Über Doppelintegrale*

Leonhard Euler

§1 Wenn wir entweder das Volumen oder die Oberfläche oder andere Größen von dieser Art irgendeines vorgelegten Körpers bestimmen wollen, pflegt das mithilfe einer Doppelintegration zu geschehen; denn eine zweimal zu integrierende Differentialformel wird mit einer solchen Form $Zdxdy$ ausgedrückt, die die beiden Variablen x und y enthält, von welchen allein die eine in der ersten Integration als Variable betrachtet wird; die zweite Integration hingegen wird nach der anderen dann als Variable betrachteten Größe ausgeführt. Daher pflegt die durch eine Doppelintegration resultierende Größe durch Voranstellen zweier Integralzeichen in dieser Weise $\int\int Zdxdy$ angezeigt zu werden, in welcher Doppelintegration natürlich die vorgelegte Differentialformel $Zdxdy$ zu verstehen ist zweimal integriert werden zu müssen. Ich nenne also mit zwei Integralzeichen behaftete Ausdrücke hier Doppelintegrale; weil deren Anwendungsbereich sehr umfassend ist, habe ich beschlossen, ihre Natur hier sorgfältiger zu untersuchen und ihre Eigenschaften und Beschaffenheiten genauer zu entwickeln.

§2 Weil also zuerst x und y zwei voneinander unabhängige variable Größen sind, Z hingegen irgendeine Funktion von diesen bezeichnet, kann die Bedeutung der Doppelintegralformel $\int\int Zdxdy$ so erklärt werden, dass eine endliche Funktion dieser zwei Variablen zu suchen ist, welche so zweimal differenziert, dass in der einen Differentiation allein x, in der anderen allein y für variabel gehalten wird, zur Formel $Zdxdy$ führt. Wenn also $Z = a$ war,

*Originaltitel: "De formulis integralibus duplicatis", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 14* (1770, verfasst 1768): pp. 72–103, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 289 – 315, Eneström-Nummer E391, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

ist es ersichtlich, dass $\int\int adxdy = axy$ sein wird; allgemeiner wird hingegen $\int adxdy = axy + X + Y$ sein, während X eine beliebige Funktion von x und Y eine von y bezeichnet, weil ja diese zwei Größen durch jene zwei Ableitungen aus der Rechnung herausgeworfen werden.

§3 Wenn aber im Allgemeinen V eine Funktion solcher Art von x und y war, welche zweimal so differenziert, wie es gerade beschrieben worden ist, $Zdxdy$ liefert, wird natürlich $V = \int\int Zdxdy$ sein, aber die Doppelintegration führt darüber hinaus die beliebigen Funktion X und Y, jene von x, diese von y, ein, dass in voller Allgemeinheit

$$\int Zdxdy = V + X + Y$$

ist. Und es wird sofort erkannt, dass Differentialformen von dieser Art notwendig mit dem Produkt $dxdy$ behaftet sind und daher nach dieser Bezeichnungsweise solche Formeln $\int\int Zdx^2$ oder $\int\int Zdy^2$ nichts bedeuten, weil sie ja der Natur der Sache wegen ausgeschlossen werden, während in der einen Integration allein x, in der anderen hingegen allein y wie die Variable behandelt wird.

§4 Nachdem diese Form von Doppelintegralen von dieser Art $\int\int Zdxdy$ so festgelegt worden sind, dass x und y zwei voneinander unabhängige variable Größen x und y und Z eine irgendwie aus ihnen zusammengesetzte Funktion ist, ist es nicht schwer die Doppelintegration, welche sie beinhalten, durchzuführen, was freilich, je nachdem ob zuerst x oder y allein als Variable betrachtet wird, auf zwei Weisen geschehen kann. Nachdem natürlich zuerst y als Variable genommen worden ist, wird die andere x als konstant behandelt und es wird das Integral $\int Zdy$ gesucht, welches eine gewisse Funktion von x und y sein wird; nachdem diese gefunden worden ist, nehme man die Differentialformel $dx \int Zdy$ in Angriff, in welcher nun y als konstant und allein x als variabel behandelt werde, und man suche ihr Integral $\int dx \int Zdy$, welche der gesuchte Wert des vorgelegten Doppelintegrals $\int\int Zdxdy$ sein wird. Wenn in dieser Doppelintegration die Reihenfolge der Variablen x und y umgekehrt wird, wird der gesuchte Wert so ausgedrückt werden: $\int dy \int Zdx$, welcher vom vorhergehenden nicht abweichen wird.

§5 Wegen dieser Übereinstimmung trägt es sich zu, dass eine solche Formel $\int\int Zdxdy$ ohne Unterschied entweder auf diese Weise $\int dx \int Zdy$ oder auf diese $\int dy \int Zdx$ dargeboten werden kann; wollen wir aber beide gebrauchen, sind die gewöhnlichen Integrationsregeln zu beachten, wenn nur bemerkt wird, dass in der Integration, in welcher entweder x oder y als konstant angenommen wird, die eingeführte Konstante eine beliebige Funktion derselben sein wird. Wenn beispielsweise diese Form vorgelegt wird

$$\int\int \frac{dxdy}{xx+yy} = \int dx \int \frac{dy}{xx+yy},$$

wird wegen

$$\int \frac{dy}{xx+yy} = \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x} + \frac{dX}{dx},$$

während $\frac{dX}{dx}$ irgendeine Funktion von x bezeichnet,

$$\int\int \frac{dxdy}{xx+yy} = \int \frac{dx}{x}\arctan\frac{y}{x} + X$$

sein, wo in der noch durchzuführenden Integration y als konstant angesehen wird. In gleicher Weise findet man hingegen

$$\int\int \frac{dxdy}{xx+yy} = \int \frac{dy}{y}\arctan\frac{x}{y} + Y,$$

in welcher Integration x als konstant angenommen wird; in diesem Beispiel ist die Übereinstimmung der beiden gefundenen Werte nicht gerade offensichtlich.

§6 Dennoch wird die Gültigkeit dieser Übereinstimmung leicht über Reihen gezeigt; denn weil $\arctan\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y}{x}$, während $\frac{\pi}{2}$ einen rechten Winkel bezeichnet, und

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \frac{y^7}{7x^7} + \frac{y^9}{9x^9} - \text{etc.}$$

ist, wird

$$\int \frac{dx}{x}\arctan\frac{y}{x} = -\frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} + \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + f:y$$

und

$$\int \frac{dy}{y} \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} \log y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + f : x$$

sein, aus jeder beiden von welchen

$$\int \int \frac{dxdy}{xx+yy} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.}$$

enspringt. Wo aber die beiden Integrationen gelingen, zeigt sich die Übereinkunft direkt; es wäre freilich überflüssig, dies an mehreren Beispielen gezeigt zu haben, weil der Grund aus der Natur der Differentiale und Integrale heraus schon vollkommen einsichtig ist.

§7 All dies ist als über Doppelintegrale von dieser Art festzuhalten, wannimmer die beiden Variablen x und y keinen Nexus aufweisen, sodass in der einen Integration die eine, in der anderen hingegen die andere als Konstante angenommen wird. Aber solche Formeln sind nicht mit denen zu vermischen, in denen, wie ich eingangs gesagt habe, das Volumen und die Oberfläche von beliebigen Körpern ausgedrückt zu werden pflegt. Denn obgleich diese Formeln auch eine Doppelintegration verlangen und in der ersten die eine der beiden Variablen, beispielsweise y, allein als Variable behandelt wird und die andere als Konstante angenommen worden ist, muss sie dennoch nach Ausführen der ersten Integration über alle Werte von y hinweg erstreckt werden und so schließlich anstelle von y der äußerte Wert, welchen es annehmen kann, eingesetzt werden, welcher meistens von x abhängt, sodass nach Festlegen dieses Wertes nach der ersten Integration anstelle von y in der ersten Integration y als gewisse Funktion von x eingeht und deshalb nicht als Konstante angesehen werden kann, durch welche Bedingung es passiert, dass die andere Integration sehr stark verändert wird, auch wenn die erste in gleicher Weise wie zuvor durchgeführt wird.

§8 Damit dieser Unterschied besser erkannt wird, wird es förderlich sein ein Beispiel angeführt zu haben. Man suche also das Volumen der Kugel, deren Mittelpunkt C (Fig. 1)[1] und Radius $CA = a$ sei, und zuerst freilich den dem Quadraten ACB überstehenden Anteil, dessen dem Flächenstück $Yy = dxdy$ überstehendes Säulenelement $YZyz$ ist, nachdem $CP = x$ und

[1] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$PY = y$ gesetzt worden ist, und ihre Höhe wird $YZ = \sqrt{aa - xx - yy}$ sein; daher ist das Volumen des Säulenelements $= dxdy\sqrt{aa - xx - yy}$, welches zweimal integriert werden muss.

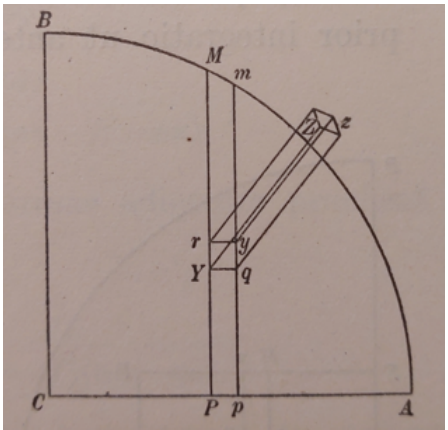

Fig. 1.

Es bleibe zuerst das Intervall $CP = x$ konstant und das Integral $\int dy\sqrt{aa - xx - yy}$ so genommen, dass es für $y = 0$ verschwindet, wird den der Fläche $PpYq$ überstehenden Anteil geben, welcher also

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{aa - xx - yy}$$
$$+\frac{1}{2}(aa - xx)\arcsin\frac{y}{\sqrt{aa - xx}}$$

sein wird. Nun muss dieser Wert in der anderen Integration gebraucht werden, aber bevor er eingeführt wird, muss er über die ganze Strecke PM hinweg erstreckt werden, damit man das der ganzen Fläche $PpMm$ überstehende Volumenelement hat; nachdem aber der Punkt Y bis hin zu M nach vorne bewegt worden ist, wird $y = \sqrt{aa - xx}$, welcher Wert also anstelle von y eingesetzt werden muss, sodass in der folgenden Integration die Größe y keineswegs als Konstante betrachtet wird und diese Behandlungsweise sehr stark von der vorhergehenden abweicht.

§9 Nachdem also $y = \sqrt{aa - xx}$ gesetzt worden ist, wird

$$\int dy\sqrt{aa - xx - yy} = \frac{\pi}{4}(aa - xx),$$

weil $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ ist, und so wird die noch auszuführende Integration

$$\int dx \int dy \sqrt{aa - xx - yy} = \frac{\pi}{4} \int (aa - xx) dx$$

sein, wo freilich die alleinige Variable x enthalten ist, aber nicht deshalb, weil hier nun y als konstant angesehen wird, sondern weil für y eine bestimmte Funktion von x eingesetzt worden ist. Diese andere Integration so durchgeführt, dass das Integral für $x = 0$ verschwindet, wird in der Tat das Volumen des Anteils der Kugel geben, welcher der Fläche $CBMP$ übersteht, welche deshalb $= \frac{\pi}{4}\left(aax - \frac{1}{3}x^3\right)$ sein wird; daher wird der Oktant der Kugel oder der dem ganzen Quadranten ACB überstehende Anteil hervorgehen, indem man den Punkt P bis hin zu A vorwärts bewegt, dass $x = a$ wird. Dann wird also das Volumen des Oktanten der Kugel $= \frac{\pi}{6}a^3$ sein und daher die Fläche der ganzen Kugel $= \frac{4\pi}{3}a^3$ sein, wie ja bekannt ist. Aus diesem Beispiel wird eingesehen, dass eine solche Untersuchung des Volumens sehr stark von der zuerst dargelegten Doppelintegration abweicht.

§10 Wenn wir also nicht den ganzen Oktanten der Kugel, sondern nun den Teil von ihr, der der rechteckigen Fläche $CEDF$ (Fig. 2)[2] übersteht, ausfindig machen wollen, ist die erste Integration wie zuvor durchzuführen, aber, nachdem sie durchgeführt worden ist, muss y der Wert PM zugeteilt werden, welcher freilich konstant ist, und deshalb scheint diese Untersuchung zur ersten Art zu zuzukommen, weicht indes dennoch von ihr ab, weil ein bestimmtes Integral hervorgeht, während dort unbestimmte Funktionen X und Y eingehen.

[2]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

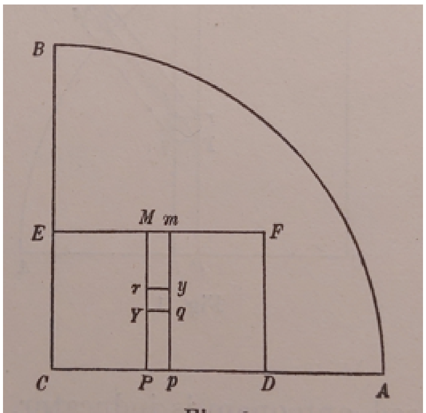

Fig. 2.

Nachdem also wie zuvor der Kugelradius $CA = a$ gesetzt worden ist, seien die Seiten des Rechtecks $CEFD$ hirt $CD = e$ und $CE = f$ und das der Fläche $PpYq$ überstehende Raumelement wird wie zuvor

$$\frac{1}{2}y\sqrt{aa-xx-yy}$$
$$+\frac{1}{2}(aa-xx)\arcsin\frac{y}{\sqrt{aa-xx}}$$

sein, welches bis hin zu M erstreckt, wo $y = f$ wird,

$$\frac{1}{2}f\sqrt{aa-ff-xx}+\frac{1}{2}(aa-xx)\arcsin\frac{f}{\sqrt{aa-xx}}$$

sein wird, woher das der Fläche $CPEM$ überstehende Volumen mit dem folgenden Integral ausgedrückt werden wird

$$\frac{1}{2}f\int dx\sqrt{aa-ff-xx}+\frac{1}{2}\int(aa-xx)dx\arcsin\frac{f}{\sqrt{aa-xx}},$$

wenn es freilich so bestimmt wird, dass es für $x = 0$ verschwindet. Wir wollen also einzelnen diese beiden Formeln entwickeln.

§11 Und die erste liefert freilich sofort

$$\int dx\sqrt{aa-ff-xx}=\frac{1}{2}x\sqrt{aa-ff-xx}+\frac{1}{2}(aa-ff)\arcsin\frac{x}{\sqrt{aa-ff}},$$

die andere wird aber wegen

$$d.\arcsin\frac{f}{\sqrt{aa-xx}}=\frac{fxdx}{(aa-xx)\sqrt{aa-ff-xx}}$$

so transformiert

$$\int(aa-xx)dx\arcsin\frac{f}{\sqrt{aa-xx}}$$
$$=\left(aax-\frac{1}{3}x^3\right)\arcsin\frac{f}{\sqrt{aa-xx}}-f\int\frac{\left(aa-\frac{1}{3}xx\right)xxdx}{(aa-xx)\sqrt{aa-ff-xx}};$$

um diesen letzten Teil zu integrieren, sei angemerkt, dass

$$\arcsin\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}=\int\frac{afdx}{(aa-xx)\sqrt{aa-ff-xx}}$$

ist; es wird also ein bestimmtes Vielfaches von dieser gegeben sein, welches zu jener Form addiert eine solche Form liefert

$$\int\frac{\left(aa-\frac{1}{3}xx\right)xxdx}{(aa-xx)\sqrt{aa-ff-xx}}+m\arcsin\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$=\int\frac{\left(aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf\right)dx}{(aa-xx)\sqrt{aa-ff-xx}},$$

dass $aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf$ durch $aa-xx$ teilbar wird, was durch Nehmen von $m=-\frac{2a^3}{3f}$ geschieht; und daher wird

$$\int\frac{\left(aa-\frac{1}{3}xx\right)xxdx}{(aa-xx)\sqrt{aa-ff-xx}}=\frac{2a^3}{3f}\arcsin\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}-\frac{1}{3}\int\frac{(2aa-xx)dx}{\sqrt{aa-ff-xx}}$$

sein.

§12 Weil also

$$\int\frac{(2aa-xx)dx}{\sqrt{aa-ff-xx}}=\frac{1}{2}(3aa+ff)\arcsin\frac{x}{\sqrt{aa-ff}}+\frac{1}{2}x\sqrt{aa-ff-xx}$$

ist, wird

$$\int \frac{\left(aa - \frac{1}{3}xx\right) xxdx}{(aa - xx)\sqrt{aa - ff - xx}}$$

$$= \frac{2a^3}{3f} \arcsin \frac{fx}{\sqrt{(aa - ff)(aa - xx)}} - \frac{1}{6}(3aa + ff) \arcsin \frac{x}{\sqrt{aa - ff}} - \frac{1}{6}x\sqrt{aa - ff - xx}$$

sein und daher

$$\int (aa - xx)dx \arcsin \frac{f}{\sqrt{aa - xx}}$$

$$= \left(aax - \frac{1}{3}x^3\right) \arcsin \frac{f}{\sqrt{aa - xx}} - \frac{2}{3}a^3 \arcsin \frac{fx}{\sqrt{(aa - ff)(aa - xx)}}$$

$$+ \frac{1}{6}f(3aa + ff) \arcsin \frac{x}{\sqrt{aa - ff}} + \frac{1}{6}fx\sqrt{aa - ff - xx}.$$

Daher wird nach Setzen von $x = CD = e$ das Volumen des dem Rechteck $CDEF$ überstehenden Anteils der Kugel

$$\frac{1}{4}ef\sqrt{aa - ee - ff} + \frac{1}{4}f(aa - ff) \arcsin \frac{e}{\sqrt{aa - ff}}$$

$$+ \frac{1}{6}e(3aa - ee) \arcsin \frac{f}{\sqrt{aa - ee}} - \frac{1}{3}a^3 \arcsin \frac{ef}{\sqrt{(aa - ee)(aa - ff)}}$$

$$+ \frac{1}{12}f(3aa + ff) \arcsin \frac{e}{\sqrt{aa - ff}} + \frac{1}{12}ef\sqrt{aa - ee - ff}$$

sein, welcher Ausdruck auf diesen

$$\frac{1}{3}ef\sqrt{aa - ee - ff} + \frac{1}{6}f(3aa - ff) \arcsin \frac{e}{\sqrt{aa - ff}}$$

$$+ \frac{1}{6}e(3aa - ee) \arcsin \frac{f}{\sqrt{aa - ee}} - \frac{1}{3}a^3 \arcsin \frac{ef}{\sqrt{(aa - ee)(aa - ff)}}$$

zurückgeführt wird.

§13 Wenn also die Grenze des Rechtecks F bis hin zum Rand vorwärts bewegt wird, dass $ee + ff = aa$ ist, verschwindet das erste Glied und die drei übrigen betroffenen Kreisbogen gehen in den rechten Winkel oder $\frac{\pi}{2}$ über und das Volumen wird

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}aae + \frac{1}{2}aaf - \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{6}f^3 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

oder wegen $f = \sqrt{aa - ee}$

$$\frac{\pi}{12}((2aa + ee)\sqrt{aa - ee} - 2a^3 + 3aae - e^3)$$

sein, welches Volumen maximal wird, wenn $f = e = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist, und dann wird es $= \frac{\pi a^3(5-2\sqrt{2})}{12\sqrt{2}}$, während das Volumen des Oktanten der Kugel $= \frac{\pi}{6}a^3$ ist, sodass unser Festkörper sich zum Oktanten der Kugel verhält wie $5 - 2\sqrt{2}$ zu $2\sqrt{2}$. Wenn aber der Punkt F nicht bis zur Peripherie des Viertelkreises gelangt und $f = e$ war, wird das gesuchte Volumen

$$= \frac{1}{3}ee\sqrt{aa - 2ee} + \frac{1}{3}e(3aa - ee)\arcsin\frac{e}{\sqrt{aa - ee}} - \frac{1}{3}a^3\arcsin\frac{ee}{aa - ee}$$

sein. Wenn also

$$\arcsin\frac{e}{\sqrt{aa - ee}} : \arcsin\frac{ee}{aa - ee} = a^3 : e(3aa - ee)$$

war, wird das Volumen algebraisch ausgedrückt werden.

§14 Um aber die Sache allgemeiner zu betrachten, wollen wir das der beliebigen Fläche $GQHR$ (Fig. 3)[3] überstehende Volumen suchen; weil sein Element der Fläche $Yy = dxdy$ übersteht und es $= dxdy\sqrt{aa - xx - yy}$ ist, liefert die erste Integration für konstant genommenes x

$$\frac{1}{2}dx\left(y\sqrt{aa - xx - yy} + (aa - xx)\arcsin\frac{y}{\sqrt{aa - xx}}\right).$$

[3] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

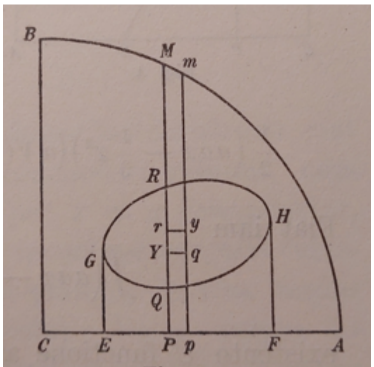

Fig. 3.

Es seien nun aus der Natur der Kurve $GQHR$ die äußersten Abstände $PQ = q$ und $PR = r$ und das der Fläche QR überstehende Volumenelement wird

$$\frac{1}{2}dx \left\{ \begin{array}{l} +r\sqrt{aa-xx-rr} + (aa-xx)\arcsin\dfrac{r}{\sqrt{aa-xx}} \\ \\ -q\sqrt{aa-xx-qq} - (aa-xx)\arcsin\dfrac{q}{\sqrt{aa-xx}} \end{array} \right\}$$

sein. Weil also q und r beliebige Funktionen von x sein können, ist es ersichtlich, sofern es fehlt, dass die Größe y in der folgenden Integration als konstant angesehen wird. Aber die folgende Integration ist vom Wert $x = CE$ bis hin zum Wert $x = CF$ zu erstrecken.

§15 Wenn die Form der Basis $GQHR$ von der Gerade CA durchlaufen wird, dass das der Basis CGH (Fig. 4)[4] überstehende Volumen gesucht wird, deren Natur mit irgendeiner beliebigen Gleichung zwischen $CP = x$, $PR = r$ ausgedrückt werde, wird das Volumen

$$\frac{1}{2}\int dx \left(r\sqrt{aa-xx-rr} + (aa-xx)\arcsin\frac{r}{\sqrt{aa-xx}} \right)$$

sein, wo sich das nicht unelegante Problem ergibt, in welchem die Form der Basis CGH gesucht wird, dass das ihr überstehende Volumen algebraisch ausgedrückt wird.

[4] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

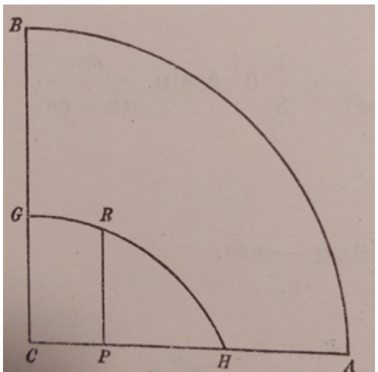

Fig. 4.

Man setze nun für dieses Ziel $r = u\sqrt{aa - xx}$, dass das der Fläche $CPRG$ überstehende unbestimmte Volumen

$$\frac{1}{2}\int (aa - xx)dx\left(u\sqrt{1-uu} + \arcsin u\right)$$

ist, welcher Ausdruck in diesen umgewandelt wird

$$\frac{1}{2}\left(aax - \frac{1}{3}x^3\right)\left(u\sqrt{1-uu} + \arcsin u\right) - \int \left(aax - \frac{1}{3}x^3\right) du\sqrt{1-uu}.$$

Nun werde

$$\int \left(aax - \frac{1}{3}x^3\right) du\sqrt{1-uu} = na^3 \arcsin u + a^3U,$$

während U eine algebraische Funktion von u ist, und weil das Volumen

$$\frac{1}{2}\left(aax - \frac{1}{3}x^3\right) u\sqrt{1-uu} - a^3U + \left(\frac{1}{2}aax - \frac{1}{6}x^3 - na^3\right)\arcsin u$$

ist, wird es im Fall $x^3 + 3aax = 6na^3$ sein, solange u für $x = 0$ gesetzt verschwindet; denn dann wird das Volumen $= na^3u\sqrt{1-uu} - a^3U$ sein.

§16 Wir wollen $dU = U'du$ setzen und es wird diese Gleichung zwischen x und u hervorgehen

$$aax - \frac{1}{3}x^3 = \frac{na^3}{1-uu} + \frac{a^3U'}{\sqrt{1-uu}}.$$

Man setze nun $U = mu\sqrt{1-uu}$ an; es wird $U' = \dfrac{m-2muu}{\sqrt{1-uu}}$ sein, und damit für $x=0$ gesetzt verschwindet, muss $m = -n$ sein, dass

$$aax - \frac{1}{3}x^3 = \frac{2na^3uu}{1-uu} \quad \text{oder} \quad u = \sqrt{\frac{3aax-x^3}{6na^3+3aax-x^3}}$$

ist und daher

$$r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{6na^3+3aax-x^3}}.$$

Nun wird wegen

$$u\sqrt{1-uu} = \frac{\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}$$

jenes Volumen

$$= \frac{2na^3\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}.$$

Wenn dieses Volumen für $x=a$ gesetzt Geltung haben muss, wird

$$n = \frac{1}{3}, \quad r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{2a^3+3aax-x^3}} = \sqrt{\frac{x(a-x)(3aa-xx)}{(a+x)(2a-x)}}$$

und für $x=a$ gesetzt wird das Volumen $= \frac{1}{3}a^3$ sein und für die Basis ist eine Kurve vierter Ordnung gefunden worden.

§17 Was hier über das der Basis überstehende Volumen des Kugelanteils gesagt worden ist, kann mit ähnlicher Rechnung auf jeden anderen Körper übertragen werden, weil in der Formel $Zdxdy$ nur die Größe Z auf eine andere Weise durch x und y bestimmt wird, während hier $Z = \sqrt{aa-xx-yy}$ war. Ja sogar wenn die der Basis überstehende Oberfläche eines beliebigen gegebenen Körpers bestimmt werden muss, wird das mit einer Doppelintegration der entsprechenden Differentialformel $Zdxdy$ in ähnlicher Weise erledigt werden. Wenn also der Körper eine Kugel ist, ist das der Basis $dxdy$ überstehende Flächenelement der Kugel $\frac{adxdy}{\sqrt{aa-xx-yy}}$, sodass $Z = \frac{a}{\sqrt{aa-xx-yy}}$ ist, deren Doppelintegration in gleicher Weise in Bezug auf die Basis, zu welcher der überstehende Anteil der Oberfläche gesucht wird, durchzuführen ist. Und im

Allgemeinen werden irgendwelche Größen eines jeden anderen Körpers, die einer bestimmten Basis entsprechen, mithilfe ähnlicher Operationen bestimmt werden.

§18 Was für eine Funktion auch immer also Z von x und y war, für das Doppelintegral $\int\int Zdxdy$ wird zuerst das Integral $\int Zdy$ für konstant gehaltenes x gesucht und dieses erstrecke man über die ganze Größe y hinweg und so werden die äußersten Werte von y in die Rechnung eingehen, welche aus der Form der Basis bekannte Funktionen von x sein werden; und so wird für Zdy eine Funktion von x entspringen, die mit dx multipliziert erneut auf gewohnte Weise integriert werden muss. Dasselbe ist festzuhalten, wenn in umgekehrter Reihenfolge zuerst die Formel $\int Zdx$ für konstant gehaltenes x integriert wird; während dies Integral über das ganze Intervall von x hinweg erstreckt wird, werden die äußersten demselben y entsprechenden Werte von x, welche Funktionen von y sein werden, eingehen und so wird $\int Zdx$ in eine Funktion nur von y übergehen, welche mit dy multipliziert erneut so integriert werden muss, dass das Integral über das ganze Intervall von y hinweg erstreckt wird. Natürlich ist in jeder der beiden Wege die Integration über die ganze Basis hinweg zu erstrecken und dieselben Vorschriften sind zu einzuhalten, was für eine Funktion auch immer Z von x und y war.

§19 Nachdem also die Basis gegeben worden ist, verhält sich die Bestimmung der Integrationen genauso, als wenn die Größe Z eine konstante Größe wäre und man nur das Integral $\int\int dxdy$ suchte, mit welchem die Fläche der Basis ausgedrückt wird. Daher, um die Regeln, welche in der Bestimmung dieser Integrale beachtet werden müssen, aufzustellen, wird es genügen $Z = 1$ gesetzt zu haben, dass das Doppelintegrals $\int dxdy$ zu bestimmen ist; ob aber x oder y genommen wird, die äußersten Werte von beiden werden durch die die Form der Basis ausdrückende Gleichung bestimmt werden. Nachdem die erste Integration durchgeführt worden ist, wo der Punkt Y (Fig. 5)[5] überall zwischen den äußersten Grenzen angenommen war, werde natürlich dann dieser Punkt zur Peripherie überführt, wonach x und y die Koordinaten der Basis sein werden, zwischen welchen die Gleichung gegeben ist, aus welcher danach entweder y durch x oder x durch y bestimmt werden wird.

[5]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

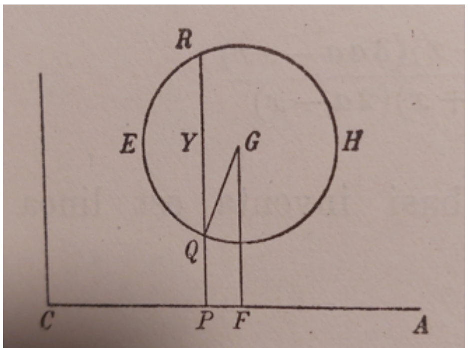

Fig. 5.

§20 Damit dies besser verstanden wird, wollen wir annehmen, dass die Form der Basis ein Kreis ist, welcher den Mittelpunkt in G und den Radius GQ hat, und wir wollen $CF = f$, $FG = g$ und $GQ = c$ setzen; nachdem der Punkt Y zur Peripherie dieses Kreises überführt worden ist, wird

$$cc = (f-x)^2 + (g-y)^2$$

sein. Um nun die Fläche dieses Kreises ausfindig zu machen, sei zuerst x konstant und es wird $\int dy = y + C$ sein, und weil y einen doppelten Wert in unserer Basis hat

$$y = g \pm \sqrt{cc - (f-x)^2},$$

wird diese Integration so bestimmt, dass das Integral verschwindet, während y der kleinere dieser Werte, $g - \sqrt{cc-(f-x)^2}$ zugeteilt wird, sodass

$$\int dy = y - g + \sqrt{cc-(f-x)^2}$$

ist. Nun wird also, nachdem y bis hin zur anderen Grenze $y = g + \sqrt{cc-(f-x)^2}$ erstreckt worden ist,

$$\int dy = 2\sqrt{cc-(f-x)^2}$$

sein, was nun mit dx multipliziert und integriert

$$\int dx \int dy = C - (f-x)\sqrt{cc-(f-x)^2} - cc \arcsin\frac{f-x}{c}$$

liefert; damit dieses für $x = f - c$ gesetzt verschwindet, wird $C = cc \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}cc$. Weiter setze man $x = f + c$ und wegen $cc \arcsin \frac{f-x}{c} = -cc \arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}cc$ wird die gesuchte ganze Fläche $= \frac{\pi}{2}cc + \frac{\pi}{2}cc = \pi cc$ sein, wie bekannt ist.

§21 Wenn wir diese Bestimmungen genauer betrachten, sehen wir, dass die äußersten Werte von x so beschaffen sind, dass der eine maximal, der andere minimal ist, wenn freilich die ganze Basis von einer geschlossen Kurve begrenzt wird. Diese beiden Werte werden also gefunden werden, wenn die die Natur der Basis ausdrückende Gleichung differenziert wird und $dx = 0$ gesetzt wird. Wannimmer aber die Basis nicht von einer einzigen Kurve begrenzt wird, sondern nur in einem Stück, wie CGH (siehe Fig. 4), enthalten ist, dessen Grundseite CH die größte sei, dann ist die kleinere Grenze von x offensichtlich $= 0$, die größere aber CH gleich; und in demselben Fall sind auch die Grenzen der Ordinate PR, die der Abszisse $CP = x$ entspricht, $= 0$ und $= CG$. Nachdem also irgendeine beliebige Basis vorgelegt worden ist, ist ihre Form sorgfältig zu erforschen und die Grenzen zu beiden Seiten hin zu ermitteln, bevor die Untersuchung einer Fläche oder einer anderen Doppelintegralformel in Angriff genommen werden kann; nachdem aber die Grenzen bestimmt worden sind, in denen die Fläche enthalten ist, sind daraus die Bestimmungen der Integrationen zu entnehmen.

§22 Nachdem diese Dinge über die Bestimmung von Integrationen dargelegt worden sind, verdienen die besonderen und höchst bemerkenswerten Beschaffenheiten von Doppelintegralformeln dieser Art betrachtet zu werden, welche in deren Transformation auftauchen. Wie natürlich die Koordinaten derselben Kurve auf unendlich viele Arten angenommen werden können, so können hier anstelle der beiden Variablen x und y zwei beliebige andere Variablen in die Rechnung eingeführt werden, egal ob sie gleichermaßen Koordinaten oder anderen irgendwie bestimmte Größen sind. Eine solche Transformation kann im Allgemeinen so aufgefasst werden, dass anstelle von x und y irgendwelche Funktionen von zwei anderen Variablen t und v eingesetzt werden, und nachdem diese in die für die Basis gegebene Gleichung eingeführt worden sind, können in gleicher Weise die Endpunkte dieser beiden Größen t und v, von welchen die Form der Basis begrenzt wird, bestimmt werden. Wie auch immer aber diese Substitutionen angenommen werden, schließlich resultiert nach der Doppelintegration notwendigerweise immer dieselbe Größe.

§23 Wenn anstelle von x und y irgendwelche zwei orthogonalen Koordinaten eingeführt werden, seien sie t und v, was allgemein passiert, indem man

$$x = f + mt + v\sqrt{1-mm} \quad \text{und} \quad y = g + t\sqrt{1-mm} - mv$$

setzt, ist es offensichtlich, dass das Flächenelement der Basis, welches zuvor $dxdy$ war, nun mit $dtdv$ ausgedrückt werden muss. Weil aber daher

$$dx = mdt + dv\sqrt{1-mm} \quad \text{und} \quad dy = dt\sqrt{1-mm} - mdv$$

ist, ist es keineswegs klar, wie anstelle von $dxdy$ mit diesen Substitutionen $dtdv$ entspringen kann, weil vielmehr

$$dxdy = mdt^2\sqrt{1-mm} + (1-2mm)dtdv - mdv^2\sqrt{1-mm}$$

hervorginge, welche Formel aber, wie auch immer sie auf die Doppelintegration angewandt wird, immer zu größten Fehlern führen würde. Um vieles weniger lässt sich also daraus erschließen, wenn anstelle von x und y andere Funktionen von t und v eingesetzt werden, ein Ausdruck von welcher Art anstelle von $dxdy$ verwendet werden muss.

§24 Und freilich bemerke ich zuerst, dass es hier keinen Grund gibt, warum der anstelle von $dxdy$ einzuführende Ausdruck ihm gleich sein muss; das wäre nämlich erst dann notwendig, wenn die beiden Integrationen auf dieselbe Weise wie zuvor nach zwei Variablen ausgeführt werden. Weil aber nun die anderen Variablen t und v vorhanden sind und so die eine Integration über die Veränderlichkeit von t, die andere über die von v durchzuführen ist, welche Operationen von den vorhergehenden sehr stark abweichen, muss die anstelle von $dxdy$ einzuführende Formeln nicht aus der Gleichheit heraus, sondern vielmehr nach dem Ziel, welches gesteckt worden ist, ausgerichtet werden. Und weil ja nun die beiden Integrationen nach den beiden Variablen t und v unterschieden werden müssen, ist es offensichtlich, dass die anstelle von $dxdy$ zu verwendende Formel notwendig dem Produkt $dtdv$ anhaften muss und eine Form von dieser Art $Zdtdv$ haben muss.

§25 Damit dies in sicherer Weise erledigt wird, bleibe zuerst x unverändert und man führe anstelle von y die andere Variable u ein, sodass y eine beliebige Funktion von x und u und $dy = Pdx + Qdu$ ist. Wenn nun in der ersten Integration x als konstant angenommen wird, wird natürlich $dy = Qdu$

sein, daher $\int\int dxdy = \int dx \int Qdu$, sodass man nun anstelle der Formel $dxdy$ die Formel $Qdxdu$ hat, deren Doppelintegral also auch aus diese Weise ausgedrückt werden können wird: $\int du \int Qdx$, wo in der ersten Integration $\int Qdx$ die Größe u als konstant angenommen wird. Wenn also nun in gleicher Weise u beibehalten wird und anstelle von x irgendeine Funktion von t und u eingeführt wird, dass $dx = Rdt + Sdu$ ist, wird in der Behandlung der Formel $\int du \int Qdx$ die erste Integration $\int Qdx$, in welcher u als Konstante festgelegt wird, in diese übergehen $\int QRdt$, sodass das Doppelintegral $\int du \int QRdt$ oder eben auch $\int\int QRdtdu$ ist, woher es offenkundig ist, dass wegen der beiden Substitutionen anstelle der Formel $dxdy$ diese $QRdtdu$ gehandhabt werden muss.

§26 Wir wollen nun sofort anstelle von x und y diese zwei neuen Variablen t und u einführen, durch welche jene so bestimmt werden, dass gilt

$$dx = Rdt + Sdu \quad \text{und} \quad dy = Tdt + Vdu,$$

woher, nachdem der Wert von dx in der Form $dy = Pdx + Qdu$ eingesetzt worden ist,

$$dy = PRdt + (PS + Q)du$$

wird, sodass $PR = T$ und $PS + Q = V$ ist, woher $P = \frac{T}{R}$ und $\frac{ST}{R} + Q = V$ und so $QR = VR - ST$ wird. Daher müssen wir vermöge dieser Substitutionen anstelle von $dxdy$ die Formel $(VR - ST)dtdu$ gebrauchen, welche unter korrekter Bestimmung zweimal integriert gleichermaßen die Fläche der ganzen Basis liefern muss wie die Formel $dxdy$ zweimal integriert. Was aber hier für die Formel der Fläche der Basis $\int\int dxdy$ gezeigt worden ist, hat für jede beliebige andere Formel $\int\int Zdxdy$ Geltung, welche natürlich mit denselben Substitutionen in diese überführt wird $\int\int Z(VR - ST)dtdu$, solange nur in Z anstelle von x und y die angenommenen Werte eingesetzt werden. Denn die beiden Integrationen müssen in gleicher Weise aus der Form der Basis bestimmt werden.

§27 Wenn also

$$dx = Rdt + Sdu \quad \text{und} \quad dy = Tdt + Vdu$$

gesetzt wird, erlangen wir anstelle von $dxdy$ den Ausdruck $(RV - ST)dtdu$, welche Formel sehr stark von der abweicht, welcher das Produkt $dxdy$ tatsächlich gleich ist; auch wenn nämlich die mit dt^2 und du^2 behafteten Terme, natürlich für die Doppelintegration ungeeignet, herausgeworfen werden, weicht dennoch das, was übrig bleibt, $(RV + ST)dtdu$ in Bezug auf die Vorzeichen von der wahren Formel ab. Aber hier entsteht der nicht geringe Zweifel, ob, weil die Koordinaten x und y gleichberechtigt sind, unsere Formel eher die Differenz $RV - ST$ als die inverse $ST - RV$ umfasst; diese Zweifel wird umso mehr vergrößert, weil, wenn wir die obige Schlussweise in Hinblick auf x und y umgekehrt hätten, dieselben Substitutionen uns in der Tat auf die Formel $(ST - RV)dtdu$ geführt hätten. Aber weil dieser ganze Unterschied nur im Vorzeichen besteht und die eine Formel das Negative der anderen ist, erfährt daher die absolute Bestimmung der Fläche der Basis, von welcher natürlich die absolute Größe verlangt wird, keine Veränderung.

§28 Diese Dinge werden um vieles klarer werden, wenn wir die Methode, die wir oben (§ 20), um die Fläche $EQHR$ (Fig. 5) zu finden, gebraucht haben, genauer betrachten. Zuerst haben wir natürlich aus der Integration der Formel $\int\int dxdy$ diese Fläche

$$= \int dx(PR - PQ)$$

abgeleitet, wo wir freilich PQ von PR abgezogen haben, weil natürlich $PR > PQ$ war; aber in der Rechnung selbst ist kein Grund vorhanden, der vorschreibt, dass wir eher PQ von PR als umgekehrt PR von PQ abziehen sollten, und so hätten wir, der Rechnung nicht widerstrebend, mit gleichem Recht dieselbe Fläche über $\int dx(PQ - PR)$ ausdrücken können, wonach sie negativ ist, aber der ersten gleich hervorgegangen wäre. Daher ist es ersichtlich, dass das Zeichen $+$ oder $-$ nicht die Größe der Fläche, die gesucht wird, betrifft und die Rechnung mit gleichem Recht zu jeder der beiden führen kann. Dieses Grundes wegen wird der obige Zweifel so aufgelöst werden, dass wir sagen, dass die gesuchte Fläche so ausgedrückt werden muss, dass sie $= \pm \int\int dtdu(RV - ST)$ ist, und damit die Fläche positiv ausgedrückt hervorgeht, in jedem Fall das Vorzeichen zu gebrauchen ist, mit welchem $\pm(RV - ST)$ zu einer positiven Größe gemacht werden muss.

§29 Daher werden auch alle Zweifel, die vielleicht über das Finden der Flächen von Kurven entstehen könnten, deren Anteile zu beiden Seiten der

Achse hin verteilt sind und von denen Anfänger nicht unwesentlich verwirrt zu werden pflegen, leicht aufgelöst. Wenn nämlich für die auf die Achse AP bezogene Kurve QAR (Fig. 6)[6] die ganze der Abszisse $AP = x$ entsprechende Fläche QAR bestimmt werden muss und ihre Anteile APQ und APR getrennt betrachtet werden, ist es gewiss, wenn der eine APQ als positiv betrachtet wird, dass er $= +Q$ ist, dass der andere APR negativ aufgefasst werden muss, dass er $= -R$ ist.

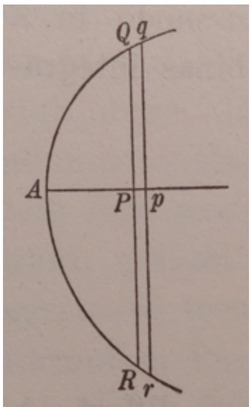

Fig. 6.

Und dennoch folgt daraus nicht, dass die ganze Fläche QAR dann $= Q - R$ sein wird, welche natürlich verschwände, wenn die beiden Teile APQ und APR gleich wären; aber genauso wie wenn die beiden Punkte Q und R auf derselben Seite der Achse lägen, ist die Fläche stets $= \pm \int dx(PR - PQ)$, woher wegen

$$\int PQ \cdot dx = Q \quad \text{und} \quad \int PQ \cdot dx = -R$$

die ganze Fläche $= \pm(Q + R)$ wird, wie es die Natur der Sache erfordert.

§30 Aber mithilfe solcher Substitutionen, mit denen anstelle der beiden Variablen x und y zwei beliebige andere t und u eingeführt werden, können oftmals die Integrationen um vieles erleichtert werden und leichter gemacht werden und in jedem Fall ist es nicht schwer, höchst geeignete Substitutionen zu finden. Wie wenn beispielsweise die Fläche des auf die Achse CP bezogenen

[6] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Kreises $EQHR$ (Fig. 5) bestimmt werden muss, wo wegen $CF = f$, $FG = g$, $GQ = c$ auch $cc = (f-x)^2 + (g-y)^2$ war, wird es gefällig sein

$$f - x = \frac{t}{\sqrt{1+uu}} \quad \text{und} \quad g - y = \frac{tu}{\sqrt{1+uu}}$$

zu setzen, dass $tt = cc$ und $t = c$ wird. Dann erhalten wir wegen

$$dx = \frac{-dt}{\sqrt{1+uu}} + \frac{tudu}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{-udt}{\sqrt{1+uu}} - \frac{tdu}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}$$

anstelle von $dxdy$ nach § 27 den Ausdruck $dtdu\left(\frac{t}{(1+uu)^2} + \frac{tuu}{(1+uu)^2}\right) = \frac{tdtdu}{1+uu}$, dessen Doppelintegral so ausgedrückt werde

$$\int \frac{du}{1+uu} \int tdt.$$

Nun ist aber $\int tdt = \frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}cc$ und die ganze Fläche wird $\frac{1}{2}cc \int \frac{du}{1+uu}$ sein, während u alle möglichen Werte zugeteilt werden, weil ja u nicht weiter die Gleichung für die Basis betreffen wird.

§31 Um diesen Gebrauch besser zu erklären, wollen wir wieder die Kugel mit Mittelpunkt C und Radius $CA = a$ betrachten, deren der kreisförmigen Basis senkrecht überstehender Anteil gesucht werden soll. Weil der Radius CA sich durch den Mittelpunkt dieses Kreises hindurch zu G zeichnen lässt, sei $FG = g = 0$, dass $cc = (f-x)^2 + yy$ und das gesuchte Volumen $= \int\int dxdy\sqrt{aa - xx - yy}$ wird; man setze nun

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+uu}} \quad \text{und} \quad y = \frac{tu}{\sqrt{1+uu}},$$

dass $xx + yy = tt$ und $\sqrt{aa - xx - yy} = \sqrt{aa - tt}$ wird und für $dxdy$ auch $\frac{tdtdu}{1+uu}$ hervorgeht, sodass das gesuchte Volumen so ausgedrückt wird $\int\int \frac{tdtdu\sqrt{aa-tt}}{1+uu}$, welche Integrationen aus der daraus für die Form der Basis zu entspringenden Gleichung $cc = ff - \frac{2ft}{\sqrt{1+uu}} + tt$ bestimmt werden müssen, woher

$$\text{entweder} \quad t = \frac{f \pm \sqrt{cc + ccuu - ffuu}}{\sqrt{1+uu}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+uu} = \frac{2ft}{ff - cc + tt}$$

wird.

§32 Man betrachte zuerst t als konstant und das Integral wird

$$= \int tdt\sqrt{aa-tt}\cdot\arctan u$$

werden, wo es nicht nötig ist die Konstante hinzuzufügen, weil mit verschwindendem u zugleich y verschwindet; denn wir wollen zuerst das dem Halbkreis überstehende Volumen suchen. Aber, nachdem dieses Integral zuerst bis zur äußersten Grenze erstreckt worden ist, wird wegen $\arctan u = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+uu}}$ dieses Integral

$$\int tdt\sqrt{aa-tt}\cdot\arccos\frac{ff-cc+tt}{2ft},$$

dessen Integrationsgrenzen $t = f-c$ und $t = f+c$ sind. Wenn wir nicht das Volumen dieses Anteils der Kugel, sondern der Basis überstehende Oberfläche hätten bestimmen wollen, wären wir zu diesen Formel gelangt

$$\int\frac{atdt}{\sqrt{aa-tt}}\arccos\frac{ff-cc+tt}{2ft};$$

und es scheint nicht der Mühe wert, seine Integration weiter zu verfolgen.

§33 Aber die Methode Doppelintegralformeln von dieser Art zu behandeln wird nicht unwesentlich illustriert werden, wenn wir sie auf jenes berühmte Florentinsche Problem anwenden, in welchem auf der Kugeloberfläche ein geometrisch angebbarer Anteil verlangt wurde, dessen Oberfläche algebraisch ausgedrückt werden kann. Ein solcher Anteil der Kugel stehe der Kurve GRH (Fig. 4) über, deren Form also zu bestimmen ist; wenn in dieser $CP = x$, $PR = y$ gesetzt wird, wird die überstehende Kugeloberfläche mit dieser Doppelintegralformel $\int\int\frac{adxdy}{\sqrt{aa-xx-yy}}$ ausgedrückt. Wenn nun ohne Verwendung einer Substitution zuerst x als konstant angesehen wird, wird

$$\int adx\arcsin\frac{y}{\sqrt{aa-xx}}$$

sein, womit der die unbestimmte Fläche $CPRG$ bedeckende Kugelanteil ausgedrückt wird, und die Frage geht nun darauf zurück, dass eine algebraische Gleichung zwischen x und y von solcher Art angegeben wird, woraus für die ganze Fläche $CHRG$ der ihr entsprechende Kugeloberflächenanteil algebraisch ausdrückbar wird.

§34 Wir wollen der Kürze wegen $\frac{y}{\sqrt{aa-xx}} = v$ setzen, dass $y = v\sqrt{aa-xx}$ ist und für $x = 0$ gesetzt $v = n$ wird; weil das obere Integral ja für $x = 0$ verschwinden muss, wird also die die unbestimmte Fläche $CPRG$ bedeckende Kugeloberfläche

$$= ax \arcsin v - a\int \frac{xdv}{\sqrt{1-vv}}$$

sein, wenn dieses Integral so genommen worden ist, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet. Man setze nun

$$\int \frac{xdv}{\sqrt{1-vv}} = f \arcsin v - aV,$$

während V irgendeine algebraische Funktion von v bezeichnet, welche für $x = 0$ gesetzt in N übergehe, und unsere Oberfläche wird

$$= ax \arcsin v - af \arcsin v + aaV + af \arcsin n - aaN$$

sein und x wird durch v so bestimmt werden, dass

$$x = f - \frac{adV\sqrt{1-VV}}{dv}$$

ist; es sei nun $CH = h$ und man setze $x = h$, in welchem Fall $v = m$ und $V = M$ werde, und weil die vorgelegte Oberfläche

$$ah \arcsin m - af \arcsin m + aaM + af \arcsin n - aaN$$

ist, kann sie nur algebraisch sein, wenn

$$h \arcsin m - f \arcsin m + f \arcsin n = 0$$

ist.

§35 Hier müssen also zuerst die Bogen, deren Sinus m und n sind, einander kommensurabel gemacht werden, wenn nicht zufällig $n = 0$ ist, in welchem es genügt, dass $h = f$ wird. Auch wenn das leicht auf unendlich viele Arten geleistet werden kann, wird dieses Problem dennoch um vieles leichter unter Verwendung von den zuvor erläuterten Substitutionen aufgelöst. Man setze also

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+uu}} \quad \text{und} \quad y = \frac{tu}{\sqrt{1+uu}},$$

dass $xx + yy = tt$ wird und für $dxdy$ entsprechend $\frac{tdtdu}{1+uu}$ hervorgeht, und die Oberfläche des Kugelanteils wird mit dieser Doppelintegralformel $\int\int \dfrac{atdtdu}{(1+uu)\sqrt{aa-tt}}$ ausgedrückt werden. Man nehme zuerst u als konstant an; sie wird $= \int \frac{adu}{1+uu}(b - \sqrt{aa-tt})$ sein, welche nun leicht absolut integrierbar gemacht werden kann; man setze sie nämlich einer beliebigen algebraischen Funktion von u gleich, welche $= V$ sei, und es wird $b - \sqrt{aa-tt} = \frac{dV(1+uu)}{adu}$ sein und daher wird der unbestimmte Anteil der Kugeloberfläche $= V$ sein, wo sich für V eine beliebige algebraische Funktion von u annehmen lässt.

§36 Mit der geringsten Mühe werden die Lösungen aus dieser Annahme

$$V = \frac{a(\alpha + \beta u)}{\sqrt{1+uu}}$$

abgeleitet werden, woher $\frac{dV}{adu} = \frac{-\alpha u + \beta}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}$ und daher $b - \sqrt{aa-tt} = \frac{\beta - \alpha u}{\sqrt{1+uu}}$ wird. Man setze $b = 0$, und weil nach den Substitutionen $u = \frac{y}{x}$ und $t = \sqrt{xx+yy}$ ist, wird für die gesuchte Kurve

$$\sqrt{(xx+yy)(aa-xx-yy)} = \alpha y - \beta x$$

und für die Oberfläche

$$V = \frac{a(\alpha x + \beta y)}{\sqrt{xx+yy}}$$

sein.

Daraus entspringt der einfachste Fall für $\beta = 0$ und $\alpha = a$, woher $aaxx - (xx+yy)^2 = 0$ oder $yy = ax - xx$ hervorgeht, sodass die Kurve GRH ein mit dem Durchmesser AC beschriebener Kreis und $V = \frac{aax}{\sqrt{xx+yy}}$ ist. Es werden unendlich viele andere Kreise, die denselben Durchmesser $= a$ haben und durch den Kugelmittelpunkt hindurchgehen, gefunden, wenn $\beta = \sqrt{aa - \alpha\alpha}$ ist, woher

$$ax + y\sqrt{aa - \alpha\alpha} = xx + yy \quad \text{und} \quad V = \frac{a(\alpha x + y\sqrt{aa - \alpha\alpha})}{\sqrt{xx + yy}} = a\sqrt{xx + yy}$$

wird, wo zu bemerken ist, die Größe V für die Natur der Sache als eine gewisse Konstante anzunehmen.

§37 Man fasse also den Oktanten der Kugel über dem Viertelkreis ACB (Fig. 7)[7] herausgezogen auf, der Radius welches Kreises $CA = a$ sei, welcher zugleich der Durchmesser des Halbkreises CRA sei;

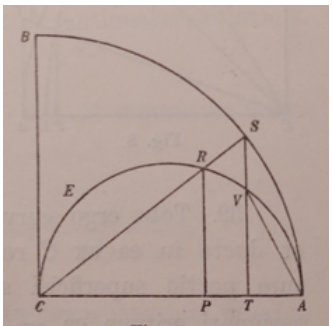

Fig. 7.

wenn in diesem irgendeine Strecke CR und die Senkrechte RP gezeichnet werden, dass $CP = x$ und $PR = y$ ist, wird $CR = t$ sein und u wird der Tangens des Winkels ACR sein. Weil wir ja also $b = 0$ gesetzt haben, ist das Integral, in welchem u konstant war, $\sqrt{aa - tt}$; weil dieses verschwindet, wenn $t = a$ ist, ist es ersichtlich, dass es nicht über die ganze Strecke $CR = t$ hinweg, sondern ihr Komplement RS erstreckt wird. Daher drückt die erneute Integration $\int \frac{adu}{1+uu}\sqrt{aa - tt}$ den Anteil der Kugeloberfläche aus, welche dem dreilinigen Gebilde $RVAS$ übersteht, welches also wegen $\sqrt{aa - tt} = \frac{au}{\sqrt{1+uu}}$

$$= \frac{-aa}{\sqrt{1 + uu}} + aa$$

ist, nachdem das Integral natürlich so genommen worden ist, dass es zusammen mit dem Winkel ACR verschwindet. Daher wird wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1 + uu}} = \cos ACR$$

[7]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

nach Zeichnen der Senkrechte ST jene Oberfläche $= a(a - CT) = CA \cdot AT = AV^2$ sein, nachdem auch die Strecke AV gezeichnet worden ist. Als logische Konsequenz wird jener dem zwischen den Vierteilkreis und dem Halbkreis eingeschlossenen Raum $CERASB$ überstehende Anteil der Kugeloberfläche dem Quadrat des Radius der Kugel gleich.

§38 Wir wollen aber noch einen Fall von solcher Art betrachten, in welchem Integration für $t = 0$ gesetzt verschwindet, oder es sei $b = a$ und man setze $V = \frac{1}{2}aau$, welcher Ausdruck zugleich die gesuchte Oberfläche liefert. Daher wird also

$$a - \sqrt{aa - tt} = \frac{1}{2}a(1 + uu) \quad \text{und} \quad \sqrt{aa - tt} = \frac{1}{2}a(1 - uu)$$

sein, sodass

$$t = \frac{1}{2}a\sqrt{3 + 2uu - u^4} \quad \text{oder} \quad t = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + uu)(3 - uu)}$$

ist, wo $CR = t$ (Fig. 8)[8] ist und u den Tangens des Winkels ACR bezeichnet.

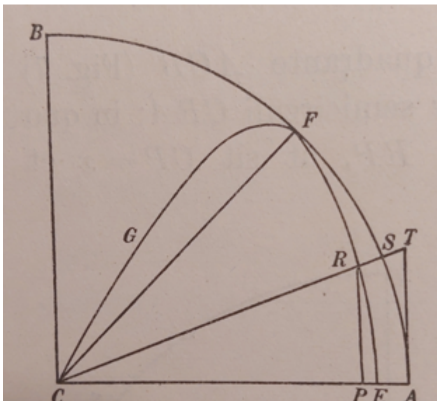

Fig. 8.

Aus dieser Gleichung ist klar, wenn $u = 0$ ist, dass $t = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ sein wird; natürlich trifft die gesuchte Kurve den Strahl AC so in E, dass $CE = CA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, und sie ihm senkrecht übersteht. Wenn dann der Winkel ACR zu einem halben rechten ACF vergrößert wird, dass $u = 1$ wird, wird $t = a$ sein und in diesem Fall läuft die Kurve durch den Punkt F hindurch und wird dort den

[8]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Viertelkreis berühren; und zugleich wird der Abstand t maximal. Von da aus wird die Kurve nach innen gebogen und t verschwindet, wenn $u = \sqrt{3}$ ist; das heißt, die Kurve läuft so in den Mittelpunkt C hinein, dass ihr Tangente in C mit dem Strahl CA einen Winkel von $60°$ bildet.

§39 Also wird die in dem Viertelkreis beschriebene Kurve die Form $ERFGC$ haben und, nachdem auf ihr von C aus beliebig die Gerade CR gezeichnet worden ist, sei der Tangens des Winkels $= ECR$ hier $= u$; dann wird der dem Sektor ECR überstehende Anteil der Kugeloberfläche algebraisch angegeben werden können und er wird $= \frac{1}{2}aau$ sein. Wenn also CR bis zum Zusammentreffen mit der Tangente AT verlängert wird, wird wegen $AT = au$ der Anteil genau dem Dreieck CAT gleich werden und der dem Sektor ECF überstehende Anteil wird $= \frac{1}{2}aa$ sein; wenn aber der Winkel ECR größer als ein halber rechter angenommen wird, dass $u > 1$ ist, weil dann $\sqrt{aa - tt} = \sqrt{aa - xx - yy}$, welches die Erhöhung der Kugeloberfläche über den Vierteilkreis hinaus ist, negativ ist, muss die Oberfläche im unteren Oktanten genommen werden. Wenn wir also die Gleichung dieser Kurve zwischen den Koordinaten $CP = x$ und $PR = y$ verlangen, werden wir wegen $tt = xx + yy$ und $u = \frac{y}{x}$

$$4xx + 4yy = aa\left(3 + \frac{2yy}{xx} - \frac{y^4}{x^4}\right) = \frac{aa(xx+yy)(3xx-yy)}{x^4}$$

haben, welche durch $xx + yy$ geteilt

$$4x^4 = 3aaxx - aayy \quad \text{oder} \quad yy = 3xx - \frac{4x^4}{aa}$$

liefert.

§40 Wir können diese Lösung verallgemeinern, indem wir $V = abu$ setzen, und es wird $a - \sqrt{aa - tt} = b(1 + uu)$ werden, daher $\sqrt{aa - tt} = a - b - buu$, also

$$tt = 2ab - bb + 2(a-b)buu - bbu^4 = (1+uu)(2ab - bb - bbuu).$$

Nachdem diese auf orthogonale Koordinaten übertragen worden ist, wird die Teilung durch $xx + yy$ wiederum gelingen und es wird

$$x^4 = (2ab - bb)xx - bbyy \quad \text{oder} \quad y = \frac{x}{b}\sqrt{2ab - bb - xx}$$

werden und der dem Sektor ECR dieser Kurve überstehende Anteil der Kugeloberfläche wird $= \frac{aby}{x} = b \cdot AT$ sein; dieser Ausdruck hat Geltung, solange $uu < \frac{a-b}{b}$ ist, das heißt, bis der Tangens des Winkels $ECR = \sqrt{\frac{a-b}{b}}$ wird, wo $t = a$ wird. Aber dann, nachdem der Winkel ECR weiter vergrößert worden ist, müssen die über die Kurve konstruierten Senkrechten zur unteren Halbkugel erstreckt werden, in welchem Fall die Oberfläche umso größer wird. Wenn also $b = a$ ist, weil $\sqrt{aa - tt}$ überall eine negative Größe wird, drückt die Größe $b \cdot AT$ den zur unteren Halbkugel hin fortgesetzten Anteil der Kugeloberfläche aus.

§41 Es sei noch $b = a$ und man setze $V = \frac{a^2(\alpha + \beta u)}{\sqrt{1+uu}} - \alpha a^2$, dass die anzugebende Oberfläche für $u = 0$ gesetzt verschwindet, und es wird

$$a - \sqrt{aa - tt} = \frac{a(\beta - \alpha u)}{\sqrt{1 + uu}} \quad \text{und} \quad \sqrt{aa - tt} = a - \frac{a(\beta - \alpha u)}{\sqrt{1 + uu}}$$

sein, wo zu bemerken ist, wenn dieser Ausdruck negativ wird, dass dort in die untere Halbkugel hinabgestiegen wird. Aus diesen geht aber

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta - \alpha u)}{\sqrt{1 + uu}} - \frac{(\beta - \alpha u)^2}{1 + uu}$$

hervor. Daher wird für verschwindenden Winkel ECR, dessen Tangens $= u$ ist, $\frac{tt}{aa} = 2\beta - \beta\beta$ sein, aber wenn $u = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, verschwindet t. Für den anderen Teil der Achse CA wird u negativ und für $u = -v$ gesetzt hat man die negativ ausgedrückte Fläche $V = \frac{a^2(\alpha - \beta v)}{\sqrt{1+vv}}$ und die Kurve wird von dieser Gleichung

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta + \alpha v)}{\sqrt{1 + vv}} - \frac{(\beta + \alpha v)^2}{1 + vv}$$

definiert werden, woher für unendlich großes v entsprechend $\frac{tt}{aa} = 2\alpha - \alpha\alpha$ hervorgeht; dort wird die Gerade CR zur Kurve normal, was auch auch passiert, wo $v = \frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{tt}{aa} = 2\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta} - \alpha\alpha - \beta\beta$ ist. Damit also t nicht imaginär wird, muss $\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta} < 2$ sein.

§42 Wir wollen den Fall betrachten, in dem $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, dass die Oberfläche

$$V = aa\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-u}{\sqrt{2(1+uu)}}\right) \quad \text{und} \quad \frac{tt}{aa} = \frac{2(1+u)}{\sqrt{2(1+uu)}} - \frac{(1+u)^2}{2(1+uu)}$$

ist, woher klar ist, wenn $u = -1$ ist, dass $t = 0$ sein wird; aber dann, wie folgt,

$$\text{für} \quad u = 0, \qquad \text{für} \quad u = 1, \qquad \text{für} \quad u = 7, \qquad \text{für} \quad u = \infty$$

wird

$$t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}, \qquad t = a, \qquad t = a\sqrt{\frac{24}{25}}, \qquad t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$$

sein, wo zu bemerken ist, dass in den Fällen $u = 1$ und $u = \infty$ die Gerade CR zur Kurve normal sein wird. In diesem Viertelkreis wird unsere Kurve also fast mit dem Viertelkreis verschmelzen, weil überall näherungsweise $t = a$ ist, der welchem überstehende Anteil der Kugeloberfläche $= aa\sqrt{2}$ sein wird, welcher von der ganzen Oberfläche des Oktanten, welche $\frac{\pi}{2}aa$ ist, um den ziemlich kleinen Teil $aa\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right) = 0,15658aa$ abweicht. Zur anderen Richtung der Achse CA hin fällt diese Kurve auf das Zentrum, wo die Tangente mit CA einen halbrechten Winkel bilden wird.

+

§43 Aber die in § 35 gegebene Lösung kann noch sehr viel weiter verallgemeinert werden; weil nämlich die anzugebende Oberfläche mit dieser Formel $\int \frac{adu}{1+uu} \int \frac{tdt}{\sqrt{aa-tt}}$ ausgedrückt und in der Integration $\int \frac{tdt}{\sqrt{aa-tt}}$ die Größe u wie eine Konstante betrachtet wird, wird das Integral so dargeboten werden können $U - \sqrt{aa-tt}$, wobei U eine beliebige Funktion von u bezeichnet; weil diese Formel ja verschwindet, wenn $\sqrt{aa-tt} = U$ und $t = \sqrt{aa-UU}$ ist, ist die Größe t zu verstehen, von dieser Grenze aus weiter erstreckt zu werden. Es bezeichne nun V irgendeine andere Funktion von u, welche für $u = 0$ gesetzt in C übergehe, und man setze die Oberfläche

$$\int \frac{adu}{1+uu}(U - \sqrt{aa-tt}) = aV - aC$$

und es wird daraus

$$U - \sqrt{aa - tt} = \frac{dV(1 + uu)}{du}$$

und daher

$$\sqrt{aa - tt} = U - \frac{dV(1 + uu)}{du},$$

woraus die andere Grenze von t bestimmt wird.

§44 Daher wird also die Lösung des Florentinischen Problem wie folgt am allgemeinsten formuliert werden. Nachdem der Viertelkreis ACB (Fig. 9)[9] festgelegt worden ist, welchem der Oktant der Kugel überstehe, während der Radius $CA = a$ ist, nenne man nach Zeichnen des beliebigen Strahls CS den Tangens des Winkels $ACS = u$;

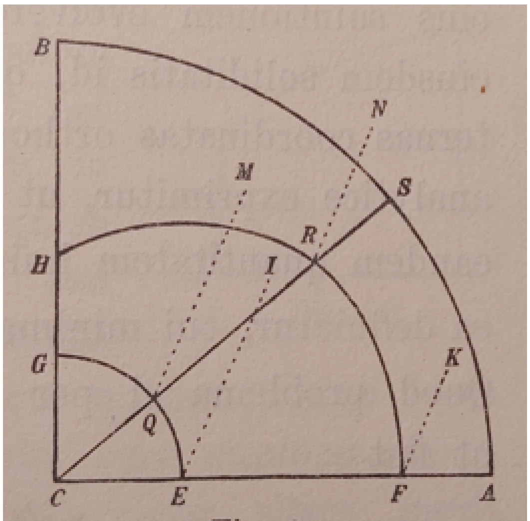

Fig. 9.

dann konstruiere man zuerst die Kurve EQG in solcher Art, dass

$$CQ = \sqrt{aa - UU}$$

und das von Q aus bis hin zur Kugeloberfläche erstreckte Lot

[9]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$QM = U$$

ist, während U irgendeíne beliebige algebraische Funktion von u bezeichnet. Wenn $u = 0$ ist, geht CQ in CE und QM in EI über. Darauf beschreibe man eine andere Kurve FRH, dass

$$CR = \sqrt{aa - \left(U - \frac{dV(1+uu)}{du}\right)^2}$$

und das von R aus sich bis hin zur Kugel erstreckende Lot

$$RN = U - \frac{dV(1+uu)}{du}$$

ist, während V eine andere beliebige algebraische Funktion von u bezeichnet, welche in C übergehe, wenn $u = 0$ ist; in diesem Fall gehe zugleich CR in CF und RN in FK über. Nun wird nach Konstruktion dieser zwei Kurven der der Fläche $EQRF$ überstehende und zwischen den Grenzen I, K, M, N enthaltende Anteil der Kugeloberfläche algebraisch ausgedrückt werden und es wird $= a(V - C)$ sein.

§45 Die Möglichkeit, diese Dinge über die Natur von Doppelintegralen mitzuteilen, hat das gleichermaßen elegante wie nützlich Problem in der Analysis eröffnet, wenn sich seine Lösung freilich entwickeln ließe. Es wurde natürlich unter allen Körpern desselben Volumens der gesucht, welcher in der kleinsten Oberfläche enthalten ist, was freilich auf die drei orthogonalen Koordinaten x, y und z bezogen für $dz = pdx + qdy$ gesetzt so analytisch ausgedrückt wird, dass unter allen Relationen dieser drei Variablen, welche dieselbe Größe dieser Doppelintegralformel $\int\int zdxdy$ enthalten, die bestimmt wird, welcher die kleinste Größe von dieser $\int\int dxdy\sqrt{1+pp+qq}$ entspricht. Wenn wir dieses Problem mit der Variationsrechung angehen, wird erwirkt werden müssen, dass

$$a\delta \int\int dxdy\sqrt{1+pp+qq} = \delta \int\int zdxdy$$

wird, sodass die ganze Aufgabe auf das Ausfindigmachen von Variationen von Doppelintegralen von dieser Art zurückgeführt wird.

§46 Weil ja jede der beiden Formeln zwei Integration verlangt, wenn man in der ersten x für konstant hält, wird unsere Integration so dargesetellt werden

$$a\delta\int dx\int dy\sqrt{1+pp+qq}=\delta\int dx\int zdy.$$

Aber hier ist sorgfältig zu beachten, dass, nachdem die Integrale

$$\int dy\sqrt{1+pp+qq} \quad \text{und} \quad \int zdy$$

gefunden worden sind, dann die Variable y nicht weiter unbestimmt oder nicht x unabhängig bleibt, ja sogar vielmehr für y ein bestimmte Funktion von x, welche die Form des Körpers verlangt, eingesetzt werden musst, sodass in der zweiten Integration die Größe y nicht wie eine Konstante oder als von x unabhängig angesehen werden kann. Weil aber wegen der immer noch unbekannten Form des Körpers diese Funktion nicht bekannt ist, ist überhaupt nicht klar, wie Variationen von Doppelintegralen dieser Art bestimmt werden müssen.

§47 Die Natur dieser Frage scheint in der Tat zusätzlich andere Bestimmungen zu erfordern, denen man in der Lösung Rechnung tragen muss. Denn wie, wenn die Kurve gesucht wird, welche unter allen dieselbe Fläche einschließenden in dem kürzesten Bogen enthalten ist, nicht nur die Basis AP (Fig. 10)[10], sondern auch die zwei Punkte B und M, durch welche die Kurve hindurchgehen soll, vorgeschrieben zu werden pflegen, so scheint auch in unserem Problem nicht nur die Basis, welcher der Körper als Säule übersteht, als bekannt angenommen zu werden müssen, sondern auch die äußersten Grenzen der gesuchten Oberfläche.

[10]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

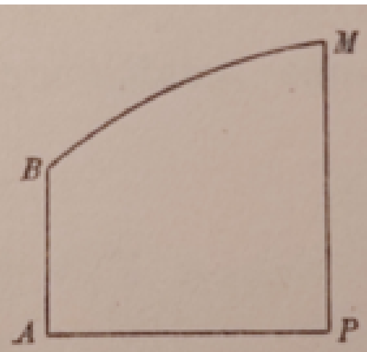

Fig. 10.

Wenn nämlich diese Sachen nicht alle vorgeschrieben werden, scheint nicht einmal die Möglichkeit einer vernünftigen Frage zu bestehen; denn, auch wenn die Basis vorgeschrieben werden würde, die obersten Grenzen der Oberfläche hingegen unserem Belieben überlassen blieben, ist es offensichtlich, je höher die Säule war, dass das Volumen umso weiter vergrößert wird, während die oberste Oberfläche dieselbe bleibt, weil ja die Oberfläche der Seiten nicht ins Kalkül gezogen wird. Um vieles weniger würde dieses Problem aber ohne Vorschreiben der Basis irgendeine Bedeutung beibehalten, weil ja beim allzu großen Beschränken der Basis das Volumen mit der kleinsten Oberfläche verbunden werden könnte.