

ÜBER DIE WURZELN DER UNENDLICHEN GLEICHUNG

$$0 = 1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n \cdots (n+5)} + \text{ETC.}^*$$

Leonhard Euler

§1 In dieser allgemeinen Gleichung zeigt sich ein einzigartiges nicht zu verachtendes Phänomen, dass in den Fällen, in denen $n = 1$ oder $n = 2$ oder $n = 3$ ist, sie unendlich viele reelle Wurzeln hat, welche sich sogar angeben lassen; sobald aber die Zahl n drei übersteigt, werden all ihre Wurzeln imaginär. Wenn wir nämlich $n = 1$ setzen, dass diese Gleichung hervorgeht

$$0 = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdots 6} + \text{etc.}$$

hervorgeht, weil ja die Summe dieser Reihe $\cos x$ ist, werden all ihre Wurzeln auf die folgende Weise voranschreiten:

$$\pm \frac{\pi}{2}, \quad \pm \frac{3\pi}{2}, \quad \pm \frac{5\pi}{2}, \quad \pm \frac{7\pi}{2}, \quad \pm \frac{9\pi}{2} \quad \text{etc.,}$$

*Originaltitel: "De radicibus aequationis infinitae $0 = 1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n \cdots (n+5)} + \text{etc.}$ ", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 9 (1795, geschrieben 1777): pp. 19 – 40, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 16,1, pp. 241 – 265, Eneström Nummer E684, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

welche also eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz = π ist, so dass, wenn eine bestimmte Wurzel $x = r$ war, auch $x = r \pm \pi$ eine Wurzel sein wird.

§2 Wir wollen nun auch den Fall betrachten, in welchem $n = 2$ ist und die Gleichung

$$0 = 1 - \frac{xx}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{x^8}{2 \cdot \dots \cdot 9} - \text{etc.}$$

vorgelegt wird; diese Reihe bietet mit x multipliziert den Wert $\sin x$ dar und wird daher natürlich in allen Fällen verschwinden, in denen $\sin x = 0$ ist, außer im Fall $x = 0$, (denn weil die Summe der Reihe $\frac{\sin x}{x}$ ist, wird ihre Summe im Fall $x = 0$ entsprechend = 1 sein); daher werden alle Wurzeln dieser Gleichung

$$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi \text{ etc.}$$

sein, welche gleichermaßen eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz = π ist, sodass, wenn eine bestimmte Wurzel $x = r$ war, auch $x = r \pm \pi$ eine Wurzel sein wird, wovon allein der Fall $x = 0$ ausgenommen ist.

§3 Wir wollen nun auch $n = 3$ setzen, dass diese Gleichung hervorgeht

$$0 = 1 - \frac{xx}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^6}{3 \cdot \dots \cdot 8} + \text{etc.},$$

und weil ja

$$\cos x = 1 - \frac{xx}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot \dots \cdot 6} + \text{etc.}$$

ist, ist es ersichtlich, dass die Summe der vorgelegten Reihe

$$\frac{2(1 - \cos x)}{xx}$$

ist, welche Formel also, sooft sie verschwindet, eine Wurzel dieser Gleichung liefern wird. Dies passiert aber, sooft dem Buchstaben x die folgenden Werte zugeteilt werden

$$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \pm 10\pi \text{ etc.}$$

und daher im Allgemeinen $\pm 2i\pi$, während i irgendeine ganze Zahl bezeichnet, wenn nun der Fall $i = 0$ ausgenommen wird, weil ja für $x = 0$

$$\frac{2(1 - \cos x)}{xx} = 1$$

ist. Daher bilden in diesem Fall die Wurzeln von x auch eine arithmetische Progression, deren Differenz aber nicht weiter π , sondern 2π ist.

§4 Daher lässt sich also schließen, dass die Anzahl aller Wurzeln dieser letzten Gleichung doppelt so klein sind wie in den beiden vorhergehenden Fällen, woraus festgelegt werden zu können scheint, dass in diesem letzten Fall je zwei Wurzeln zu einer verschmelzen. Wir wissen aber aus der Analysis, dass zwei Wurzeln von Gleichungen immer bei den Grenzen zwischen den reellen und imaginären Wurzeln einander gleich werden; daher kann der Grund verstanden werden, warum, wenn dem Buchstaben n Werte größer als 3 zugeteilt werden, alle Wurzeln plötzlich imaginär werden.

§5 Damit dies deutlicher wird, wollen wir $n = 4$ setzen, dass man nun die Gleichung

$$0 = 1 - \frac{xx}{4 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^6}{4 \cdot \dots \cdot 9} + \text{etc.}$$

hat; und weil ja

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot \dots \cdot 5} - \text{etc.}$$

ist, ist es offensichtlich, dass die Summe der vorgelegten Reihe

$$\frac{6(x - \sin x)}{x^3}$$

ist. Es ist aber bekannt, dass immer $x > \sin x$ ist, sodass dieser Ausdruck überhaupt nicht $= 0$ werden kann, nicht einmal im Fall $x = 0$. Dennoch, weil dieser Ausdruck für $x = \infty$ verschwindet, scheint daher indes zumindest eine reelle Wurzel gebildet werden zu können, wenn wir freilich unendliche Größe zulassen wollen.

§6 Daher scheint mit Sicherheit bestätigt werden zu können, dass die vorgelegte allgemeine Gleichung immer unendlich viele reelle positive wie negative Wurzeln hat, wannimmer die Zahl n drei nicht übersteigt, sobald sie aber größer als drei angenommen wird, dass dann plötzlich gänzlich alle Wurzeln in imaginäre Größen übergehen werden. Dennoch ist indes noch keine Methode bekannt, mit deren Hilfe sich jene reellen Wurzeln angeben ließen, außer den schon erwähnten Fällen, in denen $n = 1$ oder $n = 2$ oder $n = 3$ ist. Wenn also für n irgendein Bruch kleiner als 3 genommen wird, wird die die Summe der vorgelegten Reihe ausdrückende Formel dermaßen transzendent und verwickelt, dass in keiner Weise die Fälle entdeckt werden können, in denen sie verschwindet.

§7 Damit dies klarer erkannt wird, wollen wir allgemein die Summe der vorgelegten Reihe untersuchen, welche wir $= \frac{s}{x^{n-1}}$ setzen wollen, dass

$$s = x^{n-1} - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}$$

wird; um ihren Wert leichter ausfindig machen zu können, wollen wir weiter

$$s = x^{n-1} - z$$

setzen, dass

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n \cdots (n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n \cdots (n+5)} - \text{etc.}$$

ist, welche Gleichung zweimal differenziert, wobei das Element ∂x als konstant angenommen worden ist,

$$\frac{\partial \partial z}{\partial x^2} = x^{n-1} - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n \cdots (n+3)} - \text{etc.} = s$$

liefert; deswegen werden wir

$$\frac{\partial \partial z}{\partial x^2} + z = x^{n-1}$$

haben, und so geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass diese Differentialgleichung zweiten Grades aufgelöst wird.

§8 Dem, der diese Gleichung genauer betrachtet, wird leicht klar werden, diese sie auf zweierlei Weisen integrierbar gemacht wird, wenn sie natürlich entweder mit $\partial x \cos x$ oder $\partial x \sin x$ multipliziert wird. Weil nämlich nach den üblichen Reduktionen

$$\int \frac{\partial \partial z \cos x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos x + \int \partial z \sin x,$$

dann aber

$$\int \partial z \sin x = z \sin x - \int z \partial x \cos x$$

ist, ist es offenkundig, dass

$$\int \frac{\partial \partial z \cos x}{\partial x} + \int z \partial x \cos x = \frac{\partial z}{\partial x} \cos x + z \sin x$$

sein wird. Daher ist es ersichtlich, wenn unsere Gleichung mit $\partial x \cos x$ multipliziert und integriert wird, dass diese Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos x + z \sin x = \int x^{n-1} \partial x \cos x$$

hervorgeht; denn eine Differenziation von dieser führt offenkundig zu der vorgelegten Gleichung.

§9 Weil in gleicher Weise

$$\int \frac{\partial \partial z \sin x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin x - \int \partial z \cos x$$

ist, dann aber

$$\int \partial z \cos x = z \cos x + \int z \partial x \sin x,$$

berechnet man daraus

$$\int \frac{\partial \partial z}{\partial x} \sin x + \int z \partial x \sin x = \frac{\partial z}{\partial x} \sin x - z \cos x,$$

sodass unsere Gleichung mit $\partial x \sin x$ multipliziert und integriert

$$\frac{\partial z}{\partial x} \sin x - z \cos x = \int x^{n-1} \partial x \sin x$$

liefert; denn die Differenziation von dieser führt ebenso zur vorgelegten Gleichung.

§10 Obwohl aber diese Gleichungen nur Differentialgleichungen von erstem Grad sind, weil wir ja zwei erlangt haben, werden wir aus deren Kombination, ohne weitere Integration, den Wert von z finden können. Wenn wir nämlich von der ersten mit $\sin x$ multiplizierten Gleichung die zweite mit $\cos x$ multipliziert abziehen, wird sofort berechnet, dass

$$z = \sin x \int x^{n-1} \partial x \cos x - \cos x \int x^{n-1} \partial x \sin x$$

sein wird, und so wird z durch zwei Integralformeln bestimmt, in welchen die beiden durch Integration eingehenden Konstanten enthalten zu sein zu verstehen sind; daher, wenn wir die beiden Integrale so annehmen, dass sie für $x = 0$ verschwinden, wird das vollständige Integral so dargeboten werden

$$z = \sin x \int x^{n-1} \partial x \cos x + A \sin x - \cos x \int x^{n-1} \partial x \sin x - B \sin x.$$

Weil nun

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n \cdots (n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n \cdots (n+5)} - \text{etc.}$$

ist, ist es ersichtlich, dass für $x = 0$ auch $z = 0$ wird, wenn nur $n + 1 > 0$ war, was sich immer annehmen lässt, weil ja auch die Zahl n größer als Null angenommen werden muss. Wir wollen also für die Bestimmung der Konstanten $x = 0$ setzen, und weil ja auch $z = 0$ ist, wird $0 = -B$ und daher $B = 0$ hervorgehen. Aber für die Bestimmung der anderen Konstante A wollen wir die den Wert von $\frac{\partial z}{\partial x}$ ausdrückende Reihe betrachten, welche

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+2}}{n \cdots (n+2)} + \frac{x^{n+4}}{n \cdots (n+4)} - \text{etc.}$$

ist, welche gleichermaßen für $x = 0$ gesetzt verschwindet, wenn nur $n > 0$ war. Aber wenn die vollständige Integralgleichung differenziert wird, wird man wegen $B = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \cos x + \cos x \int x^{n-1} \partial x \cos x + \sin x \int x^{n-1} \partial x \sin x$$

finden. Daher, weil die beiden Integralformeln für $x = 0$ verschwinden, wird wegen $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ daraus $0 = A$ und daher auch die Konstante $A = 0$ werden. Und so wird die Integralformel an unseren Fall angepasst

$$z = \sin x \int x^{n-1} \partial x \cos x - \cos x \int x^{n-1} \partial x \sin x$$

sein, wenn nur die beiden Integrale so genommen werden, dass sie für $x = 0$ verschwinden. Aber dann wird für die Summe der vorgelegten Reihe selbst $s = x^{n-1} - z$ sein, welche durch x^{n-1} geteilt die Summe der vorgelegten Reihe geben wird.

§11 Weil unsere Frage also darin besteht, dass für jedwede Zahl n die Werte von x angegeben werden, für welche unsere Reihe

$$1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n \cdots (n+3)} - \frac{x^6}{n \cdots (n+5)} + \text{etc.}$$

verschwindet, was passiert, sooft $s = 0$ war, wird die Auflösung dieser Gleichung

$$x^{n-1} = \sin x \int x^{n-1} \partial x \cos x - \cos x \int x^{n-1} \partial x \sin x$$

alle gesuchten Wurzeln x geben.

§12 Es ist aber ersichtlich, dass die Auflösung dieser Gleichung die Kräfte der Analysis gleichermaßen übersteigt wie die vorgelegte Frage selbst, einzig ausgenommen in den Fällen, die wir oben angegeben haben, welche $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ sind; daher wird es der Mühe Wert sein, die gefundene Lösung auf die gefundenen Fälle anzuwenden. Es sei also $n = 1$ und daher $x^{n-1} = 1$, und die erste Integralformel wird

$$\int \partial x \cos x = \sin x,$$

die zweite hingegen

$$\int \partial x \sin x = 1 - \cos x$$

geben, nach Einsetzen welcher Werte unsere Gleichung

$$1 = \sin^2 x - \cos x + \cos^2 x = 1 - \cos x$$

sein wird, und daher $\cos x = 0$, wie per se offenkundig ist.

§13 Für den zweiten Fall sei $n = 2$ und daher $x^{n-1} = x$, und die erste Integralformel wird

$$\int x \partial x \cos x = x \sin x - \int \partial x \sin x = x \sin x + \cos x - 1$$

geben, die zweiten hingegen

$$\int x \partial x \sin x = -x \cos x + \int \partial x \cos x = -x \cos x + \sin x,$$

nach Einsetzen welcher Werte unsere Gleichung

$$x = x \sin^2 x + x \cos^2 x - \sin x = x - \sin x$$

und daher $\sin x = 0$ wird, genauso wie wir es oben hatten.

§14 Für den dritten Fall wollen wir $n = 3$ setzen, dass $x^{n-1} = xx$ ist, und die erste Integralformel wird

$$\int xx \partial x \cos x = xx \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

geben, die zweite hingegen liefert

$$\int xx \partial x \sin x = -xx \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x - 2,$$

nach Finden von welchen unsere Gleichung für diesen Fall

$$\begin{aligned} xx &= xx \sin^2 x + 2x \sin x \cos x - 2 \sin^2 x \\ &+ xx \cos^2 x - 2x \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 2 \cos x \end{aligned}$$

oder

$$xx = xx - 2 + 2 \cos x$$

sein wird, und so muss

$$1 - \cos x = 0$$

sein, genauso wie wir schon oben bemerkt haben.

§15 Eine solche Reduktion gelingt aber, sooft n eine ganze positive Zahl war; um dies zu zeigen, sei noch $n = 4$ und $x^{n-1} = x^3$, und die erste Integralformel wird

$$\int x^3 dx \cos x = x^3 \sin x - 3 \int xx dx \sin x$$

oder

$$\int x^3 dx \cos x = x^3 \sin x + 3xx \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + 6$$

geben, die zweite hingegen

$$\int x^3 dx \sin x = -x^3 \cos x + 3 \int xx dx \cos x$$

oder

$$\int x^3 dx \sin x = -x^3 \cos x + 3xx \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x,$$

aus welchen man folgende Gleichung aufstellt

$$\begin{aligned} x^3 &= x^3 \sin^2 x + 3xx \sin x \cos x - 6x \sin^2 x - 6x \sin x \cos x + 6 \sin x \\ &+ x^3 \cos^2 x - 3xx \sin x \cos x - 6x \cos^2 x + 6x \sin x \cos x \end{aligned}$$

oder

$$x^3 = x^3 - 6x + 6 \sin x,$$

sodass

$$x - \sin x = 0$$

sein muss, genauso wie oben. Aber Ausdrücke von solcher Art lassen sich für die Fälle, in denen n eine ganze Zahl ist, sehr leicht aus den bekannten Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ ableiten.

§16 Weil wir ja also hinreichend sicher sind, dass in den Fällen, in denen $n < 3$ ist, die vorgelegte Gleichung unendlich viele reelle Wurzeln hat, wäre es sehr zu wünschen, dass diese Wurzeln auch, wenn n keine ganze Zahl ist, angegeben werden könnten; aber bei dieser Aufgabe versagen der Analysis die Kräfte, und wir müssen zufrieden sein, wenn wir diese Wurzeln näherungsweise darbieten können. Wir wollen also den Fall $n = \frac{1}{2}$ betrachten, und unsere Gleichung wird diese Form annehmen

$$0 = 1 - \frac{4xx}{1 \cdot 3} + \frac{16x^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{64x^6}{1 \cdot 3 \cdots 11} + \text{etc.}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$4xx = z$$

gesetzt worden ist, wird diese Gleichung aufzulösen sein

$$0 = 1 - \frac{z}{1 \cdot 3} + \frac{zz}{1 \cdots 7} - \frac{z^3}{1 \cdots 11} + \frac{z^4}{1 \cdots 16} - \text{etc.},$$

wo die Werte von z verlangt werden, die die Summe dieser Reihe zu Null werden lassen.

§17 Hier wird es vor allem förderlich sein bemerkt zu haben, sofern $z < 3$ war, dass die Summe dieser Reihe immer positiv ist und freilich größer als $\frac{1}{2}$ aber kleiner als $\frac{3}{4}$ ist. Denn wenn man die Reihe

$$1 - a + b - c + d - e + \text{etc.}$$

hat, all deren Terme $1, a, b, c, d$ etc. ununterbrochen schrumpfen, ist bekannt, wenn man

$$1 - a = \alpha, \quad 1 - 2a + b = \beta, \quad 1 - 3a + 3b - c = \gamma \quad \text{etc.}$$

setzt, dass die Summe dann

$$= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} + \frac{\gamma}{16} + \text{etc.}$$

sein wird. Daher, wenn man nur die ersten zwei Terme nimmt, wird die Summe größer als

$$\frac{1}{2} + \frac{1-a}{4} = \frac{3-a}{4}$$

sein. Daher ist es ersichtlich, dass unsere Reihe nur gleich Null werden kann, wenn $z > 3$ ist. Deswegen stelle man unsere Gleichung so dar

$$0 = 1 - \frac{z}{3} \left(1 - \frac{z}{5 \cdot 7} + \frac{zz}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{z^3}{5 \dots 11} + \text{etc.} \right).$$

§18 Wenn also nun $z < 5 \cdot 7$ war, schrumpfen in dieser letzten Reihe alle Terme ununterbrochen und daher wird ihre Summe näherungsweise $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{5 \cdot 7}$ sein. Wir wollen also, um Brüche zu vermeiden, $\frac{z}{5 \cdot 7} = v$ setzen und wir werden diese Gleichung haben

$$1 = \frac{z}{3} \cdot \frac{3 - v}{4} = \frac{35v(3 - v)}{12};$$

daher wird also

$$\frac{12}{35} = 3v - vv \quad \text{oder} \quad -\frac{12}{35} = vv - 3v$$

sein. Wir wollen auf beiden Seiten $\frac{9}{4}$ addieren und werden

$$\frac{9}{4} - \frac{12}{35} = \left(v - \frac{3}{2} \right)^2$$

haben, woher nach Ziehen der Wurzel in Dezimalbrüchen

$$v - \frac{3}{2} = \pm 1,380$$

sein wird, deren kleinerer Wert $v = 0,120$ liefert. Daher wird also $z = 4,20 = 4xx$ sein, woher weiter

$$2x = 2,05 \quad \text{und daher} \quad x = 1,025$$

sein wird. Dass dieser Wert aber stark vom wahren abweicht, werden wir bald sehen, wenn wir die Sache genauer bestimmen können.

§19 Zu diesem Zweck wird auf angenehme Weise die Methode des hoch geehrten BERNOULLI, die kleinste Wurzel mithilfe einer rekurrenten Reihe zu bestimmen, verwendet werden können. Wenn man nämlich im Allgemeinen eine Gleichung von dieser Art hat

$$1 = \alpha z - \beta zz + \gamma z^3 - \text{etc.}$$

und daraus die rekurrente Reihe aus der Verhältnisskala $\alpha, -\beta, +\gamma, -\delta$ etc. gebildet wird, welche $1, A, B, C, D, E$ etc. sei, sodass

$$\begin{aligned} A &= \alpha, \\ B &= \alpha A - \beta, \\ C &= \alpha B - \beta A + \gamma, \\ D &= \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

ist, dann kommen die folgenden Brüche $\frac{1}{A}, \frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}$ etc. immer näher an den wahren Wert von z heran, woher klar ist, dass mit dieser Methode unsere Gleichung im Allgemeinen aufgelöst werden kann.

§20 Weil also für unseren Fall, in dem $n = \frac{1}{2}$ und $4xx = z$ ist,

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \quad \gamma = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}, \quad \delta = \frac{1}{3 \cdot \dots \cdot 15} \quad \text{etc.}$$

gilt, wird in Dezimalbrüchen sein:

$$\begin{aligned} A &= 0,33333; \\ B &= 0,11111 - 0,00952 = 0,10159; \\ C &= 0,03386 - 0,00317 + 0,00010 = 0,03079; \end{aligned}$$

weiter fortzuschreiten wäre überflüssig. Daher werden die immer näher an z herankommenden Dezimalbrüche sein:

$$\text{I. } z = 3,000; \quad \text{II. } 3,281; \quad \text{III. } z = 3,291.$$

§21 Wenn wir aber weiter fortschreiten wollen, werden wir

$$D = 0,01029 - 0,00097 = 0,00932$$

finden; daher wird also der vierte Wert für z

$$\frac{C}{D} = 3,304;$$

daher können wir mit ziemlicher Sicherheit schließen, dass der wahre von z ein wenig größer ist; deswegen wollen wir $z = 3,31$ setzen und, weil $z = 4xx$ ist, wird nach Ziehen der Wurzel $2x = 1,819$ und daher $x = 0,909$ sein.

§22 Hinreichend nachdrücklich können wir also versichern, dass im Fall $n = \frac{1}{2}$ die kleinste Wurzel unserer Gleichung $x = 0,909$ ist, welche also merklich kleiner ist als für den Fall $n = 1$, wo die kleinste Wurzel $x = \frac{\pi}{2} = 1,571$ war; aber dennoch ist sie größer als ihre Hälfte. Wir wollen also sehen, welches Verhältnis diese zwei Zahlen $0,909$ und $1,571$ näherungsweise zueinander haben. Wir wollen also die größere durch die kleinere und unterbrochen den Teiler durch den vorausgehenden Rest teilen, und die Quotienten werden der Reihe nach $1, 1, 2, 1, 2, 8$ sein, woher die immer näher an den wahren Wert herankommenden Brüche $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}$. Daher erschließen wir, dass die gefundene Zahl $0,909$ sich zu $\frac{\pi}{2}$ verhält wie $11 : 19$ oder näherungsweise wie 4 zu 7 ; weil dieses Verhältnis ziemlich nahe an das Verhältnis $1 : \sqrt{3}$ herankommt, lässt sich daher mit Recht vermuten, dass der wahre Wert von x hier $x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ist.

§23 Um aber bezüglich dieser Vermutung sicherer zu sein, wollen wir in gleicher Weise einen anderen Fall entwickeln, in dem $n = \frac{1}{4}$ ist, dabei untersuchend, ob der kleinste Wert von x auch auf eine solch einfache Form zurückgeführt werden kann. Aber dann wird, der Kürze wegen zuvor

$$16xx = z$$

gesetzt, die Gleichung

$$1 - \frac{z}{1 \cdot 5} + \frac{zz}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} - \frac{z^3}{1 \dots 21} + \text{etc.}$$

aufzulösen sein; um deren kleinste Wurzel mit der BERNOULLI'schen Methode ausfindig zu machen, wird

$$\alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{1}{5 \cdot 9 \cdot 13}, \quad \gamma = \frac{1}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 21} \quad \text{etc.}$$

sein, woher die rekurrente Reihe in Dezimalbrüchen sein wird:

$$A = 0,2000000;$$

$$B = 0,0400000 - 0,0017094 = 0,0382906;$$

$$C = 0,0076581 - 0,0003419 + 0,0000048 = 0,0073210;$$

$$D = 0,0014642 - 0,0000655 + 0,0000010 = 0,0013997.$$

Daher werden also die immer näher an z herankommenden Brüche sein:

$$\text{I. } z = 5,0000; \quad \text{II. } z = 5,2232; \quad \text{III. } z = 5,2302; \quad \text{IV. } z = 5,2304.$$

Daher ist klar, dass mit ziemlicher Gewissheit $z = 5,2305 = 16xx$ geschlossen werden kann; daher wird nach Ziehen der Wurzel $4x = 2,2870$ und daher $x = 0,5717$.

§24 §24 fehlt in der Originalversion. Die Euler'sche Zählung der Paragraphen wurde in der Opera Omnia Version und daher entsprechend in der vorliegenden Übersetzung beibehalten.

§25 Um nun zu ermitteln, ob dieser für x gefundene Wert ein einfaches Verhältnis zu π hat, wird das bequemer bei den Quadraten erkannt werden, indem man den Wert $\frac{\pi\pi}{xx}$ sucht, dessen Logarithmus = 1,4798764 ist, welchem die Zahl 30,191 zukommt; daher lässt sich vermuten, dass der wahre Wert vielleicht sogar = 30 ist, sodass $xx = \frac{\pi\pi}{30}$ und daher $x = \frac{\pi}{\sqrt{30}}$ ist. Aber die Zahl 30 ist in der Tat ziemlich bemerkenswert und scheint daher unseren Verdacht zu erhärten, dass in in Fällen dieser Art die Wurzeln x hinreichend gefällig mithilfe des Kreisumfangs π dargestellt werden kann. Es wird also der Mühe Wert sein, noch andere Fälle von dieser Gestalt untersucht zu haben.

§26 Wir wollen also $n = \frac{1}{3}$ nehmen, und nach Setzen von $9xx = z$ wird die Gleichung

$$0 = 1 - \frac{z}{1 \cdot 4} + \frac{zz}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} - \frac{z^3}{1 \cdots 16} + \text{etc.}$$

sein, woher

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10}, \quad \gamma = \frac{\beta}{13 \cdot 16}, \quad \delta = \frac{\gamma}{19 \cdot 22} \quad \text{etc.}$$

wird. Daher werden die Terme der rekurrenten Reihe

$$A = 0,2500000;$$

$$B = 0,0625000 - 0,0035714 = 0,0589286;$$

$$C = 0,0147321 - 0,0008928 + 0,0000172 = 0,0138565;$$

$$D = 0,0034641 - 0,0002105 + 0,0000043 = 0,0032579$$

sein. Daher entspringen also für z die folgenden Werte:

$$\text{I. } z = 4,0000;$$

$$\text{II. } z = 4,2424;$$

$$\text{III. } z = 4,2528;$$

$$\text{IV. } z = 4,2532;$$

Daher lässt sich mit ziemlicher Sicherheit $z = 4,2534$ setzen.

§27 Weil also $z = 9xx$ ist, wird $3x = 2,0624$ und daher $x = 0,6875$ sein. Aber für das Aufspüren des Verhältnisses von dieser Zahl zum Kreisumfang π betrachte man den Bruch $\frac{\pi\pi}{xx}$, dessen Logarithmus = 1,3198060 und daher $\frac{\pi\pi}{xx} = 20,833$ ist, welche Zahl so beschaffen ist, dass sie jede Hoffnung zerstreut, eine bestimmte Struktur in diesen Werten auszumachen, welche also zu den höher transzendenten Größen zu zählen sein werden.

§28 Aus diesen Beispielen ist klar, umso kleiner der Bruch für n angenommen wird, dass die rekurrente Reihe umso schneller den wahren Wert von z geben wird, sodass es genügt $\frac{A}{B} = z$ zu setzen, wenn nur $n < \frac{1}{3}$ war. Wir wollen also im Allgemeinen $n = \frac{1}{v}$ setzen, und für $\nu\nu = zz$ gesetzt wird unsere Gleichung

$$1 - \frac{z}{1+v} + \frac{zz}{(1+v)(1+2v)(1+3v)} - \frac{z^3}{(1+v)\cdots(1+5v)} + \text{etc.} = 0$$

sein, woher

$$\alpha = \frac{1}{1+v}, \quad \beta = \frac{\alpha}{(1+2v)(1+3v)}$$

und daher

$$A = \alpha = \frac{1}{1 + \nu}$$

und

$$B = \alpha A - \frac{\alpha}{(1 + 2\nu)(1 + 3\nu)}$$

wird. Weil also $\alpha = A$ ist, wird

$$B = \alpha A - \frac{A}{(1 + 2\nu)(1 + 3\nu)}$$

sein, woher man sofort

$$z = \frac{A}{B} = \frac{(1 + \nu)(1 + 2\nu)(1 + 3\nu)}{(1 + 2\nu)(1 + 3\nu) - (1 + \nu)}$$

oder

$$z = \frac{(1 + \nu)(1 + 2\nu)(1 + 3\nu)}{4\nu + 6\nu\nu}$$

findet.

§29 Weil also $z = \nu\nu x x$ ist, wird

$$x x = \frac{(1 + \nu)(1 + 2\nu)(1 + 3\nu)}{2\nu^3(2 + 3\nu)}$$

sein, aus welchem Wert es offenkundig ist, es nicht geschehen kann, dass der Bruch $\frac{\pi\nu}{x x}$ eine ganze Zahl liefert, wie wir vermutet haben, sondern die Werte von x eher zu einer höheren Art von transzendenten Größen zu zählen sind; so wie auch die Werte der Reihe in den Fällen, in denen n eine gebrochene Zahl ist, transzendenten Größen von höherer Ordnung beinhalten.

§30 Wannimmer aber n kein so kleiner Bruch ist, wie wir hier angenommen haben, und sogar wenn n die Einheit übersteigt, wird die rekurrente Reihe zu um vieles mehr Termen fortgesetzt werden müssen. Damit dies besser verstanden wird, wollen wir den Fall $n = 3$ entwickeln, welches der äußerste ist, der noch reelle Wurzeln beinhalten, deren kleinste wir wissen $x = 2\pi$ zu sein. Weil also unsere Gleichung für $x x = z$ gesetzt

$$0 = 1 - \frac{z}{3 \cdot 4} + \frac{zz}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{z^3}{3 \cdot \dots \cdot 8} + \text{etc.}$$

ist, werden wir daher

$$\alpha = \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \beta = \frac{\alpha}{5 \cdot 6}, \quad \gamma = \frac{\beta}{7 \cdot 8}, \quad \delta = \frac{\gamma}{9 \cdot 10} \quad \text{etc.}$$

haben, woher in Dezimalbrüchen die Terme der rekurrenten Reihe nach dem ersten, welcher = 1 ist, sein werden:

$$A = 0,0833333;$$

$$B = 0,0069444 - 0,0027777 = 0,0041667;$$

$$C = 0,0003472 - 0,0002315 + 0,0000596 = 0,0001653;$$

$$D = 0,0000138 - 0,0000116 \\ = 0,0000058;$$

$$+ 0,0000041 - 0,0000005$$

$$E = 0,0000005 - 0,0000004 \\ = 0,0000003.$$

$$+ 0,0000002 - 0,0000000$$

§31 Nachdem diese Terme gefunden worden sind, werden die Brüche für die Zahl z die folgenden sein

$$\text{I. } z = \frac{1}{A} = 12,000; \quad \text{IV. } z = \frac{C}{D} = 28,400;$$

$$\text{II. } z = \frac{A}{B} = 20,000; \quad \text{V. } z = \frac{D}{E} = 19,333;$$

$$\text{III. } z = \frac{B}{C} = 25,206; \quad \text{höchst ungewiss}$$

Weil ja aber bekannt ist, dass in Wahrheit $z = xx = 4\pi\pi$ ist, wird der wahre Wert $z = 39,478$ sein. Also kommen die gefundenen Werte nur allzu langsam an die Wahrheit heran, sodass auf diese Weise, auch wenn die Rechnung bis hin zu sehr vielen Termen fortgesetzt wird, sich der wahre Wert nicht hinreichend genau hätte finden lassen.

§32 Weil ja aber der Fall $n = 3$ der äußerste von denen ist, die eine reelle Wurzel zulassen, ist es notwendig, dass für alle Fälle, in denen $n > 3$ ist, die aus der rekurrenten Reihe gebildeten Werte nicht nur nicht konvergieren, sondern sogar divergieren. Dennoch werden wir indes, weil es ja in den Fällen, in denen n eine ganze Zahl war, möglich war, alle Wurzeln so gefällig mithilfe der Quadratur des Kreises darzubieten, vermuten können, wenn n eine ganze Zahl war, dass auch die imaginären Wurzeln vielleicht mithilfe des Kreises dargeboten werden können, was nicht unpassend sein wird, es an einem einzigen Fall untersucht zu haben, weil kein Weg offensteht die trinomischen Faktoren ausfindig zu machen.

§33 Wir wollen also den Fall entwickeln, in dem $n = 4$ ist und diese Gleichung zu entwickeln ist:

$$0 = 1 - \frac{xx}{4 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^6}{4 \cdot \dots \cdot 9} + \text{etc.},$$

welche wir oben gesehen haben zu dieser einfacheren Form reduziert zu werden: $x = \sin x$; weil dieser Gleichung keine reelle Wurzel Genüge leistet, aber alle imaginären Größen in der Form $a + b\sqrt{-1}$ erfasst werden können, wollen wir

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

setzen, und die Frage geht darauf zurück, wie auch $\sin x$ mit einer solchen Form ausgedrückt werden kann. Um dies zu leisten, wollen wir auf Exponentialformeln ausweichen, mit welchen

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

ist. Weil also

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{a\sqrt{-1}} \cdot e^{-b}$$

und

$$e^{-x\sqrt{-1}} = e^{-a\sqrt{-1}} \cdot e^{+b}$$

ist, wird umgekehrt

$$e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \sqrt{-1} \sin a$$

und

$$e^{-a\sqrt{-1}} = \cos a - \sqrt{-1} \sin a$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte wir berechnen, dass

$$\sin x = \frac{\cos a(e^b - e^{-b}) + \sqrt{-1} \sin a(e^{-b} + e^{+b})}{2\sqrt{-1}}$$

sein wird.

§34 Weil also per Annahme

$$\sin x = x = a + b\sqrt{-1}$$

ist, wird

$$2\sqrt{-1} \sin x = 2a\sqrt{-1} - 2b$$

sein, welcher Ausdruck also dem obigen gleich sein muss, was nur geschehen kann, wenn die reellen und imaginären Anteile getrennt voneinander gleich werden, woher die zwei folgenden Gleichungen hervorgehen

$$2a = \sin a(e^{-b} + e^{+b}) \quad \text{und} \quad 2b = \cos a(e^{+b} - e^{-b}),$$

woher wir

$$\cos a = \frac{2b}{e^b - e^{-b}} \quad \text{und} \quad \sin a = \frac{2a}{e^b + e^{-b}}$$

erschließe. Daher werden wir also zuerst $\sin a$ und $\cos a$ eliminieren können; nachdem nämlich die Quadrate genommen worden sind, geht

$$1 = \frac{4bb}{(e^b - e^{-b})^2} + \frac{4aa}{(e^b + e^{-b})^2}$$

hervor. Weiter können auch die Exponentialgrößen eliminiert werden. Weil nämlich

$$e^b + e^{-b} = \frac{2a}{\sin a} \quad \text{und} \quad e^b - e^{-b} = \frac{2b}{\cos a}$$

ist, ziehe man das Quadrat der zweiten vom Quadraten der ersten Gleichung ab, und es wird

$$1 = \frac{aa}{\sin^2 a} - \frac{bb}{\cos^2 a}$$

zurückbleiben, woher

$$bb = aa \cot^2 a - \cos^2 a$$

wird; aus der ersten könnte aber die Größe a über die andere b auf diese Weise bestimmt werden

$$4aa = (e^b + e^{-b})^2 - \frac{4bb(e^b + e^{-b})^2}{(e^b - e^{-b})^2}.$$

§35 Aber aus den zwei zuerst gefundenen Formeln, welche

$$\cos a = \frac{2b}{e^b - e^{-b}} \quad \text{und} \quad \sin a = \frac{2a}{e^b + e^{-b}}$$

waren, sieht man ein, dass sie nicht verändert werden, auch wenn $-b$ anstelle von b geschrieben wird; weiter entsteht auch keine Veränderung, auch wenn $-a$ anstelle von a geschrieben wird; daher, wenn $x = a + b\sqrt{-1}$ war, werden zugleich drei andere imaginäre Werte Geltung haben, welche alle in dieser doppelt zweideutigen Form enthalten sind

$$x = \pm a \pm b\sqrt{-1}.$$

§36 Es wird also ausreichen, dass allein die positiven Werte für a betrachtet zu haben, und zuerst ist freilich klar, dass deswegen alle Winkel ausgeschlossen werden, deren Sinus oder Kosinus negativ sind; daher bleiben keine anderen übrig außer denen, die in der Form $2i\pi + \alpha$ enthalten sind, wobei $\alpha < 90^\circ$ ist und i irgendeine ganze Zahl bezeichnet. Aus dem Fall $i = 0$ zeigt sich freilich sofort der Fall $a = 0$ und $b = 0$, welcher aber für unser Unterfangen unpassend ist, weshalb wir beim Fall $i = 1$ anzufangen haben werden, indem wir

$$a = 2\pi + \alpha$$

setzen, und so werden unsere Gleichungen

$$\cos \alpha = \frac{2b}{e^b - e^{-b}} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{4\pi + 2\alpha}{e^b + e^{-b}}$$

sein, wo, weil $4\pi + 2\alpha > 12$ ist, die Formel $e^b + e^{-b}$ um vieles mehr die Zahl 12 übersteigen muss, woher b merklich größer sein muss als 2 und vielleicht nicht sehr viel von drei abweicht. Aber dann wird wegen $e^b > 12$ aus der ersten Formel gewiss

$$\cos \alpha < \frac{2b}{12} < \frac{1}{2}$$

sein; daher folgt, dass der Winkel α notwendig 60° überschreitet; deswegen wollen wir

$$\alpha = 90^\circ - \omega \quad \text{oder} \quad a = \frac{5}{2}\pi - \omega$$

setzen, und unsere Gleichungen werden nun

$$\sin \omega = \frac{2b}{e^b - e^{-b}}$$

und

$$\cos \omega = \frac{5\pi - 2\omega}{e^b + e^{-b}}$$

sein. Es werden also die Werte der Buchstaben ω und n gesucht, dass diesen beiden Gleichungen Genüge geleistet wird; aber dafür steht kein anderer Weg offen als dass wir uns durch wiederholtes Probieren immer näher an deren wahren Werte herantasten.

§37 Damit aber die Exponentialformeln unsere Rechnung nicht stören, wollen wir

$$e^b = n$$

setzen, dass

$$e^{-b} = \frac{1}{n}$$

ist; aber dann, durch Nehmen von hyperbolischen Logarithmen, wird $b = \log n$ sein. Um also gewöhnlich Logarithmen gebrauchen zu können, wird

$$b = 2,30258509 \log n$$

werden, welche Zahl der hyperbolische Logarithmus von zehn ist, woher aus der Zahl n leicht b mithilfe von Logarithmen berechnet wird, weil

$$\log b = \log \log n + 0,3622156$$

ist. Daher ist aber zugleich klar, wenn die Zahl n einen kleinen Zuwachs ∂n erfährt, dass das Inkrement des Buchstabens b dann $= \frac{\partial n}{n}$ sein wird, und wenn wir diesen Zuwachs genauer haben wollen, wird er

$$= \frac{\partial n}{n} - \frac{\partial n^2}{2nn} + \frac{\partial n^3}{3n^3} - \text{etc.}$$

sein.

§38 Was aber den Winkel ω betrifft, wenn wir ihn in Minutensekunden ausgedrückt vorliegen haben, deren Zahl N sein, dann wird der Winkel ω in Kreisteilen ausgedrückt gefunden werden, wenn zu $\log N$ dieser Konstante Logarithmus addiert wird 4,6855749; denn die entsprechende Zahl wird den gesuchten geben.

§39 Nun wollen wir also den Versuch beginnen und $n = 20$ setzen, woher wir zuerst b in dieser Weise suchen wollen:

$$\log n = \underline{1,3010300};$$

$$\log \log n = 0,1142873;$$

$$\text{add.} = \underline{0,3622156};$$

$$\log b = 0,4765029;$$

$$\text{also } b = 2,9957.$$

Weil nun die erste Gleichung

$$\sin \omega = \frac{2b}{n - \frac{1}{n}},$$

die andere hingegen

$$\cos \omega = \frac{5\pi - 2\omega}{n + \frac{1}{n}}$$

ist, wird für die erste $n - \frac{1}{n} = 19,950$ und die Hälfte davon = 9,9750 sein, woher wir

$$\log \sin \omega = 9,4775900$$

berechnen, also den Winkel $\omega = 17^\circ 28'$ und daher in Minutensekunden $\omega = 62880''$, als logische Konsequenz in Kreisanteilen

$$\omega = 0,30485.$$

Daher wird man für die andere Gleichung

$$\log \cos \omega = 0,9794991$$

haben. Für die rechte Seite ist hingegen zuerst der Zähler

$$5\pi - 2\omega = 15,098216$$

und sein Logarithmus = 1,179256, aber der Nenner wird

$$n + \frac{1}{n} = 20,050$$

sein, woher der Logarithmus der rechten Seite 9,8768112 sein wird, welcher zu klein ist; daher schließen wir, dass die Nenner kleiner und daher $n < 20$ sein muss.

§40 Wir wollen also der Zahl n einen kleineren Wert zuteilen, zunächst 18; und die ganze Rechnung wollen wir in der folgenden Tabelle beifügen:

	$n = 18$	$n = 16$	$n = 15,9333$
$\log n$	1,2552725	1,2041200	1,2022985
$\log \log n$	0,0987379	0,0806699	0,0800125
add	0,3622156	0,3622156	0,3622156
$\log b$	0,4609535	0,4428855	0,4422281
$\frac{1}{n}$	0,5555	0,06250	0,06276
$n - \frac{1}{n}$	17,94444	15,93750	15,87057
$n + \frac{1}{n}$	18,05555	16,06250	15,99609
$\log 2b$	0,7619835	0,749155	0,7432581
$\log n - \frac{1}{n}$	1,2539300	1,2024202	1,2005925
$\log \sin \omega$	1,5080535	9,5414953	9,5426656
ω	18°47'	20°22'	20°25'6''
N	67620	73320	73506
$\log N$	4,8300752	4,8652225	4,8663228
add.	4,6855749	4,6855749	4,6855749
$\log \omega$	9,5156501	9,550794	9,5518977
ω	0,32783	0,35547	0,35637
2ω	0,65566	0,71094	0,71274
5π	15,70796	15,70796	15,70796
$5\pi - 2\omega$	15,05230	14,99702	14,99522
$\log(5\pi - 2\omega)$	1,1776029	1,1760050	1,1759529
$\log\left(n + \frac{1}{n}\right)$	1,2565975	1,2058131	1,2040138
...	9,9210054	9,9701919	9,9719391
$\log \cos \omega$	9,9762321	9,9719642	9,9718186
Fehler	-0,0552267	-0,0017723	+0,0001205

§41 Also ging in der ersten Spalte ein Fehler von $-0,0552267$ hervor, welcher im Fall $n = 20$ noch $-0,1026879$ war, woher wir gefolgert haben, dass der Wert von n noch zu groß ist und daher die zweite Spalte hinzugefügt haben, wo wir $n = 16$ gesetzt haben. Aber aus der zweiten Spalte ging ein Fehler von $-0,0017723$ hervor; daher, weil die erste Spalte einen Fehler von $-0,0552267$ gegeben hat und die Differenz $0,0534544$ aus der Unterschiedlichkeit der Annahmen entstanden ist, sei $5345 : 2 = 177 : 0,066$, und um einen so großen Bruch wird die Zahl $n = 16$ vermindert werden müssen. Man setze also für die dritte Spalte $n = 15,9333$ und die Rechnung werde wie in den ersten durchgeführt, und der daraus resultierende Fehler wird in der Tat für keinen gehalten werden können, sodass wir nun gewiss sind, dass $a = 7,49761$ und $b = 2,76840$ ist.

§42 Nachdem also die Buchstaben a und b gefunden worden sind, wird kein einfaches Verhältnis zwischen ihnen entdeckt, und sie haben nicht einmal ein merkliches Verhältnis zur Peripherie π . Wir wollen aber den trinomischen Faktor selbst betrachten, aus welchem diese imaginäre Wurzel entstanden ist, welcher

$$yy \pm 2ay + aa + bb$$

ist; und aus den gefundenen Werten findet man

$$aa + bb = 63,87821;$$

weil diese Zahl sich weder einer besonderen Eigenschaft erfreut noch zu $\pi\pi$ ein einfach rationales Verhältnis hat, verschwindet jede Hoffnung, die trinomischen Faktoren der vorgelegten Gleichung in einfacher Weise auszudrücken, welche also auch ohne Zweifel höher transzendente Größen beinhalten. Dennoch bin ich indes zuversichtlich, dass die Behandlung dieses Gegenstandes, in welchem einige außerordentliche Kunstgriffe auftauchen, den Geometern nicht missfallen wird.