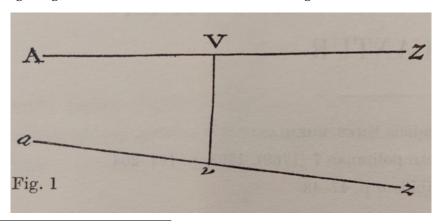
Über das Finden der Kraftmomente Bezüglich beliebiger Achsen, wo viele Ausserordentliche Eigenschaften über zwei Geraden, die nicht in derselben Ebene liegen, erklärt werden*

Leonhard Euler

Wenn (Fig. 1) irgendeine Kraft *V* vorgelegt war, die in Richtung *AZ* wirkt, geben für das Finden ihres Moments bezüglich der Achse *az*, welche eine beliebige Lage habe, die Lehren der Statik diese Regel an die Hand:

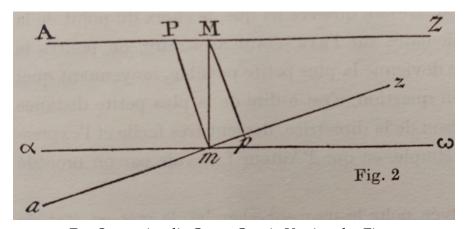


^{*}Originaltitel: "De momentis virium respectu axis cuiuscunque inveniendis; ubi plura insignia symptomata circa binas rectas, non in eodem plano sitas, explicantur", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band* 7 (1793, geschrieben 1780): pp. 191 – 204, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 2, Band 9, pp. 387 – 398, Eneström Nummer E658, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Der Scan zeigt die Opera Omnia Version der Figur.

Von irgendeinem einem Punkt V aus, der auf der Gerade AZ angenommen wird, zeichne man zur anderen Gerade az die Senkrechte V v, welche man = v nenne; dann suche man die Neigung der Geraden AZ zur Ebene AVz, welche natürlich von den drei Punkten a, V, z bestimmt wird, welche Neigung man $= \varphi$ nenne: Und daraus wird das gesuchte Moment $= V \cdot v \sin \varphi$ sein. Natürlich wird es dem Produkt aus der angreifenden Kraft V mit dem Abstand Vv = v und darüber hinaus dem Sinus des Neigungswinkels φ gleich werden.

Aber wenn wir für diese Formel so den Abstand v wie den Winkel ϕ im Allgemeinen mit einer Rechnung bestimmen wollen, werden wir zu dermaßen vertrackten analytischen Formeln geleitet, dass daraus kaum etwas für Anwendungen in der Mechanik erschlossen werden kann. Weil aber die Auswahl des Punktes V von unserem Belieben abhängt, ist es möglich, ihn so anzunehmen, dass die meisten erwähnten Schwierigkeiten verschwinden, was passieren wird, wenn der Punkt V dort angenommen wird, wo die Entfernung zwischen den Geraden AZ und az (für welche es ratsam ist, sie beide unendlich ausgedehnt aufzufassen) minimal wird.



Der Scan zeigt die Opera Omnia Version der Figur.

Diese Bedingung einführend wollen wir also die ganze Untersuchung der Momente in Angriff nehmen und auf die bei Geometern übliche Weise vorgehe: Wir wollen hier das, was sich eigens auf die Mechanik bezieht, von dem, was zur Geometrie zu rechnen ist, unterscheiden.

GEOMETRISCHES THEOREM

§1 Wenn (Fig. 2) die Gerade Mm die geringste Entfernung zwischen den beiden Geraden AZ und az war, wird sie zu jeder der beiden orthogonal sein, sodass so der Winkel AMm wie der Winkel amM ein rechter ist.

BEWEIS

§2 Wenn nämlich der Winkel Mmz kein rechter wäre, wäre die Senkrechte Mp, gefällt von M zur Gerade az, kleiner als Mm, entgegen der Annahme. In gleicher Weise, wenn die Gerade mM keine Senkrechte zu AZ wäre, könnte von m aus das Lot mP gefällt werden, welches wiederum kleiner wäre als Mm, entgegen der Annahme. Daher ist es ersichtlich, dass die geringste Entfernung Mm zu jeder der beiden Geraden AZ und az senkrecht sein muss.

KOROLLAR

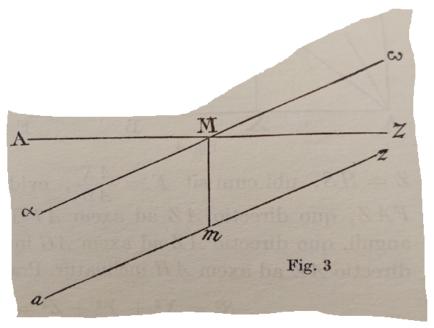
§3 Wenn wir also durch m die Parallele $\alpha\omega$ zu AZ zeichnen, wird auch Mm senkrecht zu $\alpha\omega$ und senkrecht zur Ebene $am\alpha$ oder ωmz sein; und so wird die Gerade mz in der zur Gerade Mm normalen Ebene liegen, und wenn der Winkel $am\alpha$, oder $zm\omega = \omega$ gesetzt wird, wird dieser Winkel die gegenseitige Neigung der beiden vorgelegten Geraden AZ und az messen.

PROBLEM AUS DER MECHANIK

§4 Nachdem die geringste Entfernung mM = m zwischen der Richtung der angreifenden Kraft AZ und der Achse az bekannt geworden ist, das Kraftmoment V in Bezug auf die Achse az zu bestimmen.

LÖSUNG

§5 Wir wollen den Punkt *V* in der oben erwähnten Regel auf der Gerade *AZ* nehmen,



Der Scan zeigt die Opera Omnia Version der Figur.

im Punkt M selbst, wo die Entfernung von der anderen Geraden az, natürlich Mm=m, ein Minimum ist. Durch M hindurch zeichne man die Gerade $\alpha\omega$, parallel zu az, welche also mit az in derselben Ebene liegen wird, und der Winkel $AM\alpha$, oder $ZM\omega$, welcher $=\omega$ sei, wird die Neigung der Gerade AZ zur Ebene aMz ausdrücken, welche wir oben in der Regel mit φ angegeben haben, weswegen das gesuchte Moment nur $=Vm\sin\omega$ sein wird.

KOROLLAR

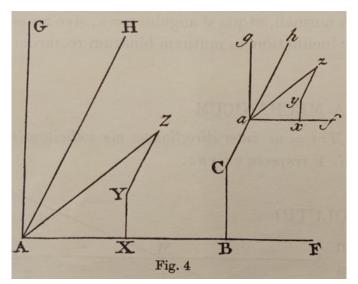
§6 Um also das Moment der Kraft V, welche in Richtung AZ wirkt, bezüglich der Achse az zu finden, muss zuerst die geringste Entfernung zwischen den zwei Geraden AZ und az gesucht werden, welche wir MM=m setzen. Dann muss auch der Winkel ω gesucht werden, oder die gegenseitige Neigung der beiden Geraden AZ und az. Wie also jede dieser beiden Untersuchungen durchgeführt werden muss, wollen wir lehren, nachdem wir gezeigt haben, wie die Lage jeder der beiden Geraden in die Rechnung eingeführt werden sollte.

GEOMETRISCHES PROBLEM

§7 Die Lage der beiden Geraden AZ und az in die Rechnung einzuführen.

LÖSUNG

§8 Zu diesem Zweck wollen wir die drei zueinander senkrechten festen Richtungen zur Hilfe nehmen, auf welche wir die Lage jeder der beiden Geraden mit drei Koordinaten, die diesen Richtungen parallel sind, beziehen. Daher wollen wir also (Fig. 4) für die Gerade AZ die drei Achsen AF, AG, AH festlegen, die jenen festen Richtungen parallel sind, bezüglich derer wir für einen beliebigen Punkt Z die drei diesen Achsen parallelen Koordinaten AX = X, XY = Y und YZ = Z setzen, und die Strecke AZ wollen wir = S setzen, weil zu dieser die drei Koordinaten konstante Verhältnisse haben;



Der Scan zeigt die Opera Omnia Version der Figur.

wir wollen X = FS, Y = GS, Z = HS setzen und weil hier $F = \frac{AX}{AZ}$ ist, ist es ersichtlich, dass F den Kosinus des Winkels FAZ ausdrückt, in welchem die Richtung AZ zur Achse AF geneigt ist. In gleicher Weise wird G der Kosinus des Winkels sein, in welchem die Richtung AZ zur Achse AG geneigt ist, und H wird der Kosinus des Winkels sein, in welchem die Richtung AZ zur Achse AH geneigt ist. Aber außerdem, weil

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (F^2 + G^2 + H^2)S^2$$

ist, ist es ersichtlich, dass immer $F^2 + G^2 + H^2 = 1$ sein wird.

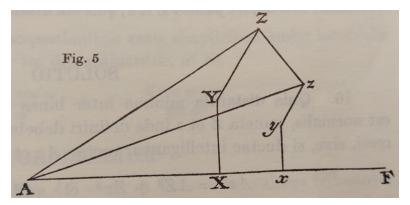
- §9 Auf dieselbe Weise lege man für die andere Richtung az die diesen festen Richtungen parallelen drei Achsen af, ag, ah fest, auf welche die Lage jedweden Punktes z mit den Koordinaten ax = x, xy = y, yz = z bezogen werde; und nachdem die Strecke az = s gesetzt worden ist, setze man x = fs, yg = s und zh = s, wo, wie zuvor, die Buchstaben f, g, h die Kosinus der Winkel faz, gaz, haz ausdrücken werden, in welchen die vorgelegte Richtung az zu den drei Achsen af, ag, ah geneigt ist. Aber dann wird man hier $f^2 + g^2 + h^2 = 1$ haben.
- §10 Damit schließlich auch die Lage des Punktes a in Bezug auf den Punkt A in die Rechnung eingeführt wird, fälle man vom Punkt a zur Ebene FAG das Lot aC, dann zeichne man aber vom Punkt C aus zur Achse C die Normale CB, und man nenne die Strecken CB auch mit den drei Koordinaten CB bestimmt wird, und auf diese Weise wird alles, was sich auf die Relation zwischen den beiden vorgelegten Geraden CB und CB bezieht, sehr leicht in die Rechnung eingebracht werden können.

GEOMETRISCHES PROBLEM

§11 Nachdem die beiden Geraden AZ und Az vorgelegt worden sind, deren gegenseitige Neigung, welche ω sei, mit einer Rechnung zu bestimmen.

LÖSUNG

§12 Nachdem (Fig. 5) die beiden vorgelegten Geraden AZ und az durch die drei Koordinaten, wie wir gerade gelehrt haben, in die Rechnung eingeführt worden sind, weil alle einander parallelen Geraden zu einer bestimmten anderen gleich geneigt sind, wollen wir von A aus die Gerade Az' zeichnen, die der anderen vorgelegten Geraden az parallel sei, und zugleich zeichne man die drei entsprechenden Koordinaten AX' = x, x'y' = y, y'z' = z.



Der Scan zeigt die Opera Omnia Version der Figur.

Diese Figur werde natürlich an diese Stelle, wo auch immer die Gerade az sich befindet, überführt aufgefasst, und nun wird der Winkel ZAz' die Neigung sein, welche die beiden vorgelegten Geraden AZ und az zueinander haben.

§13 Deswegen, damit wir diesen Winkel ZAz' auf angenehmere Art bestimmen können, wollen wir die beiden Strecken AZ und az' einander gleich annehmen, sodass s=S ist, woher wir die folgenden Werte haben:

$$AX = X = FS$$
, $XY = Y = GS$, $YZ = Z = HS$,

$$Ax' = x = fS$$
, $x'y' = y = gS$, $y'z' = z = hS$,

aus welchen die Gerade Zz' so bestimmt wird, dass

$$(Zz')^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2$$

oder

$$(Zz')^2 = S[(f-F)^2 + (g-G)^2 + (h-H)^2]$$

ist, nach Ausschreiben welches Ausdrucks wegen

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1$$
 und $F^2 + G^2 + H^2 = 1$

auch

$$(Zz')^2 = 2S^2(1 - fF - gG - hH)$$

sein wird.

§14 Aus der Geometrie ist aber bekannt, dass der Winkel ZAz' aus drei gegebenen Seiten so bestimmt wird, dass

$$\cos \omega = \frac{AZ^2 + Az'^2 - Zz'^2}{2AZ \cdot Az'}$$

ist, woher man, nachdem die Werte eingesetzt worden sind, berechnet, dass $\cos \omega = fF + gG + hH$ sein wird, welcher Ausdruck hinreichend einfach ist, dass er in die Rechnung in angenehmer Weise eingeführt werden kann.

GEOMETRISCHES PROBLEM

§15 Nachdem (Fig. 4) die zwei Geraden AZ und Az vorgelegt worden sind, je nachdem wie sie zuvor in die Rechnung eingeführt worden sind, die Punkte Z und z ausfindig zu machen, deren Entfernung Zz die kleinste aller ist.

LÖSUNG

§16 Weil die geringste Entfernung zwischen den zwei vorgelegten Geraden zu jeder von beiden normal ist, werden die Punkte Z und z daher bestimmt werden müssen, dass die Winkel AZz und azZ rechte werden, oder, wenn die geraden Az und aZ gezeichnet verstanden werden, dass

$$Az^2 = AZ^2 + Z^2$$
 und $aZ^2 = az^2 + Zz^2$

ist, welche Gleichungen also in die Rechnung eingeführt werden müssen. Vor allem wird aber aus den festgelegten Elementen die Strecke Zz so ausgedrückt, dass

$$Zz^{2} = (a + fs - FS)^{2} + (b + gs - GS)^{2} + (c + hs - HS)^{2}$$

ist, um welchem Ausdruck noch mehr zusammenzufassen, wollen wir der Kürze wegen

$$aa + bb + cc = \Delta$$
, $aF + bG + cH = E$ und $af + bg + ch = e$

setzen, und wir werden diese Form erlangen:

$$Zz^{2} = \Delta + 2es - 2ES - 2Ss(Ff + Gg + hH) + s^{2} + S^{2}.$$

Weil also, wie wir zuvor gesehen haben, $Ff + Gg + Hh = \cos \omega$ ist, wird

$$Zz^2 = \Delta + 2es - 2ES - 2Ss\cos\omega + s^2 + S^2$$

sein.

§17 Indem wir weiter diese Benennungen zur Hilfe nehmen, wird man mit unseren Koordinaten

$$Az^{2} = (a + fs)^{2} + (b + gs)^{2} + (c + hs)^{2}$$

finden, und daher wird

$$Az^2 = \Delta + 2es + ss$$

sein. In gleicher Weise wird

$$aZ^{2} = (a - FS)^{2} + (b - GS)^{2} + (c - HS)^{2}$$

sein, und daher

$$aZ^2 = \Delta - 2ES + SS.$$

Daher werden also die zwei oben gegebenen Gleichungen diese geben:

$$\Delta + 2es + ss = 2S^2 + \Delta - 2ES + 2es - 2Ss\cos\omega + s^2,$$

$$\Delta - 2ES + SS = 2ss + \Delta - 2ES + 2es - 2Ss\cos\omega + S^2$$

welche auf diese Formen zurückgeführt werden:

$$S - E - s \cos \omega = 0$$
, $s + e - S \cos \omega = 0$.

§18 Aus diesen zwei hinreichend einfachen Gleichungen werden die beiden gesuchten Strecken AZ = s und az = s so bestimmt werden, dass

$$S = \frac{E - e \cos \omega}{\sin^2 \omega} \quad \text{und} \quad s = \frac{E \cos \omega - e}{\sin^2 \omega}$$

ist.

KOROLLAR

§18a Wenn also den Strecken AZ = S und az = s diese Werte zugeteilt werden, dann wird die Entfernung Zz die kleinste von allen werden, und daher = m, wenn wir welche also in der Rechnung beibehalten, werden die beiden grundlegenden Gleichungen, aus welchen diese Lösung abgeleitet worden ist,

$$mm + SS = \Delta + 2es + ss$$
,
 $mm + ss = \Delta - 2ES + SS$

sein, welche zwei Gleichungen addiert diese ergeben werden:

$$mm = \Delta + es - ES$$
,

welche um vieles einfacher ist als die, die zuvor direkt gefunden worden war, natürlich

$$mm = \Delta + 2es - ES - 2Ss\cos\omega + ss + SS;$$

wir wollen sie also im folgenden Problem verwenden.

GEOMETRISCHES PROBLEM

§19 Nach Vorlage der zwei Geraden AZ und az, welche durch die oben aufgestellten Elemente bestimmt worden sind, deren geringste Entfernung zu finden.

LÖSUNG

§20 Im vorhergehenden Problem haben wir gefunden, wenn man

$$AZ = S = \frac{E - e \cos \omega}{\sin^2 \omega}$$
 und $az = s = \frac{E \cos \omega - e}{\sin^2 \omega}$

nimmt, dass dann die Entfernung Zz der geringsten Entfernung =m gleich wird. Weiter haben wir aber im Korollar gezeigt, dass $M^2 = \Delta + es - ES$ ist; deswegen ist es nur vonnöten, dass für die Buchstaben Δ , e und E die angenommenen Werte wieder eingesetzt werden, welche

$$\Delta = aa + bb + cc$$
, $E = aF + bG + cH$, $e = af + bg + ch$

waren, woher diese Gleichung entspringt:

$$m^2 \sin^2 \omega = (aa + bb + cc) \sin^2 \omega + 2(af + bg + ch)(aF + bG + cH) \cos \omega$$
$$-(af + bg + ch)^2 - (aF + bG + cH)^2.$$

Es ist also offenkundig, dass nach Ausmultiplizieren eine solche Form hervorgehen wird:

$$mm\sin^2\omega = aa\mathfrak{A} + bb\mathfrak{B} + cc\mathfrak{C} + 2ab\mathfrak{F} + 2bc\mathfrak{G} + 2ac\mathfrak{H},$$

und ist es nur vonnöten, dass die Werte der Buchstaben \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{F} , \mathfrak{G} , \mathfrak{H} entwickelt werden.

§21 Wir wollen mit dem Buchstaben $\mathfrak A$ beginnen, und man wird seinen Wert als

$$\mathfrak{A} = \sin^2 \omega + 2Ff \cos \omega - F^2 - f^2$$

finden, oder

$$\mathfrak{A} = 1 - F^2 - f^2 + \cos \omega (2Ff - \cos \omega).$$

Daher setze man nun anstelle von $\cos \omega$ sein Wert Ff + Gg + Hh eingesetzt, und es wird

$$\mathfrak{A} = 1 - F^2 - f^2 + F^2 f^2 - (Gg + Hh)^2$$

sein, der erste Teil welches Ausdrucks natürlich das Produkt aus den Faktoren $1-F^2$ und $1-f^2$ ist; weil also

$$1 - F^2 = G^2 + H^2$$
 und $1 - f^2 = g^2 + h^2$

ist, findet man nach der Entwicklung

$$\mathfrak{A} = GGhh - 2GHgh + HHgg = (Gh - Hg)^{2}.$$

In gleicher Weise könnten die Werte der Buchstaben $\mathfrak B$ und $\mathfrak C$ gefunden; aber weil so die Buchstaben a, b, c wie F, G, H, und genauso f, g, h in derselben Struktur fortschreiten, ist es nur vonnöten, diese einzelnen für $\mathfrak A$ Buchstaben um einen Schritt vorwärts zu schieben, dass man

$$\mathfrak{B} = (Hf - Fh)^2$$
 sowie $\mathfrak{C} = (Fg - Gf)^2$

erhält, während man erneut um einen Schritt fortschreitet.

§22 Wir wollen nun den Wert des Buchstaben $\mathfrak F$ suchen, welcher aus der gefundenen Form berechnet wird

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf)\cos\omega - FG - fg$$

zu sein. Daher wird nach Einsetzen des Wertes für $\cos \omega$

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf)(Ff + Gg + Hh) - FG - fg$$

oder

$$\mathfrak{F} = -FG(1 - ff - gg) - fg(1 - F^2 - G^2) + Hh(Fg + Gf)$$

werden. Weil also

$$1 - ff - gg = hh$$
 und $1 - F^2 - G^2 = H^2$

ist, wird

$$\mathfrak{F} = Hh(Fg + Gf) - FGhh - fgHH$$

werden, was offensichtlich das Produkt aus den Faktoren Gh-Hg und Hf-Fh ist, sodass

$$\mathfrak{F} = (Gh - Hg)(Hf - Fh)$$

ist. Wenn wir nun um einen Schritt vorwärts gehen, leiten wir daraus den Wert

$$\mathfrak{G} = (Hf - Fh)(Fg - Gf)$$

her und indem wir noch einen Schritt vorwärts gehen

$$\mathfrak{H} = (Fg - Gf)(Gh - Hg).$$

§23 Indem wir also diese alle zusammenfassen, werden wir die folgende Gleichung erlangen:

$$mm\sin^2 \omega = (Gh - Hg)^2 aa + 2(Gh - Hg)(Hf - Fh)ab$$
$$+ (Gf - Fh)^2 bb + 2(Hf - Fh)(Fg - Gf)bc$$
$$+ (Fg - Gf)^2 cc + 2(Fg - Gf)(Gh - Hg)ac$$

welcher Ausdruck natürlich ein Quadrat ist. Nach Ziehen der Wurzel wird also entspringen:

$$m \sin \omega = (Gh - Hg)a + (Hf - fH)b + (Fg - Gf)c$$

welche Formel auch negativ hätte angenommen werden können, aber weil hier von der Entfernung die Rede ist, pflegt sie immer positiv verstanden zu werden. Ja, auch $\sin \omega$ hätte negativ angenommen werden können, weil wir nur die Kosinus des Neigungswinkels unmittelbar gefunden haben, woher die eine Mehrdeutigkeit von der anderen beseitigt wird.

MECHANISCHES PROBLEM

§24 Nach Vorlage einer beliebigen in Richtung AZ wirkenden Kraft V, ihr Moment bezüglich der beliebigen Achse az zu bestimmen.

LÖSUNG

§25 Wir wollen die Lage jeder der beiden Richtungen AZ und az mit denselben Elementen ausgedrückt annehmen, welche oben formuliert worden sind, natürlich mit den drei Strecken AB = a, BC = b, Ca = c; aber dann mit den Kosinus F, G, H der Winkel, in denen die Richtung AZ zu den festen Achsen AF, AG, AH geneigt ist, und darüber hinaus mit den Kosinus f, g, h der Winkel, unter welchen die andere Richtung az zu den festen Achsen af, ag, ah geneigt ist; aus diesen Elementen wird also die gegenseitige Neigung der beiden Richtungen berechnet, nach Setzen von welcher $= \omega$ wir gefunden haben, dass $\cos \omega = Ff + Gg + Hh$ ist. Außerdem, wenn m die geringste Entfernung zwischen diesen zwei Richtungen bezeichnet, haben wir gerade gesehen, dass gilt:

$$m \sin \omega = (Gh - Hg)a + (Hf - Fh)b + (Fg - Gf)h.$$

§26 Aus diesen zwei für den Winkel ω und die geringste Entfernung m gefundenen Werten haben wir oben in Paragraph 5 bewiesen, dass das gesuchte Moment = $Vm\sin\omega$ sein wird. Daher, nachdem die gerade angegebenen Werte eingesetzt worden sind, wird das gesuchte Moment mit dieser Form ausgedrückt werden:

$$Va(Gh - Hg) + Vb(Hf - Fh) + Vc(Fg - Gf).$$

KOROLLAR

§27 Also beinhaltet der für das Moment gefundene Ausdruck, außer der vorgelegten Kraft selbst, die neun Buchstaben *a, b, c; F, G, H; f, g, h*; diese können aber auf sieben reduziert werden, weil

$$F^2 + G^2 + H^2 = 1$$
 und $f^2 + g^2 + h^2 = 1$

ist. Weil also wegen der so großen Menge sich die Natur dieser Formel nicht leicht durchschauen lässt, wird es nicht fern von der Sache sein, gewisse partikuläre Fälle, in welchen die Achse *az* entweder in die Richtung *af* oder *ag* oder aber *ah* zeigt, zu entwickeln.

Fall I, in welchem die Richtung az auf die Achse af fällt

§28 Also wird in diesem Fall, wegen der Koordinaten y=0 und z=0, g=0 und h=0 und daher f=1 sein; dann wird also $\cos \omega = F$ werden, und das Moment der vorgelegten Kraft in Bezug auf die Achse af wird V(bH-cG) sein.

Fall II, in welchem die Richtung az auf die Achse ag fällt

§29 In diesem Fall werden also die zwei Koordinaten x und z verschwinden, und daher wird f=0 und h=0 und daher g=1 sein. Also wird die Neigung zu dieser Achse durch $\cos \omega = G$ bestimmt, und das Moment bezüglich der Achse ag wird V(cF-aH) sein.

Fall III, in welchem die Richtung az auf die Achse ah fällt

§30 Hier verschwinden die beiden Koordinaten x und y, und deshalb wird f = 0 und g = 0, dann aber h = 1 sein. Der Kosinus der Neigung, oder des

Winkels ω , wird = H sein, und das gesuchte Moment bezüglich der Achse ah wird V(aG-bF) werden.

PROBLEM AUS DER MECHANIK

§31 Wenn die drei Momente bekannt sind, welche die vorgelegte Kraft V, wirkend in Richtung AZ, auf die drei festen Achsen af, ag, ah ausübt, das Moment zu finden, welches dieselbe Kraft bezüglich der Achse az hervorbringt.

LÖSUNG

§32 Wir wollen die drei bekannten Momente mit den Buchstaben \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} bezeichnen, und, wie wir gerade gefunden haben, werden wir

$$\mathfrak{R} = V(bH - cG), \quad \mathfrak{Q} = V(cF - aH), \quad \mathfrak{R} = V(aG - bF)$$

haben. Nun kann aber der oben für das Moment bezüglich der Achse *az* gefundene Ausdruck auch in dieser Form dargestellt werden:

$$Vf(bH-cG) + Vg(cF-aH) + Vh(aG-bF),$$

wo dieselben Formeln auftauchen, welche wir gerade für die Momente \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} gegeben haben, nach Einsetzen von welchen das Moment bezüglich der Achse az entsprechend $f\mathfrak{P} + g\mathfrak{Q} + h\mathfrak{R}$ sein wird, wo weder die Lage noch die angreifende Kraft V weiter in die Rechnung eingehen, woher wir das folgende Theorem von größter Bedeutung erhalten.

THEOREM AUS DER MECHANIK

§33 Von beliebigen Kräften werde ein um die Achse az herum beweglicher Körper angeregt, wenn die Momente der Kräfte bezüglich der Achsen af, ag, ah jeweils \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} waren, dann wird das Moment bezüglich der vorgelegten Achse az entsprechend $f\mathfrak{P} + g\mathfrak{Q} + h\mathfrak{R}$ sein, wo f, g, h die Kosinus der Winkel faz, gaz, haz bezeichnen. Die Gültigkeit dieses Theorems ist schon vollständig im vorhergehenden Problem bewiesen worden. Hier wird es aber förderlich sein bemerkt zu haben, dass jene drei Momente \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} in demselben Sinn zu verstehen sind. Wenn natürlich das Moment \mathfrak{P} für die Achse af in die Ebene gh fällt, dann müssen die beiden übrigen Elemente in den Ebenen hf und fg

liegen, oder entsprechend der Ordnung dieser Buchstaben, in der Ebene fgh, und zur selben Ebene wird sich auch das für die Achse gefundene Momente az erstrecken. Und wenn ein bestimmtes von diesen Momenten \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} , \mathfrak{R} in die gegenüberliegende Ebene gerichtet ist, wird es in der Rechnung negativ anzunehmen sein,

KOROLLAR 1

§34 Daraus wird also auch diese außerordentliche Wahrheit abgeleitet: Welche Kräfte auch immer bezüglich der drei zueinander normalen Achsen af, ag, ah dieselben Momente liefern, selbige werden für jedwede schräge Achse az die gleichen Momente erzeugen.

KOROLLAR 2

§35 Also können die Momente von Kräften für drei zueinander normale Achsen auf vollkommen gleiche Weise zusammengesetzt werden wie einfache Kräfte zusammengesetzt zu werden pflegen. Wenn nämlich dem Punkt a die Kräfte P, Q, R aufgeprägt waren, wird entlang der Richtungen af, ag, ah aus ihnen die Kraft gemäß der Richtung az = fP + gQ + hR zusammengesetzt, welche außerordentliche Harmonie der größten Aufmerksamkeit würdig anzusehen ist, und auf die ganze Mechanik können sich daraus nicht zu verachtende Zuwächse ergießen.