

BEMERKUNGEN ZUR VORAUSSAGEHENDEN DISSERTATION DES ILLUSTREN BERNOULLI*

Leonhard Euler

§1 Eine Frage von nicht geringer Bedeutung behandelt hier der illustre BERNOULLI, wie eine unbekannte Größe aus vielen sich ein wenig voneinander unterscheidenden Messungen erschlossen werden muss. Damit die Natur dieser Frage besser erkannt wird, wollen wir festlegen, dass die Erhöhung eines bestimmten Punktes gefunden werden muss, aber mehrere zu diesem Zweck gemachte Messungen solche von einander abweichenden Werte an die Hand geben

$$\Pi + a, \quad \Pi + b, \quad \Pi + c, \quad \Pi + d \quad \text{etc.},$$

wo die Buchstaben a, b, c, d etc. eines Beispiels wegen eines in Minutensekunden ausgedrückt gegeben sind, aus welchen die wahre Erhebung dieses Punktes, welche $\Pi + x$ sei, zu erschließen ist. Für gewöhnlich pflegt diese Größe x freilich über das arithmetische Mittel aller Größen a, b, c, d etc. angegeben zu werden; daher, wenn die Anzahl der Messungen = n war, wird

$$x = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n}$$

sein.

*Originaltitel: "Observationes in praecedentem dissertationem illustris Bernoulli", zuerst publiziert in: *Novi Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 1777: I (1778, geschrieben 1776): pp. 24 – 33, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 7, pp. 280 – 290, Eneström Nummer E488, übersetzt von: Alexander Aycocock für den "Euler-Kreis Mainz".

§2 Bei dieser Regel wird natürlich angenommen, dass alle Messungen mit dem gleichen Gütegrad aufweisen. Wenn nämlich die einen exakter wären als die anderen, müsste die Art dieses Unterschieds natürlich ins Kalkül gezogen werden. Obwohl aber aus diesen Umständen heraus kein Grund besteht, warum einer dieser Messungen ein höherer Wert beizumessen ist als den übrigen, hat der hoch geehrte Autor dennoch angemerkt, dass diesen Messungen ein umso höherer Gütegrad zuzuschreiben ist, je näher sie an die Wahrheit herankommen, so wie auch für gewöhnlich Messungen von solcher Art, die allzu sehr von der Wahrheit abzuweichen eingeschätzt werden, völlig verworfen zu werden pflegen. Also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass aufgezeigt wird, wie der den einzelnen Messungen zukommende Gütegrad einzuschätzen ist.

§3 Aber nach Auffassung des illustren Autors ist es ratsam, die Abweichung einer jeden Messung von der Wahrheit einzuschätzen, als wäre sie gleichsam bekannt; weil diese für die erste Messung $x - a$ ist, für die zweite $x - b$, für die dritte $x - c$ etc., muss der Mangel einer jeden Messung nicht so aus diesen Differenzen wie deren Quadraten eingeschätzt werden, weil ja dieser Defekt als derselbe festzulegen ist, ob die Messung nun nach oben oder unten abgewichen ist. Wenn daher also eine gewisse Messung völlig mit der Wahrheit übereinstimmt, wird ihr Defekt nicht vorhanden sein; daher, wenn der Gütegrad dieser Messung mit

$$rr$$

angezeigt wird, ist es ersichtlich, dass der Gütegrad der ersten Messung mit

$$rr - (x - a)^2$$

angezeigt werden muss, der zweiten mit

$$rr - (x - b)^2,$$

der dritten mit

$$rr - (x - c)^2$$

und so weiter, wo dem Buchstaben r ein solcher Wert zugeteilt werden muss, dass für die Messung, die nicht zu verwerfen scheint, der Gütegrad verschwin-

det. Daher, wenn wir annehmen, dass dies bei der Messung gelingt, welche $\Pi + u$ gegeben hat, weil ja ihr Gütegrad

$$rr - (x - u)^2$$

wäre, wird überall

$$rr = (x - u)^2$$

gesetzt werden müssen.

§4 Nachdem diese Dinge bezüglich des Gütegrads einer jeden Messung festgelegt worden sind, nimmt der illustre Autor das folgende Prinzip zur Hilfe, für welches er freilich keinen Grund anführt, dass das Produkt all dieser Formeln, mit denen der Gütegrad der einzelnen Messungen ausgedrückt wird, einen *maximalen* Wert erhalten muss. Aus diesem Prinzip heraus erklärt er also, dieses Produkt zu differenzieren und sein Differential gleich Null zu setzen, weil dann aus dieser Gleichung der wahre Wert x hervorgehen wird: Dies illustriert er an einigen auf drei Messungen angewandten Beispielen, woher er Werte von solcher Art für x ableitet, die überaus wahrheitskonform zu sein scheinen.

§5 Aber dieses Prinzip führt für nur drei Messungen zu einer Gleichung fünfter Ordnung, deren Wurzel x er angeben musste; und wenn jemand dasselbe Prinzip auf vier Messungen anwenden wollte, gelänge er zu einer Gleichung siebten Grades; aber fünf Messungen würden zu einer Gleichung neunten Grades führen und so weiter. Daher ist natürlich klar, dass diese Methode in keiner Weise für Fälle, wo viele Messungen vorgelegt werden, mit Nutzen verwendet werden kann, was auch der illustre Autor freimütig eingeräumt hat, während er die ganze Abhandlung als eine lediglich metaphysische Betrachtung veröffentlicht hat.

§6 Aber weil der illustre Autor dieses Prinzip des *Maximums* mit keinem Beweis untermauert hat, trägt er es mit Fassung, wenn ich gewisse Zweifel gegen selbiges vorbringe. Denn wir wollen annehmen, dass unter allen vorgelegten Messungen eine gefunden wird, die er gerade nicht hätte verwerfen müssen, deren Gütegrad also möglichst klein ist, es ist dann ersichtlich, dass das Produkt aller erwähnten Formeln auch zu Null wird, sodass nichts

weiter für ein Maximum gehalten werden kann, wie groß auch immer es nach Weglassen dieser Messungen gewesen wäre. Aber die Prinzipien der *Ars Coniectandi* zeigen natürlich klar auf, dass derselbe Wert der unbekannt GröÙe x hervorgehen muss, ob eine solche Messung mit höchstem Gütegrad in die Rechnung eingeführt wird oder völlig verworfen wird.

§7 Ich aber glaube, dass es bei dieser Frage nicht nötig ist auf das Prinzip der Maxima auszuweichen, weil die sehr fundierten Lehren der *Ars Conjectandi* vollkommen ausreichen, um alle Fragen von dieser Art aufzulösen. Wenn wir nämlich der ersten Messung, die $\Pi + a$ gegeben hatte, den Wert oder den Gütegrad $= \alpha$ zuteilen, der zweiten einen $= \beta$, der dritten einen $= \gamma$, wird aus den Regeln dieser Kunst das unbekannte x so bestimmt, dass

$$x = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \text{etc.}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}}$$

ist. Daher wird also

$$\alpha(x - a) + \beta(x - b) + \gamma(x - c) + \delta(x - d) + \text{etc.} = 0.$$

Es ist aber offenkundig, wenn alle Gütegrade einander gleich waren und die Anzahl der Messungen $= n$ war, dass man dann

$$x = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n}$$

findet, wie es die gewöhnliche Regel darbietet. Daraus sieht man ein, so sehr sich die Gütegrade voneinander unterscheiden, dass dementsprechend verschiedene Werte für die unbekannt GröÙe x hervorgehen können.

§8 Weil also, wie es der illustre Autor selbst bestätigt, die mit den Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. angezeigten Gütegrade sind:

$$\alpha = rr - (x - a)^2,$$

$$\beta = rr - (x - b)^2,$$

$$\gamma = rr - (x - c)^2,$$

$$\delta = rr - (x - d)^2,$$

etc.,

wird die letzte Form der gefundenen Gleichung sein:

$$rr(x - a) + rr(x - b) + rr(x - c) + \text{etc.}$$

$$-(x - a)^3 - (x - b)^3 - (x - c)^3 - \text{etc.} = 0.$$

Daher, wenn die Anzahl der Messungen = n ist und der Kürze wegen

$$a + b + c + d + \text{etc.} = A,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} = B,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} = C$$

gesetzt wird, wird diese Gleichung auf die folgende hinreichend einfache Gleichung reduziert werden

$$nrrx - Arr - nx^3 + 3Axx - 3Bx + C = 0$$

und so gelangen wir zu einer kubischen Gleichung, aus welcher sich die unbekannte Größe x leicht bestimmen lassen wird, wie groß auch immer die Anzahl n an Messungen war.

§9 Wenn wir also die Größe r als unendlich betrachten, welches der Fall ist, in dem allen Messungen derselbe Gütegrad zugeteilt zu werden pflegt, leitet man nach Verwerfen der übrigen Terme aus dieser Gleichung sofort

$$x = \frac{A}{n} = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n}$$

ab, genauso wie die für gewöhnlich verwendete Regel angewendet zu werden verlangt. Wenn wir also diesen Wert mit dem Buchstaben p bezeichnen und in den einzelnen Messungen $\Pi + p$ anstelle von Π schreiben, werden die einzelnen Zahlen a, b, c, d etc. um dieselbe Größe p vermindert werden müssen und so wird die Summe aller, die wir A gesetzt haben, nun $A = 0$ sein. Damit wir hier aber keine neuen Buchstaben in die Rechnung einführen, werden wir die Größe Π sofort so festlegen können, dass, wenn die Werte der einzelnen Messungen als

$$\Pi + a, \quad \Pi + b, \quad \Pi + c, \quad \Pi + d \quad \text{etc.}$$

festgelegt werden, die Summe aller Buchstaben $a + b + c + d + \text{etc.}$ dann $= 0$ sein wird; dann wird man also für die zu findende Größe x diese um vieles einfachere Gleichung haben

$$nx^3 - nrrx + 3Bx - C = 0,$$

woher, wenn r unendlich wäre, $x = 0$ folgen würde; und daher ist es ersichtlich, wenn diese Gleichung mehrere reelle Wurzeln hat, dass die kleinste für x genommen werden muss, sodass der wahre gesuchte Wert

$$= \Pi + x$$

ist.

§10 Aber dieselbe Frage wird sich sogar auf eine quadratische Gleichung zurückführen lassen, indem man eine Messung von solcher Art einführt, die, nachdem alle Umstände abgewogen worden sind, verworfen werden zu müssen schiene, deshalb weil sie keinen Gütegrad haben würde. Es sei also eine solche Messung $\Pi + u$; und weil per Annahme ihr Gütegrad, welcher $rr - (x - u)^2$ ist, gleich Null sein muss, wird

$$rr = (x - u)^2$$

werden. Aber dieser Wert wird in die zuletzt gefundene Gleichung eingeführt diese Form

$$2nuxx - nuux + 3Bx - C = 0$$

ergeben. Es wird gefällig sein, dass in dieser Gleichung der Term $nuux$ wie als der größte angesehen wird, sodass die Gleichung in dieser Form dargestellt werden kann

$$x(nuu - 3B - 2nux) = -C,$$

woher

$$x = \frac{-C}{nuu - 3B - 2nux}$$

folgt; wenn hier anstelle von x der gerade gefundene Wert eingesetzt wird, werden wir für x diesen Kettenbruch finden

$$x = \frac{-C}{nuu - 3B + \frac{2nuC}{nuu - 3B + \frac{2nuC}{nuu - 3B + \frac{2nuC}{nuu - 3B + \frac{2nuC}{etc.}}}}$$

welche Form bald den wahren Wert von x aufzeigen wird.

§11 Weil ja der illustre Autor seine Lösung auf einem Prinzip von solcher Art aufgebaut, dass der Wert mit einer Eigenschaft eines Maximums versehen ist, wird es nun nicht schwierig sein, eine Formel solcher Art analytisch darzubieten, welche dem Maximum gleich gesetzt den wahren Werte von x zeigen würde. Wir wollen für dieses Ziel die zuerst gefundene Form

$$rr(x - a) + rr(x - b) + rr(x - c) + etc.
-(x - a)^3 - (x - b)^3 - (x - c)^3 - etc. = 0$$

gebrauchen, welche als Differential einer bestimmten Formel betrachtet werde, die maximiert werden muss; also wird diese Formel selbst hervorgehen, wenn dieser Ausdruck mit dx multipliziert integriert wird. Wir wollen aber mit $4dx$ multiplizieren und die Integration wird

$$2rr(x - a)^2 + 2rr(x - b)^2 + 2rr(x - c)^2 + etc.
-(x - a)^4 - (x - b)^4 - (x - c)^4 - etc. + C$$

geben. Aber diese Form, wenn wir für die Konstante $-nr^4$ nehmen, während n die Anzahl der Messungen ist, entsteht nach Ändern der Vorzeichen daraus diese Formel

$$(rr - (x - a)^2)^2 + (rr - (x - b)^2)^2 + (rr - (x - c)^2)^2 + etc.$$

§12 Anstelle der Formel, welche der illustre BERNOULLI einem Maximum gleich werden zu müssen ansah, haben wir nun also eine andere an die Natur der Frage stark angepasste Formel erhalten, welche auf das Maximum reduziert den wahren Wert von x liefert, weil diese Formel ja erhalten wird, wenn die Quadrate aller Gütegrade zu einer Summe zusammengefasst werden.

§13 Um ein Beispiel für unsere Methode zu geben, wollen wir die Messungen betrachten, mit den in Tomo I priorum Academiae Commentariorum der Längengrad des Petersburg'schen Observatoriums aus der Differenz der Meridiane zwischen dem Petersburg'schen und dem Paris'schen Observatorium erschlossen worden ist, welche so dargestellt werden

$$\begin{aligned} & \text{I. } 1^{\circ}51'50'', \quad \text{II. } 1^{\circ}51'52'' \quad \text{III. } 1^{\circ}51'39'', \\ & \text{IV. } 1^{\circ}51'50'', \quad \text{V. } 1^{\circ}51'50'' \quad \text{VI. } 1^{\circ}51'50''. \end{aligned}$$

Aus diesen gibt das in gewohnter Weise genommene arithmetische Mittel

$$1^{\circ}51'48\frac{1}{2}''.$$

§14 Um nun unsere Formeln auf diesen Fall anzuwenden, wollen wir

$$\Pi = 1^{\circ}51'48\frac{1}{2}''$$

nehmen und die sechs Werte unserer Buchstaben a, b, c, d, e, f werden die folgenden sein

$$a = 1\frac{1}{2}, \quad b = 3\frac{1}{2}, \quad c = -9\frac{1}{2}, \quad d = 1\frac{1}{2}, \quad e = 1\frac{1}{2}, \quad f = 1\frac{1}{2},$$

woher deren Summe natürlich $A = 0$ ist; aber dann findet man die Summe der Quadrate als $B = \frac{223}{2}$, die Summe der Kuben hingegen als $C = -801$. Daher wird unsere Gleichung wegen $n = 6$

$$12uxx - 6uux + 334\frac{1}{2}x + 801 = 0.$$

§15 Nun wollen wir die Zahl u aus einem Fall solcher Art bestimmen, welchen der Autor der Messungen als zu verwerfenden angesehen hat; ein solcher war $1^{\circ}52'20''$, woher $u = 31\frac{1}{2}$ wird. Wir wollen aber festlegen, dass $u = 30$ ist und unsere quadratische Gleichung wird

$$360xx - 5065\frac{1}{2}x + 801 = 0$$

sein, an deren Stelle sich in glatteren Zahlen

$$36xx = 500x - 80$$

schreiben lässt, woher

$$x = \frac{250 \pm \sqrt{59620}}{36}$$

wird, und daher berechnet man entweder

$$x = \frac{250 + 244}{36} = 14$$

oder

$$x = \frac{250 - 244}{36} = \frac{1}{6}'$$

welcher letzte Wert allein Geltung haben kann, welcher sich auch sofort hätte berechnen lassen, nachdem in der Gleichung der erste Term weggelassen worden ist, woher der Wert $x = \frac{8}{50}$, also näherungsweise $= \frac{1}{6}$, wäre, und so wird daher die gesuchte Differenz der Meridiane

$$= 1^{\circ}51'48\frac{2''}{3}$$

sein.

§16 Danach war auch die Messung verworfen worden, die $1^{\circ}51'0''$ gegeben hatte, woher $u = -48\frac{1}{2}$ wird. Man nehme aber $u = -48$ und unsere Gleichung wird

$$-576xx - 13489\frac{1}{2}x + 801 = 0$$

sein, woher nach Verwerfen des ersten Terms $x = \frac{8}{135}$, also näherungsweise $= \frac{1}{17}$, wird. Weil ja aber diese Messung es verdient hätte verworfen zu werden, wenn ungefähr $u = -300$ wäre, wäre daraus, nachdem die Rechnung wie zuvor durchgeführt worden ist, ungefähr $x = \frac{1}{6}$ hervorgegangen; daher ist klar, dass wir in diesem Fall mit der allgemeinen Regel zufrieden sein konnten, weil nicht einmal eine Minutensekunde an Unterschied festgestellt werden kann.

§17 Weil ja aber unter diesen Messungen die dritte dermaßen von den übrigen abweicht, wird es vielleicht zuträglich sein, nicht weit entfernt von ihr die Grenze festzulegen. Wenn wir also für den Fall $1^{\circ}51'33\frac{1}{2}''$ hier $u = -15$ festlegen, würde unsere Gleichung daraus

$$-180xx - 1000x + 800 = 0$$

werden, deren kleinere Wurzel $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ sein wird, sodass daraus die Differenz der Meridiane als

$$1^{\circ}51'49\frac{1}{6}''$$

hervorgehen wird. Aus diesem Fall ist erneut klar, dass kein merklicher Fehler zu messen ist, wenn wir nicht sehr gewaltig in der Annahme der Zahl u irren, bei welcher Aufgabe es genügen wird, dass nuu immer viel größer sein muss als $3B$.

§18 Diese Methode verdient es besonders auf jene Messungen angewandt zu werden, aus denen vor nicht allzu langer Zeit der hoch geehrte LEXELL die Parallaxe der Sonne bestimmt hat, woraus wir anstelle eines Beispiels nur die folgenden vier aus den Messungen abgeleiteten Schlussfolgerungen entnehmen wollen, welche waren

I.	II.	III.	IV.
8,52	8,43	8,86	8,28,

durch Nehmen des Mittelwertes von welchen 8,52 hervorgeht. Wenn wir also

$$\Pi = 8,52$$

setzen, können die Werte der vier Buchstaben a, b, c, d auf die folgende Weise festgelegt werden

$$a = 1, \quad b = 9, \quad c = -34, \quad d = +24,$$

dass deren Summe als $A = 0$ hervorgeht, natürlich bedeuten diese Zahlen die hundertsten Teile einer Minutensekunde. Daher wird die Summe der Quadrate also $B = 1814$ sein, die Summe der Kuben hingegen $C = -24750$; daher wird unsere Gleichung wegen $n = 4$

$$8uux - 4uux + 5542x + 24750 = 0$$

sein.

§19 Wenn wir nun für den Term, wo der Gütegrad verschwindet, $u = 40$ nehmen, wird unsere Gleichung

$$320xx - 958x + 24750 = 0$$

sein. Daher ginge aber ein imaginärer Wert von x hervor; deswegen wollen wir $u = 50$ nehmen und unsere Gleichung wird

$$400xx - 10000x + 5442x + 24750 = 0$$

werden, woher wir immer noch auf imaginäre Größen stoßen. Nachdem aber $u = 60$ genommen worden ist, wird der kleinere Wert von $x = 3\frac{5}{12}$ sein, welcher Wert aber allzu groß erscheinen könnte. Wird er aber zugelassen, wäre die Parallaxe der Sonne = 8,555. Außerdem bemerke man, dass aus größeren Werten von u kleinere für x abgeleitet werden. Und weil die Anwendung dieser Methode so vage ist, lässt sich mit Recht bezweifeln, ob wir auf diese Weise näher an die Wahrheit herankommen können. Und vielleicht wird es ausreichen, daraus zumindest zu entscheiden, ob der Wert von x positiv oder negativ hervorgehen wird.

§20 In diesen Fall haben wir freilich gesehen, dass der Wert von x gewiss positiv ist, weil wir für C eine negative Zahl gefunden haben; daher wird es förderlich sein, im Allgemeinen bemerkt zu haben, sooft die Zahl C positiv hervorging, dass dann x negativ wird, andernfalls aber, wenn C negativ war, dass der Wert von x positiv sein wird. In jedem der beiden Fälle wird er aber so klein festgelegt werden müssen, dass die Bestimmung von der gewöhnlichen Regel kaum abweicht. Zumindst wird dies hinzugefügt werden können, dass, je größer die Zahl C war, auch der Wert von x vergrößert werden muss. Wenn nämlich auch die Summe der Kuben verschwände, dann wäre immer $x = 0$, welcher Wert auch immer für u angenommen werden würde, genauso wie es die gewöhnliche Regel erfordert.

§21 Daher, ungeachtet der aus der Zahl u entspringenden Ungewissheit, scheint doch etwas, wenn nicht sicher, zumindest hinreichend wahrscheinlich richtig ausgesagt werden zu können, wenn wir auf die Bedeutungen achten. Zuerst ist es gewiss, sooft die Summe $C = 0$ war, dass dann auch immer $x = 0$ sein wird, zweitens, je größer die Größe C war, dass auch der Wert von x umso größer sein wird, mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet zumindest. Drittens ist hinreichend klar, dass die Größe nuu die Größe $3B$ um einiges übersteigen muss. Nachdem all dies gründlich betrachtet worden ist, scheint mit ziemlicher Sicherheit

$$x = -\frac{C}{\lambda n B}$$

gesetzt werden zu können, wo die Zahl λ unserem Belieben überlassen bleibt. Aber dennoch wird man für alle Fälle kaum von der Wahrheit abweichen, wenn $\lambda = 2$ oder höchstens $\lambda = 3$ gesetzt wird; denn der daraus zu resultierende Unterschied wird meistens von so kleiner Bedeutung sein, dass er kaum Aufmerksamkeit bedarf. Denn der Fall, in welchem der größte Fehler zu messen wäre, wäre ohne Zweifel der, wenn viele Messungen, deren Anzahl $= i$ sei, vollkommen gleich waren, während die einzelnen alle $= a$ sind, mit welchen eine einzige $-ia$ liefernde Messung zusammengebracht werden würde, dass die Summe aller $A = 0$ wird; aber dann wird die Summe der Quadrate

$$B = iaa + iiaa = i(i+1)aa$$

sein, die Summe der Kuben hingegen

$$ia^3 - i^3a^3 = -i(ii-1)a^3.$$

Also nun, wenn $n = i + 1$ ist, wird unsere Formel

$$x = +\frac{i(ii-1)a}{\lambda i(i+1)^2} = \frac{(i-1)a}{\lambda(i+1)}$$

sein; wenn also i eine riesige Zahl war und man $\lambda = 2$ nimmt, geht $a = \frac{1}{2}$ hervor. Nachdem also im ersten Beispiel [§ 14] $\lambda = 2$ genommen worden ist, wo $n = 6$, $B = 111\frac{1}{2}$ und $C = -801$ war, wird sehr genau

$$x = +\frac{801}{12 \cdot 111\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

werden. Für das andere Beispiel [§ 18], in dem $n = 4$, $B = 1814$ und $C = -24750$ ist, wird ungefähr

$$x = +\frac{24750}{8 \cdot 1814} = \frac{8}{5}'$$

welche Werte nichts Absurdes zu beinhalten scheinen.

Wenn aber jemand glaubt, dass mit größerem Recht $\lambda = 3$ genommen werden muss, wird es kaum der Mühe wert sein, über die Differenz zu streiten, weil die Natur der Messungen selbst keinen höheren Grad an Genauigkeit aufweist.