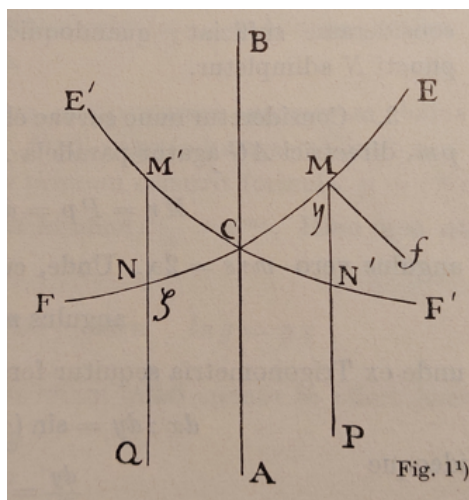


ÜBER RECHTWINKLIGE SOWIE SCHIEFWINKLIGE REZIPROKE TRAJEKTORIEN*

Leonhard Euler

§1 Dieses Problem über die reziproken Trajektorien, welches einst mit größtem Eifer von den Geometern behandelt worden war, bei welcher Gelegenheit die größten Zuwächse in die Analysis eingegangen sind, erfordert Kurven (Fig. 1) ECF von solcher Art, die um die Achse ACB herum zu beschreiben sind, dass, nachdem zu beiden Seiten hin gleiche Strecken MP und NQ , die zur Achse parallel sind, gezeichnet worden sind, die Summe der Winkel $\zeta + \eta$, welche die Kurve mit diesen beiden Geraden bildet, überall dieselbe ist.

*Originaltitel: "De traiectionis reciprocis tam rectangulis quam obliquangulis", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 1782: II (1786, geschrieben 1775): pp. 3 – 33, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 29, pp. 1 – 27, Eneström Nummer E604, übersetzt von: Alexander Aycok für den "Euler-Kreis Mainz".



Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omnia Version.

Denn auf diese Weise wird es geschehen, dass, wenn dieselbe Kurve an der Achse gespiegelt in die Lage $E'M'N'F'$ gebracht wird und entlang der Achse parallel zu ihr bewegt wird, und so der Punkt N' bis hin zum Punkt M bewegt wird, der Schnittwinkel $= \zeta + \eta$ wird. Weil ja aber außergewöhnliche Kunstgriffe, die einst bei dieser Gelegenheit erdacht worden sind, überall verstreut gefunden werden, glaube ich, dass es freilich keine verschwendete Mühe sein wird, wenn ich, eine einheitliche Methode gebrauchend, alles prägnant vorstelle: Besonders, weil es mir gelang, einige ganz neue Dinge hinzufügen.

LÖSUNG DIESER FRAGE IM ALLGEMEINEN AUFGEFASST

§2 Wenn wir also den vorgelegten Schnittwinkel $= 2\alpha$ setzen, dass $\zeta + \eta = 2\alpha$ ist, dann aber den Winkel $\zeta = \alpha - \omega$ setzen, wird der andere Winkel $\eta = \alpha + \omega$ werden. Daher ist klar, dass der Winkel ω so beschaffen sein muss, dass, nachdem die Entfernung von der Achse negativ gemacht worden ist, jener in sein Negatives, also in $-\omega$, übergeht. Um nun diese Bedingung für die Rechnung leichter zugänglich zu machen, zeichne man (Fig. 2) zur Achse hin die Directrix GAH , welche mit der Achse AB den Winkel $BAG = 2\alpha$ bilde;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha - \omega)}.$$

§4 Wir wollen nun, um Differentiale zu vermeiden, $dy = p dx$ setzen, sodass die Natur der Kurve mit einer Gleichung zwischen x und p bestimmt werden kann. Deswegen werden wir

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha - \omega)}$$

haben; daher ist klar, dass die Größe p so beschaffen sein muss, dass sie für negativ genommenen Winkel ω in

$$\frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha + \omega)}$$

übergeht, welcher Wert das Reziproke des ersten ist. Aber der Winkel ω wird hingegen negativ, wannimmer die Abszisse x negativ genommen wird; daher ist es klar, dass die Größe p eine solche Funktion von x sein muss, dass sie für $-x$ anstelle von x gesetzt in $\frac{1}{p}$ übergeht.

§5 Die ganze Lösung unseres Problem geht also darauf zurück, dass alle Funktionen von x im Allgemeinen ausfindig gemacht werden, welche, während $-x$ anstelle von x geschrieben wird, in ihre Reziproken übergehen. Und, was an dieser Stelle besonders zu bemerken ist, diese Eigenschaft wird auf gänzlich alle schiefen Winkel übertragen, welche Bedingung natürlich nur die Neigung der Ordinaten zu den Abszissen betrifft, sodass, welche zwischen x und y gefundene Gleichung auch immer dem Problem Genüge geleistet hat, dieselbe für alle Schnittwinkel gleichermaßen gilt; solange die Schiefe der Koordinaten dem Schnittwinkel gleich gesetzt wird. So, wenn nur das Problem für einen rechten Schnittwinkel gelöst worden ist, wird dieselbe Lösung sehr leicht auf alle schiefen Schnittwinkel übertragen werden können. Und weil es ja nur vonnöten ist, die Schiefe der Koordinaten zu verändern, wenn die gefundenen Kurven algebraisch waren, werden sich diese nach der Überführung auf dieselbe Ordnung erstrecken.

§6 Weil also das Finden der Reziproken die allgemeine Lösung dieser Frage in sich umfasst, lassen sich ohne Mühe unzählige Funktionen von dieser Art darbieten. Unter diesen tritt zuerst die Formel $p = e^{nx}$ auf: Denn nachdem

x negativ genommen worden ist, geht diese Formel in diese Formel über:
 $\frac{1}{p} = e^{-nx}$. Daher, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, wird

$$dy = e^{nx} dx \quad \text{und daher} \quad y = \frac{1}{n} e^{nx} \quad \text{oder} \quad \log ny = nx$$

werden, welches die Gleichung für die logarithmische Kurve ist. Weiter bietet sich auch diese Formel direkt von selbst an:

$$p = \frac{a-x}{a+x},$$

welche, nach Ändern des Vorzeichens von x , in

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{p}$$

übergeht. Daher wird aber

$$y = \int \frac{a-x}{a+x} dx = -x + 2a \log(a+x)$$

oder

$$y+x = 2a \log \frac{a+x}{a}$$

werden, welche Kurve auch mit der logarithmischen Kurve leicht konstruiert werden kann. Außerdem ist auch klar, dass

$$p = \frac{aa - bx + xx}{aa + bx + xx}$$

genommen werden kann; nachdem x nämlich negativ genommen worden ist, geht

$$\frac{1}{p} = \frac{aa + bx + xx}{aa - bx + xx}$$

hervor. Und auf diese Weise lassen sich unzählige andere ähnliche Formeln erdenken, die der vorgeschriebenen Bedingung Genüge leisten.

§7 Um aber die Angelegenheit allgemeiner zu erledigen, bezeichnen die Buchstaben P , R und T irgendwelche geraden Funktionen von x , welche natürlich dieselben bleiben, auch wenn $-x$ anstelle von x geschrieben wird. Aber Q , S und V bezeichnen hingegen ungerade Funktionen von x , welche natürlich in ihr Negatives übergehen, wenn $-x$ für x geschrieben wird; und es ist offenkundig, dass dieser Bedingung genügt wird, wenn $p = \frac{P-Q}{P+Q}$ gesetzt wird, und daher allgemeiner

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m}.$$

Ja solche Formeln können sogar verbunden werden, dass

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m} \cdot \frac{(R-S)^n}{(R+S)^n} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k}$$

ist. Es ist nämlich klar, dass auf diese Weise, wenn $-x$ anstelle von x gesetzt wird, der Buchstabe p in $\frac{1}{p}$ übergehen wird. Weil diese Lösung sehr allgemein ist, erfordert es keine Mühe, wenn wir mit transzendenten Kurven zufrieden sein können.

ÜBER DER FRAGE GENÜGE LEISTENDE ALGEBRAISCHE KURVEN

§8 Aber wenn algebraische Linien verlangt werden, ist es nicht so leicht klar, Funktionen von welcher Art anstelle von P , Q , R , S etc. angenommen werden müssen, dass die Formel $\int p dx = y$ integrierbar wird. Ein einzigartiger Fall zeigt sich direkt, indem man

$$p = (x + \sqrt{1+xx})^n$$

nimmt, welche Funktion auch reziprok ist: Nachdem nämlich $-x$ anstelle von x geschrieben worden ist, geht sie in

$$\frac{1}{p} = (-x + \sqrt{1+xx})^n = \frac{1}{(x + \sqrt{1+xx})^n}$$

über. Aber es ist bekannt, dass die daraus entspringende Formel

$$y = \int dx (x + \sqrt{1+xx})^n$$

immer integrierbar ist, allein die Fälle $n = +1$ und $n = -1$ ausgenommen. Wenn also

$$x + \sqrt{1 + xx} = v$$

gesetzt wird, wird

$$x = \frac{vv - 1}{2v} \quad \text{und} \quad dx = \frac{dv(vv + 1)}{2vv}$$

werden, woher, weil $y = \int v^n dx$ ist,

$$y = \frac{v^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{v^{n-1}}{2(n-1)}$$

sein wird; aus dieser Formel können unzählige algebraische Kurven gefunden werden, und sogar aus den einzelnen Ordnungen von Kurven, wenn nur die zweite und dritte Ordnung ausgenommen wird, während natürlich anstelle von n nacheinander nicht nur die ganzen Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 etc. geschrieben worden, sondern auch die gebrochenen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$. Ja die übrigen für n angenommenen Brüche werden für viele Ordnungen sogar noch neue Kurven an die Hand geben, wie schon an anderer Stelle gezeigt worden ist.

§9 Genauso ergiebig ist auch diese Formel:

$$p = \left(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}} \right)^n,$$

sodass daher auch

$$y = \int dx \left(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}} \right)^n,$$

es ist nämlich ersichtlich, dass für negativ genommenes x auch $x^{\frac{1}{3}}$ negativ wird, aber $x^{\frac{2}{3}}$ sein Vorzeichen beibehält. Um also diese Formel zu integrieren, wollen wir zuerst $x^{\frac{1}{3}} = z$ setzen, dass $x = z^3$ wird, und daher

$$y = \int 3zdz(z + \sqrt{1 + zz})^n.$$

Nun setze man wie zuvor $z + \sqrt{1 + zz} = v$, und es wird

$$z = \frac{vv - 1}{2v} \quad \text{und} \quad dz = \frac{dv(1 + vv)}{2vv}$$

sein. Daher, weil $y = 3 \int z dz \cdot v^n$ ist, wird

$$y = 3 \int \frac{dv(vv-1)^2}{4vv} \frac{(1+vv)}{2vv} v^n = \frac{3}{8} \int \frac{dv}{v^4} (vv-1)^2 (vv+1) v^n$$

sein, welche Gleichung entwickelt und integriert

$$y = \frac{3}{8} \left(\frac{v^{n+3}}{n+3} - \frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^{n-1}}{n-1} + \frac{v^{n-3}}{n-3} \right)$$

liefert, wo $v = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$ ist. Auf diese Weise ist klar, dass auch

$$p = \left(x^{\frac{1}{5}} + \sqrt{1+x^{\frac{2}{5}}} \right)^n$$

gesetzt werden kann, dann aber auch

$$p = \left(x^{\frac{1}{7}} + \sqrt{1+x^{\frac{2}{7}}} \right)^n ,$$

$$p = \left(x^{\frac{1}{9}} + \sqrt{1+x^{\frac{2}{9}}} \right)^n ,$$

nach Annehmen von welchen die Integration immer gelingen wird.

EINE ANDERE METHODE KURVEN AUSFINDIG ZU MACHEN, DIE DER FRAGE GENÜGE LEISTEN

§10 Wir wollen aber eine andere um vieles reichere Quelle eröffnen, um algebraische Kurven zu finden. Man führe natürlich die neue Variable z ein, von welcher x eine ungerade Funktion sei, sodass für negativ genommenes z auch x in $-x$ übergeht; aber dann sei P eine beliebige ungerade Funktion von z , aber Q eine beliebige ungerade Funktion derselben Variable; und es ist offensichtlich, dass auch diese Form

$$p = \frac{P-Q}{P+Q}$$

Genüge leistet. Hier wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass sich diese Form genauso so weit erstreckt wie irgendwelche Potenzen von ihr; weil ja alle entwickelt entweder gerade oder ungerade Funktionen enthalten, wo die

geraden einzelnen genommen und schließlich die ungeraden auf diese Form selbst zurückgeführt wird. Daher wird also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P - Q}{P + Q}$$

sein, woher man

$$dx = Mdz(P + Q) \quad \text{und} \quad dy = Mdz(P - Q)$$

setzen können wird, wo aber die Größe M so beschaffen sein muss, dass x einer ungeraden Funktion von z gleich hervorgehen muss. Damit dies leichter erreicht werden kann, wollen wir $M = R(P - Q)$ nehmen, während R eine gerade Funktion von z sein muss; so wird nämlich

$$dx = Rdz(P^2 - Q^2) \quad \text{und} \quad dy = Rdz(P^2 - 2PQ + Q^2)$$

werden, wo, weil $P^2 - Q^2$ eine gerade Funktion von z ist, der Wert für x von selbst eine ungerade Funktion werden wird. Man wird also erhalten:

$$x = \int P^2 R dz - \int Q^2 R dz$$

und

$$y = \int P^2 R dz - 2 \int P Q R dz + \int Q^2 R dz.$$

Sehr leicht werden sich aber nun für P , Q , R Funktionen von solcher Art angeben lassen, dass diese einzelnen Formeln integrierbar werden. Wenn beispielsweise an deren Stelle Potenzen von z angenommen werden, oder auch irgendwelche ganz rationalen Formeln.

ÜBER DIE ZWEITE KUBISCHE PARABEL ALS EINFACHSTE DEM PROBLEM GENÜGE LEISTENDE KURVE

§11 Der einfachste Fall wird daraus abgeleitet werden, wenn $P = a$ und $Q = -z$ genommen wird, woher

$$x = \int a^2 R dz - \int z^2 R dz$$

und

$$y = \int aaRdz + 2 \int azRdz + \int zzRdz$$

wird. Nun wollen wir weiter $R = \frac{1}{bb}$ nehmen, und durch Integrieren wird

$$bbx = aaz - \frac{1}{3}z^3 \quad \text{und} \quad bby = aaz + azz + \frac{1}{3}z^3$$

hervorgehen. Hier ist es nur vonnöten die Größe z zu eliminieren, dass man eine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y erhält, was mit den folgenden Operationen auf sehr angenehme Weise erledigt werden wird.

§12 Man addiere die zwei gefundenen Gleichungen, dass diese hervorgeht:

$$bb(x + y) = 2aaz + azz,$$

woher

$$zz + 2az = \frac{bb}{a}(x + y)$$

wird, und daher wir durch Addieren von aa auf beiden Seiten

$$(z + a)^2 + \frac{bb}{a}(x + y) = \frac{bbv}{a}$$

hervorgehen, sodass

$$v = x + y + \frac{a^3}{bb}$$

ist, und es wird

$$z = b\sqrt{\frac{v}{a}} - a$$

sein. Weil also

$$bbx = \frac{z}{3}(3aa - zz)$$

ist, oder

$$3bbx = z(3aa - zz) = -2a^3 - \frac{b^3v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} + 3bbv,$$

wird

$$b^3 \frac{v}{a} \sqrt{\frac{v}{a}} = -2a^3 + 3bb(v - x) = a^3 + 3bby$$

sein.

§13 Man setze der Kürze wegen $\frac{a^3}{bb} = 3c$ oder $a^3 = 3bbc$, und unsere Gleichung wird in diese übergehen:

$$b \frac{v}{a} \sqrt{\frac{v}{a}} = 3(c + y),$$

und weil $bb = \frac{a^3}{3c}$ ist, wird $b = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3c}}$ sein; nach Einsetzen dieses Wertes wird unsere Gleichung

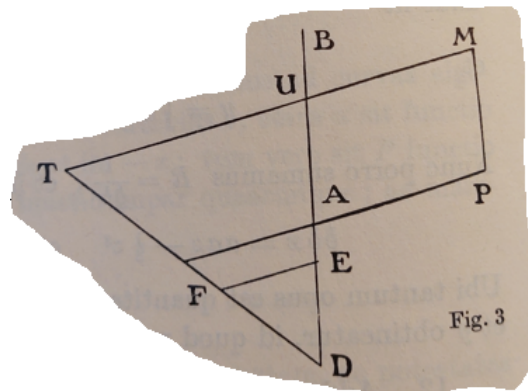
$$v \sqrt{\frac{v}{3c}} = 3(c + y)$$

sein. Daher ist klar, dass diese Kurve in gewisser Weise zur zweiten kubische Parabel gezählt werden kann.

§14 Um dies deutlicher zu zeigen, sei (Fig. 3) AB unsere Achse und M irgendein Punkt auf der Kurve, von welchem aus man zur Achse AB die Gerade MU zeichne, sodass der Winkel $MUB = 2\alpha$ ist, und es wird

$$AU = PM = y \quad \text{und} \quad UM = AP = x$$

sein.



Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omnia Version.

Weil nun $v = x + y + 3c$ ist, verlängere man die Gerade BAD so, dass

$$AD = 3c \quad \text{und daher} \quad DU = y + 3c$$

ist. Nun ziehe man von D aus die Gerade DT , sodass, nach Verlängern von MU zu T ,

$$UT = UD \quad \text{und daher} \quad TM = x + y + 3c = v$$

wird. Weil also das Dreieck DUT gleichschenkelig ist, werden die gleichen Winkel UTD und $UDT = 90^\circ$ sein. Daher wird also

$$DU : DT = \cos \alpha : \sin 2\alpha = 1 : 2 \sin \alpha$$

sein, woher, weil $AU = y$ ist, man $AE = \frac{1}{3}AD$ nehme, und es wird

$$DE = EF = 2c \quad \text{und} \quad EU = y + c$$

sein. Nun ziehe man von E aus die Parallele EF zu UT , und es wird

$$EU : FT = 1 : 2 \sin \alpha$$

sein, woher, wenn wir die Strecke $FT = t$ nennen, $y + c : t = 1 : 2 \sin \alpha$ sein wird, woher man

$$y + c = \frac{t}{2 \sin \alpha}$$

berechnet.

§15 Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, wollen wir den Punkt M der Kurve auf diese zwei Koordinaten beziehen $FT = t$ und $TM = v$, und unsere Gleichung wird

$$\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{3c}} = \frac{3t}{2 \sin \alpha}$$

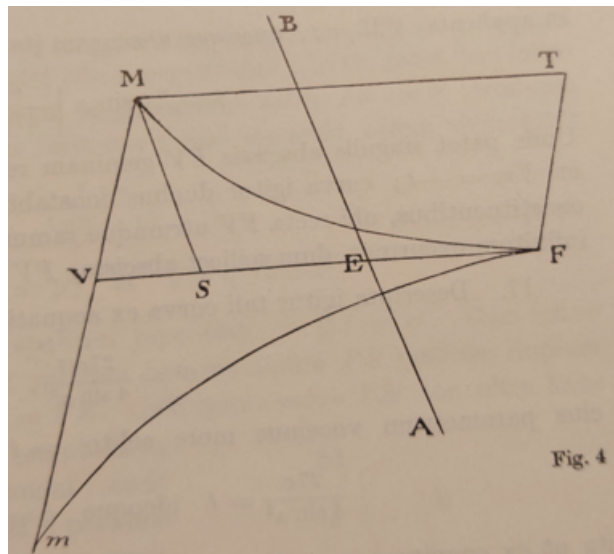
sein oder die Gleichung zwischen t und v wird nun

$$\frac{v^3}{3c} = \frac{9tt}{4 \sin^2 \alpha} \quad \text{oder} \quad v^3 = \frac{27ctt}{4 \sin^2 \alpha}$$

sein. Daher ist es klar, dass diese Kurve mit Recht als kubische Parabel bezeichnet wird, wenn nur die Ordinaten MT zu den Abszissen FT im Winkel

$FTM = 90^\circ - \alpha$ geneigt sind, welchem auch der Winkel DFE gleich ist. Und aus dieser Gleichung heraus wird es leicht sein, die gesuchte Kurve zu beschreiben.

§16 Wir wollen (Fig. 4) die Strecke FE ins Unendliche verlängern, welche wir als Achse ansehen wollen, und wir wollen zu ihr von einem gewissen Punkt M der Kurve aus die FT parallele Strecke MV zeichnen, dass der Winkel FVM entsprechend $90^\circ - \alpha$ ist,



Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omnia Version.

und nun wird die Abszisse $FV = v$ und die Ordinate $VM = t$ sein, welche über die Abszisse so bestimmt wird, dass

$$t = 2v \sin \alpha \sqrt{\frac{v}{27c}}$$

ist. Daher ist klar, dass den einzelnen Abszissen FV die zwei Ordinaten $VM = t$ und $Vm = -t$ entsprechen; also wird die Kurve aus zwei Zweigen bestehen, die im Punkt F eine Spitze bilden, wo die Gerade FV jeden der beiden Zweige berührt. Aber die beiden Zweige werden ins Unendliche laufen, während die Abszissen FV bis Unendliche vermehrt werden.

§17 Nachdem also eine solche Kurve aus der Gleichung

$$v^3 = \frac{27ctt}{4 \sin^2 \alpha}$$

beschrieben worden ist, wollen wir ihren Parameter in gewohnter Weise $= f$ nennen, dass $v^3 = ftt$ ist, und es wird

$$\frac{27c}{4 \sin^2 \alpha} = f \quad \text{und daher} \quad c = \frac{4f \sin^2 \alpha}{27}$$

sein, sodass aus dem bekannten Parameter f zusammen mit dem Winkel $90^\circ - \alpha$, unter welchem die Ordinate VM zur Abszisse FV geneigt ist, der Wert von c bekannt wird. Nachdem dies bemerkt worden ist, nehme man vom Punkt F aus die Strecke

$$FE = 2c = \frac{8f \sin^2 \alpha}{27}$$

und von diesem Punkt E aus ziehe man die Gerade EB , sodass der Winkel $VEB = 2\alpha$ wird, und diese Gerade EB wird die Spiegelachse für die Trajektorie sein, und die an dieser Achse gespiegelte und entlang der Richtung der Achse bewegte Kurve wird sich überall im Winkel $= 2\alpha$ schneiden, was nicht gerade wenig wunderlich erscheinen wird, weil zur rechten Seite hin ein kleiner Teil der Kurve existiert, welcher gespiegelt nicht den ganzen auf der linken Seite gelegenen Bogen zu treffen scheint.

§18 Um diesem Zweifel zu begegnen, ziehe man von M aus die der Achse MS parallele Gerade, sodass der Winkel $VSM = 2\alpha$ ist, der Winkel SMV wird $= 90^\circ - \alpha$ und daher $MS = SV$ sein; daher, weil $VM = t$ ist, wird $SV = SM = \frac{t}{2 \sin \alpha}$ sein. Daher, weil $FV = v$ ist, wird die Strecke

$$FS = v - \frac{t}{2 \sin \alpha}$$

sein, woher wegen $t = \frac{v\sqrt{v}}{f}$ dieser Raum

$$FS = v - \frac{v\sqrt{v}}{2 \sin \alpha \cdot \sqrt{f}}$$

sein wird, welcher, während die Größe v immer weiter vermehrt wird, keinesfalls ins Unendliche vermehrt werden kann, sondern vielmehr seine negative Ausrichtung annehmen wird. Daher ist klar, dass diese Strecke nicht über eine

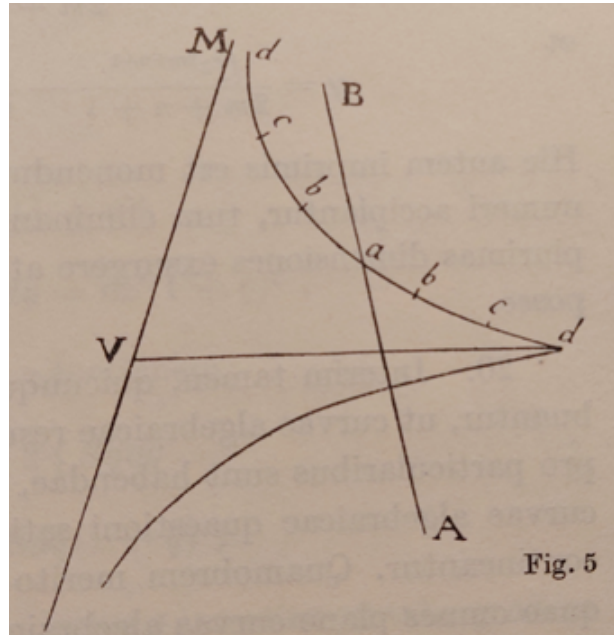
gewisse Grenze heraus wachsen kann. Um diese Grenze zu finden, werde das Differential dieser Formel zu Null, und man wird diese Gleichung erhalten:

$$1 - \frac{3\sqrt{v}}{4 \sin \alpha \cdot \sqrt{f}} = 0,$$

woher

$$\sqrt{v} = \frac{4}{3} \sin \alpha \cdot \sqrt{f} \quad \text{und} \quad v = \frac{16}{9} f \sin^2 \alpha$$

wird. Daher wird also dieser größte Abstand $= \frac{16}{27} f \sin^2 \alpha$ gefunden werden. Weil also $FE = \frac{8}{27} f \sin^2 \alpha$ war, ist es klar, dass dieser größte Abstand FS genau das Doppelte der Strecke FE ist, sodass $ES = FE$ ist. Weil also die Kurve FM nicht über diese Gerade SM hinaus vermehrt wird, ist es notwendig, dass die Kurve im Punkt M die Gerade SM berührt; daher ist es klar, dass der ganze Zweig der Kurve EM vom Anteil EF in die gespiegelte Lage überführt in allen Punkten geschnitten werden kann; und weil der Zweig über M hinaus verlängert sich immer mehr zur linken Seite hin neigt, sieht man daraus ein, dass den einzelnen Punkten jeder der beiden Zweige entsprechende Punkte zukommen, ob auf demselben oder auf dem anderen Zweig, welche im Schnittpunkt zusammenkommen müssen. Also wird diese Kurve eine solche Form haben, wie es in dieser Figur (Fig. 5) dargestellt ist, wo wir mehrere einander entsprechende Punkte mit mehreren Buchstaben angezeigt haben;



Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omnia Version.

natürlich entspricht der Punkt a , wo die Kurve durch die Achse hindurchläuft, sich selbst; aber dann entsprechen den Punkten b, c, d etc. die Punkte b', c', d' etc. Daher ist es klar, dass kein Anteil dieser über die beiden Zweige ins Unendliche laufenden Kurve frei ist, wie es den Geometern einst zu sein schien, sondern jedem wo auch immer angenommenen Punkt ein bestimmter Spiegelungspunkt zukommt.

§19 Also ist diese Kurve von dritter Ordnung ohne Zweifel die einfachste algebraische reziproke Trajektorie: aber unendlich viele andere aus den allgemeinen, welche wir angegeben haben, natürlich

$$x = \int PPRdz - \int QQRdz$$

und

$$y = \int PPRdz - 2 \int PQRdz + \int QQRdz$$

werden gefunden, wenn nur anstelle von P und R gerade Funktionen von z angenommen werden, anstelle von Q aber ungerade; so dennoch, dass diese einzelnen Formeln eine Integration zulassen; dieser Bedingung kann freilich

sehr leicht Genüge geleistet werden. Um zumindest die einfacheren Fälle zu finden, bezeichnen die Buchstaben m und n gerade Zahlen, die Buchstabe i hingegen eine ungerade Zahl, und wir wollen

$$P = fz^m, \quad Q = gz^i \quad \text{und} \quad R = z^n$$

setzen, aus welchen Werten die folgenden Formeln für x und y entspringen werden:

$$x = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1}$$

und

$$y = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{2fgz^{m+n+i+1}}{m+n+i+1} + \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1}.$$

Hier ist aber besonders zu beachten, sobald für die Buchstaben m , n und i etwas größere Zahlen angenommen werden, dass dann durch Eliminieren des Buchstabens z die Gleichung zwischen x und y zu sehr hohen Dimensionen ansteigt und sogar die Elimination nicht einmal durchgeführt werden kann.

§20 Dennoch sind indes, welche geeigneten Werte auch immer den Funktionen P , Q , R zugeteilt werden, dass algebraische Kurven entstehen, all diese Lösungen für nur partikulär zu halten, weil ohne Zweifel unzählige andere algebraische Kurven gegeben sind, die der Frage Genüge leisten und dennoch in diesen Fällen nicht enthalten sind. Deswegen wird mit Recht eine allgemeine Methode von solcher Art verlangt, die gänzlich alle algebraischen Kurven in sich umfasst; und eine solche Methode habe ich freilich schon vor langer Zeit mitgeteilt, welche zu wiederholen hier überflüssig wäre. Aber dennoch möchte ich dieselbe aus ganz anderen Prinzipien heraus und einem weit einfacheren Wege hier beifügen, welcher so beschaffen ist, dass er zu anderen außerordentlichen Funden zu führen können scheint.

EINE ALLGEMEINE METHODE ALGEBRAISCHE REZIPROKE TRAJEKTORIEN ZU FINDEN

§21 Zuerst bemerke ich also, dass sich die einfach anfangs gefundene Form

$$p = \frac{P+Q}{P-Q}$$

so weit erstreckt, dass sie die übrigen höher zusammengesetzten, welche wir dargeboten haben, in sich umfasst, weil nach der Entwicklung so der Zähler wie der Nenner entweder auf die Summe oder die Differenz von zwei Formeln zurückgeführt wird, von welchen die eine eine gerade, die andere hingegen eine ungerade Funktion von z ist. Nun wollen wir also, weil $\frac{Q}{P}$ auch eine ungerade Funktion ist, $Q = Pq$ setzen, und es wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{1-q}$$

werden, wo q eine ungerade Funktion von z bezeichnet. Es ist also notwendig, dass auch x eine ungerade Funktion von q ist, weswegen wir diese Formel so darbieten wollen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+q)^2}{1-qq},$$

dass der Nenner eine gerade Funktion von q wird.

§22 Weil also

$$dx : dy = 1 - qq : (1+q)^2$$

sein muss, wollen wir setzen:

$$dx = dS(1-qq) \quad \text{und} \quad dy = dS(1+q)^2,$$

und nach der bekannten Reduktion von Integralformeln wird gelten:

$$x = S(1-qq) + 2 \int Sq dq$$

und

$$y = S(1+q)^2 - 2 \int Sdq(1+q),$$

wo klar ist, dass S eine ungerade Funktion von q sein muss, damit auch x als eine solche Funktion hervorgeht. Auf diese Weise haben wir die Angelegenheit auf die Integralformeln

$$\int S q d q \quad \text{und} \quad \int S d q (1 + q)$$

zurückgeführt, welche integrierbar gemacht werden müssen. Für diese Ziel wollen wir $S = \frac{dT}{dq}$ setzen, und nun muss T eine gerade Funktion sein; daher wird unter Verwendung derselben Reduktion

$$\int S q d q = \int q d T = q T - \int T d q$$

und

$$\int S d q (1 + q) = T(1 + q) - \int T d q;$$

und so ist die ganze Aufgabe dorthin geführt worden, dass $\int T d q$ integrierbar gemacht wird. Man setze also $T = \frac{dV}{dq}$, wo klar ist, dass V eine ungerade Funktion von q sein muss, und so wird

$$\int T d q = V$$

sein. Auf diese Weise ist also alles integrierbar gemacht worden.

§23 Die ganze Lösung geht also darauf zurück, dass sich für V irgendeine beliebige ungerade Funktion von q annehmen lässt. Und weil wir $T = \frac{dV}{dq}$ gesetzt haben, wird für konstant angenommenes Element dq

$$dT = \frac{ddV}{dq} \quad \text{und daher} \quad S = \frac{ddV}{dq^2}$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte die beiden Koordinaten so ausgedrückt werden:

$$x = \frac{ddV(1 - qq)}{dq^2} + \frac{2qdV}{dq} - 2V$$

und

$$y = \frac{ddV(1 + q)^2}{dq^2} - \frac{2dV(1 + q)}{dq} + 2V.$$

Dass also in diesen Formeln gänzlich alle algebraischen Kurven enthalten sind, kann in keiner Weise bezweifelt werden, weil ja der Buchstabe V vollkommen alle ungeraden Funktionen von q , ob rational oder wie auch immer irrational, in sich umfasst.

§24 Wir wollen also, um ein Beispiel anzuführen, $V = q^n$ setzen, während n irgendeine ungerade, entweder ganze oder gebrochene, Zahl bezeichne, also $\frac{\mu}{\nu}$; hier müssen natürlich μ sowie ν ungerade Zahlen sein. Also wird

$$\frac{dV}{dq} = nq^{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{ddV}{dq^2} = n(n-1)q^{n-2}$$

sein, woher sich die Koordinaten so verhalten werden:

$$\begin{aligned} x &= n(n-1)q^{n-2}(1 - qq) + 2nq^n - 2q^n = n(n-1)q^{n-2} - (n-1)(n-2)q^n, \\ y &= n(n-1)q^{n-2} + 2n(n-2)q^{n-1} + (n-1)(n-2)q^n, \end{aligned}$$

und wenn wir $V = aq^n$ genommen hätten, wäre

$$x = n(n-1)aq^{n-2} - (n-1)(n-2)aq^n$$

und

$$y = n(n-1)aq^{n-2} + 2n(n-2)aq^{n-1} + (n-1)(n-2)aq^n$$

hervorgegangen.

§25 Daher ist also klar, wenn wir

$$V = aq^m + bq^n + cq^k + \text{etc.}$$

gesetzt hätten, während die Exponenten m, n, k ungerade Zahlen sind, dass dann diese Werte hervorgehen werden:

$$\begin{aligned} x &= m(m-1)aq^{m-2} - (m-1)(m-2)aq^m \\ &\quad + n(n-1)bq^{n-2} - (n-1)(n-2)bq^n \\ &\quad + k(k-1)cq^{k-2} - (k-1)(k-2)cq^k. \\ y &= m(m-1)aq^{m-2} + 2m(m-2)aq^{m-1} + (m-1)(m-2)aq^m \\ &\quad + n(n-1)bq^{n-2} + 2n(n-2)bq^{n-1} + (n-1)(n-2)bq^n \\ &\quad + k(k-1)cq^{k-2} + 2k(k-2)cq^{k-1} + (k-1)(k-2)cq^k. \end{aligned}$$

§26 Daher wird also eingesehen, sobald zwei oder mehr reziproke Trajektorien gefundenen worden sind, dass aus ihnen leicht unendlich viele andere abgeleitet werden können. Wenn also X und Y solche Funktionen von q waren, dass sie eine reziproke Trajektorie darbieten, und in gleicher Weise auch die Koordinaten X' und Y' gefunden worden sind, dann aber auch X'' und Y'' , welche natürlich alle auf dieselbe Größe q oder dieselbe Größe p bezogen werden, weil ja

$$p = \frac{1+q}{1-q}$$

ist, was passiert, wannimmer die Ordinaten zu ihren Kurven in demselben Winkel geneigt sind, dass dann aus ihnen eine neue gebildet werden kann, indem man

$$x = aX + bX' + cX'' + \text{etc.},$$

$$y = aY + bY' + cY'' + \text{etc.}$$

setzt, was auf unendlich viele Arten geschehen können wird. Hier nehmen wir aber immer an, dass der Schnittwinkel $= 2\alpha$ ist und die Ordinaten zu den Abszissen im gleichen Winkel geneigt sind.

EINE ANDERE METHODE ALLGEMEINE FORMELN FÜR DIE ALGEBRAISCHEN KURVEN ZU FINDEN

§27 Obwohl sich aber die Formel

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{1-q}$$

sehr weit erstreckt wie auch die Formeln

$$\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n}$$

ja sie umfasst sogar das Produkt aus ähnlichen Formeln wie beispielsweise

$$\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n} \cdot \frac{(R+S)^m}{(R-S)^m} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k} \text{ etc.}$$

in sich, kann dennoch ein Zweifel entstehen, ob dies auch Geltung hat, wenn die Exponenten m , n und k gebrochene Zahlen waren, weil ja dann die Entwicklung nicht gemacht werden kann, außer über eine unendliche Reihe. Also möchte ich eine Methode hinzufügen, mit welcher die Aufgabe sogar für irrationale Formeln erledigt werden kann; dies werde ich an einem einfacheren Fall zeigen. Es sei also

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+q}{1-qq'}}$$

wo immer festzuhalten ist, dass die Abszisse x eine ungerade Funktion von q sein muss, damit was leichter erreicht werden kann, wollen wir die Formel auf diese Weise darstellen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{\sqrt{1-qq'}}$$

und wir wollen wie zuvor

$$dx = dS\sqrt{1-qq'} \quad \text{sowie} \quad dy = dS(1+q)$$

setzen, wo es ersichtlich ist, dass für S eine ungerade Funktion von q genommen werden muss, natürlich damit x als ungerade Funktion hervorgeht, weil ja $\sqrt{1-qq'}$ als gerade Funktion angesehen werden kann. Also wird unter Verwendung der Reduktion

$$x = S\sqrt{1-qq'} + \int \frac{Sq dq}{\sqrt{1-qq'}} \quad \text{und} \quad y = S(1+q) - \int S dq$$

werden.

§28 Der letzten Formel wird am leichtesten Genüge geleistet werden, indem $S dq = dT$ gesetzt wird, dass $\int S dq = T$ wird; und es ist offensichtlich, dass T eine gerade Funktion von q sein muss. Weil also $S = \frac{dT}{dq}$ ist, wird zuerst

$$y = \frac{dT}{dq}(1+q) - T \quad \text{und} \quad x = \frac{dT}{dq}\sqrt{1-qq'} + \int \frac{q dT}{\sqrt{1-qq'}}$$

sein, und so ist nun die Ordinate y algebraisch gemacht worden: Für die Abszisse wird aber

$$\int \frac{q dT}{\sqrt{1-qq}} = \frac{qT}{\sqrt{1-qq}} - \int \frac{T dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}$$

sein. Man setze also

$$\int \frac{T dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} = V,$$

und es wird

$$T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}$$

werden, wo es ersichtlich ist, dass für V eine ungerade Funktion von q genommen werden muss. Auf diese Weise wird also die Abszisse x algebraisch gemacht; es wird nämlich

$$x = \frac{dT}{dq} \sqrt{1-qq} + \frac{qT}{\sqrt{1-qq}} - V$$

sein.

§29 Wir wollen also die beiden Ausdrücke für x und y allein mit der Funktion V darbieten, und weil

$$T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}$$

ist, wird

$$\frac{dT}{dq} = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3qdV}{dq} \sqrt{1-qq}$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte wir haben werden:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{3qdV}{dq}(1-qq) + \frac{qdV}{dq}(1-qq) - V$$

oder

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2qdV}{dq}(1-qq) - V$$

und

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(1+q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3qdV}{dq}(1+q)\sqrt{1-qq}$$

oder

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(1+q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - (1+q)(1+2q)\frac{dV}{dq}\sqrt{1-qq}.$$

In diesen Formeln sind also auch unendlich mal unendlich viele algebraische Kurven enthalten, weil sich ja für V beliebige ungerade Funktionen annehmen lassen.

§30 Um die Sache an einem Beispiel zu illustrieren, wollen wir $V = q$ nehmen, und es wird

$$\frac{dV}{dq} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{ddV}{dq^2} = 0$$

sein, woher

$$x = -2q(1-qq) - q = -3q + 2q^3$$

und

$$y = -(1+q)(1+2q)\sqrt{1-qq}$$

wird. Aus diesem Beispiel ist aber klar, dass diese Lösung aus der vorhergehenden in keiner Weise abgeleitet werden konnte. Wenn nämlich dort für V eine irrationale Funktion angenommen werden würde, würden die beiden Buchstaben x und y als irrational hervorgehen, obwohl dennoch in diesem Fall x eine rationale Größe ist.

§31 Nun sind wir also gewiss, dass die erste Lösung, auch wenn sie sehr allgemein erschien, dennoch nicht gänzlich alle Lösungen in sich umfasst; aber auch diese andere Lösung ist nicht für die allgemeinste zu halten, weil sie die erste nicht in sich umfasst. Deswegen wollen wir eine noch allgemeinere Lösung beifügen, welche beliebige irrationale Größen in sich umfasst.

EINE ALLGEMEINERE METHODE ALGEBRAISCHE REZIPROKE TRAJEKTORIEN ZU FINDEN

§32 Es bezeichne λ einen beliebigen Bruch, welcher freilich rational sei, weil die Potenzen, deren Exponenten irrational sind, nicht zu den *algebraischen* Größen gezählt, sondern *interszendent* genannt zu werden pflegen, und es sei diese Formel vorgelegt

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{(1+q)^\lambda}{(1-q)^\lambda},$$

welche wir sofort in diese überführen wollen

$$\frac{dy}{dx} = r^\lambda,$$

indem wir natürlich

$$\frac{1+q}{1-q} = r$$

setzen, und deshalb wird

$$y = \int r^\lambda dx = r^\lambda x - \lambda \int r^{\lambda-1} x dr$$

sein, welche letzte Formel also integrierbar gemacht werden muss, dennoch so, dass x eine ungerade Funktion von q wird.

§33 Für dieses Ziel wollen wir

$$\int r^{\lambda-1} x dr = Tr^\lambda$$

setzen, und so wird

$$y = r^\lambda(x - \lambda T)$$

werden, und nach einer Differentiation

$$r^{\lambda-1} x dr = r^\lambda dT + \lambda Tr^{\lambda-1} dr,$$

woher man

$$x = \frac{rdT}{dr} + \lambda T \quad \text{und daher} \quad y = \frac{r^{\lambda+1}dT}{dr}$$

berechnet. Auf diese Weise sind nun die beiden Koordinaten x und y algebraisch gemacht worden, und das Problem wäre gelöst, wenn nur bekannt wäre, welche Funktion für T angenommen werden sollte: Sie muss aber so beschaffen sein, dass daher x = einer geraden Funktion von q hervorgeht.

§34 Wir wollen also anstelle von r wieder den angenommenen Wert $\frac{1+q}{1-q}$ einsetzen, aus welchem

$$\log r = \log(1+q) - \log(1-q)$$

sein wird und daher

$$\frac{dr}{r} = \frac{dq}{1+q} + \frac{dq}{1-q} = \frac{2dq}{1-qq} \quad \text{und} \quad \frac{r}{dr} = \frac{1-qq}{2dq},$$

woher

$$x = \left(\frac{1-qq}{2dq} \right) dT + \lambda T$$

und

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^{\lambda} \left(\frac{1-qq}{2dq} \right) dT$$

wird. Weil hier x mit zwei Termen ausgedrückt wird, bemerke man, wenn der eine eine gerade Funktion von q war, dass der andere eine ungerade Funktion sein wird. Daher ist klar, dass für T weder eine gerade noch eine ungerade Funktion genommen werden kann, sondern die Größe aus zwei Teilen bestehen muss, von welchen der eine eine gerade Funktion ist, der andere eine ungerade.

§35 Wir wollen $T = R + S$ setzen, wo R eine gerade Funktion, S hingegen eine ungerade Funktion bezeichnet; und nun werden wir

$$x = \frac{dR(1-qq)}{2dq} + \frac{dS(1-qq)}{2dq} + \lambda R + \lambda S$$

haben, von welchen vier Teilen der erste und der vierte ungerade, der zweite und der dritte hingegen gerade sind; daher müssen der zweite und der dritte Teil jeweils zu Null werden, dass

$$x = \frac{dR(1 - qq)}{2dq} + \lambda S$$

wird. Aber nach Setzen von

$$\frac{dS(1 - qq)}{2dq} + \lambda R = 0$$

wird direkt

$$R = -\frac{dS(1 - qq)}{2\lambda dq}$$

und daher eine gerade Funktion, wie es verlangt ist; daher, weil für konstant angenommenes Element dq

$$dR = -\frac{ddS(1 - qq)}{2\lambda dq} + \frac{qdS}{\lambda}$$

ist, wird

$$x = -\frac{ddS(1 - qq)^2}{4\lambda dq^2} + \frac{qdS(1 - qq)}{2\lambda dq} + \lambda S$$

sein, und weil $T = R + S$ ist, wird

$$dT = dR + dS = -\frac{ddS(1 - qq)}{2\lambda dq} + \frac{dS(q + \lambda)}{\lambda}$$

sein, weswegen wir

$$y = -\left(\frac{1 + q}{1 - q}\right)^\lambda \left(\frac{(1 - qq)^2}{4\lambda dq^2} ddS - \frac{dS(q + \lambda)(1 - qq)}{2\lambda dq} \right)$$

haben werden. Solange also für S eine ungerade Funktion von q genommen wird, werden diese Formeln immer eine algebraische reziproke Trajektorie liefern.

§36 Diese Formeln können aber auf viele Arten transformiert werden, während natürlich anstelle von S andere ungerade Funktionen angenommen werden. Man nehme also

$$S = \frac{cV}{1 - qq'},$$

während V eine ungerade Funktion ist, und es wird

$$dS = \frac{cdV}{1 - qq} + \frac{2cVqdq}{(1 - qq)^2}$$

und

$$ddS = \frac{cddV}{1 - qq} + \frac{4cqddqV}{(1 - qq)^2} + \frac{2cVdq^2}{(1 - qq)^2} + \frac{8cVqqdq^2}{(1 - qq)^3}$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte man

$$x = -\frac{cddV(1 - qq)}{4\lambda dq^2} - \frac{cqddV}{2\lambda dq} + \frac{cV(2\lambda\lambda - 1 - qq)}{2\lambda(1 - qq)}$$

und

$$y = -\left(\frac{1 + q}{1 - q}\right)^\lambda \left(\frac{c(1 - qq)}{4\lambda dq^2} ddV - \frac{c(\lambda - q)}{2\lambda dq} dV + \frac{c(qq - 2\lambda q + 1)}{2\lambda(1 - qq)} V \right)$$

finden wird.

§37 Es wird also der Mühe Wert sein, daraus den Fall abzuleiten, in welchem $\lambda = 1$ ist, weil diese Lösung mit der übereinstimmen muss, welche wir oben (§ 23) gegeben haben. Aber für $\lambda = 1$ wird

$$x = -\frac{cddV(1 - qq)}{4dq^2} - \frac{cqddV}{2dq} + \frac{cV}{2}$$

und

$$y = -\left(\frac{1 + q}{1 - q}\right) \left(\frac{c(1 - qq)ddV}{4dq^2} - \frac{c(1 - q)dV}{2dq} + \frac{cV(q - 1)^2}{2(1 - qq)} \right)$$

oder

$$y = -\frac{cddV(1+q)^2}{4dq^2} + \frac{cdV(1+q)}{2dq} - \frac{cV}{2}$$

werden, weswegen, wenn wir $c = -4$ nehmen, diese Formeln resultieren:

$$x = \frac{ddV(1-qq)}{dq^2} + \frac{2qdV}{dq} - 2V$$

und

$$y = \frac{ddV(1+q)^2}{dq^2} - \frac{2dV(1+q)}{dq} + 2V,$$

welche mit den oben gegebenen vollkommen übereinstimmt.

§38 Um diese Formeln gefälliger zu machen, wollen wir $c = -4\lambda$ setzen, und nachdem für V irgendeine ungerade Funktion von q angenommen worden ist, werden die Koordinaten der Trajektorien so ziemlich kurz ausgedrückt werden:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq) + \frac{2dV}{dq} \cdot q - \frac{2V(2\lambda\lambda - 1 - qq)}{1-qq}$$

und

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left(\frac{ddV}{dq^2}(1-qq) - \frac{2dV}{dq}(\lambda - q) + \frac{2V(qq - 2\lambda q + 1)}{1-qq} \right).$$

Ja es werden sich sogar die zuerst [§ 35] gefundenen Formeln in bequemerer Weise gebrauchen lassen, wenn sie mit -4λ multipliziert werden. So werden, während S irgendeine ungerade Funktion von q ist, die Koordinaten sein:

$$x = \frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}q(1-qq) - 4\lambda\lambda S$$

und

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq) \right).$$

§39 Welche geeignete Funktion also auch immer für S angenommen wird, es muss immer

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda$$

werden. Wie dies passiert und wie der Buchstabe S völlig aus der Rechnung herausgeht, wird der Mühe Wert sein es zu untersuchen. Wir wollen also zuerst den Wert von x differenzieren, dass wir

$$dx = \frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda - 3qq)$$

erhalten. Weiter, weil y mit einem Produkt ausgedrückt wird, deren erster Faktor

$$\left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda = r^\lambda$$

ist, nachdem natürlich

$$\frac{1+q}{1-q} = r$$

gesetzt worden ist, wird

$$d.r^\lambda = \lambda r^\lambda \cdot \frac{dr}{r}$$

sein. Oben haben wir aber gesehen, dass

$$\frac{dr}{r} = \frac{2dq}{1-qq}$$

ist, woher wir für diesen Faktor

$$d. \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda = 2\lambda \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda \frac{dq}{1-qq}$$

haben werden, nach Bemerken wovon wir

$$dy = 2\lambda \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda \frac{dq}{1-qq} \left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq) \right)$$

$$+ \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda \left[\frac{d^3 S}{dq^2} (1-qq)^2 - \frac{2ddS}{dq} (3q+\lambda)(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq) \right]$$

erhalten, welche beiden Anteile zusammengefasst

$$dy = \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda \left[\frac{d^3 S}{dq^2} (1-qq)^2 - \frac{6ddSq(1-qq)}{dq} - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq) \right]$$

liefern, woher

$$dy = \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda dx$$

wird, wie die vorgeschriebene Bedingung es erfordert.

§40 Hier zeigt sich also der der ganzen Aufmerksamkeit würdige Fall dieser Differentialform dritten Grades:

$$\frac{d^3 S}{dq^2} (1-qq)^2 - \frac{6ddS}{dq} q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq),$$

welche nicht nur per se integrierbar ist, weil ihr Integral ja den Wert von x gibt, aber mit der Formel

$$\left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda$$

multipliziert immer noch integrierbar bleibt, weil ihr Integral ja den Wert von y liefert: Daher entsteht die Frage von größter Bedeutung in der Analysis, *wie Differentialformen von beliebiger Ordnung beschaffen sein müssen, dass sie nicht nur selbst integrierbar sind, sondern auch, wenn sie mit einer gewissen gegebenen Funktion multipliziert werden, die Lösung welcher Frage mit der zuvor verwendeten Methode freilich sehr leicht ist.*

§41 Um diese Formeln an einem sehr einfachen Beispiel zu zeigen, wollen wir $S = q$ nehmen, und unsere Koordinaten der Trajektorie werden

$$x = -2(1+2\lambda\lambda)q + 2q^3$$

und

$$y = -2 \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda (q + \lambda)(1 - qq)$$

sein, oder indem man durch -2 teilt, wird

$$x = (1 + 2\lambda\lambda)q - q^3$$

und

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^\lambda (q + \lambda)(1 - qq)$$

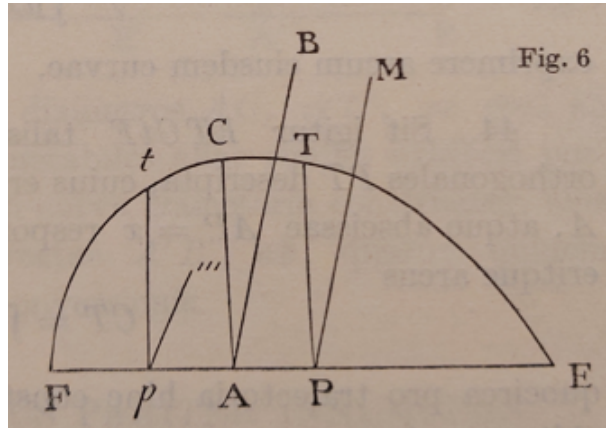
sein. Leicht ist aber klar, welcher Bruch auch immer für den Exponenten λ angenommen wird, dass die Elimination der Größe q zu einer Gleichung von sehr hohem Grad führt. Wenn aber $\lambda = 0$ genommen wird, geht offenkundig

$$x = q - q^3 \quad \text{und} \quad y = q(1 - qq) \quad \text{und daher} \quad y = x$$

hervor; diese Gleichung ist die für eine gerade Linie; dies gilt aber nicht nur in diesem Fall, sondern die allgemeinen Formeln liefern für $\lambda = 0$ immer $y = x$. Also ist die in diesem Artikel angegebene Methode anzusehen, vollkommen alle Trajektorien in sich zu enthalten, sofern sich natürlich für λ irgendein Bruch annehmen lässt.

EINE EINZIGARTIGE KONSTRUKTION VON REZIPROKEN TRAJEKTORIEN MITHILFE DER REKTIFIZIERUNG VON KURVEN

§42 Nachdem (Fig. 6) die Spiegelachse AB festgelegt worden ist, an welcher die Trajektorie reflektiert worden ist und in Richtung welcher Achse bewegt sie sich selbst überall in dem gegebenen Winkel $= 2\alpha$ schneidet, zeichne man in dem beliebigen Punkt A die Gerade EF , welche im Winkel $EAB = 2\alpha$ geneigt ist, auf welcher man die Abszissen $AP = x$ nehme, welchen die der Achse PM parallelen Ordinaten $= y$ entsprechen;



Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omnia Version.

und nach Setzen von $dy = p dx$ haben wir gesehen, dass die ganze Aufgabe darauf zurückgeht, dass p eine reziproke Funktion der Abszisse x wird. Umgekehrt muss also x eine solche Funktion von p sein, dass, wenn $\frac{1}{p}$ anstelle von p geschrieben wird, der Wert von x sein Negatives wird oder in $-x$ übergeht; von Funktionen dieser Art lassen sich freilich unzählige erdenken, von welchen die einfachste eine solche ist

$$x = \frac{a(pp - 1)}{p},$$

welche Formel natürlich, wenn $\frac{1}{p}$ anstelle von p geschrieben wird,

$$\frac{a(1 - pp)}{p} = -x$$

wird.

§43 Aber diese Formel kann verallgemeinert werden, indem man eine neue Variable t einführt, welche irgendeine ungerade Funktion von x sei. Denn dann, wenn

$$t = \frac{a(pp - 1)}{p}$$

gesetzt wird, weil ja, wenn $\frac{1}{p}$ anstelle p geschrieben wird, die Größe t in $-t$ übergeht, auch die Abszisse x und $-x$ übergeht. Nach Bemerken dessen wollen wir für unser Unterfangen

$$t = \frac{pp - 1}{2p}$$

setzen, woher

$$p = t + \sqrt{tt + 1}$$

wird. Weil also

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ ist, wird } dy = tdx + dx\sqrt{tt + 1}$$

und daher

$$y = \int tdx + \int dx\sqrt{tt + 1}$$

sein. Hier ist aber ersichtlich, wenn $\int tdx$ die der Abszisse x entsprechende orthogonale Ordinate der Kurve bezeichnet, dass dann

$$\int dx\sqrt{tt + 1}$$

den Bogen derselben Kurve ausdrückt.

§44 Es sei $ETCtF$ eine solche über der Gerade EF mit den orthogonalen Koordinaten PT beschriebene Kurve, deren Punkt C also dem Anfang der Abszissen A überstehe, und der Abszisse $AP = x$ entspreche die orthogonale Ordinate $PT = \int tdx$, und der Bogen wird

$$CT = \int dx\sqrt{tt + 1}$$

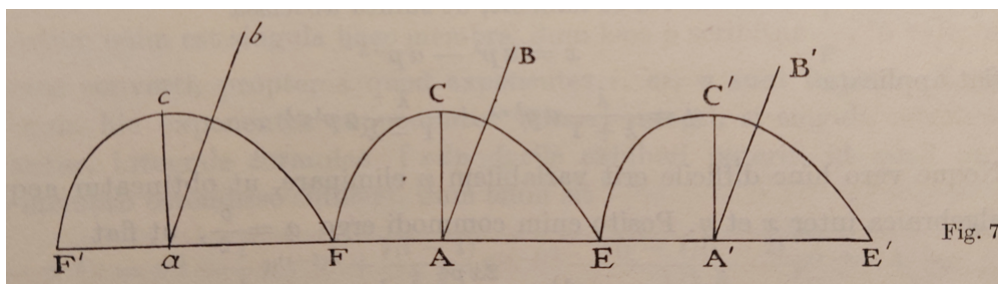
sein; deshalb muss für die daraus zu konstruierende Trajektorie nur ihre schiefwinklige Ordinate

$$PM = y = PT + CT$$

genommen werden, und der Punkt M wird auf der Trajektorie liegen, wenn nur t eine ungerade Funktion von x war. Daher ist es klar, dass diese neue Kurve $ETCfT$ nicht vollkommen unserem Belieben überlassen ist. Wie sie aber beschaffen sein muss, wird ohne große Mühe bestimmt werden.

§45 Weil t nämlich eine ungerade Funktion von x ist, ist es ersichtlich, dass die Integralformel $\int t dx$ eine gerade Funktion von x sein wird, sodass auf derselben Kurve der negativen Abszisse $AP = -x$ die in dieselbe Richtung ausgerichtete Ordinate $pt = Pt$ entspricht. Daher ist es klar, dass diese Kurve $ETCtF$ so beschaffen sein muss, dass die Gerade AC ihr orthogonaler Durchmesser ist und die Anteile CTE und CtF einander vollkommen ähnlich und gleich sind. Nachdem dies bemerkt worden ist, werden vollkommen alle Kurven dieser Gestalt für unser Unterfangen geeignet sein. Denn aus jeder beliebigen Kurve von dieser Art wird für jedweden Schnittwinkel $= 2\alpha$ die Trajektorie sehr leicht konstruiert werden können, solange nur beachtet wird, wenn der Bogen CT für positiv gehalten wird, sodass $PM = PT + CT$ genommen wird, dass die auf die andere Seite fallenden Bogen Ct für negativ zu halten sind, sodass dort die Ordinate pm der Trajektorie $= pt - Ct$ genommen werden muss. Und die ist jene sehr elegante Konstruktion, welche einst der hoch geehrte JOHANN BERNOULLI als erster gefunden hatte.

§46 Mithilfe dieser Konstruktion können auch Trajektorien von solcher Art beschrieben werden, die mit mehreren Spiegelachsen und sogar für denselben Schnittwinkel versehen sind. Denn ist es nur vonnöten (Fig. 7), dass für die Kurve ECF



Der Scan zeigt die Figur aus der Opera Omnia Version.

eine Form von solcher Art angenommen wird, die mehrere Durchmesser AC , $A'C'$, ac etc. hat, und eine Kurve von dieser Art ist die Zykloide. Denn dann, wenn auf die beschriebene Weise aus einer solchen Kurve die Trajektorie konstruiert wird, werden nicht nur die Gerade AB , sondern auch alle Geraden $A'B'$, ab , deren Anzahl freilich unendlich ist, gleichermaßen Spiegelachsen sein.

ÜBER ANDERE FORMELN, AUS WELCHEN
GLEICHERMASSEN UNZÄHLIGE REZIPROKE TRAJEKTORIEN
GEFUNDEN WERDEN KÖNNEN

§47 Aus der vorhergehenden Konstruktion ist es offenkundig, wenn die zur Hilfe genommene Kurve *ECF* nicht nur algebraisch war, sondern auch eine Rektifizierung zulässt, dass dann die daraus beschriebenen Kurven auch algebraisch sein werden. Aber andererseits kann die grundlegende Formel, woher wir diese Konstruktionen abgeleitet haben, welche

$$x = \frac{a(pp - 1)}{p}$$

war, so behandelt werden, dass sie auch unzählige algebraische Kurven darbietet.

§48 Weil nämlich eine solche allgemeinere Formel

$$x = \frac{a(p^{2\lambda} - 1)}{p^\lambda}$$

gleichermaßen mit der vorgeschriebenen Eigenschaft versehen ist, dass, nachdem $\frac{1}{p}$ anstelle von p gesetzt worden ist, die Abszisse x in ihr Negatives übergeht, weil ja

$$y = \int p dx = px - \int x dp$$

ist, wird

$$y = px - a \int \frac{dp(p^{2\lambda} - 1)}{p^\lambda} = px - \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda + 1} + \frac{ap^{1-\lambda}}{1 - \lambda}$$

sein, welcher Ausdruck auch algebraisch ist, wenn nicht $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ wird, in welchen Fällen die Integration natürlich Logarithmen beinhalten würde.

§49 Nachdem also für λ irgendeine Zahl genommen worden ist, wobei die Fälle $\lambda = \pm 1$ ausgenommen worden sind, wird sich die Konstruktion der Trajektorie so verhalten, dass nach Nehmen der Abszisse

$$x = ap^\lambda - ap^{-\lambda}$$

die Ordinate

$$y = \frac{\lambda}{\lambda+1}ap^{\lambda+1} + \frac{\lambda}{1-\lambda}ap^{1-\lambda}$$

wird. Und daher wird es auch nicht schwer sein, die Variable p zu eliminieren, dass man eine algebraische Gleichung zwischen x und y hat. Denn nachdem der Bequemlichkeit wegen $a = \frac{b}{2}$ gesetzt worden ist, dass

$$p^{2\lambda} = \frac{2xp^\lambda}{b} + 1$$

wird, wird daher

$$p^\lambda = \frac{x \pm \sqrt{xx + bb}}{b} \quad \text{und daher} \quad p = \left(\frac{x \pm \sqrt{xx + bb}}{b} \right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Hier, wenn n anstelle von $\frac{1}{\lambda}$ geschrieben wird und anstelle von p dieser Wert eingesetzt wird, gehen dieselben oben (§ 8) gefundenen Formeln hervor.

§50 Die Abszisse x kann nicht nur einer einzigen solchen Formel

$$\frac{a(p^{2\lambda} - 1)}{p^\lambda}$$

gleich gesetzt werden, sondern auch mehreren solcher Formeln zusammengekommen wie beispielsweise

$$x = a(p^\lambda - p^{-\lambda}) + b(p^\mu - p^{-\mu}) + c(p^\nu - p^{-\nu}) + \text{etc.}$$

Es ist nämlich ersichtlich, wenn in diesem Ausdruck $\frac{1}{p}$ anstelle von p geschrieben wird, dass dann $-x$ anstelle von x hervorgehen wird. Daher wird man aber

$$\int xdp = \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{bp^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{bp^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{cp^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{cp^{1-\nu}}{1-\nu} + \text{etc.}$$

berechnen. Und weil $y = px - \int xdp$ ist, wird in gleicher Weise, wie es oben gemacht worden ist,

$$y = \frac{\lambda a}{\lambda + 1} p^{\lambda+1} + \frac{\lambda a}{1 - \lambda} p^{1-\lambda} + \frac{\mu a}{\mu + 1} p^{\mu+1} + \frac{\mu a}{1 - \mu} p^{1-\mu} + \frac{\nu a}{\nu + 1} p^{\nu+1} + \frac{\nu a}{1 - \nu} p^{1-\nu} + \text{etc.}$$

sein. Und diese Formeln lassen sich nach Belieben vervielfältigen und aus ihnen werden in jedwedem Fall in hinreichend bequemer Art Trajektorien beschrieben werden können, während für jedweden dem Buchstaben p zugeordneten Wert die Werte von beiden Koordinaten x und y berechnet werden können. Aber es wird um vieles schwieriger sein, den Buchstaben p aus der Rechnung herauszuwerfen, damit klar wird, zu welcher Ordnung die Kurve zu zählen ist.

§51 Ja auch diese Formeln lassen sich noch verallgemeinern. Wenn nämlich die Buchstaben i, m, n ungerade Zahlen bezeichnen, wird man

$$x = a(p^\lambda - p^{-\lambda})^i + b(p^\mu - p^{-\mu})^m + c(p^\nu - p^{-\nu})^n$$

setzen können. Es ist nämlich offenkundig, dass diese einzelnen Terme, wenn $\frac{1}{p}$ anstelle von p geschrieben wird, in ihre negativen Werte umgekehrt werden, weil die Exponenten i, m, n ungerade Zahlen sind. Aber dann, weil hier die Exponenten als ganze Zahlen angenommen werden, wenn die einzelnen Terme entwickelt werden, wird das Integral der Formel $\int x dp$ leicht dargeboten werden können, was genügen wird, es an einem einzelnen Term gezeigt zu haben. Weil nämlich

$$(p^\lambda - p^{-\lambda})^i = p^{i\lambda} - \frac{i}{1} p^{(i-2)\lambda} + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} p^{(i-4)\lambda} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{(i-6)\lambda} + \text{etc.}$$

ist, wird

$$\int x dp = \frac{a}{i\lambda + 1} p^{i\lambda+1} - \frac{ia}{1(i-2)\lambda + 1} p^{(i-2)\lambda+1} + \frac{i(i-1)a}{1 \cdot 2(i-4)\lambda + 1 \cdot 2} p^{(i-4)\lambda+1} - \text{etc.}$$

sein. Und daher, weil $y = px - \int x dp$ ist, wird die Beschreibung der Kurve offensichtlich sein, was sich auch genauso verhält, wenn mehrere Terme von dieser Art angenommen worden sind.

§52 Und auf diese Weise haben wir fast alles kurz und bündig zusammengefasst, was vor einiger Zeit über reziproke Trajektorien in ausführlicher Weise dargestellt und entdeckt gefunden wird. Aber die Methode, welche ich hier benutzt habe, scheint so klar und gradlinig, dass eine größere Schlichtheit nicht verlangt werden kann. Hier verdient es besonders bemerkt zu werden, dass alle Lösungen, welche wir angegeben haben, auf gänzlich alle rechtwinkligen wie schiefwinkligen Trajektorien mit gleichem Erfolg angewendet werden können. Außerdem sind aber die allgemeinen Formeln für die algebraischen Kurven hier als völlig neu hinzugefügt anzusehen, weil zu jener Zeit, zu welcher dieser Gegenstand behandelt worden ist, niemand über solch allgemeine Formeln nachgedacht hat. Deswegen bin ich zuversichtlich, dass niemand es bereut hat, welcher diesen, nun fast völlig in Vergessenheit geratenen, Gegenstand erneut durchforstet hat.