{y^{2m}} = \frac{1}{m+1} y^{m+1} \left(\frac{dK}{dx} \right) - L,$$

nachdem erneut L für eine Funktion von x genommen worden ist, sodass gilt

$$Q = Ly^{2m} - \frac{1}{m+1} y^{3m+1} \left(\frac{dK}{dx} \right),$$

und daher

$$\left(\frac{dQ}{dx} \right) = y^{2m} \left(\frac{dL}{dx} \right) - \frac{1}{m+1} y^{3m+1} \left(\frac{ddK}{dx^2} \right).$$

Man zerstöre schließlich auch die dy^2 enthaltenden Terme, woraus hervorgeht:

$$-3aKy^{3m-2}x - y^{2m} \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{1}{m+1} y^{3m+1} \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{mP}{y} - \left(\frac{dP}{dy} \right) = 0,$$

die für konstant angenommenes x mit ydy multipliziert liefert:

$$-3aKxy^{3m-1}dy - y^{2m+1}dy \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{1}{m+1} y^{3m+2}dy \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + mPdy - ydP = 0,$$

welche durch y^{m+1} geteilt und integriert gibt:

$$\frac{-3a}{2m-1} Kxy^{2m-1} - \frac{1}{m+1} y^{m+1} \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{1}{2(m+1)^2} y^{2m+2} \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) - \frac{P}{y^m} + M = 0,$$

während M eine Funktion nur von x bezeichnet. Also wird

$$P = My^m - \frac{3a}{2m-1} Kxy^{3m-1} - \frac{1}{m+1} y^{2m+1} \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{1}{2(m+1)} y^{3m+2} \left(\frac{ddK}{dx^2} \right)$$

und daher

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dx} \right) &= y^m \left(\frac{dM}{dx} \right) - \frac{3a}{2m-1} Ky^{3m-1} - \frac{3ax}{2m-1} y^{3m-1} \left(\frac{dK}{dx} \right) - \frac{1}{m+1} y^{2m+1} \left(\frac{ddL}{dx^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2(m+1)^2} y^{3m+2} \left(\frac{d^3K}{dx^3} \right). \end{aligned}$$

Nun werden die Terme

$$-\frac{2aQxdx^3dy}{yy} - dx^3dy \left(\frac{dP}{dx} \right)$$

integriert, für konstant angenommenes x , den

II. anderen Teil des Integrals:

$$\begin{aligned} & -2axdx^3 \left(\frac{1}{2m-1} Ly^{2m-1} - \frac{1}{3m(m+1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx} \right) \right) - Ndx^3 \\ & -dx^3 \left(\frac{1}{m+1} y^{m+1} \left(\frac{dM}{dx} \right) - \frac{a}{m(2m-1)} Ky^{3m} - \frac{ax}{m(2m-1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2(m+1)^2} y^{2m+2} \left(\frac{ddL}{dx^2} \right) + \frac{1}{6(m+1)^3} y^{3m+3} \left(\frac{d^3K}{dx^3} \right) \right) \end{aligned}$$

an die Hand geben. Das Differential von dieser muss also für konstant gesetztes y gleich dem restlichen Teil $\frac{-aPx dx^4}{yy}$ sein; daher werden nach Teilung durch dx^4 die folgende Gleichung haben:

$$\begin{aligned} & aMxy^{m-2} - \frac{3aaxx}{2m-1} Ky^{3m-3} - \frac{ax}{m+1} y^{2m-1} \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{ax}{2(m+1)^2} y^{3m} \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) \\ & - \frac{2a}{2m-1} Ly^{2m-1} + \frac{2a}{3m(m+1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx} \right) - \frac{2ax}{2m-1} y^{2m-1} \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{2ax}{3m(m+1)} y^{3m} \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) \\ & - \frac{1}{m+1} y^{m+1} \left(\frac{ddM}{dx^2} \right) + \frac{a}{m(2m-1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx} \right) + \frac{a}{m(2m-1)} y^{3m} \left(\frac{dK}{dx} \right) \\ & + \frac{ax}{m(2m-1)} y^{3m} \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{1}{2(m+1)^2} y^{2m+2} \left(\frac{d^3L}{dx^3} \right) - \frac{1}{6(m+1)} y^{3m+1} \left(\frac{d^4K}{dx^4} \right) \\ & = \text{einer Funktion von } x = \left(\frac{dN}{dx} \right). \end{aligned}$$

Hier mache man nun die einzelnen verschiedenen Potenzen von y jeweils zu Null, und weil y^{m-2} und y^{3m-3} einmal auftauchen, werden wir, wenn nicht $m = 2$ oder $m = 1$ ist, $M = 0$ und $K = 0$ haben; und es werden nur die M behafteten Terme übrig bleiben, unter welchen y^{2m+2} abgesondert ist; daher muss $\left(\frac{d^3L}{dx^3} \right) = 0$ sein, und daher

$$L = \alpha + 2\beta x + \gamma xx,$$

die übrigen mit y^{2m-1} behafteten geben:

$$-\frac{2ax(\beta + \gamma x)}{m+1} - \frac{2a(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}{2m-1} - \frac{4ax(\beta + \gamma x)}{2m-1} = 0.$$

Daher muss

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\beta + \gamma x}{m+1} + \frac{4\beta + 3\gamma x}{2m-1} = 0$$

sein. Diesen Bedingungen kann im Allgemeinen nicht Genüge geleistet werden; es sind also die folgenden Fälle festzulegen:

I. Wenn $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ ist, wird $m = -\frac{1}{2}$, sodass die vorgelegte Gleichung ist:

$$yyddy - \frac{1}{2}ydy^2 = axdx^2$$

oder

$$ddy - \frac{dy^2}{2y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0.$$

Weil also $K = 0$, $L = x$, $M = 0$ ist, wird sein:

$$R = 0, \quad Q = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad P = -2$$

und unser Multiplikator wird sein:

$$-2dx^2 + \frac{2xdxdy}{y}$$

und daher das gesuchte Integral:

$$-2dx^2dy + \frac{xdxdy^2}{y} + \frac{axxdx^3}{yy} = Cdx^3,$$

oder durch Teilung durch dx

$$axxdx^2 + xydy^2 - 2yydxdy = Cyydx^2.$$

II. Es sei $\alpha = 0, \beta = 0$, es wird $m = -\frac{2}{5}$ sein und die vorgelegte Differenzdifferentialgleichung:

$$ddy - \frac{2dy^2}{5y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0.$$

Weil also $K = 0, L = xx$ und $M = 0$ ist, wird

$$R = 0, \quad Q = xxy^{-\frac{4}{5}}, \quad P = -\frac{10}{3}yx^{\frac{1}{5}}$$

sein, woher unser Multiplikator werden wird:

$$-\frac{10}{3}xy^{\frac{1}{5}}dx^2 + 2xxy^{-\frac{4}{5}}dxdy$$

und das gesuchte Integral

$$-\frac{10}{3}xy^{\frac{1}{5}}dx^2dy + xxy^{-\frac{4}{5}}dxdy^2 + \frac{10}{9}ax^3y^{-\frac{9}{5}}dx^3 + \frac{25}{9}y^{\frac{6}{5}}dx^3 = Cdx^3$$

oder durch Teilen durch dx und Multiplizieren mit $y^{\frac{9}{5}}$

$$-\frac{10}{3}xyydx dy + xxydy^2 + \frac{10}{9}ax^3dx^2 + \frac{25}{9}y^3dx^2 = Cy^{\frac{9}{5}}dx^2.$$

III. Zuvor haben wir aber schon zwei Fälle erwähnt, in denen entweder $m = 1$ oder $m = 2$ ist. Es es also $m = 1$ und die vorgelegte Gleichung

$$ddy + \frac{dy^2}{y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0$$

und es muss

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{dx}\right) &= \frac{aMx}{y} - 3aaxxK - \frac{1}{2}axy \left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{8}axy^3 \left(\frac{ddK}{dx^2}\right) \\ &- 2aLy + \frac{1}{3}ay^3 \left(\frac{dK}{dx}\right) - 2axy \left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{3}axy^3 \left(\frac{ddK}{dx^2}\right) \\ &- \frac{1}{2}yy \left(\frac{ddM}{dx^2}\right) + 2ay^3 \left(\frac{dK}{dx}\right) + axy^3 \left(\frac{ddK}{dx^2}\right) + \frac{1}{8}y^4 \left(\frac{d^3L}{dx^3}\right) - \frac{1}{48}y^6 \left(\frac{d^4K}{dx^4}\right), \end{aligned}$$

woher wir $M = 0, N = -3aa \int Kxxdx$ und

$$-\frac{5}{2}x \left(\frac{dL}{dx} \right) - 2L = 0, \quad \frac{35}{24}x \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{7}{3} \left(\frac{dK}{dx} \right) = 0, \quad \left(\frac{d^3L}{dx^3} \right) = 0, \quad \left(\frac{d^4K}{dx^4} \right) = 0$$

erhalten. Diesen Bedingungen wird Genüge geleistet, wenn wir nehmen:

$$L = 0, \quad K = 1, \quad M = 0 \quad \text{und} \quad N = -aax^3,$$

woher wird: $R = y^3, Q = 0, P = -3axy^2$.

Daher wird unser Multiplikator sein:

$$-3axy^2 dx^2 + 3y^3 dy^2$$

und das gesuchte Integral:

$$-3axy^2 dx^2 dy + y^3 dy^3 + ay^3 dx^3 + aax^3 dx^3 = Cdx^3.$$

IV. Es sei nun $m = 2$, dass unsere Gleichung

$$ddy + \frac{2dy^2}{y} - \frac{axdx^2}{yy} = 0$$

wird, und es muss dieser Gleichung genüge geleistet werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{dx} \right) &= aMx - aaKxxy^3 - \frac{2}{3}aLy^3 - axy^3 \left(\frac{dL}{dx} \right) - \frac{1}{3}y^3 \left(\frac{ddM}{dx^2} \right) \\ &+ \frac{4}{9}ay^6 \left(\frac{dK}{dx} \right) + \frac{1}{18}y^6 \left(\frac{d^3L}{dx^3} \right) + \frac{1}{3}axy^6 \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) - \frac{1}{162}y^7 \left(\frac{d^4K}{dx^4} \right). \end{aligned}$$

Es wird also $N = a \int Mx dx$ sein, und es kann $L = 0, K = 0, M = 1$ gesetzt werden, woher $N = \frac{1}{2}axx$ wird. Daher wird aber:

$$R = 0, \quad Q = 0, \quad P = y^2,$$

sodass der Multiplikator $y^2 dx^2$ und das Integral

$$yy dx^2 dy - \frac{1}{2} ax dx^3 = C dx^3$$

oder

$$2yy dy - ax dx = 2C dx$$

sein wird.

KOROLLAR 1

§32 Also ist der letzte Fall, in dem $m = 2$ ist, der leichteste von allen, weil er sogar mit einem Multiplikator von erster Ordnung erledigt werden kann, ja das Integral der Gleichung

$$yyddy + 2ydy^2 = axdx^2$$

ist sogar auf den ersten Blick als

$$yydy = \frac{1}{2}axxdx + Cdx$$

ersichtlich. Aber der erste und zweite Fall, in denen $m = -\frac{1}{2}$ und $m = -\frac{2}{5}$ ist, hätten mit einem Multiplikator der zweiten Form, wegen $R = 0$, aufgelöst werden können.

KOROLLAR 2

§33 Allein der dritte Fall also, in dem $m = 1$ ist, ist sehr schwer lösbar, weil er einen Multiplikator der dritten Form verlangt. Daher bemerke man, dass die folgende Differentialgleichung zweiten Grades

$$yyddy + ydy^2 - axdx^2 = 0$$

integrierbar gemacht wird, wenn sie mit $3ydy^2 - 3axdx^2$ multipliziert wird, und das Integral ist:

$$y^3dy^3 - 3axydx^2dy + ay^3dx^3 + aax^3dx^3 = Cdx^3.$$

KOROLLAR 3

§34 Weiter ist aber zu bemerken, dass dieser Ausdruck in drei einfache Faktoren aufgelöst werden kann. Wenn nämlich der Kürze wegen $a = c^3$ und $\mu = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\nu = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ gesetzt wird, kann diese Integralgleichung so dargestellt werden:

$$(ydy + cydx + c^2xdx)(ydy + \mu cydx + \nu c^2xdx)(ydy + \nu cydx + \mu c^2xdx) = Cdx^3.$$

KOROLLAR 4

§35 Wenn diese Konstante C hier = 0 genommen wird, gehen daraus sofort drei partikuläre Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} ydy + cydx + c^2xdx &= 0, \\ ydy + \mu cydx + \nu c^2xdx &= 0, \\ ydy + \nu cydx + \mu c^2xdx &= 0, \end{aligned}$$

von welchen die erste den schon oben [§ 7] angegebenen Fall enthält, die zwei übrigen sind hingegen imaginär.

SCHOLION

§36 Es bleibt also das vierte Beispiel übrig, welches

$$ds^2(\alpha ss + \beta s + \gamma) = r r dr^2 + 2r^3 ddr$$

war, was nach Setzen von

$$r = y^{\frac{2}{3}}, \quad \text{dass gilt} \quad dr = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy \quad \text{und} \quad ddr = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}ddy - \frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}dy^2,$$

in diese Form übergeht:

$$\frac{4}{3}y^{\frac{5}{3}}ddy = ds^2(\alpha ss + \beta s + \gamma).$$

Im Allgemeinen beobachte ich aber, wenn man eine Gleichung von dieser Art hat:

$$Sds^2 = mr^\mu dr^2 + nr^{\mu+1} ddr,$$

dass sie mit der Substitution $r = y^{\frac{n}{m+n}}$ auf diese einfachere Form zurückgeführt wird:

$$Sds^2 = \frac{nn}{m+n} y^{\frac{\mu n - m + n}{m+n}} ddy.$$

Also lassen sich alle Gleichungen dieser Art in dieser einfacheren Form erfassen:

$$ddy = y^n X dx^2.$$

Wir wollen also sehen, in welchen Fällen so des Exponenten n wie der Funktion X diese Gleichung mit unserer Methode integriert werden kann.

PROBLEM 4

§37 Fälle für den Exponenten n und die Natur der Funktion x zu finden, in denen die Differentialgleichung zweiten Grades

$$ddy + y^n X dx^2 = 0,$$

wo dx konstant ist, integriert werden kann.

LÖSUNG I

Man nehme zuerst den Multiplikator erster Ordnung, P , und es wird diese Gleichung zu integrieren sein:

$$Pddy + y^n PX dx^2 = 0,$$

und das Integral des ersten Teil wird $= Pdy$ sein, und es bleibt dieser zu integrierende Ausdruck zurück:

$$y^n PX dx^2 - dx dy \left(\frac{dP}{dx} \right) - dy^2 \left(\frac{dP}{dy} \right),$$

woher es notwendig ist, dass $\left(\frac{dP}{dy} \right) = 0$ ist, und daher P eine Funktion nur von x . Es sei also $P = K$, und wegen des konstanten dx muss integriert werden:

$$dx \left(y^n K X dx - dy \left(\frac{dK}{dx} \right) \right),$$

deren Integral nur existieren kann, wenn

$$-y dx \left(\frac{dK}{dx} \right) = -y dK$$

ist. Es muss aber

$$y^n K X dx^2 + y dK = 0$$

sein, was nicht sein kann, außer unter diesen Bedingungen:

$$n = 1 \quad \text{und} \quad X = -\frac{dK}{Kdx^2},$$

und dann wird die Integralgleichung sein:

$$Kdy - ydK = Cdx.$$

LÖSUNG II

Nachdem ein Multiplikator der zweiten Form $Pdx + 2Qdy$ genommen worden ist, ist die Gleichung integrierbar zu machen:

$$2Qdydy + Pdxddy + y^n Xdx^2(Pdx + 2Qdy) = 0,$$

woher der erste Teil des Integrals als

$$\text{I. } Pxdy + Qdy^2$$

berechnet wird. Es ist also übrig, dann man integriert:

$$\begin{aligned} y^n OXdx^3 + 2y^n QXdx^2dy \\ - dx^2dy \left(\frac{dP}{dx} \right) - dx dy^2 \left(\frac{dP}{dy} \right) \\ - dx dy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) - dy^3 \left(\frac{dQ}{dy} \right). \end{aligned}$$

Damit die Terme herausgeworfen werden, in denen dy mehr als eine Dimension hat, muss

$$\left(\frac{dQ}{dy} \right) = 0; \quad \text{und daher} \quad Q = K \quad \text{einer Funktion von } x \text{ sein.}$$

Darauf haben wir

$$\left(\frac{dP}{dy} \right) + \left(\frac{dQ}{dx} \right) = 0, \quad \text{oder} \quad dP + dy \left(\frac{dK}{dx} \right) = 0,$$

woher wird:

$$P = L - y \left(\frac{dK}{dx} \right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dP}{dx} \right) = \left(\frac{dL}{dx} \right) - y \left(\frac{ddK}{dx^2} \right).$$

Nun wird der andere Teil des Integrals sein:

$$dx^2 \int \left(y^n P X dx + 2y^n Q X dy - dy \left(\frac{dP}{dx} \right) \right)$$

oder

$$dx^2 \int \left\{ \begin{array}{l} +y^n L X dx \quad \quad + 2y^n K X dy \\ -y^{n+1} X dx \left(\frac{dK}{dx} \right) - dy \left(\frac{dL}{dx} \right) + y dy \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) \end{array} \right\};$$

aus der Veränderlichkeit von y wird also *der andere teil des Integrals* erschlossen:

$$\text{II.} \quad dx^2 \left(\frac{2}{n+1} y^{n+1} K X - y \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{1}{2} y y \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + M \right).$$

Und die Veränderlichkeit von x erfordert, dass gilt:

$$\begin{aligned} y^n L X - y^{n+1} X \left(\frac{dK}{dx} \right) &= \frac{2}{n+1} y^{n+1} K \left(\frac{dX}{dx} \right) + \frac{2}{n+1} y^{n+1} X \left(\frac{dK}{dx} \right) \\ &\quad - y \left(\frac{ddL}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} y y \left(\frac{d^3 K}{dx^3} \right) + \left(\frac{dM}{dx} \right). \end{aligned}$$

Wenn wir n unbestimmt lassen wollen, muss

$$L = 0, \quad \left(\frac{d^3 K}{dx^3} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dM}{dx} \right) = 0$$

sein; dann aber

$$\frac{2}{n+1} K \left(\frac{dX}{dx} \right) + \frac{n+3}{n+1} X \left(\frac{dK}{dx} \right) = 0,$$

woher man

$$K^{\frac{n+3}{2}} X = A,$$

einer Konstante, berechnet; aber wegen $\left(\frac{d^3 K}{dx^3} \right) = 0$ wird

$$K = \alpha + 2\beta x + \gamma xx \quad \text{sein und daher} \quad X = \frac{A}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+3}{2}}}$$

und

$$Q = \alpha + 2\beta x + \gamma xx; \quad P = -2y(\beta + \gamma x).$$

Deshalb wird der Multiplikator sein:

$$-2ydx(\beta + \gamma x) + 2dy(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)$$

und das Integral dieser Differenzdifferentialgleichung

$$ddy + \frac{Ay^n dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+3}{2}}} = 0$$

sein:

$$\begin{aligned} -2ydx dy(\beta + \gamma x) + dy^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) + \frac{2}{n+1} \frac{Ay^{n+1}}{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^{\frac{n+1}{2}}} \\ + \gamma yy dx^2 = C dx^2. \end{aligned}$$

Es sind aber die Fälle übrig, in denen entweder $n = 1$ oder $n = 2$ ist.

I. Es sei $n = 1$; und die vorhergehenden Bedingungen erfordern

$$LX + \left(\frac{ddL}{dx^2}\right) = 0; \quad \frac{2}{n+1}K \left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{n+3}{n+1}X \left(\frac{dK}{dx}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0$$

oder

$$LX dx^2 + ddL = 0 \quad \text{und} \quad 2KdX + 4XdK + dx \left(\frac{d^3K}{dx^3}\right) = 0;$$

daher wird

$$2KKX + \int \frac{Kd^3K}{dx^2} = \text{Konst.}$$

und daraus

$$2KKXdx^2 + KddK - \frac{1}{2}dK^2 = Edx^2$$

und

$$X = \frac{Edx^2 + \frac{1}{2}dK^2 - KddK}{2KKdx^2},$$

während E eine Konstante bezeichnet. Für die erste Bedingung setze man aber $L = 0$. Daher wird

$$Q = K, \quad P = -y \left(\frac{dK}{dx} \right)$$

sein; und das Integral dieser Gleichung

$$ddy + yXdx^2 = 0,$$

während

$$X = \frac{Edx^2 + \frac{1}{2}dK^2 - KddK}{2KKdx^2}$$

ist, was für eine Funktion von x auch immer für K genommen wird, wird sein:

$$-ydx dy \left(\frac{dK}{dx} \right) + Kdy^2 + yyKXdx^2 + \frac{1}{2}yydx^2 \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) = Cdx^2.$$

II. Es sei $n = 2$; und die Bedingungen verlangen:

$$2KdX + 5XdK = 0, \quad LX = \frac{1}{2} \left(\frac{d^3K}{dx^3} \right), \quad \left(\frac{ddL}{dx^2} \right) = 0.$$

Die erste gibt $X = AK^{-\frac{5}{2}}$, welche in die andere eingesetzt

$$2ALK^{-\frac{5}{2}}dx^3 = d^3K$$

liefert; aber wegen

$$\left(\frac{ddL}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{wird sein} \quad L = \alpha + \beta x,$$

woher nach Setzen von

$$K = (\alpha + \beta x)^\mu$$

auch

$$2A(\alpha + \beta x)^{1-\frac{5\mu}{2}} = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(\alpha + \beta x)^{\mu-3}\beta^3$$

und $\mu = \frac{8}{7}$ sein wird; und daher

$$2A = \frac{-48}{343}\beta^3 \quad \text{und} \quad X = \frac{A}{(\alpha + \beta x)^{\frac{20}{7}}} = \frac{-24\beta^3}{343(\alpha + \beta x)^{\frac{20}{7}}}.$$

Weiter

$$Q = (\alpha + \beta x)^{\frac{8}{7}}; \quad P = \alpha + \beta x - \frac{8}{7}\beta y(\alpha + \beta x)^{\frac{1}{7}}.$$

Als logische Konsequenz ist das Integral dieser Differenzdifferentialgleichung

$$ddy + y^2 X dx^2 = 0$$

mit

$$X = \frac{-24\beta^3}{343(\alpha + \beta x)^{\frac{20}{7}}}$$

dieses

$$\begin{aligned} dx dy \left(\alpha + \beta x - \frac{8}{7}\beta y(\alpha + \beta x)^{\frac{1}{7}} \right) + dy^2 (\alpha + \beta x)^{\frac{8}{7}} - \frac{16\beta^3 y^3 dx^2}{343(\alpha + \beta x)^{\frac{12}{7}}} \\ - \beta y dx^2 + \frac{4\beta^2 y^2 dx^2}{49(\alpha + \beta x)^{\frac{6}{7}}} = C dx^2. \end{aligned}$$

III. Wenn $n = 2$ ist, verdient noch der Fall bemerkt zu werden, in welchem $L = \alpha$ ist, und für

$$K = x^\mu$$

gesetzt wird

$$2\alpha Ax^{-\frac{5\mu}{2}} = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)x^{\mu-3}$$

sein, woher

$$\mu = \frac{6}{7} \quad \text{und} \quad 2\alpha A = \frac{6 \cdot 1 \cdot 8}{343} \quad \text{wird und daher} \quad \alpha = \frac{24}{343A}.$$

Daher wird

$$K = x^{\frac{6}{7}}, \quad L = \frac{24}{343A}, \quad X = \frac{A}{x^{\frac{15}{7}}}$$

sein; und weiter

$$Q = x^{\frac{6}{7}}, \quad P = \frac{24}{343A} - \frac{6y}{7x^{\frac{1}{7}}}.$$

Als logische Konsequenz wird das Integral dieser Gleichung

$$ddy + \frac{Ay^2 dx^2}{x^{\frac{15}{7}}} = 0$$

dieses sein

$$\frac{24dx dy}{343A} - \frac{6y dx dy}{7x^{\frac{1}{7}}} + x^{\frac{6}{7}} dy^2 + \frac{2Ay^3 dx^2}{3x^{\frac{9}{7}}} - \frac{3yy dx^2}{49x^{\frac{8}{7}}} = C dx^2.$$

LÖSUNG III

Nach Nehmen des Multiplikators

$$P dx^2 + 2Q dx dy + 3R dy^2$$

wird der erste Teil des Integrals

$$P dx^2 dy + Q dx dy^2 + R dy^3,$$

und der übrige zu integrierende Ausdruck

$$\begin{aligned}
& y^n P X dx^4 + 2y^n Q X dx^3 dy + 3y^n R X dx^2 dy^2 \\
& - dx^3 dy \left(\frac{dP}{dx} \right) - dx^2 dy^2 \left(\frac{dP}{dy} \right) \\
& - dx^2 dy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) - dx dy^3 \left(\frac{dQ}{dy} \right) \\
& - dx dy^3 \left(\frac{dR}{dx} \right) - dy^4 \left(\frac{dR}{dy} \right),
\end{aligned}$$

woher sofort, wie wir zuvor gefolgert haben, $R = K$ einer Funktion von x ist, dann aber

$$Q = L - y \left(\frac{dK}{dx} \right), \quad \text{also} \quad \left(\frac{dQ}{dx} \right) = \left(\frac{dL}{dx} \right) - y \left(\frac{ddK}{dx^2} \right).$$

Dann liefert die Streichung der mit dy^2 behafteten Terme:

$$3y^n K X - \left(\frac{dP}{dy} \right) - \left(\frac{dL}{dx} \right) + y \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) = 0,$$

woher

$$P = M - y \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{1}{2} y y \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{3}{n+1} y^{n+1} K X$$

wird. Weil also

$$\left(\frac{dP}{dx} \right) = \left(\frac{dM}{dx} \right) - y \left(\frac{ddL}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} y y \left(\frac{d^3K}{dx^3} \right) + \frac{3}{n+1} y^{n+1} \left(\frac{dKX}{dx} \right)$$

ist, liefern wegen

$$2y^n Q X dx^3 dy = 2X dx^3 \left(y^n L dy - y^{n+1} dy \left(\frac{dK}{dx} \right) \right)$$

die mit dy behafteten Terme den *anderen Teil des Integrals*

$$dx^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{n+1} LXy^{n+1} - \frac{2}{n+2} y^{n+2} X \left(\frac{dK}{dx} \right) - y \left(\frac{dM}{dx} \right) + \frac{1}{2} yy \left(\frac{ddL}{dx^2} \right) \\ - \frac{1}{6} y^3 \left(\frac{d^3K}{dx^3} \right) - \frac{3}{(n+1)(n+2)} y^{n+2} \left(\frac{d.KX}{dx} \right) + N \end{array} \right\}.$$

Nun muss aber, wegen des ersten Terms $y^n PXdx^4$,

$$\begin{aligned} 0 = & y^n MX - y^{n+1} X \left(\frac{dL}{dx} \right) + \frac{1}{2} y^{n+2} X \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{3}{n+1} y^{2n+1} KXX \\ & - \frac{2}{n+1} y^{n+1} \left(\frac{d.LX}{dx} \right) + \frac{2}{n+2} y^{n+2} X \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{2}{n+2} y^{n+2} \left(\frac{dX}{dx} \right) \left(\frac{dK}{dx} \right) \\ & + y \left(\frac{ddM}{dx^2} \right) - \frac{1}{2} yy \left(\frac{d^3L}{dx^3} \right) + \frac{1}{6} y^3 \left(\frac{d^4K}{dx^4} \right) + \frac{3}{(n+1)(n+2)} y^{n+2} \left(\frac{dd.KX}{dx^2} \right) - \frac{dN}{dx} \end{aligned}$$

sein. Hier muss aber, wenn wir n nicht bestimmen wollen, $K = 0$ und daher $R = 0$ sein, woher dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt werden würde. Wir wollen also die folgenden Fälle anschauen:

I. Es sei $n = 1$; und es wird

$$N = 0, \quad MX + \left(\frac{ddM}{dx^2} \right) = 0$$

sein; damit daraus X nicht auf die erste Lösung zurückgeführt wird, muss $M = 0$ werden; dann wird man aber haben:

$$-X \left(\frac{dL}{dx} \right) - \left(\frac{d.LX}{dx} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^3L}{dx^3} \right) = 0$$

und

$$\frac{1}{2} X \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{3}{2} KXX + \frac{2}{3} X \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{dX}{dx} \right) \left(\frac{dK}{dx} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{d^4K}{dx^4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dd.KX}{dx^2} \right) = 0.$$

Und damit X nicht auf die Weise des vorhergehenden Falls definiert wird, in welchem $n = 1$ war, setze man $L = 0$; daher muss X aus dieser Gleichung bestimmt werden:

$$\frac{3}{2}KXXdx^4 + \frac{5}{3}Xdx^2ddK + \frac{5}{3}dx^2dKdX + \frac{1}{2}Kdx^2ddX + \frac{1}{6}d^4K = 0.$$

II. Es sei $n = \frac{1}{2}$; und es wird

$$2KXX - \frac{1}{2} \left(\frac{d^3L}{dx^3} \right) = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

$$-X \left(\frac{dL}{dx} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{d.Lx}{dx} \right) = 0, \quad \left(\frac{d^4K}{dx^4} \right) = 0$$

sein; und auch

$$\frac{13}{10}X \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{dX}{dx} \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{dd \cdot KX}{dx^2} \right) = 0$$

oder auch

$$\frac{21}{10}XddK + \frac{12}{5}dKdX + \frac{4}{5}KddX = 0,$$

aber ich halte mich nicht weiter mit Fällen von dieser Art auf.

LÖSUNG IV

Man probiere auch den Faktor vierter Ordnung

$$Pdx^3 + 2Qdx^2dy + 3Rdxdy^2 + 4Sdy^3,$$

woher der *erste Teil des Integrals* entsteht:

$$Pdx^3dy + Qdx^2dy^2 + Rdxdy^3 + Sdy^4$$

und der übrige zu integrierende Ausdruck wird sein:

$$\begin{aligned}
& y^n P X dx^5 + 2y^n Q X dx^4 dy + 3y^n R X dx^3 dy^2 + 4y^n S X dx^2 dy^3 \\
& - dx^4 dy \left(\frac{dP}{dx} \right) - dx^3 dy^2 \left(\frac{dP}{dy} \right) \\
& \quad - dx^3 dy^2 \left(\frac{dQ}{dx} \right) - dx^2 dy^3 \left(\frac{dQ}{dy} \right) \\
& \quad \quad - dx dy^4 \left(\frac{dR}{dy} \right) \\
& \quad \quad \quad - dx dy^4 \left(\frac{dS}{dy} \right) - dy^5 \left(\frac{dS}{dy} \right).
\end{aligned}$$

Es wird also

$$S = K, \quad R = L - y \left(\frac{dK}{dx} \right)$$

und

$$4y^n K X dy - dQ - dy \left(\frac{dL}{dx} \right) + y dy \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) = 0$$

sein. Damit wir hier nicht in allzu lästige Rechnung hineingeraten, wollen wir

$$K = A, \quad L = B \quad \text{setzen, dass } S = A \quad \text{und } R = B \quad \text{ist;}$$

nun wird wegen

$$\left(\frac{dL}{dx} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{ddK}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{auch} \quad Q = \frac{4A}{n+1} y^{n+1} X$$

sein. Dann werden wir aber haben:

$$3By^n X - \left(\frac{dP}{dy} \right) - \frac{4A}{n+1} y^{n+1} \left(\frac{dX}{dx} \right) = 0,$$

also

$$P = \frac{3}{n+1} B X y^{n+1} - \frac{4A}{(n+1)(n+2)} y^{n+2} \left(\frac{dX}{dx} \right)$$

und

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{3B}{n+1}y^{n+1}\left(\frac{dX}{dx}\right) - \frac{4A}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right)$$

und

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{3B}{n+1}y^{n+1}\left(\frac{dX}{dx}\right) - \frac{4A}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{ddX}{dx^2}\right).$$

Daher entsteht also der *andere Teil des Integrals*:

$$dx^4 \left(\frac{4A}{(n+1)^2}XXy^{2n+2} - \frac{3B}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{4A}{(n+1)(n+2)(n+3)}y^{n+3}\left(\frac{ddX}{dx^2}\right) \right)$$

und es muss

$$0 = \frac{3B}{n+1}X^2y^{2n+1} - \frac{4A}{(n+1)(n+2)}Xy^{2n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right) - \frac{8A}{(n+1)^2}Xy^{2n+2}\left(\frac{dX}{dx}\right) \\ + \frac{3B}{(n+1)(n+2)}y^{n+2}\left(\frac{ddX}{dx^2}\right) - \frac{4A}{(n+1)(n+2)(n+3)}y^{n+3}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)$$

sein. Damit dieser Gleichung Genüge geleistet wird, setze man

$$B = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) = 0$$

oder

$$X = \alpha + 2\beta x + \gamma xx,$$

und es werde

$$\frac{4A}{(n+1)(n+2)} + \frac{8A}{(n+1)^2} = 0 \quad \text{oder} \quad n = -\frac{5}{3},$$

woher

$$S = A, \quad R = 0, \quad Q = -6Ay^{-\frac{2}{3}}(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) \quad \text{und} \quad P = 36Ay^{\frac{1}{3}}(\beta + \gamma x)$$

sein wird. Daher wird diese Differenzdifferentialgleichung:

$$ddy + y^{-\frac{5}{3}} dx^2 (\alpha + 2\beta y + \gamma xx) = 0$$

integrierbar, wenn sie mit

$$36y^{\frac{1}{3}} (\beta + \gamma x) dx^3 - 12y^{-\frac{2}{3}} (\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dx^2 dy + 4dy^3$$

multipliziert wird, und das Integral wird

$$36y^{\frac{1}{3}} (\beta + \gamma x) dx^3 dy - 6y^{-\frac{2}{3}} (\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dx^2 dy^2 + dy^4 \\ + 9y^{-\frac{4}{3}} (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2 dx^4 - 27\gamma y^{\frac{4}{3}} dx^4 = C dx^4$$

sein und in dieser Lösung ist das vierte Beispiel enthalten.

KOROLLAR 1

§38 Also enthält das vierte oben [§ 7 und 36] erwähnte Beispiel eine höchst merkwürdige Differentialgleichung, weil sie nur mittels eines Faktors von dritter Ordnung integrierbar gemacht werden kann, woher ihre Integration noch um vieles weniger von anderen Methoden erwartet werden kann.

KOROLLAR 2

§39 Wenn wir also umgekehrt $y = fz^{\frac{3}{2}}$ setzen, dass

$$y^{\frac{1}{3}} = z^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{f} \quad \text{und} \quad y^{\frac{5}{3}} = fz^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{ff}$$

ist, wird

$$dy = \frac{3}{2} fz^{\frac{1}{2}} dz \quad \text{und} \quad ddy = \frac{3}{2} fz^{\frac{1}{2}} ddz + \frac{3}{4} fz^{-\frac{1}{2}} dz^2$$

sein und die vorgelegte Gleichung:

$$\frac{3}{2} fz^{\frac{1}{2}} ddz + \frac{3}{4} fz^{-\frac{1}{2}} dz^2 + \frac{dx^2 (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)}{fz^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{ff}} = 0$$

wird integrierbar, wenn sie mit

$$36z^{\frac{1}{2}} (\beta + \gamma x) dx^3 \sqrt[3]{f} - \frac{18(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) dx^2 dz}{z^{\frac{1}{2}}} \sqrt[3]{f} + \frac{27}{2} f^3 z^{\frac{3}{2}} dz^3$$

multipliziert wird und das Integral wird sein:

$$54fz(\beta + \gamma x)dx^3dz\sqrt[3]{f} - \frac{27}{2}f(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2dz^2\sqrt[3]{f} + \frac{81}{16}f^4zzdz^4 \\ + \frac{9(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2dx^4}{fzz\sqrt[3]{f}} - 27\gamma fzzdx^4\sqrt[3]{f} = Cdx^4.$$

KOROLLAR 3

§40 Man setze $ff\sqrt[3]{ff} = \frac{4}{3}$, dass man diese Gleichung hat:

$$2z^3ddz + zzzdz^2 + dx^2(\alpha + 2\beta x + \gamma xx) = 0,$$

und diese wird integrierbar werden, wenn sie multipliziert wird mit:

$$\frac{2(\beta + \gamma x)dx^3}{zz} - \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2dz}{z^3} + \frac{dz^3}{z},$$

und das Integral wird sein:

$$4z(\beta + \gamma x)dx^3dz - (\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2dz^2 + \frac{1}{2}zzdz^4 \\ + \frac{(\alpha + 2\beta x + \gamma xx)^2dx^4}{2zz} - 2\gamma zzzdx^4 = Cdx^4,$$

welche Gleichung auch auf diese Weise dargestellt werden kann:

$$((\alpha + 2\beta x + \gamma xx)dx^2 - zzzdz^2)^2 + 8z^3(\beta + \gamma x)dx^3dz - 4\gamma z^4dx^4 = Ezzdx^4.$$

KOROLLAR 4

§41 Wenn $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und $\gamma = a^2$ ist, oder diese zu integrierende Gleichung vorgelegt wird:

$$2z^3ddz + zzzdz^2 + aaxxdx^2 = 0,$$

und sie wird mit diesem Multiplikator integrierbar gemacht werden:

$$\frac{2aaxdx^3}{zz} - \frac{aaxxdx^2dz}{z^3} + \frac{dz^3}{z}$$

und die Integralgleichung wird sein:

$$(aaxxdx^2 - zzdz^2)^2 + 8aaxz^3 dx^3 dz - 4aaz^4 dx^4 = Ezzdx^4$$

oder

$$(aaxxdx^2 + zzdz^2)^2 - 4aa(zdx - xdz)^2 z z dx^2 = Ezzdx^4.$$

KOROLLAR 5

§42 Nachdem also die Konstante $E = 0$ gesetzt worden ist, wird man für diesen Fall zwei partikuläre Integralgleichungen haben:

$$\text{I. } aaxxdx^2 + zzdz^2 - 2azdx(zdx - xdz) = 0,$$

$$\text{II. } aaxxdx^2 + zzdz^2 + 2azdx(zdx - xdz) = 0,$$

von welchen jene aufgelöst wird in

$$axdx + zdz = \pm zdx\sqrt{2a},$$

diese hingegen in

$$axdx + zdz = \pm zdx\sqrt{-2a}.$$

SCHOLION

§43 Die Entwicklung dieser Beispiele ist von solcher Natur, dass sie nicht wenig an Nützlichkeit in der Auflösung von Differentialgleichungen zweiten Grades zu verschaffen scheint; denn weil diese Beispiele, wenn wir einige leichtere Fälle ausnehmen, mithilfe bisher genutzter Methoden nicht erledigt werden können, wird diese neue Methode, mit welcher die Aufgabe mithilfe von Multiplikatoren gelöst wird, nicht nur mit größten Erfolg verwendet werden, sondern es besteht auch kein Zweifel, dass sie, wenn sie weiter entwickelt wird, um vieles größere Vorteile mit sich bringen wird. Mit gleichem Erfolg wird sie aber auch auf Differentialgleichungen dritten und höheren Grades ausgedehnt werden können, weil es freilich gewiss ist, dass nach Vorlage einer beliebigen Differentialgleichung von welchem Grad auch immer zwischen zwei Variablen stets eine Größe solcher Art gegeben ist, wenn die Gleichung

mit ihr multipliziert wird, sie integrierbar wird. Weil das auch bei Differentialgleichungen ersten Grades wahr ist, wird auch die Auflösung von diesen mit der Methode solche Faktoren zu finden nicht unwesentlich voran gebracht werden können; dort geht freilich die ganze Aufgabe darauf zurück, dass in einem sich ergebenden Fall ein geeigneter Multiplikator gefunden wird; und in Differentialgleichungen ersten Grades wird dieser Faktor immer eine Funktion nur von x und y sein, aber weil deswegen die Verschiedenheit der Ordnungen hier nicht auftritt, scheint seine Ermittlung um vieles schwieriger, besonders wenn dieser Faktor eine transzendente Funktion ist. Weil aber die Art des Integrierens der Natur der Gleichungen in höchstem Maße zukommt, wird nicht ohne großen Ertrag die Mühe auf ihre Kultivierung verwendet werden.