

ABSCHNITT III DER GRUNDLAGEN DES DIFFERENTIALKALKÜLS*

Leonhard Euler

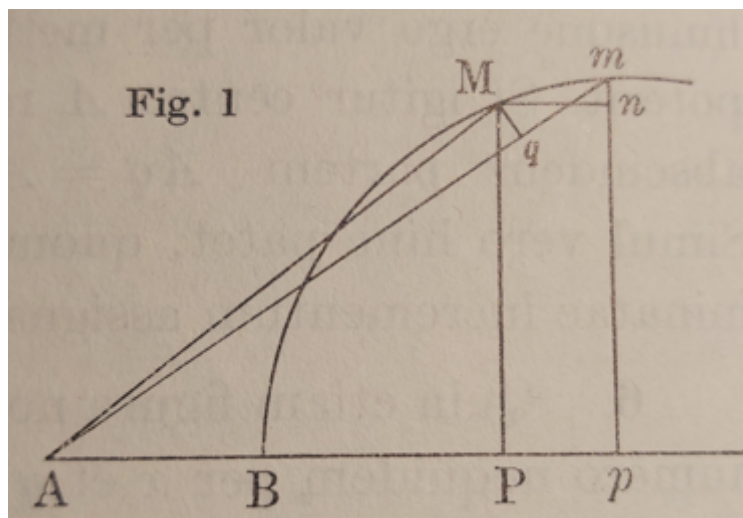
KAPITEL 1 ÜBER DAS DIFFERENTIALKALKÜL ANGEWANDT AUF KURVEN IM ALLGEMEINEN

§1 Obwohl im vorhergehenden Buch schon der gewaltige Nutzen des Differentialkalküls in der Analysis gezeigt worden ist, wird dennoch seine Kraft besonders in der Lehre von Kurven erkannt werden, welche nach der Erfindung dieses Kalküls so große Zuwächse erfahren hat, dass, was zuvor entdeckt worden war, in Bezug auf diese Dinge fast vollkommen verblasst. Ich für meine Person habe in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen sehr viele Eigenschaften von Kurven, die für gewöhnlich mithilfe des Differentialkalküls gefunden zu werden pflegen, mithilfe der Lehren des Analysis des Endlichen zu finden gelehrt; aber auch dort sind liegen die Spuren des Kalküls mit Unendlichkeiten nicht im Verborgenen, und jene Untersuchung ist so beschaffen, dass, wenn nicht zuerst eine andere Methode bekannt gewesen wäre, diese Dinge kaum jemals gefunden werden hätten können. Es war mir in jenem Buch ja besonders vorgelegt, dass, nachdem ich, was für gewöhnlich mit der Analysis des Unendlichen geleistet zu werden pflegt, ohne dieses Hilfsmittel erklärt hatte, die sehr große Übereinstimmung der ganzen Analysis umso klarer vor Augen geführt wird.

*Originaltitel: "Institutionum calculi differentialis Sectio III", zuerst publiziert in: *Opera Postuma*, Band 1 (1862): pp. 342–402, Nachdruck in: *Opera Omnia*: Serie 1, Band 29, pp. 334 – 429, Eneström-Nummer E814, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

§2 Weil ich also die Grundlagen des Differentialkalküls aus den endlichen Differenzen von Funktionen abgeleitet habe, scheint aus derselben Quelle die Anwendung dieses Kalküls auf die Lehre der Kurven zu entnehmen sein. Denn was über Funktionen angegeben worden ist, findet auch bei Kurven sehr großen Platz. Denn auch wenn, nachdem ein bestimmte Linie, beispielsweise die Abszisse, als variable Größe angenommen worden ist, wird die Natur der Kurve durch die Natur einer Funktion, beispielsweise der Ordinate, bestimmt wird, können dennoch bei derselben Kurve unzählige andere Funktionen aufgefasst werden. Denn natürlich wird jede beliebige durch eine Kurve bestimmte Linie, welche nach Verändern der Abszisse zugleich entweder wächst oder schrumpft, als Funktion der Abszisse betrachtet werden können, von welcher Art gespannte Fäden, Tangenten, Normalen und irgendwelche anderen Linien sind, von welchen entweder die Lage oder die Größe aus der Größe der Abszisse bestimmt wird. Dann können auch die Länge und die Fläche der Kurve als Funktionen angesehen werden, und außerdem unzählige andere Größen, ob sie nun Linien oder Fläche oder Festkörper sind.

§3 Wir wollen von der einfachsten und am meisten vertrauten Art aus beginnen, die Natur der Kurven auszudrücken, welche in der Relation zwischen orthogonalen Koordinaten enthalten ist. Es sei (Fig. 1)¹ die Gerade AP die Achse, auf welche die Natur der Kurve bezogen wird, in welcher man die Abszisse $AP = x$ und die ihr normale Ordinate $PM = y$ nehme;



¹Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Figur.

aber die Natur der Kurve werde mit irgendeiner Gleichung zwischen x und y ausgedrückt, so dass y irgendeine Funktion von x ist, welche ich zuerst als uniform annehmen, dass den Abszissen eine einzige Ordinate entspricht. Während also die Abszisse x den Zuwachs Δx nimmt, wird die Ordinate y den Zuwachs Δy erhalten, welcher aus der Natur der Funktion y und der Größe des Inkrements Δx angegeben können wird. Während natürlich x in $x + \Delta x$ übergeht, wird die Ordinate y in $y + \Delta y$ übergehen. Daher, wenn in der Figur eine andere Abszisse $AP = x + \Delta x$ genommen wird, wird die ihr entsprechende Ordinate $pm = y + \Delta y$ sein. Weil aber $AP = x$ und $PM = y$ ist, wird in der Figur $Pp = \Delta x$ sein, und so wird Pp den Zuwachs der Abszisse Δx bezeichnen. Wenn weiter von aus M der Achse parallel Mn gezeichnet wird, wird wegen $pn = y$ $mn = \Delta y$ sein, und so wird die Linie mn den Zuwachs der Ordinate Δy darstellen, welcher dem Zuwachs der Abszisse $Pp = \Delta x$ zukommt.

§4 Damit dies leichter verstanden wird, sei die Kurve BM eine mit der Gleichung $ay = xx$ ausgedrückte Parabel. Weil also, nachdem $x + \Delta x$ anstelle von x gesetzt worden ist, y in $y + \Delta y$ übergeht, wird man diese Gleichung

$$ay + a\Delta y = xx + 2x\Delta x + \Delta x\Delta x$$

haben, welche wegen $ay = xx$ diese

$$a\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x\Delta x$$

zurücklässt. Nachdem also auf der Achse der Abszisse der Zuwachs $Pp = \Delta x$ genommen worden ist, wird der Zuwachs der Ordinate

$$\Delta y = \frac{2x\Delta x + \Delta x\Delta x}{a} \quad \text{oder} \quad mn = \frac{Pp(2AP + Pp)}{a} = \frac{Pp(AP + Ap)}{a}$$

sein. Also wird immer, wenn die Natur der Funktion y gefunden wird, aus ihr die Relation zwischen den Zuwächsen der Abszisse und Ordinate gefunden werden können.

§5 Aber nicht nur zu einem gegebenen Zuwachs Δx wird der entsprechende Zuwachs der Ordinate y gefunden werden können, sondern auch von

jeder anderen Größe, die durch x und y bestimmt wird. Weil beispielsweise die Hypothenuse AM durch $\sqrt{xx+yy}$ ausgedrückt wird, wird, nachdem die Abszisse x den Zuwachs Δx und die Ordinate y den Zuwachs Δy nimmt, die Hypothenuse $\sqrt{xx+yy}$ in $\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}$ übergehen, mit welcher Formel die Hypothenuse Am dargeboten werden wird; weil diese $=\sqrt{xx+yy}+\Delta\sqrt{xx+yy}$ ist, wird

$$\Delta\sqrt{xx+yy}=\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}-\sqrt{xx+yy}$$

sein, und der Wert von dieser wird also mit der oben dargelegten Methode gefunden werden können. Wenn also um den Mittelpunkt A mit dem Strahl AM der Kreisbogen Mq , der von Am den Teil $Aq=AM$ abtrennt, beschrieben wird, wird der restliche Teil $mq=\Delta\sqrt{xx+yy}$ sein. Zugleich ist daher klar, wie von jeder anderen durch x und y bestimmten Größe der Zuwachs angegeben werden und in der Figur dargestellt werden muss.

§6 Ja die Figur bietet uns sogar die Zuwächse der Größen dar, welche oftmals nicht einmal durch x und y auf endliche Weise dargestellt werden können. Wenn beispielsweise die Fläche der Kurve, die der Abszisse AP zukommt, $=P$ gesetzt wird, wird die der Abszisse Ap entsprechende Fläche $=P+\Delta P$ sein. Aber wenn die erste Fläche von der zweiten abgezogen wird, wird die mixtilineare Figur $PMmp$ zurückbleiben, die deshalb der Zuwachs der Fläche P sein wird, oder es wird $\Delta P=PMmp$ sein. Diese Fläche wird gefällig in zwei Teile geteilt, von welchen der eine das rechtwinklige Parallelogramm $PMnp=y\Delta x$ ist, der andere das mixtilineare Dreieck Mnm , und daher wird $\Delta P=y\Delta x+Mnm$ sein. In gleicher Weise, wenn die Länge der Kurve BM oder eher, die der ganzen Abszisse AP entspricht, $=s$ gesetzt wird, wird der Zuwachs dieser Kurve Δs dem Bogen Mm gleich sein; weil dieser größer ist als die gradlinige Verbindung zwischen seinen Endpunkten $=\sqrt{\Delta x\Delta x+\Delta y\Delta y}$ ist, wird natürlich $\Delta s>\sqrt{\Delta x\Delta x+\Delta y\Delta y}$ sein.

§7 Wenn die Kurve BM um die Achse AP rotiert aufgefasst wird, dass daraus ein Rotationskörper entspringt, gehen so das Volumen wie die Oberfläche von diesem in Betracht, von welchen jeder der beiden, während die Abszisse von P aus zu p erstreckt wird, einen gewissen Zuwachs erfahren wird. Leicht ist nämlich klar, wenn die Figur $PMmp$ um die Achse Pp herum rotiert wird, dass ein Festkörper entstehen wird, von welchem der Zuwachs der oberen Rotationskörpers dargestellt wird. In gleicher Weise wird die konoidische

Fläche, die aus der Umdrehung des Bogen Mm um die Achse Pp erzeugt wird, wird dem Zuwachs der Oberfläche jenes Rotationskörpers, welcher aus der Umdrehung des Anteils der vorgelegten Kurve, welcher der Abszisse x entspricht, erzeugt wird, während die Abszisse x den Zuwachs $Pp = \Delta x$ nimmt.

§8 Wir wollen nun festlegen, dass das Inkrement $Pp = \Delta x$, welches wir bisher als endlich betrachtet haben, unendlich klein wird oder zu Null übergeht, und Pp wird das Differential der Abszisse x darbieten, oder es wird $Pp = dx$ sein. Hier ist freilich besonders zu erwähnen, weil in einer Figur verschwindende Größen nicht dargestellt werden können, dass wir dieselben Größen, die zuvor endliche Zuwächse bezeichneten, gebrauchen können, um Differentiale darzustellen. Es wird also dafür eine Vorstellung verlangt, nach welcher nicht so die Linie Pp wie ihr infinitesimaler Anteil als Differential auszudrücken aufzufassen ist. Natürlich ist der Punkt p zu verstehen immer näher zu P hinbewegt zu werden und dann, wenn er tatsächlich auf P fällt und daher die Strecke Pp verschwindet, wird Pp das Differential dx liefern. Obwohl also die Strecke Pp in einer Figur eine endliche Größe hat, muss er dennoch im Geist als unendlich klein und verschwindend aufgefasst werden, und auf diese Weise werden sich alle Differentiale, auch wenn sie in Wirklichkeit null sind, mit einer Figur darstellen lassen.

§9 Wenn wir also die Strecke Pp als unendlich klein verstehen, dass $Pp = dx$ ist, wird der Zuwachs der Ordinate mn , welcher zuvor der endliche $= \Delta y$ war, nun das Differential dy darstellen, sodass $mn = dy$ darstellen. Obgleich aber jede der beiden Linien Pp und mn unendlich klein ist, wird dennoch das Verhältnis, welches zwischen ihnen besteht, endlich sein, sooft das Differential der Funktion dy zum Differential dx ein endliches Verhältnis haben. Denn das Verhältnis $dy : dx$ ist meistens endlich, und dasselbe Verhältnis wird mn zu Pp oder Mn haben, auch wenn jede der beiden als unendlich klein oder null aufgefasst wird. Daher ist es ersichtlich, auch wenn im Differentialkalkül besonders unendlich kleine oder verschwindende Größen behandelt werden, dass aus ihnen dennoch endliche Größen, die natürlich Verhältnisse von Differentiale messen, erhalten werden und so Schlussfolgerungen, die daraus gebildet werden, umgekehrt aus die Gattung der endlichen Größen zurückgeführt werden können.

§10 Weil ja also die Strecke Pp als verschwindend aufgefasst wird, werden die Punkte der Kurve M und m unendlich wenig voneinander entfernt sein, und so wird das Kurvenelement Mm unendlich klein sein und deshalb kleiner als jede anzeigbare Größe sein. Daher erlangen wird diesen Vorteil, dass dieses Kurvenelement Mm als gerade Linie betrachtet werden kann. Man stelle sich nämlich die Punkte M und m mit einem Faden verbunden, die Länge von diesem wird umso weniger von der Länge des Bogens Mm abweichen, je mehr der Bogen Mm verkürzt wird, und daher, nachdem dieser Bogen bis ins Unendliche verkürzt worden ist, wird jeder Unterschied zwischen selbigem und dem gespannten Faden verschwinden, und das Verhältnis des Bogens zum Faden wird in das Verhältnis der Gleichheit übergehen. Denn durch kontinuierliches Vermindern des Abstands der Punkte M und m , solange Krümmung im Bogen Mm entdeckt wird, vermindere man den Abstand Mm weiter, woher klar ist, wenn dieser Abstand ins Unendliche vermindert worden war, dass das Verhältnis der Gleichheit zwischen dem Bogen Mm und dem Verbindungsstück zwischen seinen Endpunkten bestehen muss.

§11 Nachdem diese Betrachtung also auf das unendlich Kleine übertragen worden ist, wird das Dreieck Mnm , welches, solange wir im Endlichen bleiben, mixtilinear war, nun gradlinig sein, und daher wird seine Hypothenuse Mm mit dem Satz des PYTHAGORAS angegeben werden können. Weil nämlich im Dreieck Mnm mit rechtem Winkel bei n

$$Mn = Pp = dx \quad \text{und} \quad mn = dy$$

ist, wird die Hypothenuse $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sein. Aber diese Linie Mm bietet das Differential der Kurve BM dar und deswegen, auch werden die Kurve meistens nicht mit endlichen Größen x und y ausgedrückt werden kann, wird dennoch sein Differential gefällig mit den Differentialen der Größen x und y ausgedrückt. Weil die endlichen Differenzen diesen Vorzug nicht haben, ist es ersichtlich, was für einen großen Nutzen die Analysis des Unendlichen bringen wird.

§12 Weil y eine Funktion x ist, wird ihr Differential dy eine Form von dieser Art pdx haben, wo p eine Funktion von x , die durch Differentiation zu ermitteln ist, sein. Daher wird wegen $dy = p dx$ das Differential der Kurve $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ diese Form annehmen $dx \sqrt{1 + pp}$. Wenn wir also die Länge der Kurve, die der Abszisse $AP = x$ entspricht, $= s$ sind, auch wenn diese Größe

s meistens auf endliche Weise durch x und y nicht dargeboten werden kann, wird ihr Differential dennoch leicht angegeben, weil $ds = dx\sqrt{1+pp}$ ist. Daher ist also umgekehrt der Weg klar, um die Länge s der Kurve zu finden; denn es wird nur verlangt, dass eine Größe ausfindig gemacht wird, deren Differential $= dx\sqrt{1+pp}$ ist, und die Größe wird die Länge s der Kurve ausdrücken. Diese Aufgabe bezieht sich aber auf das Integralkalkül.

§13 Weil ja im unendlich Kleinen das Dreieck Mnm gradlinig wird, wird seine Fläche Mnm angegeben werden können, und sie wird $= \frac{1}{2}dx dy$ sein. Weil also das Differential oder das unendlich kleine Inkrement der ganzen Fläche, welche von der Kurve und den Koordinaten x und y eingeschlossen, das Trapez $PMmp$ ist, wird es auch dargeboten werden können. Denn das Trapez $PMmp$ besteht aus zwei Teilen, dem Rechteck $PMnp$, dessen Fläche $= ydx$ ist, und dem Dreieck $Mnm = \frac{1}{2}dx dy$. Es ist aber oben gezeigt worden, dass der Term $\frac{1}{2}dx dy$ in Bezug auf den anderen ydx verschwindet. Denn weil

$$ydx + \frac{1}{2}dx dy = (y + \frac{1}{2}dy)dx \quad \text{und} \quad y + \frac{1}{2}dy = y, \quad \text{wegen} \quad dy = 0$$

ist, wird das Differential der Fläche der Kurve $= ydx$ sein, woher die Größe, deren Differential $= ydx$ ist, die zwischen der Kurve und den Koordinaten x und y enthaltene Fläche darbietet.

§14 Daher werden auch die Differentiale von anderen Größen, die nicht selbst durch x und y ausgedrückt werden können, angegeben werden können. Man fasse nämlich die Kurve BM um die Achse AP rotiert auf, dass ein Rotationskörper erzeugt wird, und mit dieser Rotation wird das Trapez $PMmp$ einen Kegelstump erzeugen, dessen Volumen das Differential jenes Rotationskörpers liefern wird, aber die konvexe Oberfläche dieses Kegelstumpfes das Differential der Oberfläche jenes Rotationskörpers. Um diese Differentiale auszudrücken sein $1 : \pi$ das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie oder des Radius zum halben Umfang eines Kreises; der Umfang des mit dem Radius $PM = y$ beschriebenen Kreises wird $= 2\pi y$ und die Fläche $\pi y y$ sein, aber der Umfang des mit dem Radius $pm = y + dy$ beschriebenen Kreises $= 2\pi(y + dy)$ und die Fläche $= \pi(y + dy)^2$. Nun wird für das Differential der Oberfläche die Halbsumme der Umfänge der beiden Basen des Kegelstumpfes $= \pi y + \pi(y + dy) = 2\pi y$ sein, welcher mit der Seite des

Kegels $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ multipliziert das Differential der Oberfläche des Rotationskörpers

$$= 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y dx \sqrt{1 + pp} \quad \text{mit} \quad dy = p dx$$

geben wird.

§15 Aber das Volumen dieses Kegelstumpfes, welches das Differential des Volumens des Rotationskörpers gibt, wird nach den Regel der Stereometrie gefunden werden, wenn man zur Summe der Basen $\pi y y + \pi (y + dy)^2$ die mittlere Proportionale zwischen denselben $\pi y (y + dy)$ addiert wird, wird das Aggregat

$$= 3\pi y y + 3\pi y dy + \pi dy^2 = 3\pi y y$$

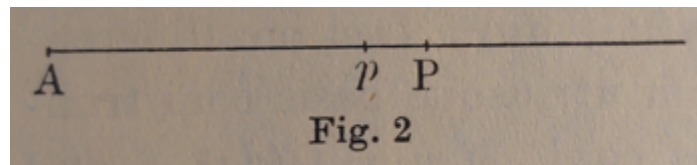
sein, wegen der übrigen in Bezug auf $3\pi y y$ verschwindenden Terme. Darauf muss das Drittel dieser Summe $\pi y y$ mit der Höhe des Kegels $Pp = dx$ multipliziert werden, und das Produkt $\pi y y dx$ wird das Volumen des Kegelstumpfes und zugleich das Differential des Rotationskörpers sein; daher wird mithilfe des Integralkalküls umgekehrt so das Volumen dieses Rotationskörpers wie seine Oberfläche gefunden werden können.

§16 Außerdem ist hier auch sorgsam zu bemerken, dass in der Rechnung alle Differentiale immer als positiv angesehen werden. Natürlich wird irgendeine variable Größe z im unmittelbar folgenden Zustand immer in $z + dz$ überzugehen angenommen wird, ob sie wächst oder schrumpft; und weil das Differential eine Differenz ist, die zurückbleibt, wenn die Variable z von seinem folgenden Wert $z + dz$ abgezogen wird, wird $+dz$ immer sein Differential sein. Nichtsdestoweniger werden auf diese Weise die Differentiale aller Größen, ob sie wachsend oder schrumpfend sind, klar dargeboten. Wenn beispielsweise

$$z = \frac{1}{x} \quad \text{ist, wird} \quad + dz = -\frac{dx}{xx}$$

sein, woher es offenkundig ist, dass die Größe z schrumpft, während x schrumpft. Auf dieser Annahme fußt aber die Konstanz der Regeln der Analysis des Unendlichen, woher sich der größte Nutzen für das Kalkül ergibt.

§17 Wenn aber die Figuren der wahrheitsgemäß gezeichnet werden und in diese die Differentiale auf die zuvor erläuterte Weise dargestellt werden, werden sie oftmals von der Rechnung abzuweichen scheinen; und dennoch kann daraus keine Verwirrung entstehen, wenn wir die Prinzipien richtig beachten; ja wir würden eher, wenn wir von diesem Gesetz abweichen, in größte Schwierigkeiten verwickelt werden, woher wir nichts erreichen könnten, um die Regeln dieses Kalküls aufzustellen. Wenn also die variable Größe x (Fig. 2)² mit der geraden Linie AP dargestellt wird und sie in die nächste Lage zu Ap übergeht, wird diese Linie Ap mit $x + dx$ bezeichnet werden müssen, und deshalb wird $Pp = Ap - AP = dx$ sein.

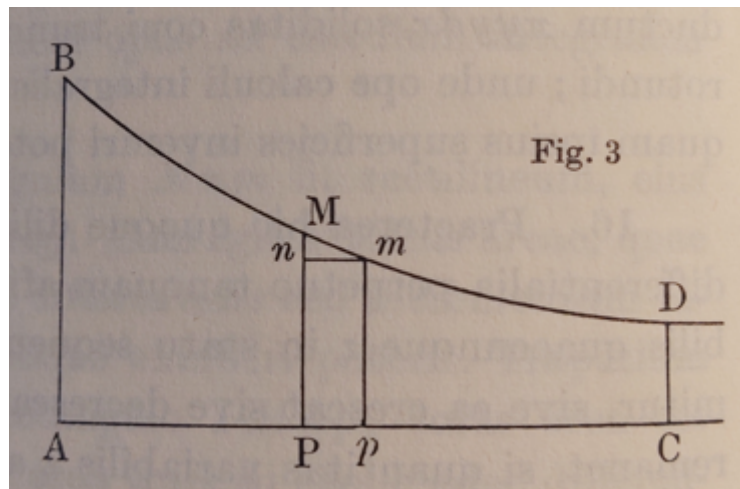


Wenn aber jemand dieses Dekrement Pp mit $-dx$ ausdrücken will und daher $Ap = x - dx$ setzen will, würde entgegen der aufgestellten Prinzipien des Differentialkalküls handeln oder müsste andere Regeln verwenden, um das Kalkül zu entwickeln. Es wäre aber unnötig und absurd diese Regeln weiter zu vermehren.

§18 Es wird aber jede Mehrdeutigkeit vermieden werden, wenn, nachdem wir die einzelnen in die Rechnung eingehenden Größen mit ihren Buchstaben benannt hatten, wir dieselben Größen zu nächsten Lage überführt mit denselben Buchstaben um ihre Differentiale vermehrt bezeichnet haben. Aber in der Figur, wenn wir den Hauptlinien mit Großbuchstaben beschrieben haben, wird denselben in den nächsten Zustand überführt mit den entsprechenden Kleinbuchstaben beschreiben. Wenn also (Fig. 3)³ in der Kurve BM , die auf die Achse AP bezogen wird, die Abszisse $AP = x$ und die Ordinate $PM = y$ genannt wird, wird an der nächsten Lage die Abszisse $Ap = x + dx$ und die Ordinate $pm = y + dy$ sein.

²Der Scan zeigt die Figur der Opera Version.

³Der Scan zeigt die Abbildung der Opera Omnia Version.



Daher ist es klar, dass $Pp = Ap - AP = dx$ sein wird, und, nach Ziehen der Gerade mn parallel zur Achse, wird das Streckenstück

$$Mn = PM - pm = -dy$$

sein. Es ist aber besonders auf die primäre variable Größe, von welche die übrigen als Funktionen betrachtet werden; wurde hier Vorsicht walten gelassen, werden alle Schwierigkeiten, welche ansonsten auftreten könnten, von selbst verschwinden.

§19 Und es ist auch nicht nötig, dass alle variablen Größen von demselben Punkt der Achse den Anfang nehmen, von welchem aus die Abszissen berechnet werden; aber nichts verhindert, dass die übrigen variablen Größen auf einen anderen Anfang bezogen werden. Auch wenn so der Anfang der Abszissen AP (Fig. 1) im Punkt A der Achse platziert wird, kann es passieren, dass, eines Beispiels wegen, die Fläche der Kurve BPM von einem anderen festen Punkt B aus beurteilt wird. Nachdem nämlich die Koordinaten $AP = x$, $PM = y$ gesetzt worden ist, wenn die Fläche $BPM = v$ genannt wird, wird, nachdem der Punkt P zur nächsten Lage p vorwärts bewegt worden ist, $Ap = x + dx$, $pm = y + dy$ und die Fläche $Bpm = v + dv$ sein; weil daher $dv = PMmp$ ist, wird wie zuvor $dv = ydx$ sein. In gleicher Weise, wenn (Fig. 3) ist, wird nach Nehmen der Abszisse $AP = x$, $PM = y$ die Fläche $CDMP$ von festen Punkt C aus berechnet und $= v$ gesetzt wird, wird, nachdem alle in die nächste Lage überführt worden sind, die Fläche $CDmp = v + dv$, und es

wird also $dv = -PMmp = -ydx$ sein. Und wenn der Bogen $DM = s$ gesetzt worden ist, wird

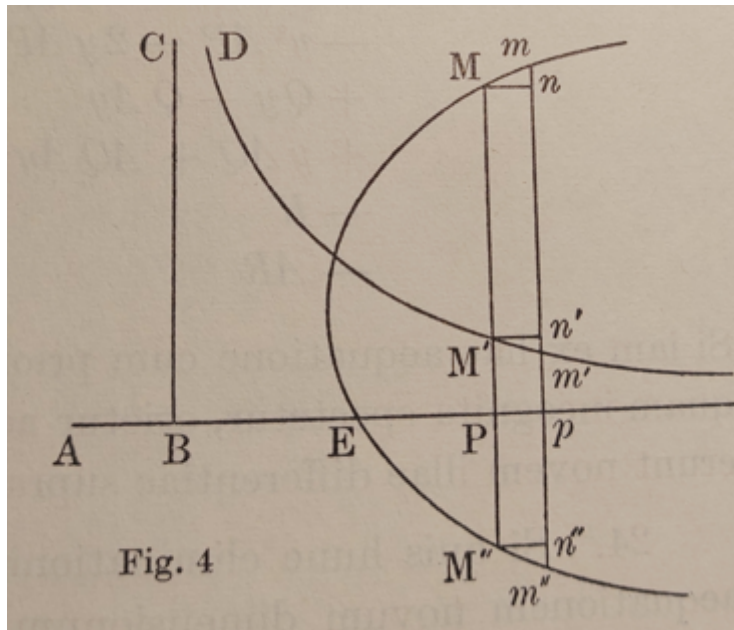
$$Dm = s + ds \quad \text{und} \quad ds = -Mm = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

sein. Und diese Betrachtungen genügen, um das Kalkül mit der Figur zu verbinden.

§20 Was bisher über die Differentiale der Ordinaten, Flächen und Bogen der Kurve angegeben worden ist, erstreckt sich eigentlich nur auf Kurven von solcher Art, deren Ordinaten uniforme Funktionen der Abszissen sind, sodass jeder Abszisse nur eine Ordinate entspricht. Wenn nämlich derselben Abszisse mehrere Ordinaten entsprechen, werden einer anderen Abszisse, nachdem die erste natürlich um eine bestimmte Größe vermehrt worden ist, genauso viele Ordinaten entsprechen, und die Ordinaten werden einen mehrfachen Zuwachs erhalten müssen; denn jede der ersten Ordinaten, von einer beliebigen der weiteren subtrahiert, wird einen Rest zurücklassen, welcher dem Zuwachs der Ordinate darstellen wird. In gleicher Weise werden in diesem Fall derselben Abszisse mehrere Flächen entsprechend und deshalb demselben Zuwachs der Abszisse um vieles mehr Zuwächse der Flächen; und so ist klar, dass die Zuwächse von multiformen Funktionen auch multiforme Funktionen sind. Also wird in diesen Fällen, wenn von einem gegebenen Zuwachs der Abszisse der Zuwachs der Ordinate oder Fläche gesucht wird, die Frage nicht bestimmt sein, sondern mehrere Antworten erfordern.

§21 Damit dies besser verstanden wird, wollen wir festlegen, dass die Ordinate y eine triforme Funktion der Abszisse x ist, oder derselben Abszisse (Fig. 4)⁴ $AP = x$ entsprechen die drei Ordinaten PM , PM' und PM'' ,

⁴Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.



welche alle im Wert des Buchstabens y enthalten sind, was passiert, wenn y durch eine kubische Gleichung von dieser Art

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

ausgedrückt wird, während P, Q, R irgendwelche Funktion von x sind. Also werden die drei Wurzeln dieser Gleichung für die Abszisse $AP = x$ $PM, PM', -PM''$ sein, weil die letzte in den negativen Bereich fällt. Daher wird aus der Natur der Gleichungen

$$P = PM + PM' - PM'',$$

$$Q = PM \cdot PM' - PM \cdot PM'' - PM' \cdot PM'',$$

$$R = -PM \cdot PM' \cdot PM''$$

sein.

§22 Wir wollen nun festlegen, dass die Abszisse x um den zunächst endlichen Zuwachs Δx vermehrt wird, sodass $AP = x + \Delta x$ und $Pp = \Delta x$ ist. Also wird die Ordinate y in $y + \Delta y$ übergehen, welche in der Figur die drei

Ordinaten $pm, pm', -pm''$ bezeichnen wird. Weil also y jede von den Ordinaten PM, PM' und $-PM''$ bezeichnet, muss die Differenz Δy die einzelnen Differenzen zwischen diesen und jenen Ordinaten darbieten, woher Δy die folgenden neun Werte bezeichnen wird:

1. $pm - PM,$ 4. $pm' - PM,$ 7. $-pm'' - PM,$
2. $pm - PM',$ 5. $pm' - PM',$ 8. $-pm'' - PM',$
3. $pm - PM'',$ 6. $pm' - PM'',$ 9. $-pm'' - PM''.$

Deswegen ist es notwendig, dass Δy durch eine Gleichung neunten Grades bestimmt wird; wenn die Größe y eliminiert wird, wird natürlich eine Gleichung hervorgehen, in welcher die Größe Δy zum neunten Grad ansteigen wird.

§23 Um diese Gleichung zu finden, setze man in der Gleichung für die Kurve $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ $x + \Delta x$ anstelle von x und $y + \Delta y$ anstelle von y und weil P, Q und R Funktionen von x sind, gehen sie, wenn für $x + dx$ gesetzt wird, in $P + \Delta P, Q + \Delta Q$ und $R + \Delta R$ übergehen. Und so wird diese Gleichung hervorgehen

$$\left. \begin{aligned} & y^3 + 3y^2\Delta y + 3y\Delta y^2 + \Delta y^3 \\ & - Py^2 - 2Py\Delta y - P\Delta y^2 \\ & - y^2\Delta P - 2y\Delta P\Delta y - \Delta P\Delta y^2 \\ & + Qy + Q\Delta y \\ & + y\Delta Q + \Delta Q\Delta y \\ & - R \\ & - \Delta R \end{aligned} \right\} = 0.$$

Wenn nun aus dieser Gleichung zusammen mit der ersten der Buchstabe y eliminiert wird und Δy als unbekannte Funktion betrachtet wird, wird eine Gleichung von neun Dimensionen entspringen, deren neun Wurzeln jene oben dargebotenen Differenzen sein werden.

§24 Wenn jemand nun die Arbeit dieser Elimination auf sich nehmen möchte, wird man in der Tat zu einer Gleichung von neun Dimensionen gelangen. Und in der Tat ist diese Eliminierung nicht nötig, weil y durch die erste kubische Gleichung gegeben ist, woher man drei Wurzeln erhält; wenn diese als bekannt angesehen werden, wird aus der anderen gleichermaßen kubischen Gleichung Δy gefunden werden können, welcher ebenso drei Werte ausgehen wird. Weil aber in diese drei Werte die Variable y eingeht, die schon an sich einen dreifachen Wert hat, wenn an seiner Stelle diese Werte einzeln eingesetzt werden, werden insgesamt neun Werte von Δy hervorgehen, welche jene Werte sein werden, welche wir oben dargeboten haben. Um dies aber bequemer zu leisten, wird die erste Gleichung von der ersten abgezogen werden können, und so wird die folgende Gleichung zurückgelassen werden:

$$\left. \begin{array}{l} - y^2 \Delta P + 3y^2 \Delta y + 3y \Delta y^2 + \Delta y^3 \\ + y \Delta Q - 2Py \Delta y - P \Delta y^2 \\ - \Delta R - +2y \Delta P \Delta y - \Delta P \Delta y^2 \\ \quad + Q \Delta y \\ \quad + \Delta Q \Delta y \end{array} \right\} = 0.$$

§25 Wie also, wenn y eine triforme Funktion von x war, oder wenn sie durch eine kubische Gleichung bestimmt wird, ihr Zuwachs Δy neun Werte annimmt, so wird, wenn die Gleichung, von welcher die Ordinate y bestimmt wird, vier Dimensionen hat, ihr Zuwachs Δy , welcher gleichermaßen, wenn y nicht eliminiert wird, zu vier Dimensionen ansteigt, insgesamt sechzehn verschiedene Werte haben. Und wenn im Allgemeinen die Ordinate y durch eine Gleichung von n Dimensionen bestimmt wird, wird ihr Zuwachs Δy von einer Gleichung ebenso vieler Dimension bestimmt gefunden werden und wird genauso viele Werte haben, in welchen y immer noch enthalten ist; weil dieses n Werte hat, wird der Zuwachs Δy insgesamt nn Werte annehmen, welche die Differenzen zwischen den einzelnen Werten von y und $y + \Delta y$ sein werden.

§26 Damit also die Menge der Werte des Zuwachses Δy nicht so groß ist, wollen wir eine quadratische Gleichung betrachten, die nur zwei Werte von y darbiete, und es sei

$$yy - 2Py + Q = 0,$$

wo P und Q irgendwelche Funktionen der Abszisse x seien und y die Ordinate bezeichnet. Aus dieser Gleichung können also bequem die beiden Werte von y dargeboten werden, welche

$$y = P + \sqrt{P^2 - Q} \quad \text{und} \quad y = P - \sqrt{P^2 - Q}$$

sind. Nun wachse die Abszisse x um das Inkrement Δx und die Funktionen P und Q von x um die Inkremente ΔP und ΔQ ; das Inkrement Ordinate y sei hingegen Δy , welches deshalb von dieser Gleichung erklärt wird

$$\left. \begin{array}{l} yy + 2y\Delta y + \Delta y^2 \\ - 2Py - 2P\Delta y \\ - 2y\Delta P - 2\Delta P\Delta y \\ + Q \\ + \Delta Q \end{array} \right\} = 0$$

oder, nachdem die erste Gleichung abgezogen worden ist, von dieser

$$\left. \begin{array}{l} - 2y\Delta P + 2y\Delta y + \Delta y^2 \\ + \Delta Q - 2P\Delta y \\ - 2\Delta P\Delta y \end{array} \right\} = 0.$$

§27 Wenn also nun aus dieser Gleichung der Zuwachs Δy gesucht wird, wird man

$$\Delta y = -y + P + \Delta P \pm \sqrt{y^2 - 2yP + P^2 + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q}$$

finden, welche zwei Werte, wenn anstelle von y seine beiden zuvor gefundenen Werte eingesetzt werden, in vier Werte von Δy übergehen werden, welche in diesen beiden Formeln enthalten sein werden

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta P \pm \sqrt{P^2 - Q} + \sqrt{P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q} \\ \Delta y &= \Delta P \pm \sqrt{P^2 - Q} - \sqrt{P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q}, \end{aligned}$$

oder in einer einzigen Formel wird

$$\Delta y = \Delta P \pm \sqrt{P^2 - Q} \pm \sqrt{P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q}$$

sein.

§28 Wir wollen nun festlegen, dass das Inkrement von x , welcher in diesen Wert endlich angenommen worden ist, unendlich klein wird, und die Inkremente ΔP und ΔQ der Funktionen P und Q werden gleichermaßen unendlich klein sein und werden in dP und dQ übergehen. Daher wird

$$\sqrt{P^2 - Q + 2PdP + dP^2 - dQ} = \sqrt{P^2 - Q} + \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{P^2 - Q}}$$

sein, woher die vier Werte von Δy

$$\Delta y = 2\sqrt{P^2 - Q} + dP \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{P^2 - Q}},$$

$$\Delta y = -2\sqrt{P^2 - Q} + dP - \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{P^2 - Q}},$$

$$\Delta y = dP + \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{P^2 - Q}},$$

$$\Delta y = dP - \frac{2PdP - dQ}{2\sqrt{P^2 - Q}}$$

sein. Aus diesen ist klar, dass die zwei ersten Werte von Δy , weil ja das unendlich kleine Inkrement dx nicht eingeht, von endlicher Größe ist, die beiden letzten aber unendlich klein werden, und in diesen Fällen wird wegen $\sqrt{P^2 - Q} = y - P$

$$\Delta y = dP + \frac{2PdP - dQ}{2y - 2P} = \frac{2ydP - dQ}{2y - 2P}$$

sein, welcher Wert auch durch die übliche Differentiation gefunden wird.

§29 Wenn wir natürlich festlegen, dass die zwei Werte von y in der Figur PM und PM' sind, welche der Abszisse $AP = x$ entsprechen, und der um ihr Differential vermehrten Abszisse $AP = x + dx$ die Ordinaten pm und pm' entsprechen, welche durch $y + \Delta y$ ausgedrückt werden, dann wird der Zuwachs Δy diese vier Werte haben

1. $pm - PM$, 3. $pm' - PM$,
2. $pm - PM'$, 4. $pm' - PM'$,

von welchen zwei, nämlich der zweite und der dritte, von endlicher Größe sein werden, der erste und der vierte aber unendlich klein. Also werden jene zwei Werte, weil sie endlich sind, nicht für das Differential von y gehalten werden und nicht durch dy ausgedrückt werden können, aber die zwei letzten, weil sie unendlich klein sind, werden die Differentiale jeder der beiden Ordinaten darstellen. Nachdem nämlich der Achse AP parallel die Strecke Mn und $M'n'$ gezeichnet worden sind, wird mn das Differential der Ordinate PM und $-m'n'$ das Differential der anderen Ordinate PM' sein.

§30 In gleicher Weise, wie wenn in der Figur (vergl. Fig. 4) y drei Werte hat, dann werden aus den neun Werten von Δy drei unendlich klein sein, wenn für den Zuwachse der Abszisse ihr Differential dx genommen wird. Natürlich werden diese drei unendlich kleinen Werte von Δy sein:

$$pm - PM = mn, \quad pm' - PM' = -m'n' \quad \text{und} \quad -pm'' + PM'' = -m''n'',$$

weil natürlich die Ordinaten pm'' und PM'' negativ sind. Diese drei Strecken mn , $-m'n'$, $-m''n''$ liefern die Werte des Differentials von y und können daher mit dy angegeben werden. Aber die übrigen sechs Werte von Δy kommen hier nicht in Betracht. Und darin ist erneut der gewaltige Nutzen des Differentialkalküls enthalten, welches die für das Unterfangen geeigneten Werte von Δy leicht von den übrigen unnützen trennen lässt: denn wenn die Differenz Δx nicht unendlich klein festgelegt wird, so könnten nicht allzu leicht aus den neuen Werten von Δy , welche alle endlich wären, die, die die Differenzen der zwei auf demselben Ast der Kurve genommenen Ordinaten bezeichnen, unterschieden werden.

§31 Weil also hier nur die Werte von Δy verlangt werden, die unendlich klein sind und den Platz von dy einnehmen können, wollen wir dy anstelle von Δy , dO , dQ und dR für ΔP , ΔQ und ΔR setzen, und nachdem in der in Paragraph 24 gefundenen Gleichung die Terme weggelassen worden sind, in denen die Differentiale mehr Dimensionen haben, wird man diese Gleichung haben:

$$-y^2 dP + ydQ - dR + 3y^2 dy - 2Pydy + Qdy = 0,$$

aus welcher

$$dy = \frac{y^2 dP - ydQ + dR}{3y^2 - 2Py + Q}$$

wird. Obwohl aber hier lediglich ein Wert für dy gefunden wird, entspringen dennoch, weil die Ordinate y einen dreifachen Wert hat, daraus die Werte für dy . Wenn natürlich für y PM gesetzt wird, dann geht $dy = mn$ hervor; wenn PM' für y genommen wird, wird $dy = -m'n'$ werden; aber wenn für y $-PM''$ eingesetzt wird, wird man $dy = -m''n''$ finden.

§32 Daher erkennt man, dass die unendlich kleinen Differenzen dy dieser Ordinaten, welche hervorgehen, während die Ordinate x um ihr Differential dx vermehrt wird, mithilfe der gewohnten Regeln des Differentialkalküls gefunden werden. Wenn nämlich die vorgelegte Gleichung

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

differenziert wird, wird

$$3yydy - 2Pydy - y^2 dP + Qdy + ydQ - dR = 0$$

hervorgehen, woher, wie wir gerade gefunden haben, entspringt:

$$dy = \frac{y^2 dP - ydQ + dR}{3y^2 - 2Py + Q}.$$

Deshalb liefert das Differentialkalkül auch die Differentiale, die wir brauchen, von multiformen Funktionen. Und wir brauchen auch nicht bestimmte Differenzen zwischen den einzelnen Werten der vorhergehenden und folgenden Ordinaten, sondern nur die, die sich auf einen und denselben Zweig erstrecken. Denn aus diesen Differenzen muss die Lage der Tangenten und der Normalen und anderen von der Krümmung abhängenden Größen bestimmt werden.

§33 Wie auch immer also die Ordinaten in derselben Kurve derselben Abszisse entsprechen, das Zuwachs oder das Schrumpfen von irgendeiner kann angegeben und so mehre Zweige, aus welchen die Kurve zusammengesetzt wird, als ebenso viele einfache Linie betrachtet werden. Denn was für eine Gleichung auch immer zwischen der Abszisse x und der Ordinate y besteht, ihr Differential wird von dieser Art $dy = Zdx$ sein, während Z eine Funktion von x und y ist. Wenn also die Werte von y p, q, r, s etc. waren, wenn in der Funktion Z für y der Wert p gesetzt wird, wird der Zuwachs der Ordinate p hervorgehen, und in gleicher Weise, wenn für y sukzessive die Werte q, r, s etc. gesetzt werden, wird die Größe Zdx die Differentiale dieser Ordinate darbieten. Daher werden also umso mehr die Dinge bestätigt und illustriert, welche im oberen Buch über die Differentiation von multiformen Funktionen angegeben worden sind.

§34 Weil wir ja also für das Differential dy ebenso viele Werte erlangen, wie die Ordinate y selbst verschiedene Werte erhält, resultieren daher auch ebenso viele Ausdrücke für die Differentiale der einzelnen Zweige der Kurve. Weil wir natürlich zuvor das Element oder das Differential der Kurve mit $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ausgedrückt gefunden haben, wenn für dy der Wert mn eingesetzt wird, dann wird $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Element Mm liefern, welches das Differential des Bogens EM ist; wenn aber für dy^2 $-m'n'$ eingesetzt wird, wird derselbe Ausdruck das Differential des Bogens DM' geben; und wenn $dy = -m''n''$ wird, dann wird $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Differential des Bogens EM'' darbieten. In gleicher Weise wie viele derselben Abszisse entsprechende Zweige auch immer die Kurve hat, werden sich daher diese einzelnen Zweige einzeln bestimmen lassen; dieser Gegenstand wird gründlicher behandelt werden, wo über die Dimension von Kurven die Rede sein wird.

§35 Was wir bisher erklärt haben, bezieht sich nur auf die Fälle, in denen die Natur der Kurve mit einer Gleichung zwischen zwei orthogonalen Koordinaten ausgedrückt wird. Dennoch wird auch aus diesen Dingen leicht erkannt, wie, wenn die Koordinaten nicht normal zueinander waren, sondern in einem gegebenen Winkel zueinander geneigt, die Differentiale auf Figuren übertragen werden müssen. Ja sogar, wenn die Natur der Kurve auf irgendeine andere Weise ausgedrückt wird, wird die Anwendung des Kalküls auf eine Figur fast keine Schwierigkeit haben; und wenn etwas übrig ist, wird es im folgenden Traktat vollkommen beseitigt werden. Weiterhin liegt in Untersuchungen

dieser Art die ganze Kraft darin, dass das Differential der Kurve als gerade Linie angesehen werden kann; denn dieselbe Art, auf welche das für die orthogonalen Koordinaten gezeigt worden ist, eröffnet auch gleichermaßen einen Weg zu allen anderen Arten die Natur der einer Kurve auszudrücken.