Verschiedene Betrachtungen über die Fläche von Kugeldreiecken*

Leonhard Euler

§1 Der erste, der die Fläche eines Kugeldreiecks zu bestimmen gelehrt hat, war, laut Wallis, Albert Girard, der bewiesen hat, dass die Fläche eines Kugeldreiecks immer proportional zum Übertrag der Summe der drei Winkel über zwei rechte Winkel sein muss, und daher die Fläche selbst gefunden wird, wenn dieser Übertrag, in den Bogen des Großkreises umgewandelt, mit dem Kugelradius multipliziert wird. Wie aber die Fläche des Kugeldreicks aus seinen Seiten zu bestimmen ist, erfordert eine um vieles schwierigere Untersuchung. Ich habe schon vor einiger Zeit ein außerordentliches Theorem gefunden, mit welchem diese Bestimmung leicht durchgeführt werden kann, welches sich so verhält:

Wenn die Seiten des Kugeldreiecks mit den Buchstaben a, b, c bezeichnet werden, die Fläche desselben Dreiecks hingegen = Δ gesetzt wird, dann wird immer gelten

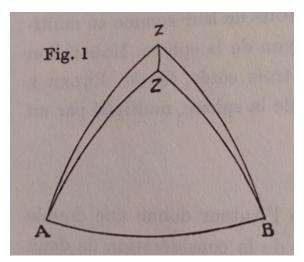
$$\cos\frac{1}{2}\Delta = \frac{1+\cos a + \cos b + \cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

dessen Gültigkeitig nur über lange Umwege, entweder aus dem Satz von Girard oder direkt mit der Integralrechnung gezeigt werden kann. Es wird also der Mühe Wert sein, jeden der beiden Beweise hier vorgestellt zu haben.

^{*}Originaltitel: "Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11* (1797, geschrieben 1778): pp. 47 – 62, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 29, pp. 253 – 266, Eneström Nummer E698, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

PROBLEM

Wenn (Fig. 1) die beiden Seiten AZ und BZ eines über der Basis AB konstruierten Kugeldreiecks AZB um ihre Differentiale vermehrt werden, dass daraus das Dreieck AzB entspringt, die Vergrößerung ausfindig zu machen, welche daher zu Fläche des Dreiecks AZB hinzukommen wird.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

LÖSUNG

§2 Nachdem die Basis dieses Dreiecks AB = a gesetzt worden ist, nenne man seine Seiten AZ = x und BZ = y, sodass die Seiten des vergrößerten Dreiecks AZ = x + dx und BZ = y + dy sein werden. Weiter nenne man die Winkel

$$BAZ = \varphi$$
 und $ABZ = \psi$,

dass die Elementarwinkel $ZAz=d\varphi$ und $ZBz=d\psi$ hervorgehen, nach Festlegen von welchen bekannt ist, dass die Fläche des Elementardreicks $ZAz=d\varphi(1-\cos x)$ ist, die des Dreiecks ZBz hingegen $=d\psi(1-\cos y)$. Weil ja also diese zwei Elementardreiecke die Vergrößerung der Fläche des Dreiecks Δ darbieten, werden wir diese Gleichung haben:

$$d\Delta = d\varphi(1 - \cos x) + d\psi(1 - \cos y).$$

§3 Nun wollen wir also die Winkel φ und ψ aus der Rechnung herauswerfen und an deren Stelle die Seiten x und y selbst mithilfe der trigonometrischen Lehren einführen, welche uns

$$\cos \varphi = \frac{\cos y - \cos a \cos x}{\sin a \sin x}$$
 und $\cos \psi = \frac{\cos x - \cos a \cos y}{\sin a \sin y}$

liefern, daher berechnen wir also über Differentiation

$$-d\varphi\sin\varphi = \frac{dx\cos a - dx\cos x\cos y - dy\sin x\sin y}{\sin a\sin^2 x},$$

und in gleicher Weise wird

$$-d\psi\sin\psi = \frac{dy\cos a - dy\cos x\cos y - dx\sin x\sin y}{\sin a\sin^2 y}$$

sein. Aber weil

$$\cos \varphi = \frac{\cos y - \cos a \cos x}{\sin a \sin x}$$

ist, wird

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 x - \cos^2 y + 2\cos a\cos x\cos y}}{\sin a\sin x}$$

sein, in gleicher Weise wird

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 x - \cos^2 y + 2\cos a\cos x\cos y}}{\sin a\sin y}$$

sein. Weil diese beiden Wurzelformeln dieselben sind, wollen wir der Kürze wegen

$$\sqrt{1-\cos^2 a - \cos^2 x - \cos^2 y + 2\cos a \cos x \cos y} = v$$

setzen, dass wir

$$\sin \varphi = \frac{v}{\sin a \sin x}$$
 und $\sin \psi = \frac{v}{\sin a \sin y}$

haben.

§4 Nachdem diese Werte also eingesetzt worden sind, werden wir diese Differentiale erhalten:

$$d\varphi = \frac{-dx\cos a + dx\cos x\cos y + dy\sin x\sin y}{v\sin x}$$

und

$$d\psi = \frac{-dy\cos a + dy\cos x\cos y + dx\sin x\sin y}{v\sin y}.$$

Daher wird also das gesuchte Inkrement der Fläche

$$d\Delta = \frac{\begin{cases} -\cos a (dx \sin y (1 - \cos x) + dy \sin x (1 - \cos y)) \\ +dx \sin y (\cos x \cos y (1 - \cos x) + \sin^2 x (1 - \cos y)) \\ +dy \sin x (\cos x \cos y (1 - \cos y) + \sin^2 y (1 - \cos x)) \end{cases}}{v \sin x \sin y}$$

sein, welches entwickelt diese Form annehmen wird:

$$vd\Delta = \begin{cases} +dx\sin x(1-\cos y) + \frac{dx\cos x\cos y(1-\cos x)}{\sin x} - \frac{dx\cos a(1-\cos x)}{\sin x} \\ +dy\sin y(1-\cos x) + \frac{dy\cos x\cos y(1-\cos y)}{\sin y} - \frac{dy\cos a(1-\cos y)}{\sin y}. \end{cases}$$

Hier sei nun bemerkt, dass

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad \frac{1-\cos y}{\sin y} = \tan \frac{1}{2}y$$

ist, daher werden also die das Element dx beinhaltenden Terme

$$dx\sin(1-\cos y) + dx\cos x\cos y\tan\frac{1}{2}x - dx\cos a\tan\frac{1}{2}x$$

sein. Weil ja aber nicht nur

$$\tan\frac{1}{2}x = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

ist, sondern auch

$$\tan\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

schreibe man im ersten Glied $(1 + \cos x) \tan \frac{1}{2}x$ anstelle von $\sin x$, dass dx überall mit $\tan \frac{1}{2}x$ multipliziert ist, und dieser Term wird auf diese Form zurückgeführt werden:

$$dx \tan \frac{1}{2}x(1+\cos x-\cos y-\cos a).$$

Auf dieselbe Weise wird der andere Term

$$dy \tan \frac{1}{2}y(1+\cos y - \cos x - \cos a)$$

sein, und so wird unsere ganze Gleichung so ausgedrückt sein:

$$vd\Delta = dx \tan \frac{1}{2}x(1 + \cos x - \cos y - \cos a)$$
$$+dy \tan \frac{1}{2}y(1 + \cos y - \cos x - \cos a).$$

§5 Wenn wir daher nun der Kürze wegen $\cos a + \cos x + \cos y = s$ setzen, wird

$$vd\Delta = dx \tan \frac{1}{2}x(1 - s + 2\cos x) + dy \tan \frac{1}{2}y(1 - s + 2\cos y)$$

sein, welche Gleichung auf diese Weise dargestellt werden kann:

$$vd\Delta = (1 - s)(dx \tan \frac{1}{2}x + dy \tan \frac{1}{2}y)$$
$$+2dx \cos x \tan \frac{1}{2}x + 2dy \cos y \tan \frac{1}{2}y.$$

Weil nun

$$\tan\frac{1}{2}x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

ist, wird

$$\tan\frac{1}{2}x\cos x = \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos x - 1 + \sin^2 x}{\sin x} = \sin x - \tan\frac{1}{2}x$$

sein. Auf dieselbe Weise wird $\tan \frac{1}{2}y \cos y = \sin y - \tan \frac{1}{2}y$ sein, und nach Einsetzen dieser Werte wird diese Gleichung entspringen:

$$vd\Delta = -(1+s)(dx\tan\frac{1}{2}x + dy\tan\frac{1}{2}y) + 2dx\sin x + 2dy\sin y.$$

§6 Diese letzte Form ist daher höchst bemerkenswert, weil die rechte Seite absolut integrierbar ist, wenn sie durch 1+s geteilt wird. Denn nach dieser Teilung wird unsere Gleichung

$$\frac{vd\Delta}{1+s} = -dx \tan \frac{1}{2}x - dy \tan \frac{1}{2}y + \frac{2dx \sin x + 2dy \sin y}{1 + \cos a + \cos x + \cos y}$$

sein, wo man bemerke, dass

$$\int dx \tan \frac{1}{2}x = -2\log \cos \frac{1}{2}x$$

ist, und in gleicher Weise

$$\int dy \tan \frac{1}{2}y = -2\log \cos \frac{1}{2}y$$

und schließlich

$$2\int \frac{dx \sin x + dy \sin y}{1 + \cos a + \cos x + \cos y} = -2\log(1 + \cos a + \cos x + \cos y) = -2\log(1 + s),$$

so finden wir über Integration also

$$\int \frac{vd\Delta}{1+s} = +2\log\cos\frac{1}{2}x + 2\log\cos\frac{1}{2}y - 2\log(1+s) = 2\log\frac{\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y}{1+s},$$

aber auf diese Weise ist andererseits die linke Seite nicht integrierbar, wofür also auf die folgende Weise Abhilfe geschaffen wird.

§7 Weil wir nämlich $s = \cos a + \cos x + \cos y$ gesetzt haben, wollen wir darüber hinaus $\cos \frac{1}{2}a\cos \frac{1}{2}x\cos \frac{1}{2}y = q$ festlegen, dass wir diese Gleichung haben:

$$\int \frac{vd\Delta}{1+s} = 2\log\frac{q}{(1+s)\cos\frac{1}{2}a'}$$

wo weiter $\frac{q}{1+s} = p$ wird, sodass

$$\int \frac{vd\Delta}{1+s} = 2\log \frac{p}{\cos \frac{1}{2}a}$$

ist, welche Gleichung erneut differenziert

$$\frac{vd\Delta}{1+s} = \frac{2dp}{p}$$

liefert, woher man

$$d\Delta = \frac{2dp(1+s)}{pv}$$

aufstellt, welche Formel also eine Integration zulassen wird, wenn nur $\frac{v}{1+s}$ eine bestimmte Funktion von p war, was wir auch mit Sicherheit annehmen können, weil $d\Delta$ das Differential der Dreiecksfläche bedeutet.

§8 Um dies zu zeigen, wird es förderlich bemerkt zu haben, dass gilt

$$vv + (1+s)^2 = 2(1 + \cos a + \cos x + \cos y + \cos a \cos x + \cos a \cos y + \cos a \cos x + \cos a \cos x \cos y)$$
$$= 2(1 + \cos a)(1 + \cos x)(1 + \cos y).$$

Es ist aber bekannt, dass $1+\cos a=2\cos^2\frac{1}{2}a$, $1+\cos x=2\cos^2\frac{1}{2}x$ und $1+\cos y=2\cos^2\frac{1}{2}y$ ist, woher, weil wir

$$q = \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y$$

gesetzt haben,

$$vv + (1+s)^2 = 16qq$$
 und daher $v = \sqrt{16qq - (1+s)^2}$

sein wird, und daher weiter

$$\frac{v}{1+s} = \sqrt{\frac{16qq}{(1+s)^2} - 1}.$$

§9 Weil also unsere Differentialgleichung

$$\frac{vd\Delta}{1+s} = \frac{2dp}{p}$$

war, wird sie wegen $p = \frac{q}{1+s}$ diese Form annehmen:

$$d\Delta\sqrt{16pp-1} = \frac{2dp}{p}$$
 und daher $d\Delta = \frac{2dp}{p\sqrt{16pp-1}}$.

Nun werde $p = \frac{1}{r}$, dass man

$$d\Delta = -\frac{2dr}{\sqrt{16 - rr}}$$

man, woher wir durch Integrieren $\Delta = C + 2 \arccos \frac{r}{4}$ berechnen, und nachdem anstelle von r der Wert eingesetzt worden ist, welcher

$$r = \frac{1}{p} = \frac{1+s}{q} = \frac{1+\cos a + \cos x + \cos y}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}y}$$

ist, wird unsere Integralgleichung

$$\Delta = C + 2\arccos\frac{1 + \cos a + \cos x + \cos y}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y}$$

sein.

§10 Nun geht also die ganze Aufgabe darauf zurück, dass der Wert der durch Integration eingegangenen Konstante C ermittelt wird, welcher natürlich aus einem bestimmten bekannten Fall gefunden werden muss; es ist aber offensichtlich, dass die Fläche des Dreiecks verschwinden muss, wannimmer der einer der beiden Schenkel x oder y verschwinden wird. Wir wollen also festlegen, dass y=0 ist, dann ist es aber notwendig, dass x=a wird, nach Festlegen dieses Falls wird unsere Gleichung also

$$0 = C + 2\arccos\frac{2 + 2\cos a}{4\cos^2\frac{1}{2}a}$$

sein. Weil aber $4\cos^2\frac{1}{2}a = 2 + 2\cos a$ und $\arccos 1 = 0$ ist, ist es ersichtlich, dass C = 0 gesetzt werden muss, sodass wir

$$\Delta = 2\arccos\frac{1+\cos a + \cos x + \cos y}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}y}$$

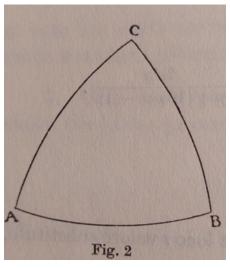
haben, woher man

$$\cos \frac{1}{2}\Delta = \frac{1 + \cos a + \cos x + \cos y}{4\cos \frac{1}{2}a\cos \frac{1}{2}x\cos \frac{1}{2}y}$$

folgert, welcher Ausdruck mit dem oben erwähnten Theorem hervorragend übereinstimmt, wenn nur anstelle von x und y die Buchstaben b und c geschrieben werden.

EIN ANDERER GEOMETRISCHER BEWEIS DES EINGANGS ERWÄHNTEN THEOREMS

§11 Es sei also (Fig. 2) ABC das vorgelegte Kugeldreieck, dessen Seiten man a, b, c und die ihnen gegenüberliegenden Winkel α , β , γ nenne, aber die Fläche, welche wir suchen, wollen wir mit dem Buchstaben Δ bezeichnen. Weil also aus dem Satz von GIRARD



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$\Delta = \alpha + \beta + \gamma - 180^{\circ}$$

ist, wird

$$\cos \Delta = -\cos(\alpha + \beta + \gamma)$$

sein. Nun ist aber aus der Zusammensetzung der Winkel bekannt, dass

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

ist, woher man berechnet

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(\alpha + \beta)\cos\gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin\gamma$$
$$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$- \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta,$$

als logische Konsequenz werden wir haben

$$\cos \Delta = +\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta$$
$$-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

§12 Aus der Kugelgeometrie wissen wir aber, dass gilt

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$
$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

und

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

und daher berechnen wir weiter

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin b \sin c}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin c}$$

und

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b}.$$

Wir wollen also der Kürze wegen festlegen

$$\sqrt{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c} = v,$$

sodass

$$\sin \alpha = \frac{v}{\sin b \sin c}$$
, $\sin \beta = \frac{v}{\sin a \sin c}$ und $\sin \gamma = \frac{v}{\sin a \sin b}$

ist; nach Einsetzen dieser Werte wird

$$\cos \Delta = \frac{vv(\cos a - \cos b \cos x)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} + \frac{vv(\cos b - \cos a \cos c)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} + \frac{vv(\cos c - \cos a \cos b)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)(\cos b - \cos a \cos c)(\cos c - \cos a \cos b)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

werden, und so wird

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \cos \Delta$$

$$= vv(\cos a + \cos b + \cos c - \cos a \cos b - \cos a \cos c - \cos b \cos c)$$

$$-\cos a \cos b \cos c + \cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$-\cos a \cos b \cos c (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c$$

sein.

§13 Damit sich nun diese nicht gerade unkomplizierten Formeln bequemer behandeln lassen, wollen wir der Kürze wegen $\cos a = A$, $\cos b = B$, $\cos c = C$ setzen, dass wir haben

$$(1 - A^2)(1 - B^2)(1 - C^2)\cos\Delta = vv(A + B + C - AB - AC - BC)$$
$$-ABC + AABB + AACC + BBCC$$
$$-ABC(AA + BB + CC) + AABBCC,$$

wo nun

$$vv = 1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC$$

sein wird.

§14 Weil ja hier die drei Buchstaben *A*, *B*, *C* gleichermaßen in die Rechnung eingehen, sodass sie also Wurzeln einer gewissen kubischen Gleichung angesehen werden können, wird es zur Verkürzung der Rechnung nicht unwesentlich viel beitragen

$$A + B + C = P$$
,
 $AB + AC + BC = Q$,
 $ABC = R$

zu setzen, und daher berechnet man leicht, dass

$$AA + BB + CC = PP - 2Q$$

und daher

$$vv = 1 - PP + 2Q + 2R$$

sein wird. Weiter bemerke man, dass die Form $(1-A^2)(1-B^2)(1-C^2)$ das Produkt aus diesen zwei Formeln ist:

$$(1+A)(1+B)(1+C) = 1+P+Q+R$$

und

$$(1-A)(1-B)(1-C) = 1-P+Q-R$$
,

und so wird unsere Gleichung diese Form annehmen:

$$(1 + P + Q + R)(1 - P + Q - R)\cos \Delta$$

= $(1 - PP + 2Q + 2R)(P - Q) - R + QQ - 2PR - R(PP - 2Q) + RR$

deren rechte Seit ausmultipliziert

$$P - O - R - OO + 2PO + RR - P^3 + PPO - PPR$$

gibt, welche durch 1 - P + Q - R geteilt den Quotienten P - Q - R + PP liefert, als logische Konsequenz wird unsere Gleichung diese Form annehmen:

$$(1+P+Q+R)\cos\Delta = P-Q-R+PP.$$

§15 Bisher sind wir also zu dieser Gleichung geführt worden:

$$\cos \Delta = \frac{P - Q - R + PP}{1 + P + Q + R},$$

woher wir weiter

$$1 + \cos \Delta = \frac{(1+P)^2}{1+P+O+R} = 2\cos^2 \frac{1}{2}\Delta$$

berechnen, als logische Konsequenz werden wir haben:

$$\cos\frac{1}{2}\Delta = \frac{1+P}{\sqrt{2(1+P+Q+R)}}.$$

Weil also

$$1 + P + Q + R = (1 + A)(1 + B)(1 + C)$$
$$= (1 + \cos a)(1 + \cos b)(1 + \cos c)$$

ist, wird nach Einführen der halben Winkel

$$1 + P + Q + R = 8\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c$$

sein. Daher, weil

$$1 + P = 1 + \cos a + \cos b + \cos c$$

ist, erhalten wir daraus schließlich diesen Wert:

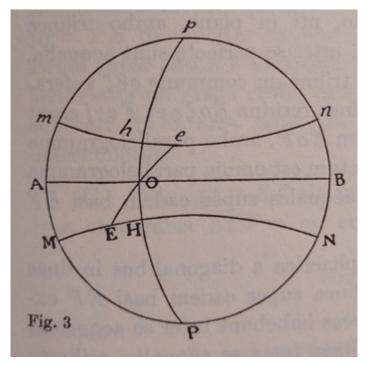
$$\cos\frac{1}{2}\Delta = \frac{1+\cos a + \cos b + \cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

welches der andere Beweis des eingangs erwähnten Theorems ist.

§16 Diese Gelegenheit zum Nachdenken hat mir der vom hoch geehrten Professor Lexell aufgestellte Lehrsatz über alle über derselben Basis zu konstruierenden Kugeldreiecke derselben Fläche gegeben in welchem er sehr scharfsinning bewiesen hat, dass alle Ecken dieser Dreiecke immer auf einem kleineren Kreis einer Kugel liegen; diese sehr elegante Eigenschaft kann nur über viele Umwegen aus unserem Lehrsatz abgeleitet werden; aber die folgende Betrachtung wird einen sehr einfachen Weg eröffnen dies zu leisten.

ÜBER DIE AUSSERORDERNTLICHEN EIGENSCHAFTEN VON ZWEI EINANDER GLEICHEN KREISEN AUF DER KUGELOBERFLÄCHE

§17 Es seien (Fig. 3) MN und mn zwei parallele Kreise dieser Art, und weil sie als einander gleich angenommen werden, werden sie vom Äquator AB zu beiden Seiten hin gleich weit entfernt sein, genauso wie von jedem der beiden Pole P und p.

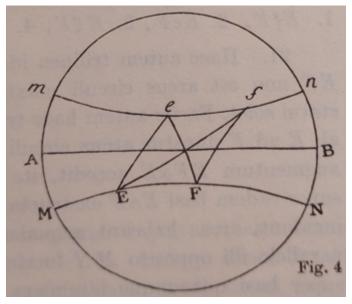


Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Hier besteht die erste Eigenschaft, die sich aufzeigt, darin, dass jeder Bogen des Großkreises Ee, der zwischen diesen zwei parallelen Kreisen eingeschlossen ist, zu beiden gleich geneigt ist, und vom Äquator in O in zwei gleiche Teile geteilt wird. Wenn nämlich durch den Punkt O hindurch der Meridian OPp gezeichnet wird, welcher die beiden parallelen Kreise in H und h schneidet, werden wegen der einander gleichen Winkel HOE und hOe die beiden dreiseitigen Figuren HOE und hOe offensichtlich einander gleich und ähnlich sein, und daher wird so OE = Oe wie der Winkel OEH = Oeh sein. Außerdem

wird es förderlich sein hier bemerkt zu haben, wenn dieser Bogen *Ee* bis hin zum Halbkreis fortgesetzt wird, dass er wiederum auf den kleineren Kreis *mn* fällt, natürlich in seinem Punkt, welcher dem Punkt *E* diametral gegenüber liegt.

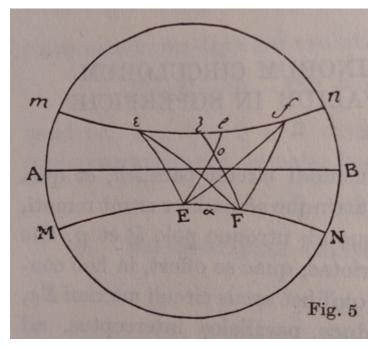
§18 Man zeichne nun (Fig. 4) zwischen denselben parallelen Kreisen darüber hinaus einen anderen zu beiden gleichermaßen geneigten Bogen des Großkreises und den Bogen Ee und es ist offensichtlich, dass nicht nur diese zwei Bogen Ee und Ff einander gleich sind, sondern auch die Bogen EF und ef der kleineren Kreise.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Daher weil in dieser vierseitigen Figur EFef nicht nur die gegenüberliegenden Seiten, sondern auch die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind, wird diese Figur mit Recht als sphärisches Parallelogramm bezeichnet werden können, weil sie mit allen Eigenschaften von Parallelogrammen versehen ist. Es ist aber ersichtlich, dass diese vierseitige Figur von jeder der beiden Diagonalen Ef und Fe in zwei gleiche dreilinige Formen geteilt wird, natürlich wird so die Fläche efF wie EeF die Hälfte der Fläche des Parallelogramms EefF sein.

§19 Nun fasse man (Fig. 5) über demselben Bogen EF, als Basis, ein anderes sphärisches Parallelogramm $EF\zeta\varepsilon$ konstruiert auf, und leicht wird eingesehen, dass die Flächen dieser zwei Parallelogramme $EFf\varepsilon$ und $EF\zeta\varepsilon$ einander gleich sind. Denn hier sind in der vollkommen gleichen Art wie in der Ebene, die beiden dreilinigen Formen $E\varepsilon\varepsilon$ und $Ff\zeta$ einander vollkommen gleich, wenn von welchen die gemeinsame Form $o\varepsilon\zeta$ weggenommen wird, werden die verbleibenden vierlinigen Formen $Eo\zeta\varepsilon$ und $Fo\varepsilon f$ einander gleich sein;



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

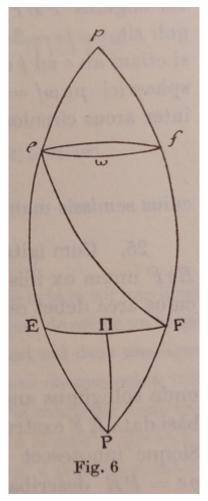
wenn zu diesen die Form *EoF* hinzugefügt wird, werden die beiden ganzen Parallelogramme einander auch gleich sein; und so ist auch aufgezeigt worden, dass alle sphärischen Parallelogramme, die zwischen zwei parallelen und gleichen Kreisen über derselben Basis *EF* konstruiert worden sind, einander gleich sind.

§20 Weil also solche sphärische Parallelogramme von den Diagonalen in zwei gleiche Teile geteilt werden, werden auch alle über derselben Basis EF konstruierten und in dem einen parallelen Kreis mn begrenzten dreilinigen Formen einander gleiche Flächen haben; in dieser Figur wird man natürlich vier gleiche dreilinige Formen haben, nämlich: 1. EFF, 2. EeF, 3. $E\zeta F$, 4. $E\varepsilon F$.

§21 Wir nennen diese dreilinigen Formen aber nicht Dreiecke, weil deren Basis EF kein Bogen des Großkreises ist, wie es bei Kugeldreiecken festgelegt zu werden pflegt. Leicht werden diese Dreiecke aber in Kugeldreiecke umgewandelt, wenn von E zu F ein Bogen des Großkreises $E\alpha F$ gezeichnet wird, auf welchem zu den zuvor dreilinig genannten Figuren die Vergrößerung $EF\alpha E$ hinzukommt, sodass nun auch alle über derselben Basis $E\alpha F$ konstruierten Kugeldreiecke, deren Ecken auf den einen der parallelen Kreise mn fallen, die gleiche Fläche haben, wenn nur die Grenzen der Basen E und F auf dem jenem anderen diesem gegenüberliegenden Kreis MN angenommen worden waren; und so ist nun klar aufgezeigt worden, wenn über irgendeiner Basis unzählige Kugeldreiecke gebildet werden, deren Flächen einander gleich sein sollen, dass deren Ecken immer auf einem gewissen kleineren Kreis der Kugel liegen werden. Nachdem dies bemerkt worden ist, wird das Problem des hoch geehrten Professor Lexell auf die folgende Weise sehr leicht aufgelöst werden können.

PROBLEM

Auf der Kugelpberfläche (Fig. 6) über der gegebenen Basis EF alle Kugeldreiecke zu konstruieren, deren deren gegebene Fläche $= \Delta$ sei, wo freilich Δ den Bogen des Großkreieses bezeichnet, der mit dem Kugelraduius multipliziert die vorgeschriebene Fläche ergibt.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

LÖSUNG

§22 Es sei also die vorgelegte Basis EF = a und die ganze Aufgabe geht darauf zurück, dass man die Pole P und p findet, die dem Gefragten Genüge leisten; nachdem diese nämlich gefunden worden sind, wenn von dem Pol p aus mit der Strecke pe = PE ein kleinerer Kreis ef beschrieben wird, werden die Flächen aller über das Basis EF konstruierten und im kleineren Kreis ef begrenzten Flächen einander gleich sein; und es verbleibt lediglich, dass aus der vorgelegten Fläche Δ die Lage der Pole P und p bestimmt wird.

§23 Weil also der Bogen des Großkreies EF = a ist, setze man EP = FP = x und den Winkel $EPF = \omega$, und aus der sphärischen Trigonometrie wird

$$\cos \omega = \frac{\cos a - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

und daher

$$1 - \cos \omega = \frac{1 - \cos a}{\sin^2 x} = 2\sin^2 \frac{1}{2}\omega$$

sein. Daher, weil $1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{1}{2}a$ ist, wird

$$\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin x}$$

sein, und daher umgekehrt

$$\sin x = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}\omega}.$$

Aber aus dem bekannten Winkel ω wird die ganze Fläche des Kugelsegments zwischen den beiden Halbkreises PEp und PFp bekannt, welche natürlich $= 2\omega$ sein wird. Natürlich wird der Bogen des Großkreises $= 2\omega$ mit dem Kugelradius = 1 multipliziert die Fläche dieses Segments geben.

§24 Wir wollen nun auch die Fläche des Dreiecks EPF suchen, für welches Ziel man den Winkel $PEF = PFE = \varphi$ nenne, sodass die Summe der drei Winkel dieses Dreiecks $\omega + 2\varphi$ ist, woher die Fläche dieses Dreiecks $= \omega + 2\varphi - \pi$ sein wird. Daher, wenn auch von e zu f der Bogen $e\omega f$ des Großkreises gezeichnet wird, wird auch die Fläche des Kugeldreiecks $pe\omega f = \omega + 2\varphi - \pi$ sein. Daher wird also die Fläche des zwischen den Bogen der Großkreise Ef, EF und EG eingeschlossenen Kugelvierecks EFf

$$2\omega - 2(\omega + 2\varphi - \pi) = 2\pi - 4\varphi$$

sein , dessen Hälfte natürlich die Fläche des gesuchten Kugeldreiecks *EFe* liefert.

§25 Weil also der Punkt e auch auf dem kleineren Kreis ef liegt, wird das Dreieck EeF eines aus jenen unendlich vielen sein, die über der Basis EF zu konstruieren sind, dessen Fläche = Δ sein muss, und so haben wir diese Gleichung erhalten

$$\Delta = \pi - 2\varphi,$$

woher wir den Winkel $\varphi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\Delta$ berechnen. Weil also der Winkel Δ gegeben ist, konstruiere man über der gegebenen Basis EF auf beiden Seiten die gleichen Winkel $FEP=EFP=90^{\circ}-\frac{1}{2}\Delta$. Und so wird der Pol P bekannt werden und daher der ihm gegenüberliegende p, wenn von welchem aus mit der Strecke pe=PE der kleinere Kreis ef beschrieben wird, werden alle über der Basis EF konstruierten und auf dem Umfang des kleineren Kreises ef begrenzten Dreiecke diese vorgelegte Fläche $=\Delta$ haben.

§26 Damit diese Konstruktion erleichtert wird, zeichne man vom Pol P aus zu Mitte der Basis Π den normalen Bogen $P\Pi$ und weil man im Dreieck $EP\Pi$ die Seite $E\Pi = \frac{1}{2}a$ hat, zusammen mit dem Winkel $PE\Pi = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\Delta$, wird daraus die Seite EP = x berechnet, deren Tangens

$$\tan x = \frac{\tan\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}\Delta}$$

ist. Nun wird also nach Finden der Größe der Bogen EP und FP deren Schnitt den Pol P geben, aus dessen Gegenüber p der mit der Strecke pe = x beschriebene kleinere Kreis die Orte der Ecken aller über der Basis EF zu beschreibenden Dreiecke liefert, welche Konstruktion hervorragend mit der übereinstimmt, welche der hoch geehrte Lexell gefunden hat.