

ENTWICKLUNG EINES AUSSERORDENTLICHEN PARADOXONS ÜBER DIE GLEICHHEIT VON FLÄCHEN*

Leonhard Euler

Wenn in der Lehre der Kurven eine Größe vorgelegt wird, welcher der einer unbestimmten Abszisse entsprechende Bogen gleich sein muss, wird die Kurve daraus so bestimmt, dass nie mehr als eine dem Problem Genüge leisten kann. Wie wenn beispielsweise für die orthogonalen Koordinaten x und y , von welchen jene x die Abszisse, diese y die Ordinate bezeichne, eine Kurve solcher Art gesucht wird, deren der Abszisse x zukommende Bogen irgendeiner Funktion X derselben gleich werden soll, ist das Problem vollkommen bestimmt und lässt nur eine einzige Kurve als Lösung zu. Weil nämlich

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dX$$

ist, wird nach Setzen von $dX = Pdx$, wo P ebenso eine gegebene Funktion von x sein wird, wird

$$dy = dx\sqrt{PP - 1}$$

werden, die Integration welcher Formel eine bestimmte Gleichung für die gesuchte Kurve an die Hand geben wird, weil ja die durch Integration eingehende Konstante die Natur der Kurve nicht betrifft, sondern nur ihren

*Originaltitel: "Evolutio insignis paradoxo circa aequalitatem superficierum", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Band 14 (1770, verfasst 1768): pp. 46–71, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 28, pp. 120 – 141, Eneström-Nummer E392, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Abstand von der Achse bestimmt. So ist nach Vorlegen irgendeiner Kurve außer ihr keine andere gegeben, die selbiger so in Bezug auf die Länge gleich ist, dass die allen Abszissen entsprechenden Bogen gleich sind. Was nämlich von den Geometern über die Gleichheit von Kurven überall verstreut gefunden worden ist, zeigt, dass sich diese Gleichheit nicht auf alle derselben Abszisse zukommenden Bogen erstreckt, sondern nur für eine bestimmte oder auch mehrere, aber niemals für alle Geltung haben kann. Daher ist es klar, dass keine zwei verschiedenen Kurven gegeben sind, welche auf dieselbe Achse bezogen für alle Abszissen einander gleiche Bogen haben.

Ich habe diese Dinge deshalb vorausgeschickt, damit der Unterschied, welcher zwischen den Kurven und Flächen besteht, besser verstanden werden kann. Weil nämlich die Fläche genauso auf eine feste Ebene wie Kurve auf eine gradlinige feste Achse bezogen wird und deren Teilflächen, die in jener angenommenen Ebene einem Raum überstehen, angezeigt zu werden pflegen, obgleich hier für jeden Raum die Größe der überstehenden Fläche vorgelegt wird, so wird dennoch die Natur der Fläche daraus keinesfalls definiert, sondern es können immer unzählige Flächen dargeboten werden, deren Teilflächen, die einem gewissen Raum der feste Ebenen überstehen, einander gleich sind. Dieser Umstand, der von der Natur der Kurven dermaßen abweicht, scheint umso mehr der ganzen Aufmerksamkeit würdig, weil er ein riesiges Paradoxon in der Lehre der Festkörper umfasst. Nachdem über einer kreisförmigen Basis eine Halbkugel festgelegt worden ist, wird es höchst wundersam erscheinen, dass über derselben Basis unzählige andere Festkörper konstruiert werden können, von welchen nicht nur die ganze Oberfläche Kugeloberfläche gleich ist, sondern deren Oberfläche, die einer unbestimmten Teilfläche der Basis übersteht, der sphärischen Oberfläche, die derselben Teilfläche übersteht, gleich wird. Ja sogar, wenn der Basis eine andere schiefe Ebene übersteht, von welcher ein beliebiger Anteil zur Basis, welcher sie übersteht, ein gegebenes Verhältnis hat, können unendlich viele andere Festkörper oder konvexe oder konkave Fläche angegeben werden, von welchen gewisse unbestimmte Anteile zur Basis, welcher sie überstehen, dasselbe Verhältnis haben. Ich habe also beschlossen dieses riesige Paradoxon in der Theorie der Festkörper hier genauer einer Untersuchung zu unterwerfen, weil sich daher nicht geringe Zuwächse so auf diese Theorie der Festkörper wie auf die Analysis ergießen werden.

Im Begriff zuerst die Gültigkeit dieses Paradoxons aufzuzeigen, werde also die Lage der Punkte der Oberfläche mit den drei orthogonalen Koordinaten x , y , z bestimmt, von welchen die zwei ersten in der festen Ebene liegen, die dritte

z hingegen den Abstand jenes Punktes von dieser Ebene ausdrückt. Weil nun die Natur der Oberfläche in einer Gleichung zwischen diesen drei Koordinaten enthalten ist, finde man aus ihr den Wert von z , welche differenziert

$$dz = p dx + q dy$$

liefere; danach ist bekannt, dass das Oberflächenelement mit dieser Formel

$$dxdy\sqrt{1 + pp + qq}$$

ausgedrückt wird, dieses Element steht aber einem unendlich kleinen aus den Differentialen dx und dy gebildeten Rechteck der Basis über. Wenn man daher eine andere Oberfläche hat, gehe aus ihrer Gleichung zwischen denselben drei Koordinaten x , y und z

$$dz = r dx + s dy$$

hervor, das Oberflächenelement, das demselben Rechteck $dxdy$ übersteht, wird

$$dxdy\sqrt{1 + rr + ss}$$

sein; daher ist klar, wenn

$$rr + ss = pp + qq$$

war, dass dieses Element jenem gleich sein wird; und weil diese Gleichheit bei allen Elementen Geltung hat, wird demselben endlichen Raum in der festen Ebene oder der angenommenen Basis die gleiche Teilfläche der beiden Oberflächen überstehen. Aber es bleibt die wesentliche Frage, ob diese Gleichheit $rr + ss = pp + qq$ bestehen kann, dass zugleich $r = p$ und $s = q$ ist, woher dieselbe Oberfläche hervorginge; denn dieser wesentlichen Bedingung muss Genüge geleistet werden, damit die Formel $rdx + sdy$ eine Integration zulässt; ob dies außer im Fall $r = p$ und $s = q$ überhaupt geschehen kann, ist nicht unmittelbar klar. Aber jeder Zweifel wird durch ein einziges Beispiel verschwinden, in welchem

$$p = \frac{x}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{y}{a}$$

ist, dass

$$z = \frac{xx + yy}{2a}$$

ist; wenn nämlich für die andere Oberfläche

$$r = \frac{y}{a} \quad \text{und} \quad s = \frac{x}{a}$$

genommen wird, woher natürlich

$$rr + ss = pp + qq$$

wird, wird ihre Gleichung

$$z = \frac{xy}{a}$$

sein. Siehe also diese völlig verschiedenen Oberflächen, die eine in dieser Gleichung

$$2az = xx + yy,$$

die andere in dieser

$$az = xy$$

enthalten, welche so miteinander übereinstimmen, dass allen in der Basis angenommenen Teilflächen in jeder der beiden gleiche Anteile der Oberfläche überstehen. Ich werde Flächen von dieser Art *kongruent* nennen, woher diese höchst kuriose Frage entsteht, wie nach Vorlage irgendeiner Fläche andere und sogar alle ihr kongruenten ausfindig gemacht werden müssen. Weil dieses Problem im weitesten Sinne aufgefasst sehr schwer ist, werde ich die Fälle, welche es mir zu entwickeln möglich war, in den folgenden Problemen erfassen.

PROBLEM 1

§1 Wenn die gegebene Oberfläche eine zur Basis oder zur fixen Ebene irgendwie geneigte Ebene war, alle anderen ihr kongruenten Flächen zu finden.

LÖSUNG

Weil diese gegebene Fläche eine Ebene ist, wird ihre Natur mit einer solchen Gleichung ausgedrückt

$$z = a + mx + ny,$$

welche zur Basis im Winkel geneigt ist, dessen Sekans

$$\sqrt{1 + mm + nn}$$

ist. Wegen $dz = mdx + ndy$ ist hier $p = m$ und $q = n$ und daher $pp + qq$ konstant. Man setze also

$$r = \alpha \cos \omega \quad \text{und} \quad s = \alpha \sin \omega,$$

während $\alpha = \sqrt{mm + nn}$ ist, und es ist notwendig, dass der Winkel ω so durch die zwei in der Basis angenommenen Koordinaten x und y bestimmt wird, dass

$$dz = \alpha dx \cos \omega + \alpha dy \sin \omega$$

integrierbar wird. Weil also durch die Transformation

$$z = \alpha(x \cos \omega + y \sin \omega) + \alpha \int d\omega(x \sin \omega - y \cos \omega)$$

wird, ist es ersichtlich, dass dieser Bedingung Genüge geleistet wird, wenn $x \sin \omega - y \cos \omega$ irgendeine Funktion des Winkels bezeichnet. Es bezeichne also im Allgemeinen Ω irgendeine Funktion des Winkels ω und man setze

$$x \sin \omega - y \cos \omega = \Omega$$

und es wird

$$z = \alpha(x \cos \omega + y \sin \omega) + \alpha \int \Omega d\omega$$

sein, wo zu bemerken ist, dass der Buchstabe $\alpha = \sqrt{mm + nn}$ den Tangens des Winkels bezeichnet, welchen die vorgelegte Ebene mit der Basis bildet.

KOROLLAR 1

§2 Zuerst ist also klar, wenn die vorgelegte Ebene zur Basis parallel ist und daher $\alpha = 0$ ist, dass auch $dz = 0$ oder $z = \text{konst.}$ sein wird, sodass alle kongruenten Flächen der Basis parallele Ebenen sind; dies ist freilich per se klar, weil eine solche Ebene die kleinste ist, welche demselben Teil der Basis überstehen kann, und auch deshalb keine andere selbiger gleiche gegeben ist.

KOROLLAR 2

§3 Wenn aber die vorgelegte Ebene nicht parallel zur Basis ist und auch nicht senkrecht, sodass α irgendeinen endlichen Wert erhält, dann können natürlich unzählige andere kongruente Oberflächen angegeben werden können, weil die Funktion Ω völlig unserem Belieben überlassen ist.

KOROLLAR 3

§4 Weil ja die Formel $d\omega(x \sin \omega - y \cos \omega)$ integrierbar sein muss, wird diese Bedingung auch erfüllt, wenn $d\omega = 0$ und daher der Winkel ω konstant war. Es sei also $\omega = \zeta$ und es wird

$$z = \alpha(x \cos \zeta + y \sin \zeta) + \text{Konst.}$$

werden, welche die Gleichung für die zur Basis genauso wie die vorgelegte geneigte Ebene ist: Bezüglich des Schnitts kann sie aber von jener in beliebiger Weise abweichen.

BEISPIEL 1

§5 Für das Finden der verschiedenen Flächen sei aber zuerst

$$\int \Omega d\omega = 0,$$

und daher $\Omega = 0$, und wegen $x \sin \omega = y \cos \omega$ wird

$$\sin \omega = \frac{y}{\sqrt{xx + yy}} \quad \text{und} \quad \cos \omega = \frac{x}{\sqrt{xx + yy}}$$

werden, woher die Gleichung für die Fläche als

$$z = \alpha \sqrt{xx + yy}$$

hervorgeht, welche die für eine konische Oberfläche ist, die Achse welches Kegels senkrecht zur Basis ausgerichtet ist, die Seite ist aber im Winkel geneigt, dessen Tangens $= \alpha$ ist. Weil nämlich alle Tangentialebenen zur Basis im selbem Winkel geneigt sind, ist der Grund für die Kongruenz offenkundig.

BEISPIEL 2

§6 Es sei

$$\Omega = b \sin \omega + c \cos \omega,$$

es wird

$$\int \Omega d\omega = a - b \cos \omega + c \sin \omega$$

sein. Es wird also

$$x \sin \omega - y \cos \omega = b \sin \omega + c \cos \omega,$$

daher:

$$\frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \frac{y + c}{x - b}$$

und

$$\sin \omega = \frac{y + c}{\sqrt{(x - b)^2 + (y + c)^2}} \quad \text{und} \quad \cos \omega = \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + (y + c)^2}},$$

woher

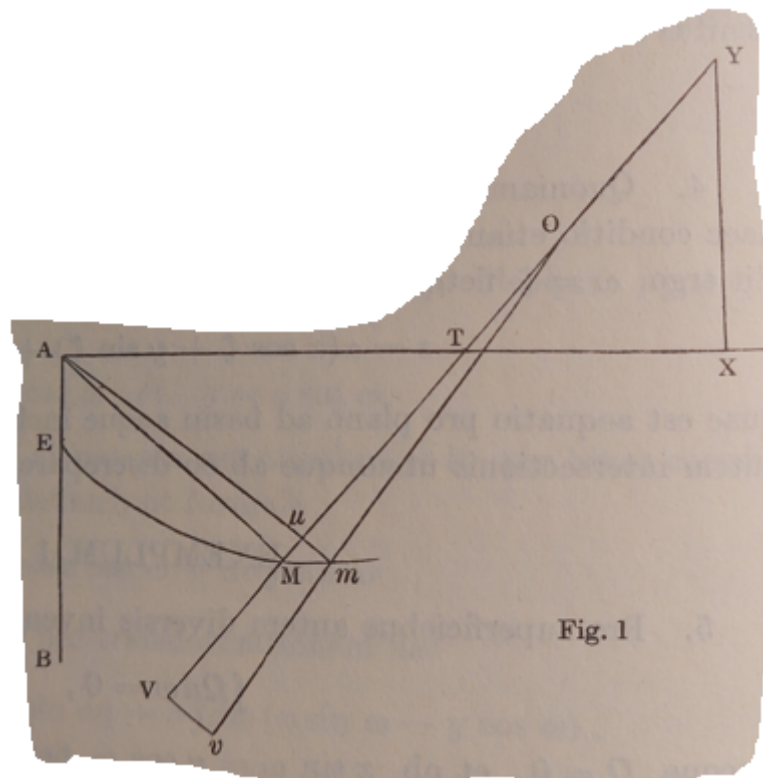
$$z = a(\sqrt{(x - b)^2 + (y + c)^2} + a)$$

berechnet wird, welches eine Gleichung für den gleichen in Bezug auf die Basis irgendwie anders geneigten Kegel ist, dennoch so, dass seine Achse senkrecht zur Basis ausgerichtet ist.

BEISPIEL 3

§7 Nachdem die Ebene (Fig. 1)¹ der Basis in der Tischebene angenommen worden ist,

¹Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.



sei die Gerade AX die Achse der Abszissen x und $XY = y$; nach Zeichnen von AB , die normal zu AX ist, nehme man den Winkel $BAM = \omega$, und nach Beschreiben irgendeiner Kurve EM drücke der Strahl AM die Funktion von ω aus, welche ich mit Ω angezeigt habe. Zu dieser Gerade AM liege die Gerade YM normal und wegen des Winkels $ATM = \omega$ wird

$$AM = x \sin \omega - y \cos \omega$$

werden, genauso wie die gefundene Lösung es erfordert. Dann wird aber

$$MY = x \cos \omega + y \sin \omega$$

sein. Weiter zeichne man den Strahl AM normal zur Gerade $MV = \int AM \cdot d\omega$ und es wird

$$z = \alpha(YM + MV) = \alpha \cdot YV$$

sein; natürlich muss im Punkt Y der Basis eine $\alpha \cdot YV$ gleiche Senkrechte konstruiert werden und sie wird sich bis hin zur gesuchten Fläche erstrecken.

Oder wenn über der Gerade VY senkrecht der Winkel festgelegt wird, dessen Tangens $= \alpha$ ist, während der Scheitel im Punkt V liegt, wird die nach oben laufende Seite die ganze Lage in der gesuchten Fläche sein. In gleicher Weise, wenn über irgendeiner anderen Gerade vmO die Ebene zur normalen Basis festgelegt wird und in ihr von v aus die Gerade, die mit vO den Winkel bildet, dessen Tangens $= \alpha$ ist, gezeichnet wird, wird auch diese ganze Gerade auf die gesuchte Oberfläche fallen und so die ganze Fläche leicht bestimmt werden.

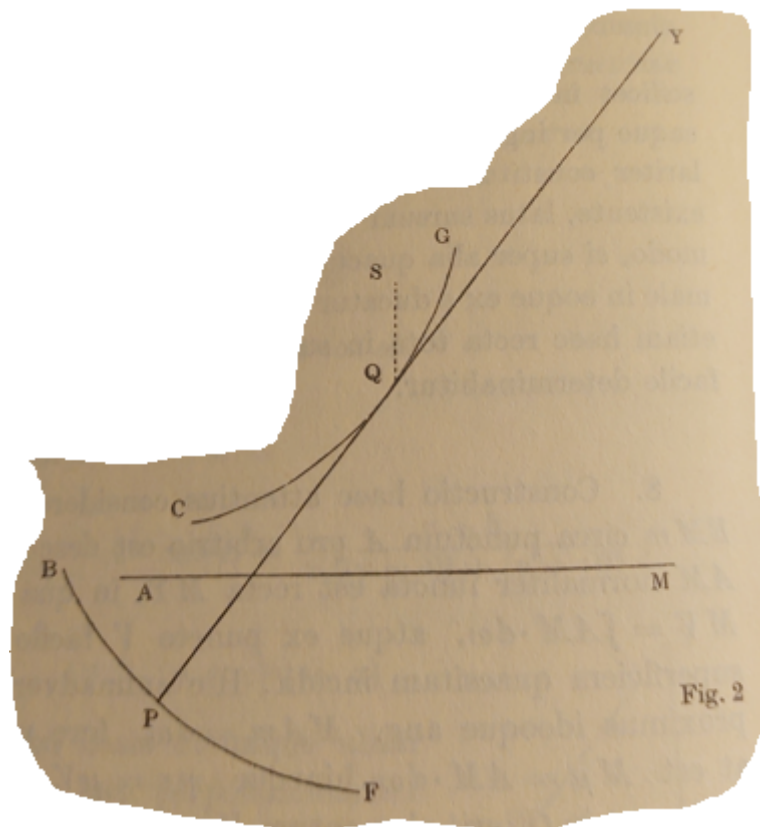
SCHOLIION

§8 Diese Konstruktion verdient genauer betrachtet zu werden. Zuerst ist also die Kurve EMm um den Punkt A nach Belieben beschrieben worden und der Gerade oder dem Strahl AM normal die Gerade MY gezeichnet worden ist, in welcher über M hinaus verlängert $MV = \int AM \cdot d\omega$ genommen werden muss, und von dem Punkt V aus wird leicht eine Gerade gezeichnet, die ganz auf die gesuchte Fläche fällt. Hier merke ich an, wenn der Strahl Am AM unendlich nahe ist und daher der Winkel $MAm = d\omega$ ist, das die Gerade $mv = MV + AM \cdot d\omega$ sein wird, aber es ist $M\mu = AM \cdot d\omega$ und daher $mv = \mu V$. Wenn daher also die Gerade vm die erste VM in O schneidet, wird das Element Vv ein unendlich kleiner um den Mittelpunkt O herum beschriebener Kreisbogen sein. Daher kann anstelle der Kurve EM nach Belieben die Kurve Vv beschrieben werden, wofür es genügt, in den einzelnen Punkten V, v normal die Geraden VO, vO gezeichnet zu haben, über welchen darauf die Winkel, deren Tangens $= \alpha$ ist, konstruiert werden müssen. Daher leitet man also die folgende sehr leichte Konstruktion ab.

KONSTRUKTION ALLER DER EBENE KONGRUENTEN OBERFLÄCHEN

§9 Über der als Basis angenommenen Ebene (Fig. 2)² beschreibe man nach Belieben irgendeine Kurve BPF ,

²Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.



zu deren einzelnen Punkten *P* in der Ebene der Basis man die Normalen *PQY* zeichne, die die Evolute jener Kurve *CQG* in *Q* berühren. Aber zum Punkt *Q* normal zur Basis sei die Gerade *QS*, dass $QS = \alpha \cdot PQ$ ist, dann wird die ganze Gerade *PS* in der gesuchten Fläche liegen. Diese Konstruktion kann noch kürzer so formuliert werden:

Nachdem in der als Basis angenommenen Ebene nach Belieben irgendeine Kurve *BPF* beschrieben wurde, ziehe man zu ihren einzelnen Punkten *P* über die Basis hinaus Geraden, die sowohl zu dieser Kurve normal als auch zur Basis in dem Winkel, dessen Tangens = α ist, geneigt sind, dann werden alle diese Geraden ins Unendliche fortgesetzt ganz in der kongruenten Fläche liegen werden sie daher beschreiben.

Die Begründung für diese Konstruktion ist auch per se ersichtlich; weil nämlich alle gefundenen Geraden *SP* auf die Fläche fallen und dort in der Kurve *BPF* begrenzt werden, werden auch alle Tangentialebenen diese Kurve berühren und daher zur Basis in dem Winkel, dessen Tangens = α ist, geneigt sein,

woher der Anteil der Fläche, der dem Element $dx dy$ der Basis übersteht,

$$= dx dy \sqrt{1 + \alpha \alpha}$$

sein wird.

§10 Es wird aber besonders förderlich sein hier bemerkt zu haben, dass sich diese Konstruktion sehr weit erstreckt, weil die Beschreibung der Kurve BPF völlig unserem Belieben unterworfen ist, was so zu deuten ist, dass sich für sie nicht nur gewöhnliche Kurven, die in einer algebraischen oder transzendenten Gleichung enthalten sind, annehmen lassen, sondern auch aus mehreren verschiedenen Teilen verschiedener Kurven irgendwie zusammengesetzten Kurven, ja sogar beliebig freihändig gezeichnete. Wenn an ihrer Stelle der Umfang eines Dreiecks genommen wird, wird eine Pyramidenoberfläche hervorgehen: Der Kreis gibt aber immer eine konische Oberfläche.

PROBLEM 2

§11 Wenn die gegebene Oberfläche mit dieser Gleichung $2az = xx + yy$ ausgedrückt wird, alle anderen jener kongruenten Flächen zu finden.

LÖSUNG

Weil für die gegebene Fläche $adz = xdx + ydy$ ist, setze man für die gesuchten $adz = rdx + sdy$, und es ist notwendig, dass

$$rr + ss = xx + yy$$

ist, woher Werte von solcher Art für r und s gefunden werden müssen, dass die Formel $rdx + sdy$ eine Integration zulässt. Und freilich sind die direkt offensichtlichen Fälle zuerst $r = y$ und $s = x$, woher $az = xy$ entspringt, weiter $r = x$ und $s = -y$, woher

$$2az = xx - yy$$

wird, welche aber von der ersten nicht verschieden ist, weil sie durch Ändern der Richtung x und y in der Basis sie die gleiche Form annehmen; und im Allgemeinen gibt durch Setzen von

$$x = X \cos \zeta - Y \sin \zeta \quad \text{und} \quad y = X \sin \zeta + Y \cos \zeta$$

die erste

$$x = X \cos \zeta - Y \sin \zeta \quad \text{und} \quad y = X \sin \zeta + Y \cos \zeta$$

oder

$$az = XX \sin \zeta \cos \zeta + XY(\cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta) - YY \sin \zeta \cos \zeta$$

oder

$$2az = XX \sin 2\zeta + 2XY \cos 2\zeta - YY \sin 2\zeta,$$

welche, wenn für 2ζ der rechte Winkel genommen wird, offenbar in die erste Form übergeht. Um aber andere Oberflächen zu finden, wollen wir

$$rr = xx + 2v \quad \text{und} \quad ss = yy - 2v$$

setzen. Daher weil

$$az = \int r dx + \int s dy$$

ist, werden wir

$$\begin{aligned} \int r dx &= \int dx \sqrt{xx + 2v} = \frac{1}{2} x \sqrt{xx + 2v} + v \log(x + \sqrt{xx + 2v}) \\ &\quad - \frac{v}{2} - \int dv \log(x + \sqrt{xx + 2v}), \\ \int s dy &= \int dy \sqrt{yy - 2v} = \frac{1}{2} y \sqrt{yy - 2v} - v \log(y + \sqrt{yy - 2v}) \\ &\quad + \frac{v}{2} + \int dv \log(y + \sqrt{yy - 2v}) \end{aligned}$$

haben, woher, damit die Summe integrierbar wird, für

$$\log \frac{y + \sqrt{yy - 2v}}{x + \sqrt{xx + 2v}}$$

eine Funktion von v genommen werden muss, welche $\log V$ ist, und es wird

$$az = \frac{1}{2} x \sqrt{xx + 2v} + \frac{1}{2} y \sqrt{yy - 2v} - v \log V + \int dv \log V,$$

während

$$\frac{y + \sqrt{yy - 2v}}{x + \sqrt{xx + 2v}} = V$$

ist, und so, indem die neue Variable v eingeführt und irgendeine Funktion von ihr angenommen wird, kann zu jedem Punkt der Basis eine Senkrechte konstruiert werden, die sich bis hin zur gesuchten Oberfläche erstreckt. Es ist aber zu bemerken, dass

$$-v \log V + \int dv \log V = - \int \frac{vdV}{V}$$

ist, sodass der Logarithmus aus der Rechnung herausgeht. Aber diese gewaltige Unannehmlichkeit taucht auf, weil die Relation zwischen x , y und v allzu schwer aufgestellt wird; daher füge ich eine andere Lösung hinzu.

EINE ANDERE LÖSUNG

§12 Weil also $rr + ss = xx + yy$ ist, wollen wir festlegen:

$$x = v \cos \varphi, \quad y = v \sin \varphi, \quad r = v \cos \omega \quad \text{und} \quad s = v \sin \omega$$

und es wird

$$dx = dv \cos \varphi - v d\varphi \sin \varphi \quad \text{und} \quad dy = dv \sin \varphi + v d\varphi \cos \varphi$$

und daher

$$adz = vdv \cos(\varphi - \omega) - vvd\varphi(\varphi - \omega)$$

sein. Weil nun

$$\int vdv \cos(\varphi - \omega) = \frac{1}{2}vv \cos(\varphi - \omega) + \frac{1}{2} \int vv(d\varphi - d\omega) \sin(\varphi - \omega)$$

ist, wird

$$az = \frac{1}{2}vv \cos(\varphi - \omega) - \frac{1}{2} \int vv(d\varphi + d\omega) \sin(\varphi - \omega)$$

sein, welches letzte Glied nur integrierbar sein kann, wenn $vv \sin(\varphi - \omega)$ eine Funktion des Winkels $\varphi + \omega$ ist. Ich setze also nach der schon verschiedenorts verwendeten Bezeichnungsweise

$$vv \sin(\varphi - \omega) = F' : (\varphi + \omega),$$

dass

$$2az = vv \cos(\varphi - \omega) - F : (\varphi + \omega)$$

wird, während

$$d.F : (\varphi + \omega) = (d\varphi + d\omega)F' : (\varphi + \omega)$$

ist. Oder man führe zwei andere Winkel μ und ν ein, dass

$$\varphi = \frac{\mu + \nu}{2} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{\mu - \nu}{2}$$

ist, und daher wird man

$$v = \sqrt{\frac{F' : \mu}{\sin \nu}}, \quad x = v \cos \varphi, \quad y = v \sin \varphi$$

haben, und schließlich

$$2az = \frac{F' : \mu}{\tan \nu} - F : \mu,$$

welche Lösung um vieles einfacher ist; nichtsdestoweniger füge ich noch eine dritte hinzu.

DRITTE LÖSUNG

§13 Weil $rr + ss = xx + yy$ sein muss, setze man

$$r = x \cos \omega + y \sin \omega \quad \text{und} \quad s = x \sin \omega - y \cos \omega$$

und es wird

$$adz = xdx \cos \omega + (ydx + xdy) \sin \omega - ydy \cos \omega$$

sein und daher

$$az = \frac{1}{2}xx \cos \omega - \frac{1}{2}yy \cos \omega + xy \sin \omega - \int d\omega (xy \cos \omega - \frac{1}{2}(xx - yy) \sin \omega).$$

Es sei deshalb Ω irgendeine Funktion des Winkels ω und man setze

$$2xy \cos \omega - (xx - yy) \sin \omega = \Omega,$$

und es wird

$$2az = (xx - yy) \cos \omega + 2xy \sin \omega - \int \Omega d\omega$$

sein, welche Lösung die vorhergehenden in Bezug auf die Einfachheit um vieles überragt.

KOROLLAR 1

§14 Wenn in dieser letzten Lösung $x = v \cos \varphi$ und $y = v \sin \varphi$ gesetzt wird, wird

$$xx - yy = vv \cos 2\varphi \quad \text{und} \quad 2xy = vv \sin 2\varphi$$

sein; daher wird die Lösung so in diesen zwei Gleichungen enthalten sein

$$vv \sin(2\varphi - \omega) = \Omega \quad \text{und} \quad 2az = vv \cos(2\varphi - \omega) - \int \Omega d\omega,$$

wo für Ω irgendeine Funktion des Winkels ω angenommen werden kann.

KOROLLAR 2

§15 Man wird einen sehr leicht entwickelbaren Fall haben, indem wir $\Omega = A \cos \omega + B \sin \omega$ hat, woher

$$\int \Omega d\omega = A \sin \omega - B \cos \omega$$

wird. Daher gibt die letzte Lösung

$$(2xy - A) \cos \omega = (xx - yy + B) \sin \omega,$$

woher man findet:

$$\sin \omega = \frac{2xy - A}{\sqrt{(xx + yy)^2 - 4Axy + 2B(xx - yy) + AA + BB}} = \frac{2xy - A}{V},$$

$$\cos \omega = \frac{xx - yy + B}{\sqrt{(xx + yy)^2 - 4Axy + 2B(xx - yy) + AA + BB}} = \frac{xx - yy + B}{V},$$

indem man V anstelle des Wurzelausdrucks schreibt. Und daher wird

$$2az = \sqrt{(xx + yy)^2 - 4Axy + 2B(xx - yy) + AA + BB}.$$

KOROLLAR 3

§16 Weil in der dritten Lösung die Formel

$$d\omega(xy \cos \omega - \frac{1}{2}(xx - yy) \sin \omega)$$

integrierbar gemacht werden muss, ist es ersichtlich, dass dies geschieht, wenn der Winkel ω konstant angenommen wird. Es sei also $\omega = \zeta$, und es wird die schon oben angegebene Lösung

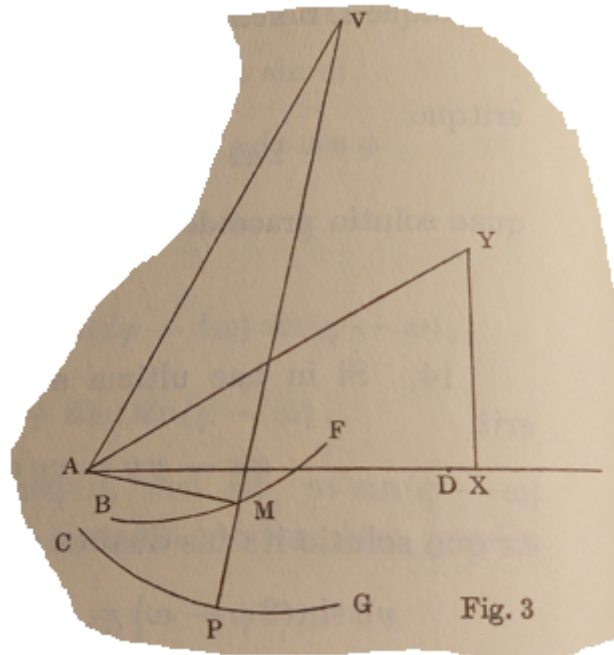
$$2az = (xx - yy) \cos \zeta + 2xy \sin \zeta$$

hervorgehen.

ALLGEMEINE KONSTRUKTION

§17 Nachdem (Fig. 3)³ $AX = x$ und $XY = y$ gesetzt worden ist,

³Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omina Version.



wird für Korollar 1

$$AY = v \quad \text{und} \quad \text{der Winkel } XAY = \varphi$$

sein. Man zeichne AV , dass

$$\text{der Winkel } YAV = XAY = \varphi$$

ist, und nach Nehmen von $AD = a$ nehme man die dritte AV proportional zu AD und AY , dass $AV = \frac{vv}{a}$ wird. Den Winkel zum anderen Teil der Achse setze man $XAM = 90^\circ - \omega$, es wird

$$\text{der Winkel } VAM = 90^\circ + 2\varphi - \omega$$

sein, von V aus zeichne man zu AM die Normale VM , und es wird

$$AM = -\frac{vv}{a} \sin(2\varphi - \omega)$$

sein und daher

$$\Omega = -AM \cdot a \quad \text{und} \quad VM = \frac{vv}{a} \cos(2\varphi - \omega).$$

Aus dieser Konstruktion berechnet man also

$$2az = a \cdot VM + a \int AMd\omega \quad \text{oder} \quad 2z = VM + \int AM \cdot d\omega,$$

man nehme als $MP = \int AM \cdot d\omega$, dass $2z = VP$ wird, und oben haben wir schon gesehen, auf welcher Kurve auch immer der Punkt M lag, dass die Kurve CPG , die den Punkt P enthält, so beschaffen ist, dass die Gerade MP zu ihr normal ist. Daher lässt sich nach Verwerfen der Kurven BMF an ihrer Stelle die Kurve CPG nach Belieben annehmen, woher diese Konstruktionsbeschreibung abgeleitet wird:

Nachdem auf der Basis die Gerade AX und auf ihr $AD = a$ genommen worden ist, beschreibe man nach Belieben irgendeine Kurve CPG , zu welcher man in dem Punkt P die unbestimmte Normale PV zeichne, nach Nehmen irgendeines Punktes V auf welcher und Zeichnen der Gerade AV man den Winkel DAV mit der Gerade AY in zwei gleiche Teile teile, die Länge welcher Gerade man als die mittlere Proportionale zwischen AD und AV nehme, und im Punkt Y ziehe man senkrecht zur Basis die Gerade, die der Hälfte von PV gleich ist und welche sich bis hin zur gesuchten Fläche erstreckt. Wenn auf diese Weise in den einzelnen Normalen PV , die bis ins Unendliche verlängert worden sind, alle Punkte entwickelt werden, werden alle Punkte der aus der Kurve CPG entspringenden Oberfläche bestimmt werden.

SCHOLION

§18 Die Lösung diese Problems ist also um vieles schwieriger als die des vorherigen, weil das Integriermachen der Formel $rdx + sdy$, so dass

$$rr + ss = xx + yy$$

ist, nicht gerade kleine Kunstgriffe erfordert. Wer aber andere Fälle entwickeln will, wird oftmals auf so große Schwierigkeiten treffen, um welche zu überkommen die ganze Schlagkraft der Analysis kaum zu genügen scheint. Daher lässt sich eine allgemeine Lösung immer noch kaum erhoffen; dies geht darauf zurück, dass nach Vorlegen der integrierbaren Formel

$$pdx + qdy$$

eine andere ebenso integrable Formel

$$rdx + sdy = dz$$

ausfindig gemacht wird, so dass

$$rr + ss = pp + qq$$

ist. Es könnte zwar

$$r = p \cos \omega + q \sin \omega \quad \text{und} \quad s = q \cos \omega - p \sin \omega$$

gesetzt werden, und es wäre

$$dz = (pdx + qdy) \cos \omega + (qdx - pdy) \sin \omega,$$

wo, weil $pdx + qdy$ integrierbar ist, man das Integral $= u$ setze und es wird

$$z = u \cos \omega + \int (ud\omega + qdx - pdy) \sin \omega$$

sein. Und es ist in der Tat nicht klar, wie sich der Winkel ω durch x und y definieren lässt, dass diese Formel integrierbar wird. Daher möchte ich Fälle von solcher Art entwickeln, wo es mir freilich möglich war, diese Schwierigkeiten zu überwinden.

PROBLEM

§19 Wenn die gegebene Oberfläche mit dieser Gleichung $dz = Xdx + Ydy$ ausgedrückt wird, wo X allein durch x und Y allein durch y gegeben ist, alle dieser kongruenten Oberflächen zu finden.

LÖSUNG

Wenn also für die gesuchten Oberflächen $dz = rdx + sdy$ gesetzt wird, ist es notwendig, dass $rr + ss = XX + YY$ ist; man setze also

$$r = \sqrt{XX + 2v} \quad \text{und} \quad s = \sqrt{YY - 2v},$$

dass

$$z = \int (dx\sqrt{XX + 2v} + dy\sqrt{YY - 2v})$$

ist. Nun suche man das Integral der Formel $dx\sqrt{XX+2v}$ für konstantes v , welches $= P$ sei, sodass P eine Funktion von x und v ist, welche sich als gegeben betrachten lässt; nachdem sie also differenziert worden ist, gehe

$$dP = dx\sqrt{XX+2v} + Rdv$$

hervor, wo bekannt ist, dass

$$R = \int \frac{dx}{\sqrt{XX+2v}}$$

sein wird, wobei die Größe v als konstant angesehen wird. In gleicher Weise suche man für konstant betrachtetes v die Größe

$$Q = \int dy\sqrt{YY-2v},$$

und nachdem sie wiederum differenziert worden ist, wobei beide, also y und v , variabel angesehen werden, gehe

$$dQ = dy\sqrt{YY-2v} + Sdv$$

hervor, und es wird

$$S = - \int \frac{dy}{\sqrt{YY-2v}}$$

sein, welche Gleichung also gleichermaßen bekannt sein wird. Daher wird man nach der Substitution

$$z = \int (dP - Rdv + dQ - Sdv) = P + Q - \int (R + S)dv$$

haben und nun muss die Formel $(R + S)dv$ integrierbar gemacht werden, was nur geschehen kann, wenn $R + S$ eine Funktion von v ist. Es sei deshalb V irgendeine Funktion von v und man nehme $R + S = V$, und es wird $z = P + Q - \int Vdv$ sein, in welchen Gleichungen die allgemeine Konstruktion aller kongruenten Flächen enthalten ist.

PROBLEM 4

§20 Wenn für die gegebene Oberfläche die zur Basis orthogonalen Koordinate mit einer homogenen Funktion von n Dimensionen in x und y ausgedrückt wird, alle selbiger kongruenten Flächen ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Man setze $y = ux$, und die Gleichung für die gegebene Fläche wird eine solche Form haben $a^{n-1}z = x^n U$, wobei U eine Funktion nur von u ist, welche also gegeben sein wird. Daher wird

$$a^{n-1}dz = nx^{n-1}Udx + x^n dU,$$

aber wegen $dy = udx + xdu$ wird sein:

$$a^{n-1}dz = x^{n-1} \left(nUdx + \frac{dU}{du} dy - \frac{udU}{du} dx \right),$$

sodass

$$p = x^{n-1} \left(nU - \frac{udU}{du} \right) \quad \text{und} \quad q = x^{n-1} \frac{dU}{du}$$

und daher

$$pp + qq = x^{2n-2} \left(nnUU - \frac{2nuUdU}{du} + \frac{(1+uu)dU^2}{du^2} \right)$$

ist. Man setze

$$nnUU - \frac{2nuUdU}{du} + \frac{(1+uu)dU^2}{du^2} = VV,$$

sodass auch V eine gegebene Funktion von u ist: Und nun stelle man für die gesuchten Flächen diese Differentialgleichung auf

$$a^{n-1}dz = x^{n-1}(rdx + sdy),$$

und es ist notwendig, dass $rr + ss = VV$ ist. Nun wird nach Einsetzen des Wertes ux für y

$$a^{n-1}dz = x^{n-1}((r + su)dx + xsdu)$$

und daher durch Integrieren des ersten Terms nach u

$$a^{n-1}z = \frac{1}{n}x^n(r + su) + \int x^n \left(sdu - \frac{dr + sdu + uds}{n} \right).$$

Man setze

$$r = V \cos \varphi \quad \text{und} \quad s = V \sin \varphi,$$

dass man

$$na^{n-1}z = x^n V(\cos \varphi + u \sin \varphi) + \int x^n ((n-1)Vdu \sin \varphi + Vd\varphi(\sin \varphi - u \cos \varphi) - dV(\cos \varphi + u \sin \varphi))$$

hat. Hier umfasst die Differentialformel

$$(n-1)VdU \sin \varphi + Vd\varphi(\sin \varphi - u \cos \varphi) - dV(\cos \varphi + u \sin \varphi)$$

nur die zwei Variablen u und φ , also wird ein Multiplikator M , ebenso eine Funktion von u und φ , gegeben sein, welcher sie integrierbar macht: Es sei also

$$M((n-1)Vdu \sin \varphi + Vd\varphi(\sin \varphi - u \cos \varphi) - dV(\cos \varphi + u \sin \varphi)) = dS,$$

und auch S wird eine angebbare Funktion von u und φ sein; weil daher

$$na^{n-1}z = x^n V(\cos \varphi + u \sin \varphi) + \int \frac{x^n dS}{M}$$

ist, ist es ersichtlich, dass die Formel nur integrierbar sein kann, wenn $\frac{x^n}{M}$ eine Funktion von S ist. Wir wollen also $x^n = MF' : S$ setzen und es wird

$$na^{n-1}z = x^n V(\cos \varphi + u \sin \varphi) + F : S$$

sein. Weiter werden durch die zwei Variablen u und φ die Funktionen M und S bestimmt und daher weiter x und $y = ux$ und z , woher wegen der hier eingeführten beliebigen Funktion diese Lösung allgemein ist.

SCHOLION 1

§21 Hier passiert es auf völlig einzigartige Weise, dass im Fall $n = 0$ diese Lösung nicht gilt, und es ist auch nicht klar, wie diesem Umstand beigegeben werden kann. Das scheint hier umso merkwürdiger, weil ansonsten auf andere Art behandelte Fälle hinreichend leicht erledigt werden. Indes erstrecken sich diese zwei Probleme sehr weit und aus III. können Fälle aufgelöst werden, in

denen die gegebene Oberfläche eine zylindrische ist, aus IV. hingegen die, in denen sie konisch ist, welche, auch wenn sie sehr leicht anmuten, dennoch sehr wegen der daraus resultierenden transzendenten Formeln komplizierte Lösungen involvieren, sodass sich daraus die einfacheren Oberflächen auf keine Weise finden lassen. Aber keiner der beiden dieser Fälle kann auf die Kugel angewandt werden, deren Natur mit dieser Gleichung

$$z = \sqrt{aa - xx - yy}$$

ausgedrückt wird, für die Gleichung der kongruenten Flächen $dz = rdx + sdy$ muss aber

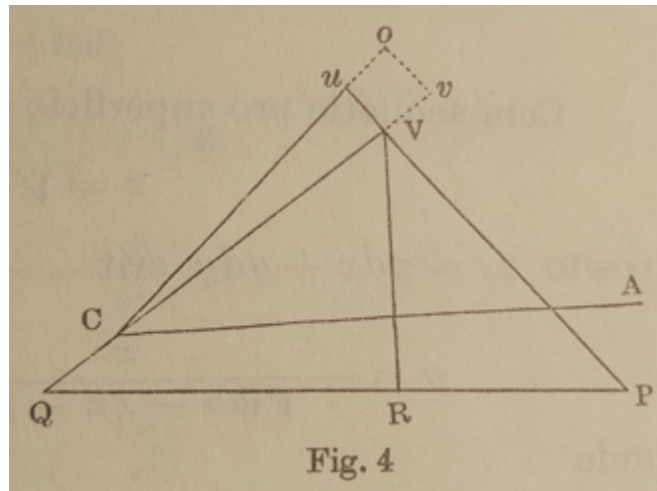
$$rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$$

werden; wie auch immer aber daher die Größen r und s bestimmt werden, es ist daraus nicht klar, wie die Formel $rdy + sdy$ integrierbar gemacht werden kann. Es besteht dennoch kein Zweifel, dass unendlich viele der Kugeloberfläche kongruente Fläche gegeben sind.

SCHOLION 2

§22 Aber ich habe beobachtet, dass der Fall, in dem die vorgelegte Oberfläche sphärisch ist, und andere ähnliche erledigt werden können, wenn in der festen als Basis angenommenen Ebene nicht zwei orthogonale Koordinaten genommen werden, sondern die eine als Strahl von einem festen Punkt aus genommen wird, die andere hingegen in einem Winkel, welcher seine Ausrichtung bestimmt, enthalten ist. Es sei also (Fig. 4)⁴ C dieser feste Punkt und die Gerade CA von der Lage her gegeben,

⁴Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.



und für irgendeinen auf der Basis angenommenen Punkt V setze man die Gerade $CV = v$ und den Winkel $ACV = \varphi$, die Senkrechte, welche in V fußt und sich zur Fläche erstreckt, sei z , welche durch v und φ so ausgedrückt werde, dass $dz = pdv + qd\varphi$; man betrachte zuerst den Winkel φ als konstant und nach Nehmen von $Vv = dv$ wird die auf v fußende Senkrechte $z + pdv$ sein, woher die Tangente auf den Punkt Q der Gerade VC trifft, dass $VQ = \frac{z}{p}$ ist. Dann betrachte man die Strecke v als konstant, und für konstant genommenen Winkel $VCu = d\varphi$, dass $Vu = va\varphi$ ist, wird die auf dem Punkt u fußende Senkrechte $= z + qd\varphi$ sein; daher wird auf der zu CV normalen Geraden VP die Tangente auf P treffen, sodass $VP = \frac{zv}{q}$ ist, woher die Gerade PQ , zu welcher ich von V das Lot VR fälle, die Tangentialebene zur Basis schneiden wird, es wird

$$VR = \frac{VP \cdot VQ}{PQ} = \frac{zv}{\sqrt{qq + ppvv}}$$

sein, und daher für den Winkel, welchen die Tangentialebene mit der Basis bildet,

$$\text{der Tangens} = \sqrt{pp + \frac{qq}{vv}} \quad \text{und} \quad \text{der Sekans} = \sqrt{1 + pp + \frac{qq}{vv}}.$$

Daher weil der rechtwinklige Raum auf der Basis $vVuo = vdvd\varphi$ ist, wird man das selbiger Fläche überstehende Element

$$= vdv d\varphi \sqrt{1 + pp + \frac{qq}{vv}}$$

haben, woher eine andere mit der Gleichung $dz = r dv + s d\varphi$ ausgedrückte Fläche jener kongruent sein wird, wenn

$$rr + \frac{ss}{vv} = pp + \frac{qq}{vv}$$

war. Aber auch diese Substitution lässt sich in der vorhergehenden Analysis durchführen, wie aus der Lösung des folgenden Problem erkannt werden wird.

PROBLEM 5

§23 Wenn die vorgelegte sphärische Oberfläche mit dem Radius = a beschrieben worden ist, alle selbiger kongruenten Flächen zu finden.

LÖSUNG

Weil die Gleichung für die sphärischen Oberfläche

$$z = \sqrt{aa - xx - yy}$$

ist, wird für $dz = p dx + q dy$ gesetzt

$$p = -\frac{x}{\sqrt{aa - xx - yy}} \quad \text{und} \quad q = -\frac{y}{\sqrt{aa - xx - yy}}$$

sein, woher

$$pp + qq = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$$

ist. Daher, wenn für die gesuchten Flächen die Gleichung $dz = r dx + s dy$ genommen wird, muss

$$rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$$

sein. Nun setze man aber

$$x = v \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = v \sin \varphi,$$

dass

$$rr + ss = \frac{vv}{aa - vv}$$

wird, und es wird

$$dz = dv(r \cos \varphi + s \sin \varphi) + v d\varphi(s \cos \varphi - r \sin \varphi)$$

sein, für welche man der Kürze wegen

$$dz = R dv + S v d\varphi$$

schreibe, wo es klar ist, dass auch

$$RR + SS = \frac{vv}{aa - vv}$$

werden muss, woher geeignete Werte für R und S gefunden werden müssen, dass die Formel $R dv + S v d\varphi$ eine Integration zulässt. Es ist aber offenkundig, dass dies durch das dritte Problem geleistet werden kann. Man setze nämlich

$$S = \frac{t}{v} \quad \text{und} \quad R = \sqrt{\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}},$$

und man wird

$$dz = dv \sqrt{\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}} + t d\varphi$$

haben, oder

$$t = t\varphi + \int \left(dv \sqrt{\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}} - \varphi dt \right).$$

Man suche eine Funktion solcher Art von v und t , dass

$$dP = dv \sqrt{\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}} + Q dt$$

wird, sodass

$$P = \int dv \sqrt{\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}}$$

für konstant genommenes t und

$$Q = -t \int \frac{dv}{vv \sqrt{\frac{vv}{aa-vv} - \frac{tt}{vv}}}$$

für gleichermaßen konstant gehaltenes t ist.

Dann wird also

$$z = t\varphi + \int (dP - Qdt - \varphi dt) \quad \text{oder} \quad z = P + t\varphi - \int dt(Q + \varphi).$$

Deshalb ist es also notwendig, dass $Q + \varphi =$ einer Funktion von t ist, welche T sei, woher

$$\varphi = T - Q \quad \text{und} \quad z = P + Tt - Qt - \int Tdt = P - Qt + \int tdT$$

wird.

SCHOLION

§24 Sieh' also die Lösung dieses sehr schweren Problems, woher zugleich das in gleicher Weise das um vieles Allgemeinere Problem, in welchem $rr + ss$ oder $RR + SS$ irgendeiner Funktion von v gleich werden muss, aufgelöst werden konnte. Aber weil hier die Werte der Buchstaben P und Q nur höchst transzendent angegeben werden können, ist keineswegs klar, wie zumindest eine einfachere Fläche gefunden werden kann, welche der sphärischen kongruent ist. Im Übrigen wird es förderlich sein, hier die Kunstgriffe, mit denen sich bisher die Formel $rdx + sdy$ integrierbar machen ließ, genauer dargeboten zu haben, Hier ist aber zuerst zu bemerken, dass in dieser Formel drei Variablen enthalten sind, außer x und y natürlich eine in den Buchstaben r und s enthaltende, deren Relation zu x, y gesucht wird, durch welche jene Formel integrierbar gemacht wird. Die hier zu verwendenden Kunstgriffe gehen aber darauf zurück, dass durch geeignete Substitutionen drei neue Variablen t, u und w eingeführt werden und die Frage darauf zurückgeführt wird, dass eine Formel von dieser Art $Mdt + Ndu$ integrierbar zu machen ist, denn das dritte Differential dw lässt sich immer so eliminieren, sodass diese Variable w nur in den endlichen Größen M und N enthalten ist. Dann wird sich aber in den folgenden Fällen eine Lösung finden lassen:

1) Wenn eine der beiden Größen M und N verschwindet, wie wenn $N = 0$ ist, ist, damit die Formel Mdt integrierbar ist, notwendig, dass die Größe M einer Funktion von t gleich wird; nach Setzen von $M = F' : t$, woher die Relation zwischen den drei Variablen t , u und w sehr allgemein definiert wird, wird

$$\int Mdt = F : t$$

sein.

2) Wenn die Formel $Mdt + Ndu$ eine Form von dieser Art hat

$$S(Pdt + Qdu),$$

wo P und Q Funktionen nur der zwei Variablen t und u seien, die dritte w hingegen aber allein im Faktor S enthalten ist. Denn dann kann immer ein Multiplikator R gefunden werden, dass

$$R(Pdt + Qdu) = dV$$

ist, und so kann die Größe V bestimmt werden, welche eine Funktion von t und u sein wird. Auf diese Weise geht die Formel in $\frac{SdV}{R}$ über, und nun muss $S = RF' : V$ gesetzt werden, und als Integral der Formel

$$\int \frac{S}{R} dV = F : V$$

werden.

3) Die Auflösung gelingt auch, wenn die Größe M nur eine eine Funktion der zwei Variablen t und u ist und die dritte w allein in N enthalten ist, denn dann wird sich eine Funktion solcher Art der zwei Variablen t und u , welche V sei, finden lassen, dass $dV = Mdt + Sdu$ ist; auf diese Weise nimmt die vorgelegte Formel diese Form $dV + (N - S)du$ an und so muss

$$N = S + F' : u$$

genommen werden und das Integral wird $V + F : u$ sein.

4) Wenn die dritte Variable w so in eine der beiden Größen M und N eingeht, dass zwei Funktionen von t und u , seien sie P und Q , gegeben sind,

mit welchen diese Formel $MQ + NP$ frei von der Variable w gemacht wird, dann wird die Lösung auf die folgende Weise erlangt werden können:

$$dt = \frac{Qdp - Rdq}{PQ - RS} \quad \text{und} \quad du = \frac{Pdq - Sdp}{PQ - RS}.$$

Man betrachte die Differentialformel $Pdt - Qdu$, welche mit dem Multiplikator R integrierbar gemacht werde, und man setze

$$dv = R(Pdt - Qdu),$$

und v wird eine bekannte Funktion von t und u sein, woher umgekehrt t durch u und v bestimmt werde und es wird

$$dt = \frac{Qdu}{P} + \frac{dv}{PR}$$

werden. Daher wird die vorgelegte Formel sein:

$$\frac{MQ + NP}{P} du + \frac{Mdv}{PR},$$

wo $\frac{MQ+NP}{P}$ eine Funktion nur von u und v ist, und so wird die Auflösung mit Problem 4 gegeben werden.

SCHOLION 2

§25 Über diese Integrationen ist besonders zu bemerken, dass sie die allgemeinsten sind, weil höchst allgemeine Funktionen einer Variable in die Integrale eingeführt werden, für welche sich sogar unstetige Funktionen, die, wie wir oben sehen, sogar aus freihändiger Zeichnung entstehen dürfen, annehmen lassen. Ja das Kriterium aller Fragen dieser Art besteht sogar darin, dass solche Funktionen, die völlig von unserem Belieben abhängen, in deren Lösungen eingeführt werden.