Verschiedene Bemerkungen über unendliche Reihen *

Leonhard Euler

Die Bemerkungen, die ich hier vorzutragen beschlossen habe, kreisen größtenteils um Reihen solcher Art, die von denen vollkommen verschieden sind, die bis jetzt behandelt zu werden pflegten. Weil nämlich noch keine anderen Reihen betrachtet worden sind als die, von denen entweder der allgemeine Term oder zumindest ein Gesetz gegeben ist, mit welchem es möglich ist, aus einigen gegebenen Termen die folgenden zu finden, so werde ich hier hauptsächlich Reihen solcher Art betrachten, die weder einen passend so genannten allgemeinen Term haben noch ein Fortschreitungsgesetz befolgen, sondern deren Natur durch andere Bedingungen bestimmt wird. Über Reihen von dieser Art wird sich also umso mehr zu wundern sein, wenn sie summiert werden können, weil für die bis jetzt bekannten Summationsmethoden notwendigerweise entweder der allgemeine Term oder das Fortschreitungsgesetz verlangt wird; weil dies aber hier beides nicht gegeben ist, scheint kaum ein anderer Weg offenzustehen, auf welchem wir zu zur Erkenntnis der Summen gelangen können. Zu diesen Bemerkungen hat mich aber eine eigentümliche mir vom hochgeehrten Goldbach mitgeteilte Reihe geführt, deren im höchsten Maße zu bewundernde Summation ich mit Erlaubnis des hochgeehrten Herrn Goldbach ich hier an erster Stelle beweisen werde.

*Originaltitel: "Variae observationes circa series infinitas", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9* 1744, pp. 160-188", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 216 - 244 ", Eneström-Nummer E72, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Lehrsatz 1

Die Summe dieser ins Unendliche fortgesetzten Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \text{etc.},$$

deren Nenner um die Einheit vermehrt alle Zahlen geben, die Potenzen entweder zweiter oder jeder höheren Ordnung von ganzen Zahlen sind, und von welcher daher jeder Term mit dieser Formel $\frac{1}{m^n-1}$ ausgedrückt wird, während m und n ganze Zahlen größer als die Einheit sind, ist $= 1$.

Beweis

Dies ist der mir vom hochgeehrten Goldbach zuerst mitgeteilte Lehrsatz, welcher mich auch zu den folgenden Propositionen geführt hat. Aus der Betrachtung dieser Reihe wird aber leicht eingesehen, wie unregelmäßig sie fortschreitet, und deshalb wird jeder, der sich mit diesen Sachen beschäftigt und beschäftigt hat, besonders die Art bewundern, auf welche Herr Goldbach die Summe dieser einzigartigen Reihe gefunden hat; er hat mir aber diesen Lehrsatz auf die folgende Weise bewiesen. Es sei

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \text{etc.};$$

darauf, weil gilt

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{etc.},$$

wird auch, indem diese Reihe von jener weggenommen wird, gelten

$$x - 1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \text{etc.};$$

von den Nennen sind also nun alle Potenzen von zwei zusammen mit zwei selbst ausgeschlossen worden, alle übrigen Zahlen tauchen hingen auf.

Von dieser Reihe subtrahiert er weiter diese

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \text{etc.}$$

und es wird zurückbleiben

$$x - 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \text{etc.};$$

und er subtrahiert erneut

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \text{etc.}$$

und es wird zurückbleiben

$$x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \text{etc.}$$

Und indem auf die gleiche Weise nacheinander alle übrigen Terme weggeschafft werden, wird schließlich aufgefunden werden

$$x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} - \text{etc.} = 1$$

oder

$$x - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \text{etc.},$$

die Nenner welcher Progression um die Einheit vermehrt alle Zahlen geben, die keine Potenzen sind. Daher, wenn diese Reihe von der am Anfang angenommenen

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$$

subtrahiert wird, wird zurückgelassen werden

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \text{etc.},$$

die Summe welcher Reihe, in welcher die Nenner um die Einheit vermehrt ganz und gar alle Potenzen der ganzen Zahlen geben, $= 1$ ist. Q. E. D.

LEHRSATZ 2

Die Summe dieser ins Unendliche fortgesetzten Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \text{etc.},$$

deren Nenner um die Einheit vermehrt alle geraden Potenzen geben, ist $= \log 2$; und die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \text{etc.},$$

ebenfalls bis ins Unendliche fortgesetzt, deren Nenner um die Einheit vermehrt alle ungeraden Potenzen geben, ist gleich $1 - \log 2$. Von diesen Reihen ist jeder Term der ersten $\frac{1}{(2m-2)^n-1}$, jeder beliebiger Term der zweiten ist hingegen in dieser Formel $\frac{1}{(2m-1)^n-1}$ enthalten, während m und n die vorhergehenden Werte beibehalten.

BEWEIS

Es werde die folgende Reihe betrachtet, deren Summe x gesetzt werde,

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \text{etc.}$$

Nun, weil gilt

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{etc.},$$

wird, nach Abziehen dieser Reihe von jener, die folgende hervorgehen

$$x - 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \text{etc.},$$

von welche diese subtrahiert werde

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \text{etc.};$$

es wird gelten

$$x - 1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \text{etc.}$$

auf die gleiche Weise wird wegen

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \text{etc.}$$

sein

$$x - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \text{etc.}.$$

Nachdem also alle Terme auf diese Weise weggenommen worden sind, wird hervorgehen

$$x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.},$$

deren Nenner eine natürliche Reihe der ungeraden Zahlen festlegen, die ausgenommen, die um die Einheit vermehrt Potenzen sind, wie aus der Bildung dieser Reihe eingesehen wird. Weil aber gilt

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{etc.}$$

sowie

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \text{etc.},$$

wird sein

$$x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \text{etc.} - \log 2.$$

Nachdem also jener für x gefundener Wert von diesem weggenommen worden ist, in welchem ganz und gar alle ungeraden Zahlen auftauchen, wird zurückbleiben

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \text{etc.} - \log 2$$

oder diese

$$\log 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \text{etc.},$$

die Nenner welcher Reihe ungerade Zahlen sind, welche um die Einheit vermehrt alle geraden Potenzen geben. Die Summe dieser Reihe ist also $\log 2$, wie in der Proposition versichert worden ist. Q. E. Unum.

Weil aber durch den vorhergehenden Lehrsatz gilt

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \text{etc.},$$

wo die Nenner um die Einheit vermehrt alle Zahlen geben, die so gerade wie ungerade Potenzen sind, wird man, nachdem jene Reihe von dieser weggenommen worden ist, haben

$$1 - \log 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \text{etc.},$$

deren Nenner daher die geraden Zahlen sind , die um die Einheit vermehrt alle ungeraden Potenzen geben. Q.E. Alterum.

Lehrsatz 3

Nachdem π für die Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, festgelegt worden ist, wird sein

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} - \frac{1}{124} - \frac{1}{168} - \frac{1}{224} + \frac{1}{244} - \frac{1}{288} - \text{etc.},$$

die Nenner welcher Reihe verdoppelte gerade Zahlen sind, die entweder um eine Einheit größer oder kleiner sind als die Potenzen ungerader Zahlen sind. Aber jene Brüche, deren Nenner die Potenzen um die Einheit überschreiten, haben das Vorzeichen $+$, die übrigen das Vorzeichen $-$.

Beweis

Weil gilt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.},$$

von welcher Reihe die Brüche, deren Nenner um die Einheit nach unten von verdoppelten geraden Zahlen abweichen, das Vorzeichen $-$, die übrigen das Vorzeichen $+$ haben, werde zu jener Reihe diese geometrische addiert

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \text{etc.};$$

es wird sein

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \text{etc.},$$

von welcher diese subtrahiert werde

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \text{etc.};$$

es wird sein

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.},$$

in welcher Reihe weder 3 noch 5 noch die Potenzen derselben weiter enthalten sind; auf die gleiche Weise werden 7 und und ihren Potenzen beseitigt werden, indem diese Reihe addiert wird

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{7} - \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

und es wird sein

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \text{etc.}$$

Indem auf die gleiche Weise die übrigen Terme beseitigt werden, die keine Potenzen sind (zugleich werden nämlich die Potenzen beseitigt), wird schließlich hervorgehen

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{20} - \frac{1}{20} + \frac{1}{24} - \frac{1}{28} + \text{etc.} = 1$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} - \text{etc.}$$

- wegen der sich meistens je zwei gegenseitig aufhebenden Terme, sodass lediglich die übrig sind, die allein stehend waren; aber allein stehend waren die Brüche, deren Nenner, die immer als immer als verdoppelte gerade hervorgegangen waren, um die Einheit entweder vermehrt oder vermindert die Potenzen der ungeraden Zahlen ergaben. Aber die Vorzeichen dieser Terme halten das vorgeschriebene Gesetz ein. Q. E. D.

Lehrsatz 4

Während π wie zuvor die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist, wird sein

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{28} - \frac{1}{124} + \frac{1}{244} + \frac{1}{344} + \text{etc.},$$

alle Nenner welcher Reihe verdoppelte gerade Zahlen, dabei entweder um eine Einheit größer oder kleiner als die nicht quadratischen Potenzen der ungeraden Zahlen, sind; und jene Brüche, deren Nenner solche Potenzen um die Einheit überragen, haben das Vorzeichen $+$; die übrigen, deren Nenner nach unten von nicht quadratischen Potenzen dieser Art abweichen, haben das Vorzeichen $-$.

Beweis

Durch den vorhergehenden dritten Lehrsatz haben wir gefunden

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} - \frac{1}{124} - \text{etc.},$$

in welcher Reihe zuerst die Nenner auftauchen, die von allen ungeraden Quadraten um eine Einheit nach unten abweichen, und all die Brüche haben dasselbe Vorzeichen $-$. Weil aber gilt

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} + \text{etc.} = \frac{1}{4},$$

wird man, indem anstelle all dieser Brüche $\frac{1}{4}$ eingesetzt wird, die folgende Form haben

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{28} - \frac{1}{124} + \frac{1}{244} + \frac{1}{344} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{28} - \frac{1}{124} + \frac{1}{244} + \frac{1}{344} + \text{etc.},$$

die Nenner welcher Reihe verdoppelte gerade Zahlen, die entweder um eine Einheit größer oder kleiner als die nicht quadratischen Potenzen der ungeraden Zahlen, wegen der schon ausgeschlossenen Quadrate, sind, und je nachdem ob sie um eine Einheit entweder größer oder kleiner sind, haben die Brüche auch das Vorzeichen $+$ oder $-$. Q. E. D.

KOROLLAR 1

Um also diese Reihe fortzusetzen, sind von allen ungeraden Zahlen, die keine Potenzen sind, die Potenzen der ungeraden Zahlen zu nehmen und sie sind dann um die Einheit entweder zu vermehren oder zu vermindern, damit verdoppelte gerade Zahlen hervorgehen, welche die Nenner der gefundenen Reihen sind, unter Beibehalt der Regel für Vorzeichen.

KOROLLAR 2

Weil jede ungerade Zahl entweder $4m-1$ oder $4m+1$ ist, aber die der aus $4m-1$ entstehenden Potenzen zu ungeraden Exponenten, wenn sie um die Einheit vermehrt werden, jene aber, die aus $4m+1$ entspringen, wenn sie um die Einheit vermindert werden, verdoppelte gerade Zahlen geben, wird $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$ der Reihe der Terme gleich werden, die alle in dieser Form $\frac{1}{(4m-1)^{2n+1}+1}$ enthalten sind, nachdem die Reihe der in dieser Form $\frac{1}{(4m+1)^{2n+1}-1}$ enthaltenen Terme weggenommen worden ist, wo anstelle von m und n positive ganze Zahlen außer denen angenommen werden müssen, die entweder $4m-1$ oder $4m+1$ zu Potenzen machen.

KOROLLAR 3

Also wird $\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$ dem Aggregat der folgenden unendlichen Reihen gleich werden

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \left\{ \begin{array}{lllll}
+\dfrac{1}{3^3+1} & +\dfrac{1}{3^5+1} & +\dfrac{1}{3^7+1} & +\dfrac{1}{3^9+1} & +\text{etc.} \\[2ex]
-\dfrac{1}{5^3-1} & -\dfrac{1}{5^5-1} & -\dfrac{1}{5^7-1} & -\dfrac{1}{5^9-1} & -\text{etc.} \\[2ex]
+\dfrac{1}{7^3+1} & +\dfrac{1}{7^5+1} & +\dfrac{1}{7^7+1} & +\dfrac{1}{7^9+1} & +\text{etc.} \\[2ex]
-\dfrac{1}{9^3-1} & -\dfrac{1}{9^5-1} & -\dfrac{1}{9^7-1} & -\dfrac{1}{9^9-1} & -\text{etc.} \\[2ex]
+\dfrac{1}{11^3+1} & +\dfrac{1}{11^5+1} & +\dfrac{1}{11^7+1} & +\dfrac{1}{11^9+1} & +\text{etc.} \\[2ex]
-\dfrac{1}{13^3-1} & -\dfrac{1}{13^5-1} & -\dfrac{1}{13^7-1} & -\dfrac{1}{13^9-1} & +\text{etc.} \\[2ex]
+\dfrac{1}{15^3+1} & +\dfrac{1}{15^5+1} & +\dfrac{1}{15^7+1} & +\dfrac{1}{15^9+1} & +\text{etc.} \\
 & & \text{etc.} & &
\end{array} \right.$$

KOROLLAR 4

Nachdem also diese Reihe bis dorthin fortgesetzt worden ist, bis sie schließlich größer als 100000 werden, wird man haben

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{28} - \frac{1}{124} + \frac{1}{244} + \frac{1}{344} + \frac{1}{1332} + \frac{1}{2188} - \frac{1}{2196} - \frac{1}{3124} + \frac{1}{3376} - \frac{1}{4912}$$
$$+\frac{1}{6860} - \frac{1}{9260} + \frac{1}{12168} + \frac{1}{16808} + \frac{1}{19684} - \frac{1}{24388} + \frac{1}{29792} - \frac{1}{35936} + \frac{1}{42876}$$
$$-\frac{1}{50652} + \frac{1}{59320} - \frac{1}{68920} - \frac{1}{78124} + \frac{1}{79508} - \frac{1}{91124}.$$

KOROLLAR 5

Weil alle Nenner durch 4 dividiert werden können, wird sein

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{31} + \frac{1}{61} + \frac{1}{86} + \frac{1}{333} + \frac{1}{547} - \frac{1}{549} - \frac{1}{781} + \frac{1}{844} - \text{etc.}$$

Diese Reihe verdient es daher angemerkt zu werden, weil ihre zwei ersten Terme schon das Archimedes'sche Verhältns der Peripherie des Kreises zum Durchmesser geben.

LEHRSATZ 5

Während π die erste Bedeutung beibehält, wird sein

$$\frac{\pi}{4} - \log 2 = \underbrace{\frac{1}{26} + \frac{1}{28}} + \underbrace{\frac{1}{242} + \frac{1}{244}} + \underbrace{\frac{1}{342} + \frac{1}{344}} + \text{etc.},$$

das Bildungsgesetzt welcher Reihe dieses ist, dass die Zwischenzahlen zwischen je zwei sich um zwei unterscheidenden Nennern, natürlich 27, 243, 343 etc., Potenzen ungerader Exponenten sind, die aus ungeraden Zahlen entspringen und die um die Einheit vermehrt durch 4 teilbar oder verdoppelte gerade Zahlen sind.

BEWEIS

Weil durch den dritten Lehrsatz gilt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \text{etc.},$$

(die Nenner der mit dem Vorzeichen $-$ behafteten Brüche sind um eine Einheit von den Potenzen der ungeraden Zahlen nach unten abweichende verdoppelte gerade Zahlen, dahingegen sind die Nenner der mit dem Vorzeichen

$+$ behafteten Brüche auch verdoppelte gerade Zahlen, die aber dagegen die Potenzen der ungeraden Zahlen um die Einheit überragen) und außerdem durch den zweiten Lehrsatz gilt

$$1 - \log 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \text{etc.},$$

die Nenner welcher Reihe um eine Einheit nach unten von allen Potenzen der ungeraden Zahlen abweichen, wird diese Reihe alle mit dem Vorzeichen $-$ behafteten und außerdem die Brüche umfassen, die um die Einheit nach unten von den Potenzen der ungeraden abweichende verdoppelte gerade Zahlen als Nenner haben. Daher, wenn diese Reihe zu jener addiert wird, wird hervorgehen

$$\frac{\pi}{4} - \log 2 = \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \frac{1}{242} + \frac{1}{244} + \frac{1}{342} + \frac{1}{344} + \text{etc.},$$

von welcher je zwei Brüche so beschaffen sein werden, dass der Nenner des ersten eine verdoppelte ungerade Zahl ist, der entsprechende der zweiten hingegen eine um zwei größere verdoppelte gerade Zahl und die mittlere Zahl zwischen zwei Nennern dieser Art die Potenz einer geraden Zahl ist, welche Potenz also um die Einheit vermehrt eine verdoppelte gerade Zahl geben muss. Q. E. D.

Korollar 1

Weil diese Potenzen der ungeraden Zahlen so beschaffen sind, dass sie um die Einheit vermehrt durch 4 teilbar werden, werden sie Potenzen von ungeraden Dimensionen sein, die aus Zahlen dieser Form $4m - 1$ entspringen, die selbst keine Potenzen sind.

Korollar 2

Wenn also alle Zahlen dieser Form $4m - 1$ genommen werden, die keine Potenzen sind, und von diesen alle Potenzen ungerader Exponenten genommen werden, werden diese Potenzen um die Einheit so vermehrt wie vermindert alle Nenner der Brüche der gefundenen Reihen geben.

KOROLLAR 3

Wenn je zwei Brüche zu einem zusammengezogen werden, wird gelten

$$\frac{\pi}{4} = \log 2 + \frac{2 \cdot 27}{26 \cdot 28} + \frac{2 \cdot 243}{242 \cdot 244} + \frac{2 \cdot 343}{342 \cdot 344} + \text{etc.}$$

Diese Reihe wird gebildet werden, indem alle Brüche genommen werden, die aus dieser Form entspringen

$$\frac{2(4m-1)^{2n+1}}{(4m-1)^{4n+2}-1},$$

indem anstelle von m und n nacheinander alle ganzen Zahlen außer den Werten von m eingesetzt werden, die $4m-1$ zu einer Potenz machen.

LEHRSATZ 6

Die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \text{etc.},$$

deren Nenner um die Einheit vermehrt alle Quadrate geben, die zugleich höhere Potenten sind, so sage ich, wenn sie bis ins Unendliche fortgesetzt wird, ist $\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}$, während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist.

Beweis

Auch diesen Lehrsatz habe ich vom hochgeehrten Goldbach, aber ohne Beweis, erhalten, und denselben Vorgehensweisen wie zuvor folgend habe ich diesen Beweis gefunden. Weil ich vor einigen Jahren darauf gestoßen war, dass die Summe dieser Reihe

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$$

$=\frac{\pi^2}{6}$ ist, habe ich diese Reihe selbst so betrachtet

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

Weil nun gilt

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{etc.}$$

sowie

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\text{etc.}$$

und auf die gleiche Weise

$$\frac{1}{24}=\frac{1}{25}+\frac{1}{625}+\text{etc.} \quad \text{und} \quad \frac{1}{35}=\frac{1}{36}+\text{etc.},$$

wenn anstelle dieser geometrischen Reihen die Summen eingesetzt werden, wird hervorgehen

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{99}+\text{etc.},$$

die Nenner welcher Reihe um die Einheit vermehrt alle Quadratzahlen außer denen geben, die zugleich eine Potenz einer anderen Gattung sind. Weil aber durch Nehmen von ganz und gar allen um die Einheit verminderten Quadraten gilt

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \text{etc.},$$

wird, indem von dieser die obere Reihe subtrahiert wird, hervorgehen

$$\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \text{etc.},$$

welche Nenner um die Einheit vermehrt alle Quadratzahlen geben, die zugleich keine Potenzen anderen Geschlechts sind. Q. E. D.

Diese sechs Lehrsätze legen den einen Teil dieser Bemerkungen fest, in welchen natürlich aus der Addition oder Subtaktion der Terme entstandene Reihen betrachtet worden sind. Die folgenden Lehrsätze werden hingen um Reihen kreisen, deren Terme miteinander multipliziert sind, und si werden nicht weniger bewundernswert als der vorgehenden sein, weil ih ihnen das Fortschreitungsgesetz dermaßen unregelmäßig ist. Aber der Unterschied wird hauptsächlich darin gelegen sein, dass in den vorausgehenden Lehrsätzen die Progression der Terme der Reihe der Potenzen gefolgt ist welche per se in höchsten Maße unreglmäßig ist, in dieser aber die Terme nach den Primzahlen fortschreiten, deren Fortschreiten nicht weniger abstrus ist.

Lehrsatz 7

Das unendliche Produkt aus diesen Brüchen

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot \text{etc.}},$$

wo alle Zähler Primzahlen, die Nenner hingegen um eine Einheit nach unten von den Zählern abweichen, so sage ich, ist dann der Summe dieser Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{etc.}$$

gleich und daher unendlich.

Beweis

Denn es sei

$$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{etc.};$$

es wird sein

$$\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\text{etc.},$$

nach Wegnehmen welcher Reihe von jener zurückbleibt

$$\frac{1}{2}x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\text{etc.},$$

in welcher gerade Nenner nicht weiter enthalten sind. Von dieser werde erneut diese Reihe weggeschafft

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\text{etc.},$$

es wird zurückbleiben

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.},$$

in deren Nennern weder die durch 2 noch durch 3 teilbaren aufgefunden werden. Damit aber auch die durch 5 teilbaren Zahlen herausgehen, werde diese Reihe subtrahiert

$$\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{5}x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \text{etc.}$$

und es wird zurückbleiben

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 5}x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

Und indem auf die gleiche Weise alle sowohl durch 7 als auch durch 11 und alle durch Primzahlen teilbaren Terme beseitigt werden, wird schließlich aufgefunden werden

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18\cdot 22\cdot \text{etc.}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot \text{etc.}}x = 1.$$

Daher, weil gilt

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

wird sein

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot \text{etc.}}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 13\cdot 16\cdot 18\cdot 22\cdot \text{etc.}},$$

die Zähler welches Ausdruckes die Progression der Primzahlen festlegen, die Nenner weichen hingegen um eine Einheit nach unten ab. Q. E. D.

Korollar 1

Der Wert des Ausdruckes

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}$$

ist also unendlich und nachdem das absolut Unendliche $= \infty$ gesetzt worden ist, wird der Wert dieses Ausdruckes $= \log \infty$ sein, welches Unendliche unter allen Potenzen des Unendlichen das kleinste ist.

Korollar 2

Weil aber dieser Ausdruck

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 24 \cdot 35 \cdot 48 \cdot \text{etc.}}$$

einen endlichen Wert hat, natürlich 2, folgt, dass es unendlich mal mehr Primzahlen als Quadratzahlen in der Reihe von ganz und gar allen Zahlen gibt.

Korollar 3

Aber auch daher wird auch eingesehen, dass unendlich mal weniger Primzahlen als ganze Zahlen existieren; denn dieser Ausdruck

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \text{etc.}}$$

hat einen uneingeschränkt unendlichen Wert, während der gleiche nur aus Primzahlen entspringende Wert der Logarithmus dieses Unendlichen ist.

LEHRSATZ 8

Wenn aus der Reihe der Primzahlen der folgende Ausdruck gebildet wird

$$\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n-1}\cdot\text{etc.},$$

wird sein Wert der Summe dieser Reihe gleich sein

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}$$

BEWEIS

Es sei

$$x=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\text{etc.};$$

es wird sein

$$\frac{1}{2^n}x=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.},$$

woher entspringt

$$\frac{2^n-1}{2^n}x=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{etc.}$$

Weiter ist

$$\frac{2^n-1}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n}x=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\text{etc.},$$

woher werden wird

$$\frac{2^n - 1}{2^n} \cdot \frac{3^n - 1}{3^n} x = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.}$$

Nachdem also die gleichen Operationen für die einzelnen Primzahlen durchgeführt worden sind, werden alle Terme der Reihe außer dem ersten beseitigt werden und es wird aufgefunden werden

$$1 = \frac{2^n - 1}{2^n} \cdot \frac{3^n - 1}{3^n} \cdot \frac{5^n - 1}{5^n} \cdot \frac{7^n - 1}{7^n} \cdot \frac{11^n - 1}{11^n} \cdot \text{etc.} x$$

und nachdem anstelle von x wieder die Reihe eingesetzt worden ist, wird

$$\frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \text{etc.} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

Q. E. D.

Korollar 1

Weil nach Setzen von $n = 2$ gilt

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6},$$

während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser 1 ist, wird sein

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot \text{etc.}} = \frac{\pi^2}{6}$$

oder

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}$$

KOROLLAR 2

Weil außerdem nach Setzen von $n = 4$ gilt

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{\pi^4}{90},$$

wird sein

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \quad 9 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 121 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 48 \cdot 50 \cdot 120 \cdot 122 \cdot \text{etc.}}$$

Nachdem also dieser Ausdruck durch jenen dividiert worden ist, geht hervor

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{4 \cdot \quad 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot \text{etc.}}{5 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 50 \cdot 122 \cdot 170 \cdot \text{etc.}}$$

LEHRSATZ 9

Wenn die Quadrate aller ungeraden Primzahlen in zwei Teile aufgelöst werden, die sich um die Einheit voneinander unterscheiden, und von diesen Teilen die ungeraden für die Zähler genommen werden, die geraden hingegen für die Nenner der aus den Faktoren zusammengesetzten Reihen, wird der Wert des nachstehenden Ausdruckes sein

$$\frac{5 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 61 \cdot 85 \cdot 145 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 84 \cdot 144 \cdot \text{etc.}} = \frac{3}{2}.$$

Beweis

Durch das Korollar 1 des vorhergehenden Lehrsatzes haben wir

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot 289 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot 288 \cdot \text{etc.}}.$$

Aber in Korollar 2 haben wir die folgende Gleichung gefunden

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{4 \cdot \quad 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot 289 \cdot \text{etc.}}{5 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 50 \cdot 122 \cdot 170 \cdot 290 \cdot \text{etc.}}.$$

Wenn von diesen Ausdrücken jener durch diesen dividiert wird, wird π aus der Rechnung herausgehen und man wird haben

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 50 \cdot 122 \cdot 170 \cdot 290 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot \quad 8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot 288 \cdot \text{etc.}},$$

die Zähler welches Ausdruckes um eine Einheit größer sind als die Quadrate der Primzahlen, die Nenner sind hingegen um eine Einheit kleiner. Wenn also auf beiden Seiten durch $\frac{5}{3}$ dividiert wird und die einzelnen Brüche mit 2 gekürzt werden, wird man haben

$$\frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 61 \cdot 85 \cdot 145 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 84 \cdot 144 \cdot \text{etc.}},$$

wo die Zähler um eine Einheit größer sind als die entsprechenden Nenner und jeder Zähler mit seinem Nenner das Quadrat einer wegen des durch die Division weggeschafften Quadrates der geraden Primzahl 2 ungeraden Primzahl ergibt. Q. E. D.

Lehrsatz 10

Wenn π wie bisher die Peripherie des Kreises bedeutet, dessen Durchmesser 1 ist, wird gelten

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{80 \cdot 224 \cdot 440 \cdot 624 \cdot 728 \cdot \text{etc.}}{81 \cdot 225 \cdot 441 \cdot 625 \cdot 729 \cdot \text{etc.}},$$

die Nenner welches Ausdruckes die Quadrate der ungeraden Nicht-Primzahlen sind, die Zähler sind hingegen um eine Einheit kleiner.

Beweis

Von Wallis hat man den folgenden Ausdruck für π, natürlich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 80 \cdot 120 \cdot 168 \cdot \text{etc.}}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdot 121 \cdot 169 \cdot \text{etc.}},$$

welche Brüche aus ganz und gar allen ungeraden Quadratzahlen gebildet werden. Durch das Korollar 1 von Lehrsatz 8 war hingegen

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot \text{etc.}}$$

oder

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 169 \cdot 289 \cdot \text{etc.}}{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 120 \cdot 168 \cdot 288 \cdot \text{etc.}},$$

welche Brüche allein aus den Quadraten der ungeraden Zahlen gebildet worden sind. Wenn nun diese zwei Ausdrücke miteinander multipliziert werden, wird hervorgehen

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{80 \cdot 224 \cdot \cdot 440 \cdot 624 \cdot 728 \cdot \text{etc.}}{81 \cdot 225 \cdot \cdot 441 \cdot 625 \cdot 729 \cdot \text{etc.}},$$

welche Brüche daher den Quadraten der ungeraden Nicht-Primzahlen folgen. Q. E. D.

LEHRSATZ 11

Nachdem π für die Peripherie des Kreises genommen wurde, dessen Durchmesser $= 1$ ist, wird sein

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \text{etc.}}$$

die Zähler welches Ausdruckes die Progression der Primzahlen festlegen, die Nenner sind hingegen verdoppelte gerade Zahlen, die entweder um eine Einheit größer oder kleiner sind als die entsprechenden Zähler.

BEWEIS

Weil gilt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.},$$

wird sein

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \text{etc.},$$

nach Addieren welcher Reihe wird

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

Des Weiteren ist

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{35}-\frac{1}{55}+\text{etc.},$$

nach Wegnehmen von welcher dann hervorgeht

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\text{etc.},$$

in welcher Reihe entweder durch 3 oder durch 5 teilbare Nenner nicht weiter auftauchen. Auf die gleiche Weise werden alle durch 7 teilbaren beseitigt werden, indem diese addiert wird

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{4\cdot 4}{5\cdot 3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{7}-\frac{1}{49}-\frac{1}{77}+\text{etc.};$$

es wird aber hervorgehen

$$\frac{8\cdot 4\cdot 4}{7\cdot 5\cdot 3}\cdot\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\text{etc.}$$

Es wird aber erkannt, dass die durch eine Primzahl dieser Form $4n-1$ teilbaren Nenner durch Addition beseitigt werden, woher dieser neue Faktor $\frac{4n}{4n-1}$ hinzukommt, dahingegen werden die durch eine Primzahl der Form $4n+1$ teilbaren Zahlen durch Subtraktion beseitigt, woher dieser neue Faktor $\frac{4n}{4n+1}$ hinzukommen wird. Die Nenner dieser nacheinander zu addierenden Produkte werden also Primzahlen sein, die Zähler hingegen verdoppelte gerade Zahlen, die entweder um eine Einheit größer oder kleiner sind als die Nenner. Wenn also auf diese Weise alle Terme der anfangs angenommenen Reihe weggeschafft werden, wird schließlich hervorgehen

$$\frac{\text{etc.}\cdot 24\cdot 20\cdot 16\cdot 12\cdot 12\cdot 8\cdot 4\cdot 4}{\text{etc.}\cdot 23\cdot 19\cdot 17\cdot 13\cdot 11\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\cdot\frac{\pi}{4}=1.$$

Aus dieser entspringt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \text{etc.}}$$

Q. E. D.

LEHRSATZ 12

Wenn alle ungeraden Primzahlen in zwei sich um eine Einheit voneinander unterscheidende Teile aufgeteilt werden und die geraden Teile für die Zähler genommen werden, die ungeraden hingegen für die Nenner, wird nachstehendes unendliche Produkt entspringen

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \quad 9 \cdot 11 \cdot \text{etc.}} = 2.$$

BEWEIS

Weil durch den vorhergehenden Lehrsatz gilt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \text{etc.}},$$

wird ebenfalls gelten

$$\frac{16}{\pi^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \text{etc.}}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 17 \cdot \text{etc.}}.$$

Aber aus Korollar 1 von Lehrsatz 8, wenn mit $\frac{3}{4}$ multipliziert wird, hat man

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \text{etc.}}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \text{etc.}},$$

von welchen Ausdrücken jeder der beiden durch die ungeraden Primzahlen gebildet wird. Wenn diese also miteinander multipliziert werden, wird der Nenner des ersten den Zähler des zweiten aufheben und zusätzlich wird so vom Zähler von jenem wie vom Nenner von diesem die Häfte der Terme weggeschafft werden. Es wird schließlich hervorgehen

$$2 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \text{etc.}}{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \text{etc.}},$$

wo die Zähler verdoppelte gerade Zahlen, die Nenner hingegen verdoppelte ungerade Zahlen sind, jede der beiden sind dabei entweder um eine Einheit größer oder kleiner als die ungeraden Primzahlen. Wenn also die einzelnen Brüche mit zwei gekürzt werden, wird der Zähler gerade Zahlen, der Nenner hingegen ungerade Zahlen enthalten, und je zwei entsprechende werden sich sowohl um eine Einheit unterscheiden und werden zusammengenommen eine Primzahl festlegen. Man wird also haben

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \quad 9 \cdot 11 \cdot \text{etc.}} = 2.$$

Q. E. D.

Lehrsatz 13

Wenn alle ungeraden Nicht-Primzahlen in zwei Teile aufgeteilt werden, die sich um die Einheit voneinander unterscheiden, und von diesen die geraden für die Zähler, die ungeraden hingegen für die Nenner genommen werden, wird sein

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 \cdot \text{etc.}}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 \cdot \text{etc.}}.$$

Beweis

Weil durch die Wallis'sche Quadratur des Kreises gilt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \quad 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \text{etc.}},$$

gehen, wenn die einzelnen Zähler zu ihren entsprechenden Nennern addiert werden, ganz und gar alle ungeraden Zahlen hervor. Aber weil ja ein ähnlicher Ausdruck, dessen Nenner nur aus ungeraden Zahlen gebildet wird, zwei gleich wird, wie im vorhergehenden Lehrsatz bewiesen worden ist, nach welchem galt

$$2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \quad 9 \cdot 11 \cdot \text{etc.}},$$

wenn jeder Ausdruck durch diesen dividiert wird, wird hervorgehen

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 \cdot \text{etc.}}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 \cdot \text{etc.}},$$

welcher gleichermaßen aus den ungeraden Nicht-Primzahlen gebildet wird. Natürlich werden die Zähler gerade Zahlen, die Nenner hingegen ungerade Zahlen, die um eine Einheit von den Zählen abweichen, sein, und die einzelnen Zähler werden zu ihren entsprechenden Nennern addiert alle ungeraden Nicht-Primzahlen geben. Q. E .D.

Lehrsatz 14

Während wie bisher π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser 1 ist, sage ich, dass sein wird

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot \text{etc.}}{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 22 \cdot 30 \cdot 30 \cdot \text{etc.}},$$

die Zähler welches Ausdruckes die Reihe ungerader Primzahlen festlegen, dessen Nenner hingegen verdoppelte ungerade Zahlen sind, die entweder um eine Einheit kleiner oder größer als die entsprechenden Zähler sind.

Beweis

Durch Korollar 1 von Lehrsatz 8, wenn mit $\frac{3}{4}$ multipliziert wird, gilt

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \text{etc.}}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \text{etc.}},$$

in welcher Reihe die Zähler jeweils zweimal geschriebene ungerade Primzahlen, die Nenner hingegen so verdoppelte gerade wie verdoppelte ungerade Zahlen sind, die entweder um eine Einheit größer oder kleiner sind als die Primzahl sind. Des Weiteren haben wir in Lehrsatz 11 bewiesen, dass gilt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \text{etc.}},$$

in welchem Ausdruck die Zähler jeweils einmal geschriebene ungerade Zahlen, die Nenner hingegen verdoppelte gerade Zahlen, die um eine Einheit von Primzahlen abweichen, sind, so dass dieser Ausdruck im vorhergehenden enthalten ist. Daher, wenn jener Ausdruck durch diesen dividiert wird, wird hervorgehen

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \text{etc.}}{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \text{etc.}},$$

in welchem die ungeraden Primzahlen die Zähler festlegen, die Nenner sind hingegen verdoppelte ungerade Zahlen, die entweder um eine Einheit größer oder kleiner als die Zähler sind.

Lehrsatz 15

Während π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser 1 ist, wird gelten

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} - \frac{1}{35} - \frac{1}{37} - \text{etc.},$$

die Nenner welcher Reihe alle ungeraden Zahlen sind, das Verhältnis der Vorzeichen ist aber auf diese Grundlage gestützt. Den Primzahlen dieser Form $4n - 1$ wird das Vorzeichen $+$, aber den Primzahlen dieser Form $4n + 1$ das Vorzeichen $-$ zugeteilt. Des Weiteren wird den zusammengesetzten das Vorzeichen zugeteilt, welches ihnen aus der Zusammensetzungsweise aus den Primzahlen mit ihren Vorzeichen nach der Multiplikationsregel zukommt.

Beweis

So wie mit den hier gebrauchten Operationen diese Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

in diesen Ausdruck umgewandelt worden ist

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \text{etc.}},$$

so kann umgekehrt eine Methode erdacht werden, mit welcher es möglich ist, diesen Ausdruck

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \text{etc.}}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \text{etc.}}$$

in die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

zu verwandeln. Und wenn diese Methode auf den im vorhergehenden Lehrsatz gefundenen Ausdruck

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \text{etc.}}{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \text{etc.}}$$

angewendet wird, wird dieser Ausdruck in diese vorgelegte Reihe übergehen

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \text{etc.},$$

deren Summe deshalb $\frac{\pi}{2}$ ist. Aber dasselbe lässt sich a posteriori erschließen, indem festgelegt wird

$$x = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

und es wird dann sein

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} - \text{etc.}$$

und durch Subtrahieren wird hervorgehen

$$\frac{2}{3}x = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \text{etc.}$$

Weil darauf auf die gleiche Weise gilt

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{55} - \text{etc.},$$

wird durch Addieren hervorgehen

$$\frac{6\cdot 2}{5\cdot 3}x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

Und indem gleichermaßen alle Terme außer dem ersten 1 durch Addieren beseitigt werden, wird gefunden werden

$$x = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot \text{etc.}}{2\cdot 6\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdot 18\cdot 18\cdot \text{etc.}} = \frac{\pi}{2}.$$

Und daher wird zugleich dieselbe Beschaffenheit der Vorzeichen der vorgelegten Reihe erschlossen, die wir beschrieben haben. Q. E. D.

Korollar

Also ist die Summe der vorgelegten Reihe

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} - \text{etc.}$$

doppelt so groß wie die Summe dieser Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

Daher, weil die Brüche bei jeder der beiden dieselben sind, ist durch die Vorzeichen allein bewirkt worden, dass die eine das Doppelte der anderen ist.

LEHRSATZ 16

Nachdem π wie bisher für die Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, festgelegt worden ist, wird sein

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \text{etc.}$$

Die Nenner der positiven Brüche sind um eine Einheit kleiner als die ungeraden Nicht-Potenzen, die Nenner der negativen Brüche sind um eine Einheit größer. Das Vorzeichen eines jeden Bruches stimmt aber mit dem Vorzeichen der ungeraden Zahl, die entweder um eine Einheit größer oder kleiner ist als eine Nicht-Potenz, im vorhergehenden Lehrsatz überein.

BEWEIS

Diese Reihe selbst entspringt aus der Umwandlung gemäß der in den Lehrsätzen 1, 2, 3 gebrauchten Methode, mit welcher immer wieder geometrische Progressionen entweder addiert oder weggenommen wird, bis schließlich allein der erste Terme übrig bleibt. Q. E. D.

LEHRSATZ 17

Wenn den ungeraden Zahlen dieser Form $4n - 1$ das Vorzeichen $+$, den übrigen dieser Form $4n + 1$ hingegen das Zeichen $-$ zugeteilt wird, und zuletzt den zusammengesetzten die Vorzeichen, die selbigen nach den Multiplikationsregeln aus den erstgenannten zukommen, wird gelten

$$\frac{3\pi}{8} = 1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{25} + \frac{1}{33} - \frac{1}{35} - \frac{1}{39} + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} - \text{etc.},$$

welche Nenner Produkte aus entweder 4 oder 6 oder etc. Primzahlen sind.

Beweis

Weil nämlich durch Lehrsatz 15 gilt

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.},$$

wo die Nenner ungerade Zahlen sind und die Vorzeichen demselben Gesetz folgen, welches wir vorgeschrieben haben, und zusätzlich gilt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.},$$

von welchen Reihen die Terme dieselben Vorzeichen haben, deren Nenner die Produkte aus zwei oder vier oder sechs etc. Primzahlen sind, werden nach Addieren dieser Zahlen also alle diese Terme zurückbleiben und nach einer Division durch 2 wird sein

$$\frac{3\pi}{8} = 1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{25} + \frac{1}{33} - \text{etc.},$$

welches die vorgelegte Reihe selbst ist; und aus dem Gesetz der Vorzeichen folgt zugleich, dass die Brüche das Vorzeichen $+$ haben, deren Nenner in dieser Form $4n+1$ enthalten sind, die übrigen das Vorzeichen $-$. Q. E. D.

Korollar

Wenn von der Reihe dieses Lehrsatzes diese subtrahiert wird

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.},$$

wird hervorgehen

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.},$$

deren Nenner entweder selbst Primzahlen oder die Produkte aus drei oder fünf oder etc. sind; aber die, die von der Form $4n-1$ sind, haben das Vorzeichen $+$, die übrigen, von der Form $4n+1$, hingegen das Vorzeichen $-$.

LEHRSATZ 18

Wenn allen Primzahlen das Vorzeichen $-$ zugeteilt wird, jeder zusammengesetzten Zahl hingegen das Vorzeichen, was selbiger nach den Multipliationsregeln zukommt, und aus allen Zahlen die folgende Reihe gebildet wird

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \text{etc.},$$

wird ihre Summe, wenn die Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt wird, $= 0$ sein.

BEWEIS

Es sei nämlich $x =$ der Summe dieser Reihe oder

$$x = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{etc.};$$

es wird durch die in den ersten Lehrsätzen verwendeten Operationen sein

$$\frac{3}{2}x = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \text{etc.}$$

und auf die gleiche Weise

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}x = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

Schließlich wird, nachdem diese Operation unendlich mal wiederholt worden ist, sein

$$\frac{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 12\cdot 14\cdot \text{etc.}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot \text{etc.}}x = 1.$$

Aber weil durch den siebten Lehrsatz gilt

$$\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot \text{etc.}}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot \text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.} = \log\infty,$$

wird leicht eingesehen, dass auch unser Koeffizient von x unendlich groß ist. Daher, damit das Produkt 1 gleich sein kann, wird $x = 0$ sein und dieser Sache wegen wird man haben

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{etc.},$$

deren Nenner, die entweder selbst prim oder Produkte aus drei, fünf etc. sind, das Vorzeichen $-$, die übrigen das Vorzeichen $+$ haben. Q. E. D.

Korollar 1

Also ist die Art klar, auf die die einzelnen Terme in der harmonischen Progression aufzuteilen sind, dass die Summe der ganzen Reihe $= 0$ wird.

Korollar 2

Weil wir $x = 0$ gefunden haben, wird auch $\frac{3}{2}x = 0$ sein und dieser Sache wegen wird man auch haben

$$0 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \text{etc.},$$

in welcher nur ungerade Zahlen auftauchen und dem beschriebenen Gesetz für die Vorzeichen folgen.

LEHRSATZ 19

Die Summe der reziproken Reihe der Primzahlen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

ist unendlich groß, dennoch unendlich mal kleiner als die Summe der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

Und die Summe jener ist quasi der Logarithmus dieser Summe.

BEWEIS

Es werde festgelegt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{etc.} = A$$

sowie

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.} = B$$

und

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{11^3}+\text{etc.}=C$$

und indem so weiter alle Potenzen mit eigenen Buchstaben bezeichnet werden, wird nach Festlegen von e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus 1 ist, sein

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.}$$

Denn es ist

$$A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{5}{4}+\log\frac{7}{6}+\text{etc.}$$

und daher

$$e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}}=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \text{etc.}}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot \text{etc.}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{etc.}$$

durch Lehrsatz 7. Aber nicht nur B, C, D etc. werden endliche Werte haben, sondern auch

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}$$

hat einen endlichen Wert. Daher, damit $e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{etc.}}$ danach auch der harmonischen Reihe gleich wird, also

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}=\infty,$$

ist es notwendig, dass A unendlich groß ist, und weil daher in Hinblick darauf die folgenden Terme

$$\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \text{etc.}$$

verschwinden, wird sein

$$e^A = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

Und als logische Konsequenz wird gelten

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{etc.}\right);$$

also wird die Summe jener Reihe unendlich mal kleiner sein als die dieser, und weil die Summe von dieser $= \log\infty$ ist, wird gelten

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{etc.} = \log\log\infty.$$

Q. E. D.