

ANALYTISCHE BETRACHTUNGEN*

Leonhard Euler

Nachdem ich neulich entdeckt hatte, dass das Integral dieser Differentialform $\frac{(x^\alpha - x^\beta)dx}{\log x}$, wenn es so genommen wird, dass es für $x = 0$ verschwindet, dann aber $x = 1$ gesetzt wird, diesem Wert $\log \frac{\alpha+1}{\beta+1}$ gleich wird, schien mir diese Integration umso mehr der Aufmerksamkeit würdig, weil ihre Gültigkeit mit keiner bis jetzt gebräuchlichen Methode gezeigt werden konnte. Deswegen besteht nämlich überhaupt kein Zweifel, dass selbige noch viel mehr verbirgt und zu vielen anderen wunderbaren Sachen in der Analysis zu führen vermag. Ich glaube also nicht, dass es den Geometern unangenehm sein wird, wenn ich einige Betrachtungen, welche sich mir aufgezeigt haben, erkläre.

§1 Weil diese Integration sich auf gänzlich alle für die Buchstaben α und β angenommenen Werte erstreckt und sogar imaginäre Werte nicht ausgeschlossen werden, wollen wir

$$\alpha = n\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = -n\sqrt{-1}$$

setzen und es wird

$$x^\alpha - x^\beta = x^{n\sqrt{-1}} - x^{-n\sqrt{-1}}$$

sein; weil diese Formel auf diese Form $e^{n \log x \sqrt{-1}} - e^{-n \log x \sqrt{-1}}$ zurückgeführt wird, ist es bekannt, dass der Wert $= 2\sqrt{-1} \cdot \sin n \log x$ ist, nach Einsetzen welches Wertes

*Originaltitel: "Speculationes analyticae", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Band 20 (1776, geschrieben 1774): pp. 59 – 79, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 18, pp. 1 – 22, Eneström Nummer E475, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$2\sqrt{-1} \cdot \int \frac{dx \sin n \log x}{\log x} = \log \frac{1 + n\sqrt{-1}}{1 - n\sqrt{-1}}$$

hervorgeht. Es ist aber bekannt, dass der Wert dieser Formel $\log \frac{1+n\sqrt{-1}}{1-n\sqrt{-1}}$ auch $2\sqrt{-1} \cdot \arctan n$ ist, weil ja die Differentiation nach n

$$d. \log \frac{1 + n\sqrt{-1}}{1 - n\sqrt{-1}} = \frac{2dn\sqrt{-1}}{1 + nn}$$

gibt, deren Integral offenbar $2\sqrt{-1} \cdot \arctan n$ ist; daher erhalten wir also das folgende Theorem:

THEOREM 1

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx \sin n \log x}{\log x}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt drückt den Kreisbogen aus, dessen Tangens = n ist; daher wird für $n = 1$

$$\int \frac{dx \sin n \log x}{\log x} = \frac{\pi}{4},$$

während π den halben Umfang des Kreises ist, des Radius = 1 ist.

§2 Obwohl aber diese Integration aus unserer allgemeinen Form heraus, welche mit anderen Methoden unzugänglich erscheint, abgeleitet worden ist, kann ihre Gültigkeit mit gebräuchlichen Auflösungen auf die folgende Weise gezeigt werden und wird so wird aus diesem Fall die allgemeine Integration ein umso stärkeres Fundament erhalten. Weil nämlich mit einer unendlichen Reihe

$$\sin n \log x = \frac{n \log x}{1} - \frac{n^3 (\log x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n^5 (\log x)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

ist, wird

$$\int \frac{dx \sin n \log x}{\log x} = \int dx \left(n - \frac{n^3 (\log x)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n^5 (\log x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.} \right)$$

sein; es ist aber bekannt, dass

$$\int dx(\log x)^2 = x(\log x)^2 - 2 \int dx \log x = x(\log x)^2 - 2x \log x + 2 \cdot 1x$$

ist, welcher Ausdruck für $x = 1$ gesetzt auf $2 \cdot 1$ reduziert wird; in gleicher Weise wird

$$\int dx(\log x)^4 = x(\log x)^4 - 4 \int dx(\log x)^3 = x(\log x)^4 - 4x(\log x)^3 + 4 \cdot 3 \int dx(\log x)^2$$

werden, welche für $x = 1$ gesetzt wegen $\log 1 = 0$ entsprechend $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ liefert; und auf dieselbe Weise wird $\int dx(\log x)^6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Nachdem also diese einzelnen Integralwerte eingeführt worden sind, wird

$$\begin{aligned} \int \frac{dx \sin n \log x}{\log x} &= n - \frac{2 \cdot 1n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1n^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{6 \cdot \dots \cdot 1n^7}{1 \cdot \dots \cdot 7} + \text{etc.} \\ &= n - \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^7}{7} + \text{etc.} \end{aligned}$$

sein, die Summe welcher Reihe natürlich $\arctan n$ ist.

§3 Dieser Fall liefert uns einen Ansatzpunkt, auch diese Integralformel $\int \frac{dx \cos n \log x}{\log x}$ ausfindig zu machen, welche freilich nicht unmittelbar in unserer allgemeinen Form enthalten ist; und weil

$$\cos n \log x = 1 - \frac{nn(\log x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^4(\log x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{n^6(\log x)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}$$

ist, entspringt aus dem ersten Term $\int \frac{dx}{\log x}$, deren Wert ich freilich gezeigt habe unendlich zu sein. Für die folgenden Terme wird aber

$$\int dx \log x = x \log x - x = -1 \quad \text{und} \quad \int dx(\log x)^3 = -1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \text{und} \quad \int dx(\log x)^5 = -1 \cdot \dots \cdot 5 \quad \text{etc.}$$

sein, nach Finden welcher Werte wir

$$\int \frac{dx \cos n \log x}{\log x} = \int \frac{dx}{\log x} + \frac{nn}{2} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^6}{6} - \frac{n^8}{8} + \text{etc.}$$

erhalten werden, welcher Ausdruck natürlich auf diesen zurückgeführt wird

$$\int \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{2} \log(1 + mn).$$

Weil aber der erste Term diese Summe unendlich macht, wollen wir davon eine andere ähnliche abziehen

$$\int \frac{dx \cos m \log x}{\log x} = \int \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{2} \log(1 + mn)$$

und wir werden

$$\int \frac{dx(\cos n \log x - \cos m \log x)}{\log x} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + nn}{1 + mm}$$

haben und diese Integration scheint nicht weniger bemerkenswert als die vorhergehende.

§4 Weil aber im Allgemeinen $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$ ist, wird

$$\cos n \log x - \cos m \log x = 2 \sin \frac{m+n}{2} \log x \sin \frac{m-n}{2} \log x$$

sein, sodass

$$\int dx \frac{\sin \frac{m+n}{2} \log x \sin \frac{m-n}{2} \log x}{\log x} = \frac{1}{4} \log \frac{1 + nn}{1 + mm}$$

ist; wenn wir also $m = p + q$ und $n = p - q$ setzen, werden wir das folgende höchst bemerkenswerte Theorem haben:

THEOREM 2

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx}{\log x} \sin p \log x \sin q \log x$$

ist

$$= \frac{1}{4} \log \frac{1 + (p - q)^2}{1 + (p + q)^2},$$

wenn natürlich die Integration von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt wird.

Diese Integration ist umso bemerkenswerter, weil in ihr kein Kreisbogen auftritt, auch wenn sie die erste in sich zu umfassen scheint, was sich aber nicht so verhält, weil $\sin q \log x$ nicht auf die Einheit reduziert werden kann, dass zugleich die Größe q variabel gemacht wird.

§8 Es wird also der Mühe Wert sein ausfindig zu machen, wie auch das Integral dieses Theorems aus unserer allgemeinen Form abgeleitet werden kann. Für dieses Ziel wollen wir diese Integralformel betrachten

$$\int \frac{dx}{\log x} (x^\alpha - x^\beta)(x^\gamma - x^\delta),$$

welche in diese zwei aufgelöst wird

$$\int \frac{dx}{\log x} (x^{\alpha+\gamma} - x^{\beta+\gamma}) - \int \frac{dx}{\log x} (x^{\alpha+\delta} - x^{\beta+\delta}),$$

der Wert der ersten von welchen $\log \frac{\alpha+\gamma+1}{\beta+\gamma+1}$, der zweiten hingegen $\log \frac{\alpha+\delta+1}{\beta+\delta+1}$ ist, sodass wir

$$\int \frac{dx}{\log x} (x^\alpha - x^\beta)(x^\gamma - x^\delta) = \log \frac{(\alpha + \gamma + 1)(\beta + \delta + 1)}{(\beta + \gamma + 1)(\alpha + \delta + 1)}$$

haben. Nun wollen wir also

$$\alpha = p\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = -p\sqrt{-1}$$

setzen, weiter

$$\gamma = q\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \delta = -q\sqrt{-1},$$

dass

$$x^\alpha - x^\beta = 2\sqrt{-1} \cdot \sin p \log x \quad \text{und} \quad x^\gamma - x^\delta = 2\sqrt{-1} \cdot \sin q \log x$$

wird; so wird nämlich unsere Integralformel diese Form annehmen

$$-4 \int \frac{dx}{\log x} \sin p \log x \sin q \log x.$$

Für ihren Wert finden wir aber

$$\alpha + \gamma + 1 = 1 + (p + q)\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta + \delta + 1 = 1 - (p + q)\sqrt{-1},$$

$$\beta + \gamma + 1 = 1 + (q - p)\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \alpha + \delta + 1 = 1 + (p - q)\sqrt{-1},$$

nach Einsetzen welcher Werte der Wert des Integrals als

$$\log \frac{1 + (p + q)^2}{1 + (p - q)^2} = -\log \frac{1 + (p - q)^2}{1 + (p + q)^2}$$

hervorgeht, woher natürlich die Integration des letzten Theorems folgt

$$\int \frac{dx}{\log x} \sin p \log x \sin q \log x = \frac{1}{4} \log \frac{1 + (p - q)^2}{1 + (p + q)^2}.$$

§6 Daher ergreifen wir die Möglichkeit, diese allgemeine Form zu entwickeln

$$\int \frac{dx}{\log x} (x^\alpha - x^\beta)(x^\gamma + x^\delta),$$

deren Wert

$$= \log \frac{\alpha + \gamma + 1}{\beta + \gamma + 1} + \log \frac{\alpha + \delta + 1}{\beta + \delta + 1} = \log \frac{(\alpha + \gamma + 1)(\alpha + \delta + 1)}{(\beta + \gamma + 1)(\beta + \delta + 1)}$$

sein wird. Nun wollen wir wiederum

$$\alpha = p\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = -p\sqrt{-1}$$

setzen, dann aber

$$\gamma = q\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \delta = -q\sqrt{-1}$$

und es wird

$$x^\alpha - x^\beta = 2\sqrt{-1} \cdot \sin p \log x \quad \text{und} \quad x^\gamma + x^\delta = 2 \cos q \log x$$

werden, sodass die Integralformel

$$4\sqrt{-1} \cdot \int \frac{dx}{\log x} \sin p \log x \cos q \log x$$

entspringt. Für den Integralwert werden wir aber

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma + 1 &= 1 + (p + q)\sqrt{-1} & \beta + \gamma + 1 &= 1 + (q - p)\sqrt{-1}, \\ \alpha + \delta + 1 &= 1 + (p - q)\sqrt{-1} & \beta + \delta + 1 &= 1 - (p + q)\sqrt{-1},\end{aligned}$$

haben, woher der Wert des Integrals als

$$\log \frac{1 + (p + q)\sqrt{-1}}{1 - (p + q)\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 + (p - q)\sqrt{-1}}{1 - (p - q)\sqrt{-1}} = \log \frac{1 + (p + q)\sqrt{-1}}{1 - (p + q)\sqrt{-1}} + \log \frac{1 + (p - q)\sqrt{-1}}{1 - (p - q)\sqrt{-1}}$$

hervorgeht. Es ist aber

$$\log \frac{1 + (p + q)\sqrt{-1}}{1 - (p + q)\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \arctan(p + q)$$

und auf dieselbe Weise

$$\log \frac{1 + (p - q)\sqrt{-1}}{1 - (p - q)\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \arctan(p - q),$$

nach Einsetzen welcher Werte diese Integration resultiert

$$\int \frac{dx}{\log x} \sin p \log x \cos q \log x = \frac{1}{2} \arctan(p + q) + \frac{1}{2} \arctan(p - q).$$

Weil also im Allgemeinen $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$ ist, wird die gerade gefundene Summe der Bogen = $\arctan \frac{2p}{1-p^2+q^2}$ und der Wert des Integrals

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{2p}{1 - p^2 + q^2}$$

sein; daher das folgende

THEOREM 3

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx}{\log x} \sin p \log x \cos q \log x$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt ist diesem Wert

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{2p}{1 - pp + qq}$$

gleich.

§7 Wenn wir also $q = p$ nehmen, wird wegen $\sin p \log x \cos q \log x = \frac{1}{2} \sin 2p \log x$ wird diese Integration hervorgehen

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\log x} \sin 2p \log x = \frac{1}{2} \arctan 2p,$$

was vollkommen mit dem ersten Theorem übereinstimmt; aber sie kann tatsächlich auch im Allgemeinen auf das erste Theorem zurückgeführt werden. Weil nämlich

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a + b) + \frac{1}{2} \sin(a - b)$$

ist, wird unsere Formel in diese zwei Teile geteilt

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\log x} \sin(p + q) \log x + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\log x} \sin(p - q) \log x.$$

Also wird der Wert des ersten Teils aus dem Theorem

$$= \frac{1}{2} \arctan(p + q),$$

das des zweiten Teils hingegen

$$= \frac{1}{2} \arctan(p - q)$$

sein, welche Form natürlich auf die zurückgeführt wird, welche wir hier gegeben haben.

§8 Nun wollen wir aber unsere allgemeine Integration

$$\int \frac{dx}{\log x} (x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$$

ein wenig allgemeiner auf Winkel zurückführen, indem wir

$$\alpha = m + n\sqrt{-1}, \quad \beta = m - n\sqrt{-1}$$

setzen, dass

$$x^\alpha - x^\beta = x^m(x^{n\sqrt{-1}} - x^{-n\sqrt{-1}}) = 2\sqrt{-1} \cdot x^m \sin n \log x$$

wird; dann wird aber

$$\frac{\alpha + 1}{\beta + 1} = \frac{1 + m + n\sqrt{-1}}{1 + m - n\sqrt{-1}}$$

sein, welcher Bruch für $n = k(m + 1)$ gesetzt auf diesen $\frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}$ reduziert wird. Es ist aber

$$\log \frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 - k\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \arctan k = 2\sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{n}{m + 1}$$

und so erlangen wir das folgende Theorem:

THEOREM 4

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx}{\log x} x^m \sin n \log x$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt wird immer diesem Wert

$$\arctan \frac{n}{m + 1}$$

gleich sein.

Diese Theorem wir für $m = 0$ auf das erste zurückgeführt; hier tritt das besonders bemerkenswerte Phänomen auf, dass, sooft $\frac{n}{m+1}$ denselben Wert hat, auch die Integralformeln einander gleich werden.

§9 Aber auch dieses Theorem kann im Allgemeinen auf das erste zurückgeführt werden. Wenn man nämlich $x^{m+1} = y$ setzt, wird

$$x^m dx = \frac{dy}{m+1} \quad \text{und} \quad \log x = \frac{\log y}{m+1}$$

sein; nach Einsetzen dieser Wert wird

$$\int \frac{dy}{\log y} \sin \frac{n}{m+1} \log y$$

sein; weil diese dem ersten Theorem ähnlich ist, ist sein Wert natürlich = $\arctan \frac{n}{m+1}$ ist; weil wir ja aber hier $x^{m+1} = y$ gesetzt haben, werden die Integrationsgrenzen hier auch $y = 0$ und $y = 1$ sein.

§10 Nach diesem Theorem, weil

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

ist, wird für den ersten Summanden $n = 1$ und $m = 1$, für den zweiten hingegen $n = 1$ und $m = 2$ sein; daher wird man also diese Integration haben

$$\int \frac{dx}{\log x} (x + xx) \sin \log x = \frac{\pi}{4}$$

sein. Weiter, weil über eine unendliche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{18} + \arctan \frac{1}{32} + \arctan \frac{1}{50} + \text{etc.}$$

ist, werden wir diese ziemlich bemerkenswerte Integration haben

$$\int \frac{dx}{x \log x} (x^2 + x^8 + x^{18} + x^{32} + \text{etc.}) \sin \log x = \frac{\pi}{4},$$

welche umso bemerkenswerter ist, weil diese unendliche Reihe $x^2 + x^8 + x^{18} + x^{32} + \text{etc.}$ in keiner Weise auf eine endliche Summe zurückgeführt werden kann.

§11 Aber wir wollen zu unserer anfänglichen Integration zurückkehren, nach welcher

$$\int \frac{dx}{\log x} (x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$$

ist, deren Gültigkeit sich auch auf diese Weise zeigen lässt. Weil $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ ist, während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist, wird mit einer unendlichen Reihe

$$x^\alpha = 1 + \frac{\alpha \log x}{1} + \frac{\alpha\alpha(\log x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3(\log x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha^4(\log x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

sein, und daher berechnet man, dass

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) \frac{\log x}{1} + (\alpha\alpha - \beta\beta) \frac{(\log x)^2}{1 \cdot 2} + (\alpha^3 - \beta^3) \frac{(\log x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

sein wird, welche Reihe mit $\frac{dx}{\log x}$ multipliziert und integriert wegen

$$\int dx (\log x)^n = \pm 1 \cdot 2 \cdots n$$

(wo das obere Vorzeichen gilt, wenn n eine gerade Zahl ist, das untere, wenn eine ungerade) für $x = 1$ die folgende Reihe liefert

$$\alpha - \beta - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3} - \frac{\alpha^4 - \beta^4}{4} + \text{etc.},$$

welche Reihe offenkundig

$$\log(1 + \alpha) - \log(1 + \beta) = \log \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$$

ergibt.

§12 Damit aber der Wert dieser Formel knapper ausgedrückt wird, wollen wir $\alpha - 1$ und $\beta - 1$ anstelle von α und β schreiben, dass wir

$$\int \frac{dx}{\log x} (x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}) = \int \frac{dx}{x \log x} (x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{\alpha}{\beta}$$

haben. Wenn wir also $\alpha = e^m$ und $\beta = e^n$ nehmen, werden wir die folgende ziemlich gefällige Integration erlangen

$$\int \frac{dx}{x \log x} (x^{e^m} - x^{e^n}) = m - n.$$

§13 Wir wollen nun das Integral dieser Differentialformel

$$\frac{dx}{x \log x} \cdot \frac{x^\alpha - x^\beta}{1 + x^n}$$

ausfindig machen, und weil

$$\frac{1}{1 + x^n} = 1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n} - \text{etc.}$$

ist, berechnet man daraus das gesuchte Integral

$$\log \frac{\alpha}{\beta} - \log \frac{\alpha + n}{\beta + n} + \log \frac{\alpha + 2n}{\beta + 2n} - \log \frac{\alpha + 3n}{\beta + 3n} + \text{etc.},$$

woraus wir das folgende Theorem erhalten:

THEOREM 5

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx}{x \log x} \cdot \frac{x^\alpha - x^\beta}{1 + x^n}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt wird immer dieser logarithmischen Formel gleich werden

$$\log \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta + n}{\alpha + n} \cdot \frac{\alpha + 2n}{\beta + 2n} \cdot \frac{\beta + 3n}{\alpha + 3n} \cdot \frac{\alpha + 4n}{\beta + 4n} \cdot \text{etc.}$$

§14 Weil ich also anderenorts bewiesen habe, dass der Wert dieses unendlichen Produkts

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c + b}{c + a} \cdot \frac{a + k}{b + k} \cdot \frac{c + b + k}{c + a + k} \cdot \frac{a + 2k}{b + 2k} \cdot \frac{c + b + 2k}{c + a + 2k} \cdot \text{etc.}$$

diesem Ausdruck

$$\frac{\int z^{c-1} dz (1 - z^k)^{\frac{b-k}{k}}}{\int z^{c-1} dz (1 - z^k)^{\frac{a-k}{k}}}$$

gleich wird, wird nach entsprechender Anpassung an unseren Fall

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = n, \quad k = 2n$$

und daher der Wert unseres unendlichen Produkts

$$= \frac{\int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\beta-2n}{2n}}}{\int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\alpha-2n}{2n}}}$$

sein, welche beiden Integralformeln von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ zu erstrecken sind; und daher erschließen wir das folgende Theorem:

THEOREM 6

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx}{x \log x} \cdot \frac{x^\alpha - x^\beta}{1 + x^n}$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt ist diesem Wert gleich

$$\log \frac{P}{Q},$$

wobei

$$P = \int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\beta-2n}{2n}} \quad \text{und} \quad Q = \int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\alpha-2n}{2n}}$$

ist, während natürlich diese beiden letzten Integralformeln von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ erstreckt werden.

§15 Wir wollen also $n = 1$ nehmen, dass unsere Integralformel

$$\int \frac{dx}{x \log x} \cdot \frac{x^\alpha - x^\beta}{1 + x}$$

wird, und dann wird

$$P = \int dz(1-zz)^{\frac{\beta-2}{2}} \quad \text{und} \quad Q = \int dz(1-zz)^{\frac{\alpha-2}{2}}$$

sein, woher wir für α und β die folgenden Fälle entwickeln wollen. Es sei zuerst $\alpha = 2$ und $\beta = 1$; es wird $P = \arcsin z = \frac{\pi}{2}$ und $Q = z = 1$ und daher $\frac{P}{Q} = \frac{\pi}{2}$ sein, woher wir berechnen, dass

$$\int \frac{dx}{\log x} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \log \frac{\pi}{2}$$

sein wird.

§16 Wir wollen nun $\alpha = 3$ und $\beta = 1$ nehmen, dass $\frac{x^\alpha - x^\beta}{1+x} = x(x-1)$ wird, und daher wird unsere Integralformel $\int \frac{dx}{\log x}(x-1)$ sein, deren Wert wir wissen = $\log 2$ zu sein; aber aus unserer allgemeinen Formel wird

$$P = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad Q = \int dz\sqrt{1-zz} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-zz}} - \int \frac{zzdz}{\sqrt{1-zz}}$$

sein. Aber nach bekannten Reduktionen gilt

$$\int \frac{zzdz}{\sqrt{1-zz}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1-zz}}$$

und so wird

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1-zz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

sein, woher $\frac{P}{Q} = 2$ wird, welcher Wert vollkommen mit dem zuvor angegebenen übereinstimmt.

§17 Weil ja in der Größe P der Exponent α nicht auftaucht, aber in der anderen nur Q auftaucht, wird sich das obere Theorem in zwei Teile aufteilen lassen, dass

$$\int \frac{dx}{\log x} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^n} = C - \log \int z^{n-1} dz (1-z^{2n})^{\frac{\alpha-2n}{2n}}$$

und

$$\int \frac{dx}{\log x} \cdot \frac{x^{\beta-1}}{1+x^n} = C - \log \int z^{n-1} dz (1-z^{2n})^{\frac{\beta-2n}{2n}}$$

ist, wo C eine gewisse Konstante bezeichnet, welche aber in der Differenz von zwei Integralformeln von dieser Art aus der Rechnung herausgeht.

§18 Wir können auch unsere grundlegende Integralformel

$$\int \frac{dx}{x \log x} (x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{\alpha}{\beta}$$

so transformieren, dass in ihr unendliche Exponenten auftauchen, welche deswegen der Aufmerksamkeit nicht unwürdig scheint. Es bezeichne also i eine unendlich große Zahl, und weil sich $\log x$ so ausdrücken lässt, dass $\log x = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$ ist, wird unsere Formel diese Form annehmen

$$\int \frac{dx}{ix(x^{\frac{1}{i}} - 1)} (x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{\alpha}{\beta}.$$

Nun wollen wir also, um den gebrochenen Exponenten zu beseitigen, $x^{\frac{1}{i}} = z$ setzen, dass $x = z^i$ und daher $\frac{dx}{x} = \frac{idz}{z}$ ist; aber dann $x^\alpha = z^{\alpha i}$ und $x^\beta = z^{\beta i}$, und weil man immer noch dieselben Integrationsgrenzen $z = 0$ und $z = 1$ hat, resultiert das folgende Theorem:

THEOREM 7

Während i eine unendlich große Zahl bezeichnet, ist diese Integralformel

$$\int \frac{dz(z^{\alpha i} - z^{\beta i})}{z(z-1)}$$

von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ erstreckt immer diesem Wert gleich

$$\log \frac{\alpha}{\beta}.$$

§19 Weil

$$\frac{z^{\alpha i}}{z-1} = z^{\alpha i-1} + z^{\alpha i-2} + z^{\alpha i-3} + z^{\alpha i-4} + \text{etc.}$$

ist, wird

$$\int \frac{z^{\alpha i} dz}{z(z-1)} = \frac{1}{\alpha i - 1} + \frac{1}{\alpha i - 2} + \frac{1}{\alpha i - 3} + \frac{1}{\alpha i - 4} + \text{etc.} + C$$

sein und auf dieselbe Weise wird

$$\int \frac{z^{\beta i} dz}{z(z-1)} = \frac{1}{\beta i - 1} + \frac{1}{\beta i - 2} + \frac{1}{\beta i - 3} + \frac{1}{\beta i - 4} + \text{etc.} + C$$

sein, woher klar ist, dass die Differenz dieser zwei Reihen $\log \frac{\alpha}{\beta}$ ist; wenn also $\alpha = 2$ und $\beta = 1$ war, wird diese Integration hervorgehen

$$\int \frac{dz(z^{2i} - z^i)}{z(z-1)} = \frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i-2} + \frac{1}{2i-3} + \frac{1}{2i-4} + \dots + \frac{1}{i},$$

weil ja die folgenden Terme durch die zweite Reihe aufgehoben werden. Es ist aber bekannt, dass die Summe dieser Reihe $\log 2$ ist.

§20 Es könnten noch viele andere Folgerungen aus dieser merkwürdigen Integration abgeleitet werden, mit welchen ich mich aber hier nicht weiter aufhalten werde, sondern ich möchte lieber die Analysis selbst, welche zu dieser Integration geführt hat, genauer beleuchten. Ich habe natürlich die Potenz x^u betrachtet, deren Exponent u nach Belieben entweder konstant oder variabel angesehen werden kann, und weil

$$\int \frac{x^u dx}{x} = \frac{x^u}{u}$$

ist, und wenn nach der Integration $x = 1$ genommen wird, wird $\int \frac{dx}{x} x^u = \frac{1}{u}$ sein; diese Formel bilde also das Fundament, von welchem aus wir alles Folgende ableiten werden.

§21 Wir wollen nun die Formel mit du multipliziert für konstant angesehenes x integrieren, und weil die Summe $\int x^u du = \frac{x^u}{\log x}$ ist, dann aber bekannt ist, dass diese Integration von der anderen, wo x variabel wahr, nicht gestört wird, werden wir nun diese Integration haben

$$\int \frac{dx}{x \log x} x^u = \log u + A,$$

wo A eine durch Integration eingehende Konstante bezeichnet, welche also aus der Betrachtung herausgeht, wenn wir zwei Formen von dieser Art voneinander abziehen; daher, wenn wir zuerst $u = \alpha$, dann aber $u = \beta$ nehmen und das zweite Integral vom ersten abziehen, wird unsere eingangs erwähnte grundlegende Form

$$\int \frac{dx}{x \log x} (x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{\alpha}{\beta}$$

hervorgehen.

§22 In gleicher Weise wollen wir von der Integralformel $\int \frac{dx}{x \log x} x^\mu = \log u + A$ weiter voranschreiten, nach Multiplizieren von welcher mit du und Integrieren allein nach u wir wegen $\int x^\mu du = \frac{x^\mu}{\log x}$ wie zuvor zu dieser Integration gelangen

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} x^\mu = \int du \log u + A + B = u \log u - u + Au + B,$$

wo also drei spezielle Formeln miteinander kombiniert werden müssen, damit die beiden Konstanten A und B aus der Rechnung herausgeworfen werden; weil sich aber $A + 1$ anstelle von A schreiben lässt, wird

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} x^\mu = u \log u + Au + B$$

sein.

§23 Wenn wir nun erneut mit du multiplizieren und integrieren, werden wir nach Ändern der konstanten Buchstaben, damit die Formel gefälliger gemacht wird,

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^3} x^\mu = \frac{1}{2} u u \log u + Au u + Bu + C$$

und auf dieselbe Weise weiter

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^4} x^\mu = \frac{1}{6} u^3 \log u + Au^3 + Bu u + Cu + D,$$

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^5} x^\mu = \frac{1}{24} u^4 \log u + Au^4 + Bu^3 + Cu u + Du + E$$

etc.

finden. Daher sieht man ein, dass immer mehr spezielle Fälle miteinander kombiniert werden müssen, damit alle Konstanten A, B, C, D etc. aus der Rechnung herausgeworfen werden.

§24 Auf diese Weise wollen wir also die in § 22 gefundene Formel entwickeln und wollen u diese drei Werte α , β und γ zuteilen, dass wir diese drei Formeln erhalten

$$\begin{aligned} \text{I. } & \int \frac{dx}{x(\log x)^2} x^\alpha = \alpha \log \alpha + A\alpha + B, \\ \text{II. } & \int \frac{dx}{x(\log x)^2} x^\beta = \beta \log \beta + A\beta + B, \\ \text{III. } & \int \frac{dx}{x(\log x)^2} x^\gamma = \gamma \log \gamma + A\gamma + B, \end{aligned}$$

woher wir durch Eliminieren von B diese zwei Gleichungen erhalten

$$\text{I} - \text{II} = \alpha \log \alpha - \beta \log \beta + A(\alpha - \beta) \quad \text{und} \quad \text{II} - \text{III} = \beta \log \beta - \gamma \log \gamma + A(\beta - \gamma),$$

$$\begin{aligned} & (\text{I} - \text{II})(\beta - \gamma) - (\text{II} - \text{III})(\alpha - \beta) \\ & = (\beta - \gamma)\alpha \log \alpha - (\beta - \gamma)\beta \log \beta - (\alpha - \beta)\beta \log \beta + (\alpha - \beta)\gamma \log \gamma, \end{aligned}$$

welche auf diese zurückgeführt wird

$$\text{I}(\beta - \gamma) + \text{II}(\gamma - \alpha) + \text{III}(\alpha - \beta) = (\beta - \gamma)\alpha \log \alpha + (\gamma - \alpha)\beta \log \beta + (\alpha - \beta)\gamma \log \gamma.$$

§25 Daher werden wir für zu dieser Art zu zählenden Formeln das folgende grundlegende Theorem formulieren können:

THEOREM 8

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} ((\beta - \gamma)x^\alpha + (\gamma - \alpha)x^\beta + (\alpha - \beta)x^\gamma)$$

von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt ist immer diesem Wert gleich

$$(\beta - \gamma)\alpha \log \alpha + (\gamma - \alpha)\beta \log \beta + (\alpha - \beta)\gamma \log \gamma.$$

§26 Über diese Form wird es besonders förderlich sein bemerkt zu haben, dass die Formel

$$(\beta - \gamma)x^\alpha + (\gamma - \alpha)x^\beta + (\alpha - \beta)x^\gamma$$

nicht nur immer durch $x - 1$, sondern sogar durch $(x - 1)^2$ teilbar ist; ersteres ist daher klar, dass für $x = 1$ gesetzt $\beta - \gamma + \gamma - \alpha + \alpha - \beta = 0$ ist, letzteres aber daher, dass auch ihr Differential $\alpha(\beta - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) + \gamma(\alpha - \beta)$ für $x = 1$ gesetzt $= 0$ wird, was die Natur der Sache erfordert, weil im Nenner $(\log x)^2$ für $x = 1$ ein Quadrat einer verschwindenden Größe enthalten ist.

§27 Damit das Ausmaß dieser allgemeinen Integration deutlicher erkannt wird, wird es der Mühe Wert sein, den Fall entwickelt zu haben, in welchem $\alpha = n + 2$, $\beta = n + 1$ und $\gamma = n$ ist, weil man ja diese Integration erhalten wird

$$\int \frac{x^{n-1} dx (x-1)^2}{(\log x)^2} = (n+2) \log(n+2) - 2(n+1) \log(n+1) + n \log n = \log \frac{(n+2)^{n+2} n^n}{(n+1)^{2(n+1)}}.$$

Wir wollen auf dieselbe Weise die Integralformel dritten Grades behandeln, in welcher $(\log x)^3$ auftritt, indem wir dem Exponenten u die vier Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zuteilen, woher die folgenden Gleichung entspringen

$$\begin{aligned} \text{I. } & \int \frac{dx}{x(\log x)^3} x^\alpha = \frac{1}{2} \alpha \log \alpha + A \alpha \alpha + B \alpha + C, \\ \text{II. } & \int \frac{dx}{x(\log x)^3} x^\beta = \frac{1}{2} \beta \log \beta + A \beta \beta + B \beta + C, \\ \text{III. } & \int \frac{dx}{x(\log x)^3} x^\gamma = \frac{1}{2} \gamma \log \gamma + A \gamma \gamma + B \gamma + C, \\ \text{IV. } & \int \frac{dx}{x(\log x)^3} x^\delta = \frac{1}{2} \delta \log \delta + A \delta \delta + B \delta + C. \end{aligned}$$

Und daher wird zuerst

$$\text{I} - \text{II} = \frac{1}{2} \alpha \log \alpha - \frac{1}{2} \beta \log \beta + A(\alpha \alpha - \beta \beta) + B(\alpha - \beta)$$

sein, woher

$$\frac{\text{I} - \text{II}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha \log \alpha - \beta \log \beta}{2(\alpha - \beta)} + A(\alpha + \beta) + B$$

wird. Und auf dieselbe Weise wird

$$\frac{\text{II} - \text{III}}{\beta - \gamma} = \frac{\beta\beta \log \beta - \gamma\gamma \log \gamma}{2(\beta - \gamma)} + A(\beta + \alpha) + B$$

sein, die Differenz welcher Formeln

$$\frac{\text{I} - \text{II}}{\alpha - \beta} - \frac{\text{II} - \text{III}}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha\alpha \log \alpha - \beta\beta \log \beta}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\beta\beta \log \beta - \gamma\gamma \log \gamma}{2(\beta - \gamma)} + A(\alpha - \gamma),$$

nach Teilen von welcher durch $\alpha - \gamma$

$$\frac{\text{I} - \text{II}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} - \frac{\text{II} - \text{III}}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} = \frac{\alpha\alpha \log \alpha - \beta\beta \log \beta}{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} - \frac{\beta\beta \log \beta - \gamma\gamma \log \gamma}{2(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} + A$$

hervorgeht; und auf dieselbe Weise wird

$$\frac{\text{II} - \text{III}}{(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} - \frac{\text{III} - \text{IV}}{(\gamma - \delta)(\beta - \delta)} = \frac{\beta\beta \log \beta - \gamma\gamma \log \gamma}{2(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} - \frac{\gamma\gamma \log \gamma - \delta\delta \log \delta}{2(\gamma - \delta)(\beta - \delta)} + A$$

sein, welche letzte von der oberen abgezogen

$$\begin{aligned} & \frac{\text{I} - \text{II}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} - \frac{\text{II} - \text{III}}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} - \frac{\text{II} - \text{III}}{(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} + \frac{\text{III} - \text{IV}}{(\gamma - \delta)(\beta - \delta)} \\ &= \frac{\alpha\alpha \log \alpha - \beta\beta \log \beta}{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} - \frac{\beta\beta \log \beta - \gamma\gamma \log \gamma}{2(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} - \frac{\beta\beta \log \beta - \gamma\gamma \log \gamma}{2(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} + \frac{\gamma\gamma \log \gamma - \delta\delta \log \delta}{2(\gamma - \delta)(\beta - \delta)} \end{aligned}$$

zurücklässt; und so sind nun alle drei Konstanten A , B , C hinausgestoßen worden.

§29 Wenn also nun die einzelnen Terme dieser Gleichung entwickelt werden und so gemäß der Zahlen I, II, III, IV wie der Formeln $\alpha\alpha \log \alpha$, $\beta\beta \log \beta$, $\gamma\gamma \log \gamma$, $\delta\delta \log \delta$ angeordnet werden, wird man die folgende Gleichung erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{\text{I}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\text{II}(\alpha - \delta)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} + \frac{\text{III}(\alpha - \delta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)} + \frac{\text{IV}(\alpha - \delta)}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)} \\ &= \frac{\alpha\alpha \log \alpha}{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\alpha - \delta)\beta\beta \log \beta}{2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} + \frac{(\alpha - \delta)\gamma\gamma \log \gamma}{2(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)} + \frac{(\alpha - \delta)\delta\delta \log \delta}{2(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)} \end{aligned}$$

werden, welche Gleichung durch $\alpha - \delta$ geteilt eine wunderschöne Gleichförmigkeit aufweist; auf diese Weise haben wir das folgende an diesen Fall angepasste Theorem erhalten:

THEOREM 9

Diese Integralformel

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} + \frac{x^\beta}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} \\ + \frac{x^\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)} + \frac{x^\delta}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)} \end{array} \right\}$$

wird von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt der folgenden Formel gleich

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha \log \alpha}{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} + \frac{\beta \log \beta}{2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)} \\ & + \frac{\gamma \log \gamma}{2(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)} + \frac{\delta \log \delta}{2(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}. \end{aligned}$$

Aus dieser Form erkennt man, wie sich leicht zu höher zusammengesetzten Fällen fortschreiten lässt.

§30 Es wird förderlich sein, auch die vorhergehenden Fälle auf diese Weise darzustellen. So werden wir für den Teiler $\log x$ die folgende Integralform haben

$$\int \frac{dx}{x \log x} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha - \beta} + \frac{x^\beta}{\beta - \alpha} \right) = \frac{\log \alpha}{\alpha - \beta} + \frac{\log \beta}{\beta - \alpha}.$$

Weiter stelle man das in § 24 erwähnte Problem so dar

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x(\log x)^2} \left(\frac{x^\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{x^\beta}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{x^\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \right) \\ & = \frac{\alpha \log \alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta \log \beta}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma \log \gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \end{aligned}$$

und jene folgt jener Form, welcher wir im letzten Theorem angegeben haben.

§31 Nun werden wir also diese Aufgabe im Allgemeinen für irgendeine Potenz von $\log x$ erledigen können, welche im Nenner der Integralformel auftritt, deren Exponent $= n - 1$ sei, dass die Anzahl der Glieder $= n$ wird; aber dann nehme man nach Belieben die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. an, deren Anzahl $= n$ sei, und man suche daraus die folgenden Werte

$$\mathfrak{A} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon) \text{ etc.},$$

$$\mathfrak{B} = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon) \text{ etc.},$$

$$\mathfrak{C} = (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon) \text{ etc.},$$

$$\mathfrak{D} = (\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)(\delta - \varepsilon) \text{ etc.}$$

etc.,

dann setze man aber auch der Kürze wegen dieses Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n - 2) = N,$$

und man wird die folgende sehr allgemeine Integralformel erhalten

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^{n-1}} \left(\frac{x^\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{x^\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{x^\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{x^\delta}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} \right) = \frac{\alpha^{n-2} \log \alpha}{N\mathfrak{A}} + \frac{\beta^{n-2} \log \beta}{N\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^{n-2} \log \gamma}{N\mathfrak{C}} + \frac{\delta^{n-2} \log \delta}{N\mathfrak{D}} + \text{etc.},$$

wo zu bemerken ist, dass im Fall $n = 2$ auch $N = 1$ sein wird.

§32 Um diese Ausführungen weiter zu illustrieren, wird es förderlich sein sich dessen zu erinnern, dass ich schon vor einiger Zeit ein außerordentliches arithmetisches Theorem über Brüche von dieser Art $\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \text{etc.}$ bewiesen habe, deren Anzahl wie zuvor $= n$ sei, wo ich gezeigt habe, dass alle folgenden Formeln zu Null werden:

$$\text{I. } \frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0,$$

$$\text{II. } \frac{\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0,$$

$$\text{III. } \frac{\alpha\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta\delta}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0,$$

$$\text{IV. } \frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^3}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^3}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^3}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0,$$

etc.,

bis man schließlich zur Potenz des Exponenten $n - 2$ gelangt; aber, wenn der Exponent $= n - 1$ genommen worden ist, haben wir bewiesen, dass immer

$$\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^{n-1}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 1$$

sein wird.