

# ÜBER DEN AUSSERORDENTLICHEN NUTZEN DES KALKÜLS MIT IMAGINÄREN GRÖSSEN IN DER INTEGRALRECHNUNG \*

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich neulich das Integral der Differentialformel

$$\frac{\partial x(1 + xx)^2}{(1 - xx)\sqrt[4]{(1 - 6xx + x^4)^3}}$$

gefunden hatte, welches, nachdem der Kürze wegen

$$\sqrt[4]{1 - 6xx + x^4} = v$$

gesetzt worden ist, als

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + xx + vv - 2vx}{1 + xx + vv + 2vx} - \arctan \frac{2vx}{1 + xx - vv}$$

entdeckt hatte, habe ich nicht gezweifelt zu bekräftigen, dass dieses Integral nur mithilfe des Kalküls komplexer Größen erhalten werden kann. Ich hatte nämlich zuvor diese Differentialformel

$$\frac{\partial y(1 - yy)^2}{(1 + yy)\sqrt[4]{(1 + 6yy + y^4)^3}}$$

---

\*Originaltitel: "De insigni usu calculi imaginariorum in calculo integrali", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Band 12 (1801, verfasst 1777): pp. 3–21, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 19, pp. 345 – 368, Eneström-Nummer E707, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

behandelt, aus welcher jene entspringt, wenn  $y = x\sqrt{-1}$  gesetzt wird. Nun musste also auch, nachdem ich im Integral der letztgenannten anstelle von  $y$  einfach  $x\sqrt{-1}$  geschrieben hatte, das Integral der erstgenannten hervorgehen. Dafür wurde aber verlangt, dass so die Logarithmen wie die Bogen von imaginären Größen so entwickelt werden, dass sie auf die allgemeine Form  $A + B\sqrt{-1}$  zurückgeführt werden.

§2 Dieses Phänomen kann aber in unzähligen anderen Fällen auftauchen, welche aus dieser Betrachtung ihren Ursprung nehmen. Es sei  $Z$  eine Funktion von  $z$  solcher Art, dass das Integral der Differentialformel  $Z\partial z$  irgendwie, ob algebraisch oder durch Logarithmen oder Kreisbogen, ausgedrückt werden kann, welches Integral wir mit dem Buchstaben  $V$  bezeichnen wollen, dass

$$\int Z\partial z = V$$

ist. Nun wollen wir anstelle von  $z$  irgendeine imaginäre Größe einsetzen, welche, wie bekannt ist, sich immer mit einer solchen Form darstellen lässt

$$z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta),$$

wo wir den Winkel  $\theta$  als Konstante betrachten werden, so dass allein  $y$  variabel ist; auf diese Weise wird

$$\partial z = \partial y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$$

sein; die Funktion  $Z$  nehme aber die entsprechende Form

$$Z = M + N\sqrt{-1}$$

an, sodass nun diese Formel zu integrieren ist

$$\int Z\partial z = \int \partial y(M \cos \theta - N \sin \theta) + \sqrt{-1} \cdot \int \partial y(M \sin \theta + N \cos \theta),$$

deren erster Teil reell, der zweite hingegen hingegen imaginär ist.

§3 Es geschehe nun dieselbe Substitution, natürlich  $z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$ , in dem gefundenen Integral  $V$ , woher gleichermaßen die imaginäre Form

$$P + Q\sqrt{-1}$$

hervorgehen muss; und weil ja die reellen und imaginären Teile getrennt voneinander verglichen werden müssen, werden daraus die zwei folgenden zwei Gleichungen entspringen

$$P = \cos \theta \int M \partial y - \sin \theta \int N \partial y,$$

$$Q = \sin \theta \int M \partial y + \cos \theta \int N \partial y,$$

woher wir

$$\int M \partial y = P \cos \theta + Q \sin \theta$$

und

$$\int N \partial y = Q \cos \theta - P \sin \theta$$

berechnen, und auf diese Weise, wenn die beiden Größen  $P$  und  $Q$  gefunden worden sind, werden die beiden Integrale  $\int M \partial y$  sowie  $\int N \partial y$  dargeboten werden können.

**§4** Wenn aber die vorgelegte Funktion  $Z$  nicht sehr einfach war, gehen die Buchstaben  $M$  und  $N$  zumeist daraus als so komplizierte Funktionen der neuen Variable  $y$  hervor, dass kaum ein anderer Weg offen steht die Integrale dieser Formeln  $\int M \partial y$  und  $\int N \partial y$  ausfindig zu machen außer diesem, den ich gerade angegeben habe und welcher durch das Imaginäre hindurch verläuft; also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass aus dem gefundenen Integral  $V$  die beiden daraus zu entspringenden Größen  $P$  und  $Q$  bestimmt werden. Sooft also dieses Integral  $V$  algebraische Teile enthält, bereitet diese Operation keine Schwierigkeit; wannimmer sie aber Logarithmen und Kreisbogen beinhaltet, ist nicht unwesentlicher Scharfsinn von Nöten, dass ihr Wert in die Form  $P + Q\sqrt{-1}$  umgewandelt wird; deswegen werde ich hier Hilfsmittel angeben, mit welchen alle Transformationen dieser Art erledigt werden können.

**§5** All diese Hilfsmittel können in der Tat in sehr angenehmer Weise allein aus der Formel

$$\arctan t\sqrt{-1}$$

entnommen werden. Weil nämlich ihr Differential

$$= \frac{\partial t\sqrt{-1}}{1-tt}$$

ist, wird das Integral von dieser umgekehrt

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

sein, wenn es freilich so bestimmt wird, dass es für  $t = 0$  verschwindet, weil ja in diesem Fall auch der Bogen verschwindet. Daher haben wir nun also diese erste Reduktion erhalten

$$\arctan t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+t}{1-t},$$

wo in der allgemeinen Form  $A + B\sqrt{-1}$  also  $A = 0$  ist.

§6 Wir wollen nun

$$t = u\sqrt{-1}$$

setzen und es wird

$$t\sqrt{-1} = -u \quad \text{und} \quad \arctan t\sqrt{-1} = -\arctan u$$

sein, woher wir

$$-\arctan u = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}}$$

haben werden, woraus umgekehrt

$$\log \frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}} = -\frac{2}{\sqrt{-1}} \arctan u = +2\sqrt{-1} \cdot \arctan u$$

erschlossen wird. Weil weiter

$$\frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}} = \frac{(1+u\sqrt{-1})^2}{1+uu}$$

ist, wird

$$\log \frac{1 + u\sqrt{-1}}{1 - u\sqrt{-1}} = 2 \log(1 + u\sqrt{-1}) - 2 \log \sqrt{1 + uu} = 2\sqrt{-1} \cdot \arctan u$$

sein, woher diese neue Reduktion berechnet wird

$$\log(1 + u\sqrt{-1}) = \log \sqrt{1 + uu} + \sqrt{-1} \cdot \arctan u.$$

§7 Weil also alle imaginären Formen auf die Form

$$p(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha)$$

reduziert werden können, wird

$$\log p(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) = \log p \cos \alpha + \log(1 + \sqrt{-1} \cdot \tan \alpha)$$

sein und für  $u = \tan \alpha$  gesetzt wird

$$\log(1 + \tan \alpha \sqrt{-1}) = -\log \cos \alpha + \alpha \sqrt{-1}$$

werden. Daher leiten wir diese nicht minder bemerkenswerte Reduktion ab

$$\log p(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) = \log p + \alpha \sqrt{-1}$$

und daher

$$\log(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) = \alpha \sqrt{-1}.$$

§8 Daher haben wir also eine leichte Methode erlangt, die Logarithmen aller imaginären Größen auf die Form  $A + B\sqrt{-1}$  zurückzuführen. Aber andererseits haben wir für imaginäre Kreisbogen bisher diese einzelne Reduktion entdeckt, nach welcher

$$\arctan t \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

war. Es wird also noch eine Regel vermisst, Bogen von imaginären Größen von dieser Art

$$\arctan(p + q\sqrt{-1})$$

auf die Form  $A + B\sqrt{-1}$  zurückzuführen. Es wird freilich schon verschiedenerorts eine solche Regel gefunden; während sie aber meistens auf allzu umständliche Weise gefunden worden ist, werden wir sie auf die folgende Weise unmittelbar aus dem hier formulierten Prinzip ableiten.

§9 Wir wollen natürlich zuerst die Summe von zwei Bogen von dieser Art suchen, welche

$$\arctan(p + q\sqrt{-1}) + \arctan(p - q\sqrt{-1})$$

sei, welche wir mit dem Buchstaben  $R$  bezeichnen wollen, und weil im Allgemeinen

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a + b}{1 - ab}$$

ist, wird wegen

$$a = p + q\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad b = p - q\sqrt{-1}$$

auch

$$R = \arctan \frac{2p}{1 - pp - qq}$$

sein. In gleicher Weise setze man die Differenz derselben Bogen

$$\arctan(p + q\sqrt{-1}) - \arctan(p - q\sqrt{-1}) = S,$$

und weil

$$\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a - b}{1 + ab}$$

ist, wird

$$S = \arctan \frac{2q\sqrt{-1}}{1 + pp + qq}$$

sein. Anfangs haben wir aber gesehen, dass

$$\arctan t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1 + t}{1 - t}$$

ist, woher nach Nehmen von

$$t = \frac{2q}{1 + pp + qq}$$

auch

$$S = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{(1+q)^2 + pp}{(1-q)^2 + pp}$$

sein wird.

**§10** Nachdem also so die Summe  $R$  wie die Differenz  $S$  jener zwei Formeln gefunden worden ist, lässt sich jede der beiden auch einzeln darbieten; es wird nämlich

$$\arctan(p + q\sqrt{-1}) = \frac{R + S}{2}$$

sein und daher

$$\arctan(p + q\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p}{1 - pp - qq} + \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{(1+q)^2 + pp}{(1-q)^2 + pp}$$

und in gleicher Weise wird

$$\arctan(p - q\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p}{1 - pp - qq} - \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{(1+q)^2 + pp}{(1-q)^2 + pp}$$

sein, welche freilich aus der ersten direkt gefolgert wird, indem man  $-q$  anstelle von  $q$  schreibt. Hier lässt sich

$$\arctan \frac{2p}{1 - pp - qq}$$

in bequemer Weise in zwei Teile auflösen, wonach

$$\begin{aligned} & \arctan(p + q\sqrt{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{p}{1-q} + \frac{1}{2} \arctan \frac{p}{1+q} + \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{(1+q)^2 + pp}{(1-q)^2 + pp} \end{aligned}$$

sein wird.

§11 Nun wollen wir also anstelle von  $p + q\sqrt{-1}$  die Form

$$r(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha)$$

einsetzen, dass

$$p = r \cos \alpha \quad \text{und} \quad q = r \sin \alpha$$

ist, und man wird

$$\begin{aligned} & \arctan r(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2r \cos \alpha}{1 - rr} + \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{1 + 2r \sin \alpha + rr}{1 - 2r \sin \alpha + rr} \end{aligned}$$

finden. Vermöge der letzten Form wird aber auch

$$\begin{aligned} & \arctan r(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{r \cos \alpha}{1 - r \sin \alpha} + \frac{1}{2} \arctan \frac{r \cos \alpha}{1 + r \sin \alpha} + \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{1 + 2r \sin \alpha + rr}{1 - 2r \sin \alpha + rr} \end{aligned}$$

sein.

§12 Diese bisher gefundenen Formeln umfassen schon alle Hilfsmittel, derer wir bedürfen, um alle imaginären Logarithmen und imaginären Kreisbogen aufzulösen. Wir wollen aber die hier gefundenen Formeln zusammen angeben

$$\text{I. } \log(a + b\sqrt{-1}) = \log a + \log \left( 1 + \frac{b\sqrt{-1}}{a} \right) = \log \sqrt{aa + bb} + \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{b}{a},$$

woher man diese sehr oft auftauchende ableitet

$$\log \frac{a + b\sqrt{-1}}{a - b\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{b}{a}.$$

Weiter sei aber auch diese Formel angemerkt

$$\log a(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) = \log a + \alpha \sqrt{-1}.$$

Für die Bogen haben wir aber diese Formeln erlangt



$$\text{II. } \arctan(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2a}{1 - aa - bb} + \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{(1 + b)^2 + aa}{(1 - b)^2 + aa}$$

oder auch

$$\begin{aligned} & \arctan a(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2a \cos \alpha}{1 - aa} + \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{1 + 2a \sin \alpha + aa}{1 - 2a \sin \alpha + aa}. \end{aligned}$$

**§13** Nachdem diese Fundamente gelegt worden sind, wollen wir die Fälle betrachten, in denen das Integral  $\int Z dz$  durch Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt werden kann, was immer passiert, wenn  $Z$  eine rationale Funktion von  $z$  ist; aber dann ist das Integral aus Teilen von dieser Art zusammengesetzt

$$\text{I. } \log(1 \pm z),$$

$$\text{II. } \log(1 - 2z \cos \alpha + zz),$$

$$\text{III. } \arctan \frac{z \sin \alpha}{1 - z \cos \alpha},$$

oder zumindest können die Integrale, die gefunden werden, leicht auf solche Formen gebracht werden. Wir werden also einige dieser Auflösungen, wannimmer  $z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$  gesetzt wird, in den folgenden Problemen erledigen.

## PROBLEM 1

**§14** Diese logarithmische Formel

$$\log(1 \pm z)$$

für  $z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$  gesetzt auf die allgemeine Form  $A + B\sqrt{-1}$  zurückzuführen.

## LÖSUNG

Wir wollen also zuerst die Formel

$$\log(1+z) = \log(1+y\cos\theta + y\sqrt{-1}\cdot\sin\theta)$$

entwickeln und nach einem Vergleich mit der obigen allgemeinen Formel wird

$$a = 1 + y\cos\theta \quad \text{und} \quad b = y\sin\theta$$

sein, woher man

$$\log(1+z) = \log\sqrt{1+2y\cos\theta+yy} + \sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{y\sin\theta}{1+y\cos\theta}$$

berechnet. Daher leitet man aber den anderen Fall  $\log(1-z)$  direkt ab, indem man  $y$  negativ nimmt, und es wird also

$$\log(1-z) = \log\sqrt{1-2y\cos\theta+yy} - \sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}$$

sein. Oftmals pflegt aber in den Integralen die Formel  $\log\frac{1+z}{1-z}$  aufzutauchen, deren Wert also für

$$z = y(\cos\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin\theta)$$

gesetzt auf die folgende Weise ausgedrückt werden wird

$$\begin{aligned} \log\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1}{2}\log\frac{1+2y\cos\theta+yy}{1-2y\cos\theta+yy} + \sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{y\sin\theta}{1+y\cos\theta} \\ &\quad + \sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}; \end{aligned}$$

wenn also beide Bogen zu einem zusammengezogen werden, wird

$$\log\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\log\frac{1+2y\cos\theta+yy}{1-2y\cos\theta+yy} + \sqrt{-1}\cdot\arctan\frac{2y\sin\theta}{1-yy}$$

hervorgehen.

## PROBLEM 2

§15 Wenn nach Vorlage der logarithmischen Formel

$$\log(1 - 2z \cos \alpha + zz)$$

in ihr  $z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$  gesetzt wird, ihren Wert auf die postulierte Formel  $A + B\sqrt{-1}$  zurückzuführen.

### LÖSUNG

Wenn wir hier sofort die Substitution durchführen wollten, würden wir in ziemlich aufwendige Rechnungen hineingeraten; um diese zu vermeiden, wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass die Formel

$$1 - 2z \cos \alpha + zz$$

ein Produkt aus diesen Faktoren ist

$$(1 - z(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha))(1 - z(\cos \alpha - \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha)),$$

deren Logarithmen also zueinander addiert werden müssen.

Wir wollen also zuerst die die Formel

$$\log(1 - z(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha))$$

behandeln, und weil

$$y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) = z(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha)$$

ist, da ja im Allgemeinen

$$(\cos \beta + \sqrt{-1} \cdot \sin \beta)(\cos \gamma + \sqrt{-1} \cdot \sin \gamma) = \cos(\beta + \gamma) + \sqrt{-1} \cdot \sin(\beta + \gamma)$$

ist, wird

$$\log(1 - z(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha)) = \log(1 - y(\cos(\alpha + \theta) + \sqrt{-1} \cdot \sin(\alpha + \theta)))$$

sein. Hier wir aber nach einem Vergleich

$$a = 1 - y \cos(\alpha + \theta) \quad \text{und} \quad b = -y \sin(\alpha + \theta)$$

sein, woher ihr aufgelöster Wert

$$\begin{aligned} & \log(1 - z(\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha)) \\ &= \frac{1}{2} \log(1 - 2y \cos(\alpha + \theta) + yy) - \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{y \sin(\alpha + \theta)}{1 - y \cos(\alpha + \theta)} \end{aligned}$$

sein wird. Daher wir die andere Formel leicht abgeleitet, indem man den Winkel  $\alpha$  negativ nimmt, und es wird

$$\begin{aligned} & \log(1 - z(\cos \alpha - \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha)) \\ &= \frac{1}{2} \log(1 - 2y \cos(\theta - \alpha) + yy) - \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{y \sin(\theta - \alpha)}{1 - y \cos(\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

sein. Nun ist also nur nötig, dass wir die beiden Werte, die wir gerade gefunden haben, zueinander addieren und so wird die Reduktion hervorgehen

$$\begin{aligned} & \log(1 - 2z \cos \alpha + zz) \\ &= \frac{1}{2} \log(1 - 2y \cos(\alpha + \theta) + yy) - \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{y \sin(\alpha + \theta)}{1 - y \cos(\alpha + \theta)} \\ &+ \frac{1}{2} \log(1 - 2y \cos(\theta - \alpha) + yy) - \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{y \sin(\theta - \alpha)}{1 - y \cos(\theta - \alpha)}. \end{aligned}$$

### PROBLEM 3

**§16** Wenn nach Vorlage der Formel für den Kreisbogen

$$T = \arctan \frac{z \sin \alpha}{1 - z \cos \alpha}$$

in ihr  $z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$  gesetzt wird, ihren daher resultierenden Wert auf die Form  $A + B\sqrt{-1}$  zurückzuführen.

## LÖSUNG

Weil hier im Zähler und Nenner imaginäre Größen auftauchen, werden wir zu einer einfacheren Form gelangen, wenn wir auf beiden Seiten  $\alpha$  oder  $\arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  addieren; so wird nämlich

$$T + \alpha = \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - z} = 90^\circ - \arctan \frac{\cos \alpha - z}{\sin \alpha}$$

sein, und daher

$$T = 90^\circ - \alpha - \arctan \frac{\cos \alpha - z}{\sin \alpha}$$

sein.

Nun wollen wir in dieser letzten Formel

$$z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$$

setzen und es wird

$$\arctan \frac{\cos \alpha - z}{\sin \alpha} = \arctan \frac{\cos \alpha - y \cos \theta - y\sqrt{-1} \cdot \sin \theta}{\sin \alpha}$$

werden, welcher Ausdruck mit der allgemeinen Formel  $\arctan(a + b\sqrt{-1})$  verglichen

$$a = \frac{\cos \alpha - y \cos \theta}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad b = -\frac{y \sin \theta}{\sin \alpha}$$

gibt. Daher wird also

$$1 - aa - bb = -\frac{\cos 2\alpha - 2y \cos \alpha \cos \theta + yy}{\sin^2 \alpha}$$

und deshalb

$$\frac{2a}{1 - aa - bb} = \frac{\sin 2\alpha - 2y \sin \alpha \cos \theta}{-\cos 2\alpha + 2y \cos \alpha \cos \theta - yy}$$

sein, also

$$\arctan \frac{2a}{1 - aa - bb} = -\arctan \frac{\sin 2\alpha - 2y \sin \alpha \cos \theta}{\cos 2\alpha - 2y \cos \alpha \cos \theta + yy}.$$

Nun wird für den Imaginärteil

$$1 + aa + bb = \frac{1 - 2y \cos \alpha \cos \theta + yy}{\sin^2 \alpha}$$

sein, woher man den Zähler

$$(1 + b)^2 + aa = \frac{1 - 2y \cos(\theta - \alpha) + yy}{\sin^2 \alpha}$$

und den Nenner

$$(1 - b)^2 + aa = \frac{1 - 2y \cos(\alpha + \theta) + yy}{\sin^2 \alpha}$$

berechnet, und so wird der Imaginärteil

$$\frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{(1 + b)^2 + aa}{(1 - b)^2 + aa} = \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{1 - 2y \cos(\theta - \alpha) + yy}{1 - 2y \cos(\alpha + \theta) + yy}$$

sein; deswegen berechnen wir daraus

$$\begin{aligned} \arctan \frac{\cos \alpha - z}{\sin \alpha} &= -\frac{1}{2} \arctan \frac{\sin 2\alpha - 2y \sin \alpha \cos \theta}{\cos 2\alpha - 2y \cos \alpha \cos \theta + yy} \\ &+ \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{1 - 2y \cos(\theta - \alpha) + yy}{1 - 2y \cos(\alpha + \theta) + yy}. \end{aligned}$$

Nachdem diese Formeln nun gefunden worden sind, wird die Reduktion der vorgelegten Formel sich so verhalten

$$\begin{aligned} \arctan \frac{z \sin \alpha}{1 - z \cos \alpha} &= 90^\circ - \alpha + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin 2\alpha - 2y \sin \alpha \cos \theta}{\cos 2\alpha - 2y \cos \alpha \cos \theta + yy} \\ &- \frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{1 - 2y \cos(\theta - \alpha) + yy}{1 - 2y \cos(\alpha + \theta) + yy}. \end{aligned}$$

## INTEGRATION DER DIFFERENTIALFORMEL

$$\frac{\partial x}{(3 - xx)\sqrt[3]{1 - 3xx}} = \partial V$$

§17 Weil ja aber noch nicht klar ist, wie diese Formel behandelt werden muss, wollen wir sie durch Setzen von

$$x = z\sqrt{-1}$$

auf die folgende imaginäre Form zurückführen, dass

$$\partial V = \frac{\partial z \sqrt{-1}}{(3 + zz) \sqrt[3]{1 + 3zz}}$$

ist; diese Form wird aber so beschaffen entdeckt, dass sie gemäß der nicht vor allzu langer Zeit angegebenen Lehren integrierbar gemacht werden kann; wir werden also die Auflösung auf die folgende Weise erledigen.

§18 Wir wollen also

$$\frac{\partial z}{(3 + zz) \sqrt[3]{1 + 3zz}} = \partial T$$

setzen, dass

$$V = T\sqrt{-1}$$

ist. Wir wollen diese Form aber auf die folgende Weise darstellen

$$\partial T = \frac{z \partial z}{(3z + z^3) \sqrt[3]{1 + 3zz}},$$

wo wir der Kürze wegen

$$\sqrt[3]{1 + 3zz} = v$$

setzen, dass

$$\partial T = \frac{z \partial z}{v(3z + z^3)}$$

ist, und hier wollen wir gemäß unserer Lehren

$$p = \frac{1 + z}{v} \quad \text{und} \quad q = \frac{1 - z}{v}$$

setzen, woher

$$p + q = \frac{2}{v} \quad \text{und} \quad p - q = \frac{2z}{v}$$

wird, und daher

$$z = \frac{p - q}{p + q}$$

und deshalb durch Differenzieren

$$\partial z = \frac{2q\partial p - 2p\partial q}{(p + q)^2} = \frac{1}{2}vv(q\partial p - p\partial q),$$

nach Einsetzen welches Wertes wir

$$\partial T = \frac{vz(q\partial p - p\partial q)}{2(3z + z^3)}$$

erlangen.

**§19** Weil nun

$$1 + z = pv \quad \text{und} \quad 1 - z = qv$$

ist, und zuerst wird

$$2z = v(p - q)$$

sein, dann wird aber die Summe der Kuben

$$(1 + z)^3 - (1 - z)^3 = v^3(p^3 + q^3) = 2 + 6zz$$

geben. Weil wir also

$$\sqrt[3]{1 + 3zz} = v$$

gesetzt haben, wird

$$v^3 = 1 + 3zz$$

sein; deswegen werden wir

$$(p^3 + q^3)(1 + 3zz) = 2 + 6zz$$



haben, als logische Konsequenz

$$p^3 + q^3 = 2.$$

Schließlich liefert aber die Differenz der Kuben

$$(p^3 - q^3)v^3 = 6z + 2z^3;$$

daher ist klar, dass

$$3z + z^3 = \frac{1}{2}(p^3 - q^3)v^3$$

ist; aber die Differenz der Quadrate gibt

$$(pp - qq)vv = 4z,$$

woher

$$z = \frac{1}{4}vv(pp - qq)$$

wird.

**§20** Man setze nun diese Werte anstelle von  $z$  und  $3z + z^3$  ein und unsere Formel wird

$$\partial T = \frac{(pp - qq)(q\partial p - p\partial q)}{4(p^3 - q^3)}$$

werden, wo also nur die beiden Buchstaben  $p$  und  $q$  auftauchen, welche so voneinander abhängen, dass  $p^3 + q^3 = 2$  ist, und daher durch Differenzieren

$$pp\partial p + qq\partial q = 0,$$

als logische Konsequenz

$$\text{entweder } \partial p = \frac{-qq\partial q}{pp} \quad \text{oder} \quad \partial q = \frac{-pp\partial p}{qq}.$$

§21 Man teile nun diese Form in zwei Teile, indem man

$$\frac{pp(q\partial p - p\partial q)}{p^3 - q^3} = \partial P \quad \text{und} \quad \frac{qq(q\partial p - p\partial q)}{p^3 - q^3} = \partial Q$$

setzt, dass

$$\partial T = \frac{1}{4}\partial P - \frac{1}{4}\partial Q$$

ist, und hier ist sofort klar, wenn in der ersten Formel  $-qq\partial q$  anstelle von  $pp\partial p$  geschrieben wird, dass dann

$$\partial P = -\frac{\partial q(p^3 + q^3)}{p^3 - q^3}$$

hervorgeht. Weil ja aber  $p^3 + q^3 = 2$  und daher  $p^3 = 2 - q^3$  ist, wird das Element  $\partial P$  durch den Buchstaben  $q$  so ausgedrückt werden, dass

$$\partial P = -\frac{\partial q}{1 - q^3}$$

ist.

§22 Wenn in der anderen Formel,  $\partial Q$ ,  $-pp\partial p$  anstelle von  $qq\partial q$  geschrieben wird, wird

$$\partial Q = \frac{\partial p(p^3 + q^3)}{p^3 - q^3}$$

hervorgehen, welche also wegen der Relation zwischen  $p$  und  $q$  diese Formel

$$\partial Q = \frac{\partial p}{p^3 - 1} = \frac{-\partial p}{1 - p^3}$$

an die Hand gibt. Nach Verbinden von diesen wird also

$$4\partial T = \frac{\partial p}{1 - p^3} - \frac{\partial q}{1 - q^3}$$

sein und so ist die ganze Aufgabe auf zwei rationale Differentialformel zurückgeführt worden, welche sich also durch Logarithmen und Kreisbogen integrieren lässt.

§23 Um diese Integrale zu finden, setze man

$$\frac{1}{1-p^3} = \frac{F}{1-p} + \frac{G}{1+p+pp'}$$

wo man bemerke, dass

$$F = \frac{1-p}{1-p^3} = \frac{1}{1+p+pp}$$

sein wird, nachdem  $1-p=0$  oder  $p=1$  gesetzt worden ist, woher  $F = \frac{1}{3}$  wird; dann wird aber

$$G = \frac{1+p+pp}{1-p^3} = \frac{1}{1-p}$$

sein, nachdem  $1+p+pp=0$  gesetzt worden ist. Hier erweitere man, um den Buchstaben  $p$  aus dem Nenner herauswerfen zu können, mit  $2+p$ ; es wird

$$G = \frac{2+p}{1-p-pp}$$

werden. Weil also  $p+pp=-1$  ist, wird

$$G = \frac{2+p}{3}$$

sein; deswegen werden wir

$$\frac{3\partial p}{1-p^3} = \frac{\partial p}{1-p} + \frac{(2+p)\partial p}{1+p+pp}$$

haben. Es ist bekannt, dass

$$\int \frac{\partial p}{1-p} = -\log(1-p)$$

und

$$\int \frac{p\partial p + 2\partial p}{pp+p+1} = \frac{1}{2} \log(1+p+pp) + \frac{3}{2} \int \frac{\partial p}{1+p+pp}$$

ist. Wir wissen aber, dass im Allgemeinen

$$\int \frac{\partial p}{1-2p \cos \alpha + pp} = \frac{1}{\sin \alpha} \arctan \frac{p \sin \alpha}{1-p \cos \alpha}$$

ist, woher klar ist, dass  $\alpha = 120^\circ$  genommen werden muss, und wegen

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

wird

$$\int \frac{\partial p}{1+p+pp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{p\sqrt{3}}{2+p}$$

sein und so wird das ganze Integral

$$3 \int \frac{\partial p}{1-p^3} = -\log(1-p) + \frac{1}{2} \log(1+p+pp) \\ + \sqrt{3} \arctan \frac{p\sqrt{3}}{2+p}$$

sein und in gleicher Weise wird

$$3 \int \frac{\partial q}{1-q^3} = -\log(1-q) + \frac{1}{2} \log(1+q+qq) \\ + \sqrt{3} \arctan \frac{q\sqrt{3}}{2+q}$$

sein.

**§24** Nachdem also all dies gefunden worden ist, wird

$$12T = \log \frac{1-q}{1-p} + \frac{1}{2} \log \frac{1+p+pp}{1+q+qq} \\ + \sqrt{3} \arctan \frac{p\sqrt{3}}{2+p} - \sqrt{3} \arctan \frac{q\sqrt{3}}{2+q}$$

sein. Daher, weil

$$p = \frac{1+z}{v} \quad \text{und} \quad q = \frac{1-z}{v}$$

ist, werden wir

$$T = \frac{1}{12} \log \frac{v-1+z}{v-1-z} + \frac{1}{24} \log \frac{vv+v(1+z)+(1+z)^2}{vv+v(1-z)+(1-z)^2}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{(1-z)\sqrt{3}}{2v+1-z}$$

haben.

§25 Nun wird also gemäß der oben dargelegten Lehren, wo wir

$$z = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$$

genommen haben, weil

$$x = z\sqrt{-1}$$

ist,

$$z = -x\sqrt{-1} = y(\cos \theta + \sqrt{-1} \cdot \sin \theta)$$

sein, woher klar ist, dass

$$\theta = 90^\circ \quad \text{und} \quad y = -x$$

gesetzt werden muss; und nachdem dies bemerkt worden ist, wollen wir, um die obigen Reduktionen besser an unseren Fall anzupassen, dort überall  $\frac{z}{s}$  und  $\frac{y}{s}$  anstelle von  $z$  und  $y$  schreiben, wonach die Reduktionen

$$\text{I.} \quad \log(s+z) = +\frac{1}{2} \log(ss + 2sy \cos \theta)$$

$$\text{II.} \quad \log(ss - 2sz \cos \alpha + zz) = \frac{1}{2} \log$$

$$-\sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{y \sin(\alpha + \theta)}{s - y \cos(\alpha + \theta)} + \frac{1}{2} \log(ss - 2sy \cos(\theta - \alpha) + yy)$$

$$-\sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{y \sin(\theta - \alpha)}{s - y \cos(\theta - \alpha)}$$

$$\text{III.} \quad \arctan \frac{z \sin \alpha}{s - z \cos \alpha} = 90^\circ - \alpha + \frac{1}{2} \arctan$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{ss - 2sy}{ss - 2sz}$$

sein werden.

§26 Nun wollen wir diese Lehre auf die einzelnen Teile des gefundenen Integrals anwenden, und zuerst wird freilich für die Formel  $\log(v - 1 + z)$   $s = v - 1$  sein, und wegen

$$y = -x \quad \text{und} \quad \theta = 90^\circ$$

berechnet man:

$$\text{I.} \quad \log(v - 1 + z) = \frac{1}{2} \log((v - 1)^2 + xx) - \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{x}{v - 1},$$

$$\text{II.} \quad \log(v - 1 - z) = \frac{1}{2} \log((v - 1)^2 + xx) + \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{x}{v - 1}.$$

III. für die Formel  $\log(vv + v(1 + z) + (1 + z)^2)$  ist klar, dass

$$ss = vv + v + 1 \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{vv + v + 1}$$

$$\cos \alpha = -\frac{v + 2}{2\sqrt{vv + v + 1}} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{v\sqrt{3}}{2\sqrt{vv + v + 1}}$$

sein wird, woher wegen  $\theta = 90^\circ$

$$\cos(\alpha + \theta) = -\sin \alpha, \quad \cos(\theta - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \cos \alpha \quad \text{und} \quad \sin(\theta - \alpha) = \cos \alpha$$

sein wird, nach Bemerkungen wovon

$$\begin{aligned} \log(vv + v(1 + z) + (1 + z)^2) &= \frac{1}{2} \log(vv + v + 1 - vx\sqrt{3} + xx) \\ &\quad + \frac{1}{2} \log(vv + v + 1 + vx\sqrt{3} + xx) \\ &\quad - \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{x(v + 2)}{2(vv + v + 1) - vx\sqrt{3}} \\ &\quad - \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{x(v + 2)}{2(vv + v + 1) + vx\sqrt{3}} \end{aligned}$$

sein wird, daher wird nach gleichzeitigem Vertauschen der Vorzeichen der Buchstaben  $z$  und  $x$

$$\begin{aligned} \log(vv + v(1-z) + (1-z)^2) &= \frac{1}{2} \log(vv + v + 1 + vx\sqrt{3} + xx) \\ &+ \frac{1}{2} \log(vv + v + 1 - vx\sqrt{3} + xx) \\ &- \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{x(v+2)}{2(vv + v + 1) + vx\sqrt{3}} \\ &- \sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{x(v+2)}{2(vv + v + 1) - vx\sqrt{3}} \end{aligned}$$

sein.

§27 Nun bemerke man weiter, dass für

$$\arctan \frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z},$$

welche Form in unserer Regel nicht enthalten ist,

$$\arctan \frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2v+1} + \arctan \frac{vz\sqrt{3}}{2(vv + v + 1) + (v+2)z}$$

ist, welcher letzte Werte verglichen mit

$$\arctan \frac{z \sin \alpha}{1 - z \cos \alpha}$$

wiederum

$$\sin \alpha = \frac{v\sqrt{3}}{2\sqrt{vv + v + 1}}$$

liefert, und so bleiben die Winkel  $\alpha + \theta$  und  $\theta - \alpha$  dieselben wie zuvor; daher liefert die Reduktion

$$\arctan \frac{vz\sqrt{3}}{2(vv + v + 1) + (v+2)z} = 90^\circ - \alpha - \frac{1}{2} \arctan \frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv + 2v + 2 + 2xx}$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{vv + v + 1 + vx\sqrt{3} + xx}{vv + v + 1 - vx\sqrt{3} + xx}.$$

Wir haben also diese Reduktionen erhalten

$$\arctan \frac{(1+z)\sqrt{3}}{2v+1+z} = 90^\circ - \alpha + \arctan \frac{\sqrt{3}}{2v+1} - \frac{1}{2} \arctan \frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{vv + v + 1 + vx\sqrt{3} + xx}{vv + v + 1 - vx\sqrt{3} + xx}$$

und

$$\arctan \frac{(1-z)\sqrt{3}}{2v+1-z} = 90^\circ - \alpha + \arctan \frac{\sqrt{3}}{2v+1} - \frac{1}{2} \arctan \frac{v(v+2)\sqrt{3}}{-vv+2v+2+2xx}$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{4} \log \frac{vv + v + 1 - vx\sqrt{3} + xx}{vv + v + 1 + vx\sqrt{3} + xx}.$$

§28 Wenn wir nun all diese Teile richtig sammeln, werden wir

$$T = -\frac{\sqrt{-1}}{6} \arctan \frac{x}{v-1} - \frac{\sqrt{-1}}{12} \arctan \frac{x(v+2)}{2(vv+v+1) - vx\sqrt{3}}$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{12} \arctan \frac{x(v+2)}{2(vv+v+1) + vx\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}} \log \frac{vv + v + 1 + vx\sqrt{3} + xx}{vv + v + 1 - vx\sqrt{3} + xx}$$

finden.

§29 Hier passierte es also glücklicherweise, dass alle Realteile sich gegenseitig aufgehoben haben, die Imaginärteile hingegen verdoppelt hervorgegangen sind, wie es die Natur der Sache natürlich erfordert. Weil also das gesuchte Integral  $V = T\sqrt{-1}$  ist, geht sein Wert nun wunderbar als reell hervor, weshalb wir zu dieser Integration geführt worden sind

$$\int \frac{\partial x}{(3-xx)\sqrt[3]{1-3xx}} = +\frac{1}{6} \arctan \frac{x}{v-1}$$

$$+\frac{1}{12} \arctan \frac{x(v+2)}{2(vv+v+1) - vx\sqrt{3}}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12} \arctan \frac{x(v+2)}{2(vv+v+1)+vx\sqrt{3}} \\
& + \frac{1}{8\sqrt{3}} \log \frac{vv+v+1+vx\sqrt{3}+xx}{vv+v+1-vx\sqrt{3}+xx}'
\end{aligned}$$

wo

$$v = \sqrt[3]{1-3xx}$$

ist. Diese Formel kann stark vereinfacht werden, indem man betrachtet, dass

$$1 - v^3 = 3xx$$

und daher

$$1 + v + vv = \frac{3xx}{1-v}$$

ist; daher, obwohl viele Substitutionen verwendet werden können, wollen wir uns mit diesen nicht weiter beschäftigen, sondern können zufrieden sein, das Integral dieser Differentialform gefunden zu haben, zu welchem mit keiner anderen Methode ein Zugang offen zu stehen scheint.

**§30** Außerdem wird die Rechnung leichter werden, wenn im zuerst gefundenen Integral die beiden mit  $\frac{1}{4\sqrt{3}}$  multiplizierten Bogen zu einem zusammengefasst werden; denn daher geht

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{vz\sqrt{3}}{vv+v+1-zz}$$

hervor. Hier setze man nun sofort

$$z = -x\sqrt{-1},$$

dass die Formel

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{vx\sqrt{3}\sqrt{-1}}{vv+v+1+xx}$$

hervorgeht, welche mit der kanonischen

$$\arctan t\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

verglichen wegen

$$t = \frac{vx\sqrt{3}}{vv + v + 1 + xx}$$

sofort zu dieser reduzierten Formel führt

$$-\frac{\sqrt{-1}}{8\sqrt{3}} \log \frac{vv + v + 1 + vx\sqrt{3} + xx}{vv + v + 1 - vx\sqrt{3} + xx}.$$