

# ÜBER DIE WAHRE BRACHYSTOCHRONE ODER DIE LINIE DES SCHNELLSTEN HERABSINKENS IN EINEM WIDERSTEHENDEN MEDIUM\*

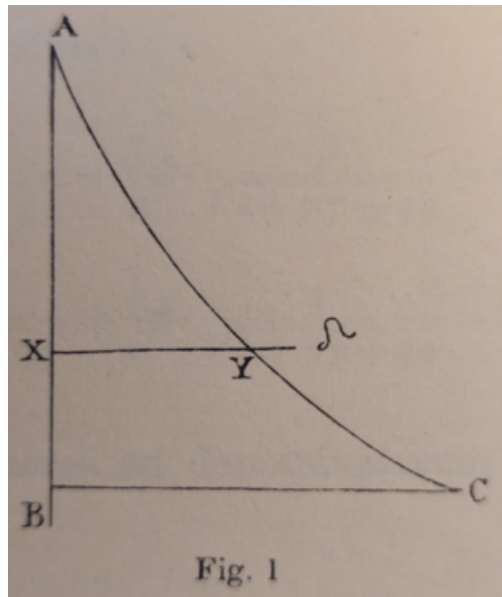
Leonhard Euler

§1 Was ich in Buch II meiner *Mechanicae* über diese Kurven gelehrt habe, ist auf ein Prinzip von solcher Art gestützt, welches in einem widerstehenden Medium nicht zugelassen werden kann. Weiter habe ich in meinem Traktat über das isoperimetrische Problem denselben Gegenstand aus den Prinzipien der Maxima und Minima heraus abzuhandeln versucht; aber, was ich dort über die Brachystochronen in einem widerstehenden Medium angeführt habe, ist dermaßen in allzu allgemeine analytische Formeln verwickelt, dass kaum jemand die wahre Natur dieser Kurven daraus finden kann. Deswegen habe ich beschlossen, diesen selben Gegenstand hier mit größerem Eifer und aus ersten Prinzipien klar und deutlich abzuleiten.

§2 Für dieses Ziel wollen wir irgendeine auf die vertikale Achse  $AB$  bezogene Kurve  $AYC$  betrachten, über welcher ein das Hinabgleiten von  $A$  aus beginnender Körper (Fig. 1) in einem gemäß einem beliebigen vielfachen Verhältnis einer Potenz seiner Geschwindigkeit widerstehenden Medium herabsinke.

---

\*Originaltitel: "De vera brachystochrona seu linea celerrimi descensus in medio resistente", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg*, Band 8 (1811, geschrieben 1780): pp. 29 – 40, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 25, pp. 326 – 337, Eneström Nummer E760, übersetzt von: Alexander Aycok für den "Euler-Kreis Mainz".



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Nun nenne man für irgendeinen Punkt  $Y$  der Kurve die Abszisse  $AX = x$ , die Ordinate  $XY = y$  und den Kurvenbogen  $AY = s$ . Aber die Geschwindigkeit in  $Y$  sei  $v$ , deren Größe also mit einer solchen Gleichung ausgedrückt werden wird:

$$v dv = g dx - h v^{n+1} ds,$$

welche so beschaffen ist, dass sie nur in den Fällen  $n = -1$  und  $n = +1$  im Allgemeinen nicht integriert werden kann. Dennoch wird indes, nachdem der Wert von  $v$  daraus bestimmt worden ist, das Zeitelement  $\frac{ds}{v}$  sein, dessen Integral also die Eigenschaft des Minimums erhalten muss, wenn freilich die Kurve  $AYC$  eine Brachystochrone war.

§3 Wenn die Bewegung im Vakuum geschähe, in welchem Fall  $h = 0$  und  $vv = 2gx$  wäre, weil die Geschwindigkeit in  $Y$  von seiner Höhe allein abhinge, ist es ersichtlich, damit die ganze Kurve  $AYC$  eine Brachystochrone wird, dass auch ihre einzelnen Teile  $AY$  in kleinster Zeit durchlaufen werden müssen. Aber in einem widerstehenden Medium verhält sich die Sache weit anders, wo die Geschwindigkeit nicht weiter vom Ort des Punktes  $Y$  abhängt, sondern zugleich den ganzen vorhergehenden Bogen  $AY$  involviert; daher kann es

geschehen, dass die Zeit über den ganzen Bogen  $AYC$  minimal wird, auch wenn die Zeit über den Bogen  $AY$  kein Minimum war, es könnte natürlich geschehen, dass beim Herabsinken über den Bogen  $AY$  in  $Y$  eine ein wenig größere Geschwindigkeit erzeugt werden würde, welche eine umso größere Zeit über den folgenden Bogen  $YC$  zur Folge hat; deswegen muss unser Problem für das widerstehende Medium so vorgelegt werden:

*Unter allen Kurven, welche sich vom Punkt  $A$  aus bis hin zu  $C$  zeichnen lassen, suche man die, über welcher einen Körper, das Herabsinken von  $A$  aus beginnend, am schnellsten zur Grenze  $C$  gelangt.*

§4 Damit sich diese Untersuchung aber weiter erstreckt, werde ich ein um vieles allgemeineres Problem betrachten, welches nicht nur auf Brachystochronen beschränkt ist, weil die Lösung nicht nur schwieriger wird, sondern auch leichter zulässt auf analytische Formeln reduziert zu werden; deswegen wird es vor allem förderlich sein, das folgende Problem zu lösen:

### ALLGEMEINES PROBLEM

*Unter allen Kurven, welche vom gegebenen Punkt  $A$  zu gegebenem Punkt  $C$  gezeichnet werden können, die ausfindig zu machen, in welcher diese Integralformel  $\int V dx$  einen maximalen oder minimalen Wert erhält; hier involviere der Buchstabe  $V$  außer den Koordinaten  $x$  und  $y$  und deren Differentialen jedweder Ordnung auch die Größe  $v$ , welche durch irgendeine Differentialgleichung bestimmt werde.*

### LÖSUNG

§5 Weil die Funktion  $V$  auch Differentiale jedweder Ordnung zu beinhalten angenommen wird, wollen wir in gewohnter Weise  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$  etc. setzen, sodass nun  $V$  außer den Größen  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  etc. auch jene Größe  $v$  involviert; daher wird ihr Differential eine Form von dieser Art haben:

$$dV = Ldv + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{etc.},$$

aber  $v$  werde durch diese Differentialgleichung ausgedrückt  $dv = \mathfrak{B}$ , hier sei  $\mathfrak{B}$  eine beliebige Funktion von  $v$  zusammen mit den sich auf die Kurve

beziehenden Größen  $x, y, p, q, r$  etc. Deshalb wird ihr Differential eine solche Form haben:

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{L}dv + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \text{etc.}$$

§6 Damit nun der Integralformel  $\int Vdx$  ein maximaler oder minimaler Wert aufgeprägt werden kann, wollen wir die aus der Variationsrechnung entnommene Methode gebrauchen, für welches Ziel wir den Ordinaten  $XY = y$  das möglichst kleine Inkrement  $Y\delta$  zuteilen wollen, sodass  $\delta y$  die Variation von  $y$  ist; der anderen Koordinate  $x$  darf hingegen keine Variation zugeteilt werden, sodass  $\delta x = 0$  ist. So sehr also die übrigen Größen von der Ordinate  $y$  abhängen, sofern werden sie auch gewisse Variationen erhalten, welche vor allem anderen entwickelt werden müssen.

§7 Wir wollen der Kürze wegen die Variation  $\delta y = \omega$  setzen, und weil  $p = \frac{dy}{dx}$  ist, wird  $\delta p = \frac{\delta dy}{dx}$  sein. Es ist aber bewiesen, dass  $\delta dy = d\delta y = d\omega$  ist, woher  $\delta p = \frac{d\omega}{dx}$  ist. in gleicher Weise, weil  $q = \frac{dp}{dx}$  ist, wird

$$\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\omega}{dx^2}$$

sein. In gleicher Weise ist es ersichtlich, dass  $\delta r = \frac{d^2\omega}{dx^3}$  etc. sein wird. Hier bezeichnet natürlich der vorangestellte Buchstabe  $\delta$  überall seine aus der Variation von  $y$  entspringende Variation.

§8 Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, wollen wir die Variation der vorgelegten Integralformel  $\int Vdx$  ausfindig machen, welche also  $= \delta \int Vdx$  sein wird. Aber aus der Variationsrechnung ist bekannt, dass  $\delta \int Vdx = \int \delta Vdx$  gilt, und weil sich die Variationen nach demselben Gesetz nehmen lassen, nach welchem die Differentiale angezeigt werden, wird

$$\delta V = L\delta v + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \text{etc.}$$

sein, wo der Term  $M\delta x$  verschwindet; und wenn anstelle von  $\delta y, \delta p, \delta q, \delta r$  etc. die gerade gefundenen Werte geschrieben werden, werden wir haben:

$$\delta V = L\delta v + N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qdd\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \text{etc.}$$

Daher wird also die Variation der vorgelegten Integralformel sein:

$$\delta \int V dx = \int dx \left( L\delta v + N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qdd\omega}{dx^2} + \frac{Rd^3\omega}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

oder

$$\delta \int V dx = \int L\delta v dx + \int N\omega dx + \int Pd\omega + \int \frac{Qdd\omega}{dx} + \text{etc.}$$

Also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass der Wert des ersten Terms  $L\delta v dx$  mit aller Sorgfalt entwickelt wird.

§9 Aus Paragraph 5 folgt  $v = \int \mathfrak{B} dx$ , daher wird  $\delta v = \delta \int \mathfrak{B} dx = \int \delta \mathfrak{B} dx$  sein; daher, weil

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{L}dv + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \text{etc.}$$

ist, wird in gleicher Weise sein:

$$\delta \mathfrak{B} = \mathfrak{L}\delta v + \mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.},$$

das heißt:

$$\delta \mathfrak{B} = \mathfrak{L}\delta v + \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\omega}{dx^3} + \text{etc.},$$

als logische Konsequenz werden wir haben:

$$\delta v = \int dx \left( \mathfrak{L}\delta v + \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

aus welcher Gleichung nun der Wert von  $\delta v$  gefunden werden muss.

§10 Für dieses Ziel, damit die Rechnung weiter vereinfacht wird, wollen wir  $\delta v = u$  setzen, wird nach Nehmen von Differentialen sein:

$$du = \mathfrak{L}udx + \mathfrak{N}\omega dx + \mathfrak{P}d\omega + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx} + \text{etc.},$$

welche Gleichung so dargestellt werde:

$$du - \mathfrak{L}udx = \mathfrak{N}\omega dx + \mathfrak{P}d\omega + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx} + \text{etc.},$$

damit welche integrierbar gemacht wird, multipliziere man mit  $e^{-\int \mathfrak{L} dx}$ , an deren Stelle wir der Kürze wegen  $\frac{1}{\Lambda}$  schreiben wollen, sodass  $\Lambda = e^{\int \mathfrak{L} dx}$  und daher  $\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \mathfrak{L} dx$  ist. Dann wird also die Integralgleichung sein:

$$\frac{u}{\Lambda} = \int \frac{dx}{\Lambda} \left( \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$

und auf diese Weise haben wir den gesuchten Wert  $\delta v$  erhalten, welcher sein wird:

$$\delta v = \Lambda \int \frac{dx}{\Lambda} \left( \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

**§11** Nun werden wir für den ersten Term der Formel, mit welcher die Variation  $\delta \int V dx$  ausgedrückt wird, haben:

$$\int L \Lambda dx \int \frac{dx}{\Lambda} \left( \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right),$$

wo nach dem Integralzeichen  $\int$  noch ein anderes involviert wird, woher wir uns darum zu kümmern haben, dass alles auf eine einfache Integration reduziert wird.

**§12** Für dieses Ziel wollen wir  $L \Lambda dx = d\Pi$  setzen, und es wird

$$\int d\Pi \int \frac{dx}{\Lambda} \left( \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \text{etc.} \right) = \Pi \int \frac{dx}{\Lambda} (\mathfrak{N}\omega + \text{etc.}) - \int \frac{\Pi dx}{\Lambda} (\mathfrak{N}\omega + \text{etc.})$$

sein. Weil nun  $\Pi = \int L \Lambda dx$  ist, ist die diesem Integral hinzuzufügende Konstante unserem Belieben überlassen; daher werde diese Konstante so bestimmt, dass für die ganze Kurve  $AYC$ , wo  $x = AB = a$  werde, diese Größe  $\Pi$  verschwindet, wonach der erste Teil  $\Pi \int \frac{dx}{\Lambda} (\mathfrak{N}\omega + \text{etc.})$  für die ganze Kurve, für welche die Rechnung konstruiert werden muss, von selbst verschwinden wird, wenn freilich die hinzugefügte Formel selbst nicht anders zu Null gemacht werden kann. Deshalb, nachdem das Integral  $\int L \Lambda dx = \Pi$  so angenommen worden ist, dass es für  $x = a$  gesetzt verschwindet, wird sein:

$$\int L dx \delta v = - \int \frac{\Pi dx}{\Lambda} \left( \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

§13 Nachdem dieser Wert nun gefunden worden ist, wird die gesuchte Variation  $\delta \int V dx$  auf die folgende Weise ausgedrückt sein:

$$- \int \frac{\Pi dx}{\Lambda} \left( \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\ + \int dx \left( N\omega + \frac{Pd\omega}{dx} + \frac{Qdd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right),$$

welcher Ausdruck, indem man der Kürze wegen setzt:

$$N - \frac{\Pi\mathfrak{N}}{\Lambda} = N', \quad P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda} = P', \quad Q - \frac{\Pi\mathfrak{Q}}{\Lambda} = Q' \quad \text{etc.},$$

auf diese hinreichend einfache Form zurückgeführt wird:

$$\delta \int V dx = \int dx \left( N'\omega + \frac{P'd\omega}{dx} + \frac{Q'dd\omega}{dx^2} + \text{etc.} \right),$$

deren Wert also über die ganze Kurve  $AYC$ , das heißt bis hin zu  $x = a$  erstreckt, gleich Null werden muss.

§14 Um diese Formel weiter zu reduzieren, bemerke man, dass

$$\int P'd\omega = P'\omega - \int \omega dP'$$

ist; weiter

$$\int Q'dd\omega = Q'd\omega - \int d\omega dQ'.$$

Andererseits ist aber

$$\int d\omega dQ' = \omega dQ' - \int \omega ddQ',$$

und daher

$$\int Q'dd\omega = Q'd\omega - \omega dQ' + \int \omega ddQ'.$$

Auf dieselbe Weise wird

$$\int R'd^3\omega = R'dd\omega - d\omega dR' + \omega ddR' - \int \omega d^3R'$$

sein und so weiter; hier, weil an der äußersten Grenze C keine Variation  $\omega$  verwendet wird, lassen sich die absoluten Anteile völlig vernachlässigen und daher werden wir

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

haben, deren Werte also über die ganze Kurve von A bis hin zu C erstreckt zu Null werden muss, wie auch immer die Variationen  $\omega$  angenommen werden.

§15 Es ist aber ersichtlich, dass dies nicht anders geschehen kann als wenn

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

war, von welcher Gleichung also die Kurve selbst bestimmt werden wird, in welcher diese vorgelegte Integralformeln einen maximalen oder minimalen Wert erhält; hier muss man sich dessen erinnern, dass

$$N' = N - \frac{\Pi \mathfrak{N}}{\Lambda}, \quad P' = P - \frac{\Pi \mathfrak{P}}{\Lambda} \quad \text{etc.}$$

ist. Dann wird aber

$$\Lambda = e^{\int \mathfrak{L} dx} \quad \text{und} \quad \Pi = \int L \Lambda dx$$

sein, welches Integral so genommen werden muss, dass es für  $x = a$  gesetzt verschwindet. Außerdem müssen aber alle durch Integration eingehenden Konstanten so bestimmt werden, dass sie allen Umständen Genüge leisten, das heißt, dass für  $x = 0$  genommen auch  $y = 0$  wird; weiter aber, dass für  $x = a$  genommen  $y = BC = b$  wird. Außerdem wird auch der Größe  $v$  für den Fall  $x = 0$  ein gewisser gegebener Wert zugeteilt werden müssen.

## ANWENDUNG AUF BRACHYSTOCHRONEN IN EINEM WIDERSTEHENDEN MEDIUM

§16 Weil die Zeit des Herabsinkens über den Bogen AY ja  $\int \frac{ds}{v}$ , ist, wird wegen  $ds = dx \sqrt{1 + pp}$  die von der Grenze A, wo  $x = 0$  ist, bis hin zur Grenze C, wo  $x = a$  und  $y = b$  ist, erstreckte und zu minimierende Integralformel



$$\int \frac{dx \sqrt{1+pp}}{v} \quad \text{und daher} \quad V = \frac{\sqrt{1+pp}}{v}$$

sein, weil welche Formel nur die Variablen  $v$  und  $p$  enthält, wird

$$L = -\frac{\sqrt{1+pp}}{vv}, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \text{aber} \quad P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}$$

sein. Weil weiter

$$dv = \frac{gdx - hv^{n+1}dx\sqrt{1+pp}}{v}$$

ist, wird  $\mathfrak{B} = \frac{g}{v} - hv^n\sqrt{1+pp}$  sein; daher wird weiter

$$\mathfrak{L} = -\frac{g}{vv} - nhv^{n-1}\sqrt{1+pp}, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = 0, \quad \text{aber} \quad \mathfrak{P} = -\frac{hv^n}{\sqrt{1+pp}}$$

sein. Aus diesen Werten wird nun zuerst  $\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \mathfrak{L}dx$  sein; darauf wird aber weiter  $\Pi = \int L\Lambda dx$ .

**§17** Nachdem diese gefunden worden sind, wird zuerst  $N' = 0$ ,  $P' = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}$  sein; deshalb wird die Gleichung für die gesuchte Kurve

$$N' - \frac{dP'}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dP'}{dx} = 0$$

sein, woher man durch Integrieren sofort  $P' = C$  erhält; nachdem also für  $P$  und  $\mathfrak{P}$  die Werte eingesetzt worden sind, entspringt diese Gleichung für die Kurve:

$$\frac{p}{v\sqrt{1+pp}} + \frac{h\Pi v^n p}{\Lambda\sqrt{1+pp}} = C.$$

Aus dieser Gleichung wollen wir sofort den Wert  $\Pi$  finden, für welchen wir natürlich eine Integralformel gegeben haben, und es wird

$$\Pi = \frac{CAv\sqrt{1+pp} - \Lambda p}{hpv^{n+1}}$$

sein. Wir wollen hier der Kürze wegen

$$\frac{C}{v^n} \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{1}{v^{n+1}} = \Theta$$

setzen, dass  $\Pi = \frac{\Lambda\Theta}{h}$  ist, und wegen  $d\Lambda = \Lambda\mathcal{L}dx$  wird gelten:

$$d\Pi = L\Lambda dx = \frac{\Theta\Lambda\mathcal{L}dx}{h} + \frac{\Lambda d\Theta}{h},$$

welche Gleichung durch  $\Lambda$  geteilt  $hLdx = \Theta\mathcal{L}dx + d\Theta$  sein wird. Es ist aber

$$d\Theta = -\frac{nCdv}{v^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{C}{v^n} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{(n+1)dv}{v^{n+2}};$$

daher wird unsere Gleichung sein:

$$\begin{aligned} -\frac{hdx\sqrt{1+pp}}{vv} &= \frac{C\mathcal{L}dx}{v^n} \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{\mathcal{L}dx}{v^{n+1}} - \frac{nCdv}{v^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p} \\ &+ \frac{(n+1)dv}{v^{n+2}} + \frac{C}{v^n} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p}, \end{aligned}$$

während  $\mathcal{L} = -\frac{g}{vv} - nhv^{n-1}\sqrt{1+pp}$  ist.

**§18** Diese Gleichung enthält nun von Differentialformeln befreit immer noch drei Variablen, natürlich  $p$  und  $v$  zusammen mit dem Differential  $dx$ , und aus ihr kann das Element  $dx$  leicht herausgeworfen werden. Weil nämlich

$$vdv = gdx - hv^{n+1}dx\sqrt{1+pp}$$

ist, wird

$$dx = \frac{vdv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}}$$

sein, wenn welcher Wert eingesetzt wird, wird man eine Gleichung erhalten, die nur die beiden Variablen  $v$  und  $p$  enthält. Für dieses Ziel wollen wir in unserer Gleichung alle das Element  $dx$  enthaltenden Anteile zusammenfassen, und es wird gelten:

$$\frac{\mathcal{L}dx}{v^{n+1}} - \frac{dx\sqrt{1+pp}}{vv} \left( h + \frac{C\mathcal{L}}{pv^{n-2}} \right) = \frac{(n+1)dv}{v^{n+2}} - \frac{nCdv}{v^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{C}{v^n} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p}.$$

Wenn wir also anstelle von  $dx$  und  $\mathcal{L}$  einsetzen wollen, ginge eine sehr komplizierte Gleichung hervor, welche überflüssig wäre, sie hier anzuführen. Dennoch es ist indes ersichtlich, dass die Gleichung zwischen  $p$  und  $v$  eine Differentialgleichung ersten Grades sein wird; daher können wir bei einer so schweren Aufgabe ihre Auflösung mit Recht als erledigt voraussetzen.

§19 Weil also durch diese Differentialgleichung die Größe  $p$  durch  $v$  gegeben ist und wegen der Integration eine neue konstante Größe eingeht, wird sich alle Übrige, was sich auf die Lösung bezieht, leicht erledigen lassen. Denn zuerst, weil  $\sqrt{1+pp}$  eine gewisse Funktion von  $v$  ist, wird sich auch die Größe  $x$  durch  $v$  mithilfe der Gleichung

$$dx = \frac{v dv}{g - hv^{n+1} \sqrt{1+pp}}$$

definieren lassen, woher wiederum eine neue Konstante eingeführt werden wird, welche so bestimmt werden muss, dass für  $v = 0$  genommen  $x = 0$  wird. Weiter wird aber auch  $\int \mathcal{L} dx$  allein durch  $v$  bestimmt werden und daher weiter der Wert des Buchstabens  $\Pi$  aus der Gleichung

$$\Pi = \frac{C\Lambda v \sqrt{1+pp} - \Lambda p}{hpv^{n+1}};$$

wo die Konstante  $C$  so bestimmt werden muss, dass für  $x = a$  gesetzt dieser Wert verschwindet, was also, wenn wir annehmen, dass im Fall  $x = a$  auch  $v = C$  wird, in diesem Fall geschehen muss; und so bereitet nach entsprechender Bestimmung aller Konstanten die Konstruktion dieser Kurve weiter keine Schwierigkeiten. Weil nämlich nun  $x$  und  $p$  durch  $v$  gegeben sind, wird wegen  $y = \int p dx$  auch die Ordinate  $y$  durch  $v$  angegeben werden können, und bei einer so tiefen Untersuchung müssen wir mit diesen Bestimmungen zufrieden sein, sofern natürlich die allgemeine Lösung, welche sich auf alle Werte des Exponenten  $n$  erstreckt, verlangt wird.

## SUPPLEMENT, IN WELCHER DIE NATUR DER BRACHYSTOCHRONEN IN EINEM WIDERSTEHENDEN MEDIUM GENAUER BESTIMMT WIRD

§20 Auch wenn die letzte Differentialgleichung zwischen den beiden Variablen  $p$  und  $v$ , zu welcher uns die Methode der Maxima und Minima geführt

hat, so komplex erscheint, dass daher kaum etwas, um die Natur dieser Kurven zu erkennen, gefolgert werden zu können scheint, ging dennoch nach entsprechend durchgeführter Rechnung die folgende hinreichend gefällige Gleichung hervor:

$$0 = \frac{(n+2)dv}{vv} - \frac{(n+1)Cdv\sqrt{1+pp}}{pv} + C \left( 1 - \frac{h}{g}v^{n+1}\sqrt{1+pp} \right) d \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{p},$$

welche nur aus vier Termen besteht und nicht schwer auf eine einfachere Form reduziert werden kann.

§21 Wir wollen nämlich zuerst  $C = \frac{1}{c}$  und  $\frac{\sqrt{1+pp}}{p} = t$  setzen, woher

$$p = \frac{1}{\sqrt{tt-1}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+pp} = \frac{t}{\sqrt{tt-1}}$$

wird, nach Einsetzen welcher Werte diese Gleichung entspringt:

$$\frac{(n+2)cdv}{vv} - \frac{(n+1)tdv}{v} + dt - \frac{h}{g} \cdot \frac{v^{n+1}tdt}{\sqrt{tt-1}} = 0.$$

Hier ist sofort klar, dass die mittleren Terme  $dt - \frac{(n+1)tdv}{v}$  integrierbar gemacht werden, wenn sie durch  $v^{n+1}$  geteilt werden, weil das Integral natürlich  $= \frac{t}{v^{n+1}}$  hervorgeht. Aber dann werden der erste und letzte Term von selbst eine Integration zulassen, sodass das vollständige Integral dieser Gleichung wird:

$$\frac{t}{v^{n+1}} - \frac{c}{v^{n+2}} - \frac{h}{g}\sqrt{tt-1} = \Delta,$$

welche Gleichung nach Wiedereinsetzen der Werte  $t = \frac{\sqrt{1+pp}}{p}$  und  $\sqrt{tt-1} = \frac{1}{p}$  durch Multiplizieren mit  $v^{n+1}$  diese Form annehmen wird:

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{c}{v} - \frac{h}{g} \cdot \frac{v^{n+1}}{p} = \Delta v^{n+1},$$

woher also der Wert von  $p$  nach Ziehen der Quadratwurzel allein durch  $v$  bestimmt wird.

§22 Aber hier wird es vor allem förderlich sein bemerkt zu haben, dass die Konstante  $\Delta$  aus dem Ort des letzten Punktes  $C$ , wo das Herabsinken beendet wird, bestimmt wird. Weil nämlich an dieser Grenze  $\Pi = 0$  sein muss und die Methode der Maxima und Minima unmittelbar diese Gleichung an die Hand gegeben hatte:  $P - \frac{\Pi^3}{\Lambda} = C$ , ist es ersichtlich, dass die Größe  $\Pi$  nur an dem Ort verschwinden kann, wo  $P = C$  wird. Es war aber  $P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}$ , und weil wir nun  $C = \frac{1}{c}$  gesetzt haben, wird dies geschehen, sobald  $c = \frac{v\sqrt{1+pp}}{p}$  ist. In diesem Fall wird aber unsere gefundene Gleichung den Wert  $\Delta = -\frac{h}{gp}$  liefern, wo  $p$  den Tangens des Winkels ausdrückt, in welchem die Kurve von der vertikalen Lage abweicht; deswegen, wenn wir wollen, dass diese Neigung im Punkt  $C$  einem gegebenen Winkel  $\alpha$  gleich wird, dessen Tangens  $= \theta$  sei, wird  $\Delta = -\frac{h}{g\theta}$  sein, nach Einsetzen welches Wertes unsere Gleichung vollkommen bestimmt sein wird und

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{c}{v} + \frac{h}{g}v^{n+1} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p} \right) = 0$$

oder

$$\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} + \frac{h}{g}v^{n+1} \left( \frac{p}{\theta} - 1 \right) = 0$$

werden wird. Aber diese Bestimmung des äußersten Punktes  $C$  scheint durch die gegebene Abweichung der Kurve von der vertikalen Lage der Natur der Sache um vieles mehr angepasst als wenn wir diesen Punkt über die Abszisse  $x = a$  und  $y = b$  bestimmen wollten.

§23 Weil ja also die Größe  $p$  durch diese Gleichung einer sogar algebraischen Funktion von  $v$  gleich wird, wird daher die Konstruktion der Kurve hinreichend gefällig durchgeführt werden können. Weil nämlich

$$dx = \frac{v dv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}} \quad \text{ist, wird} \quad dy = \frac{p v dv}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}}$$

sein und jede der beiden Formeln muss so integriert werden, dass für  $v = 0$ , was am Anfang  $A$  passiert, die Integrale verschwinden, und auf diese Weise werden die beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  für den Punkt erhalten werden, wo die Geschwindigkeit des Körpers  $v$  ist. Es wird natürlich

$$x = \int \frac{v dv}{g - hv^{n+1} \sqrt{1 + pp}} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{p v dv}{g - hv^{n+1} \sqrt{1 + pp}}$$

sein und diese Kurve bis dahin fortgesetzt, wo  $p = \theta$  wird, wird die wahre Brachystochrone sein, über welcher der Körper in der kürzesten Zeit von  $A$  zu  $C$  herabsinkt.

#### ENTWICKLUNG DES FALLS $h = 0$ ODER VERSCHWINDENDEN WIDERSTANDS

§24 In diesem Fall wird unsere Gleichung zu dieser sehr einfachen Form zusammengezogen:

$$\sqrt{1 + pp} - \frac{cp}{v} = 0,$$

welcher die Gleichung  $P - C = 0$  entspricht; daher ist klar, dass jeder beliebige Punkt  $Y$  der Kurve als letzter Term angenommen werden kann, sodass alle Anteile dieser Kurve, welche von  $A$  aus beginnen, sich der Eigenschaft der Brachystochronen erfreuen, welche, wie bekannt ist, die außergewöhnliche Eigenschaft der schon vor einiger Zeit für das Vakuum gefundene Brachystochrone ist.

§25 Weil also hier  $h = 0$  ist, wird  $p = \frac{v}{\sqrt{cc - vv}}$  sein und die beiden Koordinaten werden so ausgedrückt werden:

$$x = \int \frac{v dv}{g} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{v dv}{g \sqrt{cc - vv}}.$$

Daher wird also  $x = \frac{vv}{2g}$  sein, woher umgekehrt  $v = \sqrt{2gx}$  sein wird, welcher Wert in der anderen Formel eingesetzt gibt

$$y = \int \frac{dx \sqrt{2gx}}{\sqrt{cc - 2gx}},$$

welche Gleichung offenkundig die für eine Zykloide ist, deren Spitze auf den Anfang  $A$  fällt und die mit der Rollbewegung eines Kreises über der horizontalen Gerade beschrieben wird.

## ENTWICKLUNG DES FALLS $n = -1$ ODER EINES ÜBERALL GLEICHEN WIDERSTANDS

§26 In diesem Fall wird unsere Gleichung zwischen  $p$  und  $v$  diese Form annehmen:

$$\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} + \frac{h}{g} \left( \frac{p}{\theta} - 1 \right) = 0,$$

aus welcher Gleichung man

$$v = \frac{cp}{\sqrt{1+pp} + \frac{h}{g} \left( \frac{p}{\theta} - 1 \right)}$$

findet. Daher wird nach Nehmen von  $p = \theta$  die Geschwindigkeit an der äußersten Grenze  $C$  entsprechend  $v = \frac{c\theta}{\sqrt{1+\theta\theta}}$  sein. Aber nun werden die Koordinaten über  $v$  so ausgedrückt, dass

$$x = \int \frac{v dv}{g - h\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{p v dv}{g - h\sqrt{1+pp}}$$

ist, welche, wenn anstelle von  $v$  der gefundene Wert eingesetzt wird, durch  $p$  ausgedrückt gefunden werden. Es wäre aber überflüssig, diese Operation hier durchzuführen.

§27 Also wird diese Kurve die Brachystochrone in einem Medium sein, dessen Widerstand konstant ist und nicht von der Geschwindigkeit abhängt, oder, wie NEWTON einen solchen Widerstand beschrieben hat, er ist den Momenten der Zeiten proportional.

## ZUSAMMENFASSUNG

§28 Wenn wir die hier zwischen  $p$  und  $v$  gefundene Gleichung genauer betrachten, werden wir entdecken, dass sie um vieles weiter ausgedehnt werden kann, dass der Widerstand nicht nur einer gewissen Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, sondern sogar der Natur irgendeiner Funktion von  $v$  folgt, sodass, nachdem  $V$  für diese Funktion der Geschwindigkeit  $v$  genommen worden ist, wir für die Bewegung des Körpers diese Gleichung haben:

$$v dv = g dx - h V dx \sqrt{1 + pp}.$$

Weil in unserer Integralgleichung der Exponent  $n$  nur im Exponenten von  $v$  auftritt, lässt sich daraus sicher schließen, dass nichts anderes nötig ist als dass in unseren Formeln  $V$  anstelle von  $v^{n+1}$  geschrieben wird. Auf diese Weise wird sich also die Gleichung zwischen  $p$  und  $v$  nun so verhalten:

$$\sqrt{1 + pp} - \frac{cp}{v} - \frac{h}{g} V \left( \frac{p}{\theta} - 1 \right) = 0.$$

Daher, weil

$$dx = \frac{v dv}{g - h \sqrt{1 + pp}} \quad \text{ist, wird} \quad dy = \frac{p v dv}{g - h \sqrt{1 + pp}}$$

sein, und alles Übrige wird auf dieselbe Art bestimmt werden wie zuvor.