

HERMANN SCHMIDT

OBERREGIERUNGS- UND -SCHULRAT

Ausgewählte höhere Kurven

Für Schüler oberer Klassen und Studenten der ersten Semester

256 Seiten, 220 Strichzeichnungen

KESSELRINGSCHER VERLAGSBUCHHANDLUNG

WIESBADEN

VORWORT

1.—5. Tausend, März 1949

Genehmigt für den Gebrauch in Schulen durch Education and Religions Affairs Branch,
Office of Military Government (U.S.)

Genehmigungsdatum: 28. 4. 1947 Akten-Nr. G. E. IA 3500 s (German)

Die höheren Kurven sind in größeren Werken bisher meist nur nach weitblickenden Theorien und mit dem ganzen Rüstzeug der höheren Mathematik behandelt worden. Es fehlte an zusammenhängenden Darstellungen, die mit bescheideneren mathematischen Mitteln und nach weniger weit gesteckten Zielen ein Bild dieser Kurven vermittelt hätten. Zur Schließung dieser Lücke hofft diese Schrift einen Beitrag zu liefern. In ihr sollen die gewählten Kurven einerseits ihre reizvollen, noch viel zu wenig bekannten Eigenschaften vor dem Leser enthüllen, die Mannigfaltigkeit ihrer Erzeugungsmöglichkeiten und die Wandlungsfähigkeit ihrer Gestalten offenbaren, kurz, sich als Einzelwesen besonderer Prägung darstellen, zugleich aber sollen die wunderbaren Beziehungen aufgedeckt werden, in denen die einzelnen Kurven wie Glieder verwandter Familien in der mannigfachsten Weise zu einander stehen, und darüber hinaus soll die besondere Stellung sichtbar werden, die die meisten der Kurven in der Geschichte der Mathematik, im besonderen der Unlösbaren Probleme, eingenommen haben.

Soweit als möglich ist die Darstellung elementar gehalten, kann aber doch der Differential- und Integralrechnung nicht entraten; an Integrationsmethoden sind jedoch nur die einfachsten verwandt worden. Im ganzen ist die Bildungsstufe eines guten Schülers der obersten Klasse unserer höheren Schulen zugrunde gelegt worden. Um in mathematischen Arbeitsgemeinschaften die Kurven in Auswahl behandeln zu können, sind die einzelnen Abschnitte als geschlossene Einheiten bearbeitet. Über den Rahmen der Schule hinaus wendet sich die Schrift an Studenten der ersten Semester und an mathematisch interessierte Laien, die sich mit diesem so überaus anregenden, in sich geschlossenen Abschnitt der Mathematik vertraut machen wollen.

Die Darstellung der Kurveneigenschaften ließ sich — um eine Gleichmäßigkeit der Darstellung und der Einteilung zu gewährleisten — in den meisten Fällen unter folgenden Schlagwörtern gruppieren: Erzeugungsweisen, Auswertung der Kurvengleichungen, Tangenten-

Alle Rechte vorbehalten

Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden

Lizenz US-W 1046



Satz und Druck bei Carl Winter, Darmstadt

konstruktionen, Anwendungen der Integralrechnung, Verwendung bei den Unlösbaeren Problemen.

Die Theorie des augenblicklichen Drehpunktes, die bei vielen Kurven eine verblüffend einfache Tangentenkonstruktion ermöglicht, ist im Anhang I kurz erläutert, desgl. das im Text wiederholt verwandte Verfahren, die Gleichung einer Hüllkurve durch Differentialrechnung zu gewinnen.

Der Anhang II enthält als Übungsstoff eine Reihe von Aufgaben, Lehrsätzen und Hinweisen auf neue Kurven; er dürfte zur Vertiefung und Erweiterung des gewonnenen Wissens nicht unwillkommen sein.

Wiesbaden, im März 1949

Der Verfasser

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Erste Gruppe</i>	
1. Die Zissoide	7
2. Die Strophoide	18
3. Die Trisektrix von Maclaurin	31
4. Das Kartesische Blatt	44
5. Gemeinsame Erzeugungsweisen der bisher behandelten Kurven	50
<i>Zweite Gruppe</i>	
6. Die Serpentine	60
7. Die Versiera	64
8. Gemeinsame Erzeugungsweise von Serpentine und Versiera	68
9. Die Kappa-Kurve	70
10. Gemeinsame Erzeugungsweise von Strophoide und Kappa-Kurve	74
<i>Dritte Gruppe</i>	
11. Die Lemniskate	77
12. Cassinische Kurven	89
<i>Vierte Gruppe</i>	
13. Die Konchoide des Nikomedes	102
14. Die Kardioide	107
15. Die Pascalsche Schnecke	125
16. Die Kartesischen Ovale	140
<i>Fünfte Gruppe</i>	
17. Die Rosette	155
18. Die Astroide	160
19. Die Steinersche Kurve	175
20. Die Doppeleilinie	184
<i>Sechste Gruppe</i>	
21. Die Zyklode	189
22. Die Epi- und Hypozykloiden	203

<i>Siebente Gruppe</i>	
23. Die Kreisevolvente	217
24. Die Archimedische Spirale	225
25. Die logarithmische Spirale	230
<i>Achte Gruppe</i>	
26. Die Kettenlinie	235
27. Die Quadratrix	241
<i>Anhang I</i>	
1. Tangentenkonstruktionen nach der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes	247
2. Definition der Hüllkurven	247
<i>Anhang II</i>	
1. Übungsstoff: Aufgaben. Lehrsätze. Neue Kurven	249
2. Schlagwörterverzeichnis	253

ERSTE GRUPPE

1. Die Zissoide

Die berühmten unlösbaren Probleme — Verdoppelung des Würfels, Quadratur des Kreises und Dreiteilung des Winkels —, an deren Lösung die alten griechischen Mathematiker sich immer wieder versuchten, führten zur Erfindung einer ganzen Reihe von Kurven, die uns neben anderen im folgenden beschäftigen werden. Die Zissoide im besonderen verdankt ihre Entstehung dem Problem der Würfelverdoppelung, zu dessen Lösung sie Diokles (etwa 200 v. Chr.) erfand. Allerdings ging er sowohl wie die anderen griechischen Mathematiker, die die Kurve studierten, nicht über die endlichen Grenzen des erzeugenden Kreises hinaus, und erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts scheint die Entwicklung der analytischen Geometrie die Erkenntnis gebracht zu haben, daß die beiden Kurvenzweige ins Unendliche gehen. Die Kurve trägt ihren Namen wegen ihrer Ähnlichkeit mit der Spitze des Efeublattes ($\kappa\iota\sigma\sigma\acute{o}\varsigma$, Efeu).

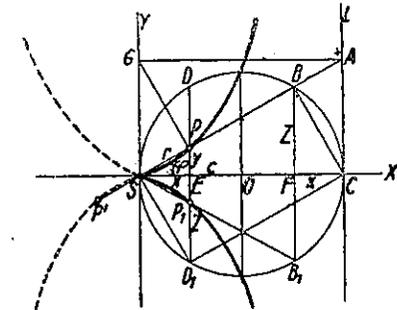


Abb. 1

A. Erzeugungsweisen

1. (Diokles) Zeichnet man in einem Kreis einen Durchmesser SC (s. Abb. 1) und senkrecht zu diesem zwei vom Kreismittelpunkt gleich weit entfernte Sehnen BB_1 und DD_1 , so ergeben die Schnitte von SB und SB_1 mit DD_1 zwei Zissoidenpunkte P und P_1 .

Mache ich SC zur x -Achse und die Kreistangente in S zur y -Achse, so ist als Höhe im rechtwinkligen Dreieck SBC ($c = \text{Radius}$)

$$BF = \sqrt{x(2c-x)}.$$

Setze ich diesen Wert in die Proportion

$$y : x = BF : (2c - x)$$

ein, so ergibt sich

$$y = \frac{x\sqrt{x(2c-x)}}{2c-x}$$

$$y = x \sqrt{\frac{x}{2c-x}} \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{x^3}{2c-x}$$

Setzt man $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, so folgt nach einigen Umformungen die Polargleichung

$$r = 2c \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi.$$

Vertauscht man x mit $-x$, so erhält man die Gleichung der symmetrisch liegenden, gestrichelt gezeichneten Zissoide

$$y = x \sqrt{\frac{-x}{2c+x}} \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{-x^3}{2c+x}, \quad r = -2c \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi.$$

2. Ziehe ich SD_1 , D_1C und CB , so ist wegen der Kongruenz der Dreiecke SED_1 und BFC SD_1CB ein Rechteck. Daraus ergibt sich folgende Konstruktion der Kurve: Zieht man durch den einen Endpunkt C eines Kreisdurchmessers SC einen beliebigen Strahl, der den Kreis in D_1 schneidet, und fällt von D_1 das Lot auf SC , so schneidet dieses die Parallele, die man durch S zu dem Strahl ziehen kann, in einem Zissoidenpunkt P .

3. Zeichnet man in C die Kreistangente L und verlängert SB bis zum Schnitt mit L in A , so ist nach dem Strahlensatz $AB = SP$. Danach kann man sagen: Liegt ein Kreis mit einem Durchmesser SC und der Tangente L in C gezeichnet vor und läßt man nun um S einen Strahl sich drehen, der den Kreis in B und L in A schneidet, so beschreibt ein Punkt P dieses Strahls, für den $SP = AB$ ist, eine Zissoide.

Wird die Strecke AB von S aus entgegengesetzt zu SP auf dem Fahrstrahl bis P' abgetragen, so erzeugt P' die auf der linken Seite der y -Achse symmetrisch liegende Kurve.

4. Zieht man $GA \parallel SC$ und verbindet G mit P , so ist (da $PA = SB$, $GA = SC$ und

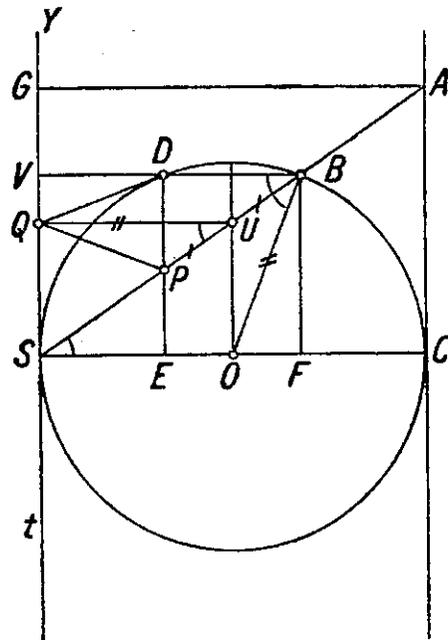


Abb. 2

$\sphericalangle GAP = \sphericalangle CSA$) $\triangle GPA \cong \triangle CBS$, mithin $\sphericalangle GPA = R$. Wir können also auch sagen: Verschiebt man eine gegebene Strecke $GA = 2c$ parallel zur x -Achse in der Weise, daß G auf der y -Achse wandert, so beschreibt der Fußpunkt des von G auf den Fahrstrahl SA gefällten Lotes eine Zissoide.

5. Man vervollständige (s. Abb. 2) Abb. 1 durch Ziehen der Parallelen AG , BDV und UQ . Zieht man noch QP und BO , so ist $\triangle QPU \cong \triangle OUB$ ($PU = UB$, $QU = SO = OB$, $\sphericalangle QUP = \sphericalangle PSE = \sphericalangle SBO$), folglich $QP = UO = QS$.

Da U die Mitte von SA , ist $QS = QG$, mithin geht ein um Q mit QG beschriebener Kreis auch durch P und S und, da $QD = QP$, auch durch D . Ich kann demnach sagen: Es liege ein Kreis O mit der Tangente t in einem Umfangspunkt S vor. Um einen beliebigen Punkt Q von t beschreibt man (s. Abb. 3) den durch S gehenden Kreis, der Kreis O in D schneidet, und fällt von D auf SO das Lot, das Kreis Q in P schneidet; dann ist P ein Punkt einer Zissoide mit der Achse SO und der Spitze in S .

6. Auch Newton glaubte die Zissoide zur Lösung geometrischer Aufgaben heranziehen zu können und versuchte daher, einen „Zissoidenzirkel“ zu ihrer bequemen mechanischen Erzeugung — zu erfinden. Er gelangte zu folgender hübschen Erzeugungsweise (s. Abb. 1 und 4):

Zieht man $AM \parallel SO$, verlängert MP um sich selbst bis Q , zeichnet weiter $MR \parallel AS$ und verbindet R mit Q , so folgt zunächst aus der Kongruenz der Dreiecke SOP und AMB , daß PO gleich und parallel zu MB ist. Mithin ist $POBM$ ein Parallelogramm, also $PM = OB = c$ und $MT = TO$. Nach dem Strahlensatz ist dann auch $RS = SO = c$. Es ist weiter $\sphericalangle MRS = \sphericalangle PSO = \sphericalangle PBO$ (da $OS = OB$) = $\sphericalangle RMP$, und da auch $RO = MQ = 2c$, so ist $\triangle RQM \cong \triangle ROM$. Demnach ist $\sphericalangle RQM = 90^\circ$. Da R in der Entfernung $2c$ von O ein fester Punkt auf dem Durchmesser

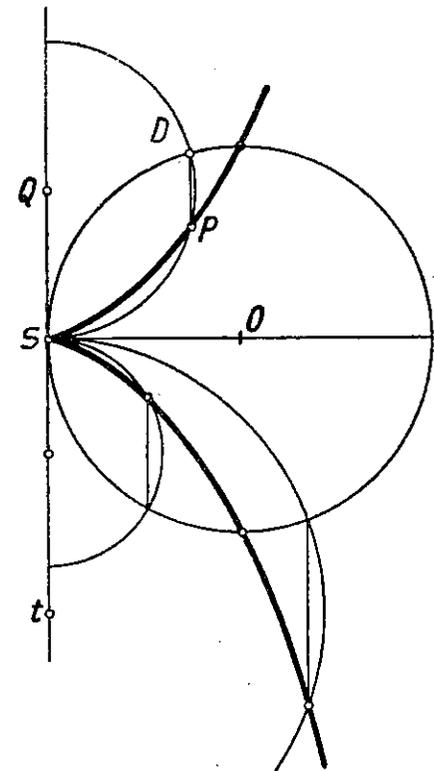


Abb. 3

dem Strahlensatz ist dann auch $RS = SO = c$. Es ist weiter $\sphericalangle MRS = \sphericalangle PSO = \sphericalangle PBO$ (da $OS = OB$) = $\sphericalangle RMP$, und da auch $RO = MQ = 2c$, so ist $\triangle RQM \cong \triangle ROM$. Demnach ist $\sphericalangle RQM = 90^\circ$. Da R in der Entfernung $2c$ von O ein fester Punkt auf dem Durchmesser

und P die Mitte von QM ist, so ergibt sich: Die Zissoide ist der geometrische Ort des Mittelpunktes

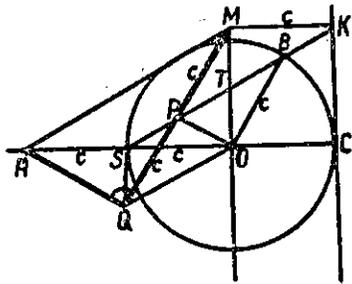


Abb. 4

richte auf seinem Fahrstrahl SP das Lot PG , ziehe $GF \parallel PS$ und $SH \parallel PG$, so ist $HS = GP = r \operatorname{ctg} \varphi = 2c \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi = 2 \sin \varphi$, demnach $FS = 2c$. Beschreibt P die Kurve, so bewegt sich G mit seinem rechten Winkel auf der y -Achse, während der andere Schenkel durch den konstanten Punkt F geht. Ich kann demnach sagen: Es sei gegeben eine feste Gerade g (die y -Achse) und auf ihr in S ein Lot $FS = 2c$. Lasse ich nun einen rechten Winkel mit seinem Scheitel G sich auf g bewegen, während der eine Schenkel ständig durch F geht, und ziehe durch S eine Parallele zu FG , die den anderen Schenkel bzw. seine Verlängerung in P schneidet, so beschreibt P eine Zissoide. Die Lage dieser Kurve bezüglich der Geraden g ist entgegengesetzt der Lage

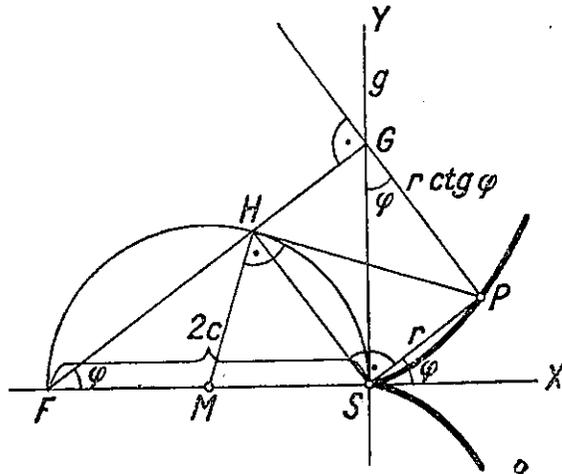


Abb. 5

7. An die Newtonsche schließen wir zwei andere Erzeugungsweisen der Kurve mittels eines beweglichen rechten Winkels. Greife ich (s. Abb. 5) einen Kurvenpunkt P heraus und erichte auf seinem Fahrstrahl SP das Lot PG , ziehe $GF \parallel PS$ und $SH \parallel PG$, so ist $HS = GP = r \operatorname{ctg} \varphi = 2c \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi = 2 \sin \varphi$, demnach $FS = 2c$. Beschreibt P die Kurve, so bewegt sich G mit seinem rechten Winkel auf der y -Achse, während der andere Schenkel durch den konstanten Punkt F geht. Ich kann demnach sagen: Es sei gegeben eine feste Gerade g (die y -Achse) und auf ihr in S ein Lot $FS = 2c$. Lasse ich nun einen rechten Winkel mit seinem Scheitel G sich auf g bewegen, während der eine Schenkel ständig durch F geht, und ziehe durch S eine Parallele zu FG , die den anderen Schenkel bzw. seine Verlängerung in P schneidet, so beschreibt P eine Zissoide. Die Lage dieser Kurve bezüglich der Geraden g ist entgegengesetzt der Lage

von F .

8. Verbinde ich in Abb. 5 den Mittelpunkt M von FS mit H und H mit P , so liegt zunächst, da $\sphericalangle FHS$ ein Rechter ist, H auf dem um M mit c beschriebenen Kreis. Es ist weiter $\sphericalangle MHS = \sphericalangle MSH = R - \varphi$ und $\sphericalangle SHP = \sphericalangle SGP = \varphi$, mithin $\sphericalangle MHP = R$. Ich kann so nach sagen: Gegeben ein Kreis M vom Radius c und auf seinem

Umfang ein fester Punkt S . Um S als Scheitelpunkt drehe sich ein rechter Winkel, der den Kreis mit der einen Kathete in H schneidet. Zieht man dann in H die Kreistangente, so beschreibt der Schnittpunkt P dieser Tangente mit der anderen Kathete eine Zissoide.

9. Die Zissoide als Fußpunktkurve der Parabel (s. Abb. 6). Fällt man vom Parabelscheiden auf eine Tangente das Lot r , so ist $r = -x \cos \varphi$, und da im Dreieck CDE mit der Subnormalen $DE = p \operatorname{tg} \varphi$ ist, so folgt ($y^2 = 2px$):

$$r = -x \cos \varphi = -\frac{y^2}{2p} \cos \varphi = -\frac{p^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{2p} \cos \varphi = -\frac{p}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

d. h. wir erhalten eine auf der linken Seite der y -Achse liegende Zissoide von der Breite $2c = p/2$.

Und weiter: Spiegeln wir die Parabel an der Tangente, so erhalten wir eine zu ihr kongruente Parabel. Nun war $r = -\frac{p}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi$, demnach ist, da $r = R/2$, für den Scheitel Q der zweiten Parabel

$$R = -p \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

d. h.: Rollt eine Parabel auf einer ihr kongruenten, so beschreibt der Scheitel eine Zissoide von der Breite des Halbparameters.

10. Die Zissoide als Hüllkurve. Aus der vorigen Erzeugungsweise folgt: Der Punkt C , in dem sich die beiden Parabeln berühren, ist augenblicklicher Drehpunkt. Demnach ist CQ Normale der durch Q gehenden Zissoide. Beschreibe ich also um C mit CQ einen Kreis, so fallen Kreistangente und Zissoidentangente in Q zusammen. Die Zissoide berührt also diesen Kreis in Q , und denken wir uns bei dem Abrollen der Parabel zu jedem Dreh-

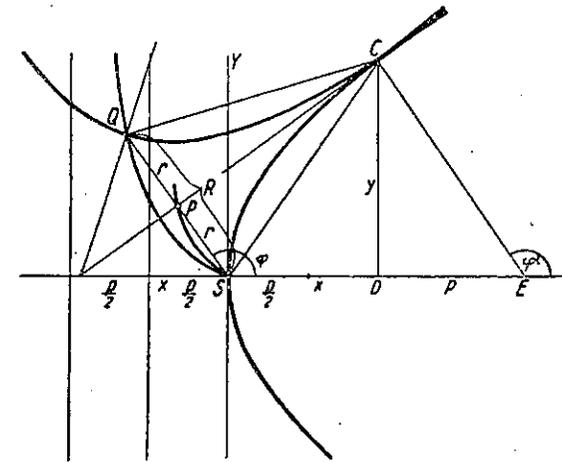


Abb. 6

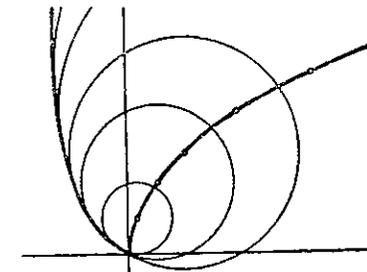


Abb. 7

punkt C den zugehörigen Kreis gezeichnet, so ergibt sich der Satz: Die Zissoide ist die Hüllkurve derjenigen Kreise, die durch den Scheitel einer Parabel gehen und deren Mittelpunkte auf dieser Parabel liegen (s. Abb. 7). Die Breite der entstehenden Zissoide ist gleich dem Halbp parameter: $2c = p$.

11. Die Zissoide als Inverse der Parabel. Die Polargleichung der Parabel mit ihrem Scheitelpunkt als Pol lautet (aus $y^2 = 2px$ leicht abzuleiten):

$$r = \frac{2p \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi}.$$

Nehmen wir den Scheitelpunkt dieser Parabel als Zentrum einer Inversion $rr' = K^2$, so folgt

$$\frac{K^2}{r'} = \frac{2p \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi}$$

$$r' = \frac{K^2}{2p} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi,$$

d. i. die Gleichung einer Zissoide, deren Spitze mit dem Scheitel der Parabel und deren Achse mit der Parabelachse zusammenfällt, und für die $c = \frac{K^2}{4p}$ ist.

B. Auswertung der Kurvengleichungen. Tangentengleichung

1. Die Kurve ist symmetrisch zur x -Achse.
2. y ist nur reell für $0 < x < 2c$. Für $x = 0$ ist auch $y = 0$.
3. Mit wachsendem x nimmt y in immer stärkerem Maße zu und wird unendlich für $x = 2c$: L ist Asymptote. Für $x = c$ ist auch $y = \pm c$, d. h. die Kurve geht durch die senkrecht über bzw. unter O liegenden Punkte des Grundkreises.
4. Da zu $r = 0$ $\varphi = 0$ gehört, hat die Kurve in S eine Spitze, bei der sie sich der x -Achse anschmiegt.
5. Schreiben wir die Kurvengleichung in der Form $y^2(2c - x) - x^3 = 0$, so erhalten wir durch Differenzieren

$$y' = \frac{3x^2 + y^2}{(2c - x)2y}.$$

Demnach ist gemäß der Formel $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ die Tangentengleichung für einen Kurvenpunkt x_1/y_1

$$y - y_1 = \frac{3x_1^2 + y_1^2}{(2c - x_1)2y_1} (x - x_1),$$

woraus nach einigen Umformungen sich ergibt

$$y(2c - x_1)2y_1 - x(3x_1^2 + y_1^2) + 3x_1^3 + 3x_1y_1^2 - 4cy_1^2 = 0.$$

Nun ist aber nach der Kurvengleichung $x_1^3 + x_1y_1^2 = 2cy_1^2$, so daß sich als endgültige Form der Tangentengleichung ergibt:

$$y(2c - x_1)2y_1 - x(3x_1^2 + y_1^2) + 2cy_1^2 = 0.$$

C. Tangentenkonstruktionen

1. Die 6. Erzeugungsweise (Newton) ergibt unter Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes folgende anschauliche Konstruktion. Punkt M des starren Systems bewegt sich in der dargestellten Lage in Richtung des eingezeichneten Pfeiles (s. Abb. 8), und entsprechend der durch R durchgleitende Punkt des anderen Schenkels. Errichtet man also auf BQ in B und auf OM in M die Lote, so ergeben diese den augenblicklichen Drehpunkt D . DP ist Normale und zu ihr senkrecht die Tangente t .

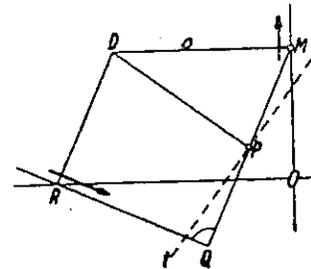


Abb. 8

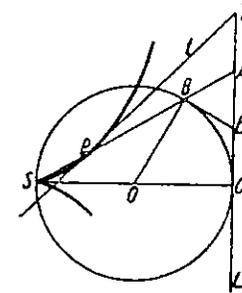


Abb. 9

2. Die einfachste Tangentenkonstruktion liefert folgende Betrachtung. Setzt man in der Tangentengleichung $x = 2c$, so erhält man für den Schnittpunkt T der Tangente mit Linie L :

$$CT = y_T = \frac{6cx_1^2}{2y_1(2c - x_1)} = \frac{3cx_1^2}{y_1(2c - x_1)} = \frac{3cy_1}{x_1}.$$

Bringt man andererseits den Fahrstrahl SP mit CT in A zum Schnitt, so erhält man $\left(\frac{CA}{SC} = \frac{y_1}{x_1}\right)$ (s. Abb. 9):

$$CA = y_A = \frac{2cy_1}{x_1}.$$

Der Vergleich von y_T und y_A zeigt, daß $y_T = y_A + \frac{y_A}{2}$. Zur Konstruktion der Tangente in P ziehe man demnach den Fahrstrahl SA und trage auf L $AT = \frac{CA}{2}$ ab; dann ist PT Tangente.

Anmerkung: Stellt man die Gleichung der Kreistangente BE auf, so zeigt sich, daß E in der Mitte von AC liegt $\left(y_E = \frac{cy_1}{x_1}\right)$.

3. Man verlängere (s. Abb. 10) PF um die Hälfte bis Q , bringe SQ in T mit der Kurve zum Schnitt und verbinde T mit P . TP ist dann Tangente. Liegt die Kurve nicht gezeichnet vor, so gewinne

man T auf die Weise, daß man ST (gemäß der 3. Erzeugungsweise) gleich GH macht. Beweis: Da Q die Koordinaten

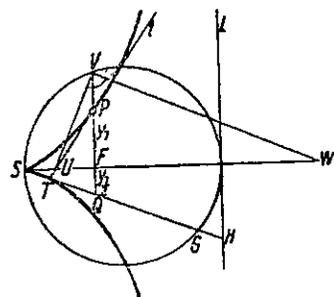


Abb. 10

$x_1, -\frac{y_1}{2}$ hat, so lautet die Gleichung von SH $y = -\frac{y_1}{2x_1}x$. Für den Schnittpunkt T mit der Kurve ergeben sich dann die Koordinaten

$$x_T = \frac{2cy_1^2}{4x_1^2 + y_1^2}, \quad y_T = \frac{-cy_1^2}{x_1(4x_1^2 + y_1^2)}.$$

Setzt man diese Werte in die Tangentengleichung ein, so wird diese (man berücksichtige $y_1^2 = \frac{x_1^3}{2c - x_1}$!) von ihnen befriedigt.

4. Mache $SW = 3c$ und ziehe durch P die Parallele zur y -Achse, die den Grundkreis in V schneidet, verbinde V mit W und errichte auf VW das Lot, das die x -Achse in U schneidet. Dann ist UP Tangente.

Beweis: Aus der Tangentengleichung ergibt sich für $y=0$

$$SU = x_U = \frac{2cy_1^2}{3x_1^2 + y_1^2}.$$

Da V auf dem Kreis liegt, erhält man als seine Koordinaten

$$x_V = x_1; \quad y_V = \sqrt{2cx_1 - x_1^2}.$$

Demnach ist die Steigung von UV gleich

$$\frac{VF}{UF} = \frac{y_V}{x_1 - x_U} = \frac{\sqrt{2cx_1 - x_1^2}}{x_1 - \frac{2cy_1^2}{3x_1^2 + y_1^2}}.$$

Somit hat das in V auf UV errichtete Lot die Gleichung

$$\frac{y - \sqrt{2cx_1 - x_1^2}}{x - x_1} = \frac{\frac{2cy_1^2}{3x_1^2 + y_1^2} - x_1}{\sqrt{2cx_1 - x_1^2}}.$$

Für den Schnittpunkt W mit der x -Achse setze darin $y=0$:

$$-2cx_1 + x_1^2 = \left(\frac{2cy_1^2}{3x_1^2 + y_1^2} - x_1 \right) (x - x_1).$$

Führt man hierin noch aus der Kurvengleichung $y_1^2 = \frac{x_1^3}{2c - x_1}$ ein, so gewinnt man nach einigen Umformungen

$$SW = x_W = 3c.$$

5. Man errichte auf SP das Mittellot (Abb. 11), das die in S gezogene Kreistangente in V und die x -Achse in U schneidet. Verlängert man dann UV um sich selbst bis N , so ist NP Kurvennormale. Beweis: Aus der Steigung von

SP gleich $\frac{y_1}{x_1}$ folgt die von VU gleich $-\frac{x_1}{y_1}$. Demnach lautet die Gleichung von NU :

$$\frac{y - \frac{y_1}{2}}{x - \frac{x_1}{2}} = \frac{-x_1}{y_1} \quad \text{oder} \\ \frac{2y - y_1}{2x - x_1} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Setzt man hierin $x=0$, so ergeben sich die Koordinaten von V :

$$x_V = 0, \quad y_V = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2y_1}.$$

$y=0$ liefert Punkt U :

$$x_U = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}, \quad y_U = 0.$$

Demnach sind die Koordinaten von N :

$$x_N = -x_U = -\frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}, \quad y_N = 2y_V = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}.$$

Daraus folgt die Steigung von PN :

$$\frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{y_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}}{x_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}} = \frac{-2x_1^3}{3x_1^2y_1 + y_1^3}.$$

Leitet man aber aus der Tangentengleichung die Steigung der Normalen ab, so erhält man (da nach der Kurvengleichung $2c - x_1 = \frac{x_1^3}{y_1^3}$) ebenfalls

$$\frac{-(2c - x_1)2y_1}{3x_1^2 + y_1^2} = \frac{-\frac{x_1^3}{y_1^3} \cdot 2y_1}{3x_1^2 + y_1^2} = \frac{-2x_1^3}{(3x_1^2 + y_1^2)y_1}.$$

6. Die Berechnung der Subtangente führt zu folgender einfachen Konstruktion. Setzt man in der Tangentengleichung $y=0$, so findet man (s. Abb. 12) $x_U = SU = \frac{2cy_1^2}{3x_1^2 + y_1^2}$, demnach ist die Subtangente

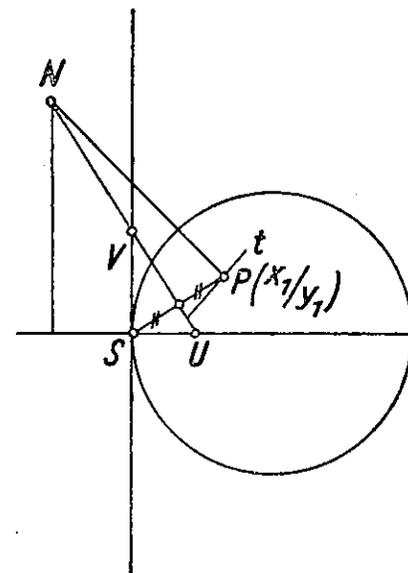


Abb. 11

$S_t = UF = x_1 - x_U = \frac{3x_1^3 + x_1y_1^2 - 2cy_1^2}{3x_1^2 + y_1^2}$, woraus unter Einsetzung der Kurvengleichung $y_1 = x_1 \sqrt{\frac{x_1}{2c - x_1}}$ nach einigen Umformungen sich ergibt $S_t = \frac{x_1(2c - x_1)}{3c - x_1}$.

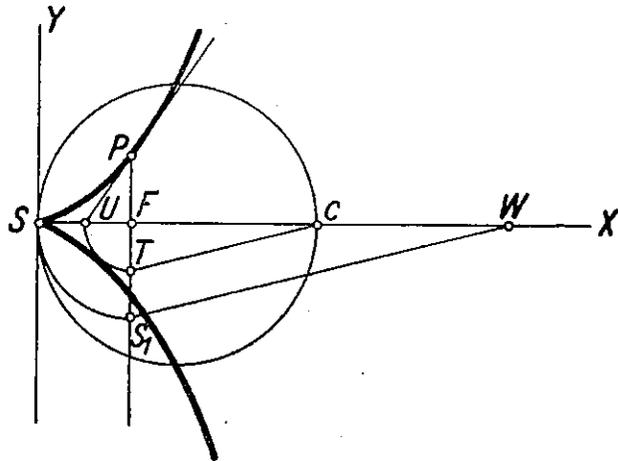


Abb. 12

Hiernach läßt sich S_t als vierte Proportionale leicht zeichnen: Ist $SW = 3c$, so ist $FW = 3c - x_1$ und $FC = 2c - x_1$. Verlängere also PF und trage $FS_1 = FS = x_1$ ab, verbinde S_1 mit W und ziehe zu S_1W die Parallele CT . Dann ist $FU = FT$ die Subtangente und PU die gesuchte Tangente.

D. Quadratur

Wir erhalten den Inhalt der zwischen Kurve und Asymptote oberhalb der x -Achse liegenden Fläche, indem wir von dem zwischen y -Achse und L liegenden Streifen F_1 die zwischen Kurve und y -Achse liegende Fläche F_2 abziehen.

Die Asymptote hat die Gleichung $x = 2c$ oder $r = \frac{2c}{\cos \varphi}$. Dann ist nach der Formel $S = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi$

$$F_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{4c^2}{\cos^2 \varphi} d\varphi = 2c^2 [\operatorname{tg} \varphi]_0^{\pi/2}$$

Für F_2 ergibt sich nach der Polargleichung der Kurve

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 4c^2 \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 4c^2 \frac{(1 - \cos^2 \varphi)^2}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= 2c^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \cos \varphi \right)^2 d\varphi = 2c^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 2 + \cos^2 \varphi \right) d\varphi \\ &= 2c^2 \left[\operatorname{tg} \varphi - 2\varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

Demnach ist der oberhalb der x -Achse liegende, von der Kurve und ihrer Asymptote umschlossene Teil der Ebene

$$F = F_1 - F_2 = 2c^2 \left[2\varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2c^2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3c^2\pi}{2}$$

und die gesamte zwischen Kurve und Asymptote liegende Fläche $3c^2\pi$, d. h. dreimal so groß wie der Grundkreis.

E. Verwendung der Zissoide zur Würfelverdoppelung

Bezeichnet man die gegebene Würfelkante mit a , die gesuchte mit X , so läßt sich die Lösung dieses Problems zurückführen auf die konstruktive Auswertung der doppelten Proportion

$$a : X = X : Y = Y : 2a,$$

die bei Auflösung die Definitionsgleichung $X^3 = 2a^3$ liefert.

Da (s. Abb. 1) $\triangle PSD_1$ sowohl wie $\triangle SBC$ rechtwinklig ist, gelten ($BF = D_1E = z$ gesetzt) die Gleichungen

$$y : x = x : z \text{ in } \triangle PSD_1$$

$$x : z = z : (2c - x) \text{ in } \triangle SBC.$$

$$y : x = x : z = z : (2c - x)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der doppelten Proportion für die Würfelverdoppelung, so wären $PE = y = a$ und $CE = SF = 2c - x = 2a$ als gegeben anzusehen und zu ihnen die erste der beiden mittleren Proportionalen $SE = x = X$ zu konstruieren.

Konstruktion: Man zeichne eine beliebige Zissoide, mache $SP' = c$, verbinde P' mit C , wodurch sich P ergibt, und falle PE . Dann ist nach dem Strahlensatz

$$PE : EC = P'S : SC = 1 : 2.$$

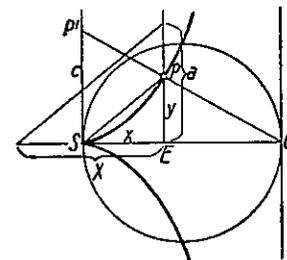


Abb. 13

Nun sollte aber $PE = a$ und damit $EC = 2a$ sein. Damit also $SE = x$ die gesuchte erste mittlere Proportionale zu a und $2a$ werde, muß x im selben Maß noch vergrößert bzw. verkleinert werden, in dem PE zu a steht. Abb. 13 zeigt die Ausführung der Konstruktion.

2. Die Strophoide

Die Kurve taucht zum erstenmal im 17. Jahrhundert in der mathematischen Literatur auf, wo sie vor allem von Toricelli behandelt wurde. Der Name ist abgeleitet vom griechischen $\sigma\tau\rho\phi\omicron\varsigma$, Band, Seil.

A. Erzeugungsweisen

1. Zieht man in einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius b zwei zueinander senkrechte Durchmesser SOX und L (s. Abb. 14) und zeichnet einen beliebigen Strahl durch S , der L in A_1 und den Kreis in B_1 schneidet, so beschreibt ein Punkt P_1 dieses Strahles, für den $SP_1 = A_1B_1$ ist, bei Drehung des Strahles um S eine Strophoide.

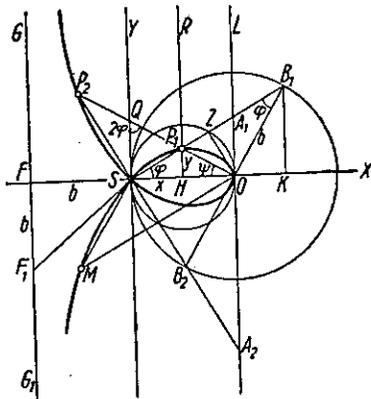


Abb. 14

woraus

$$y^2 = \frac{(b^2 - x^2)x^2}{(b+x)^2} = \frac{(b-x)x^2}{b+x}$$

$$y = x \sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$$

Setzt man $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$, so folgt hieraus nach einigen Umformungen die Polargleichung

$$r = b \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$$

2. Die Polargleichung prägt sich in folgender Konstruktion besonders einfach aus. Zieht man in einem Kreis mit dem Mittelpunkt S und einem Durchmesser $AO = 2b$ (Abb. 15) einen Halbmesser SC und fällt von C auf AO das Lot CQ , das die Halbierungslinie des Winkels CSQ in P schneidet, so ist P ein Strophoidenpunkt.

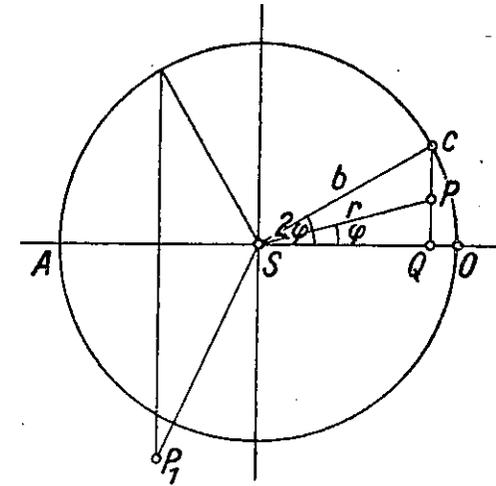


Abb. 15

Bezeichnet man nämlich SP mit r und $\sphericalangle CSQ$ mit 2φ , so ist $SQ = b \cos 2\varphi$ und folglich $SP = r = \frac{SQ}{\cos \varphi} = \frac{b \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$. Denkt man sich SC um S gedreht, so kann man nach dieser Konstruktion beliebig viele Punkte (z. B. P_1 in Abb. 15) der Kurve sehr rasch finden.

3. Wegen der Kongruenz der Dreiecke SOA_1 und B_1OP_1 (Abb. 14) ist $\sphericalangle SA_1O = \sphericalangle B_1P_1O = R - \varphi$, mithin $\sphericalangle P_1OA_1 = 2\varphi$, und da $\sphericalangle SQO = \sphericalangle P_1OA_1$, so ist auch $\sphericalangle SQO = 2\varphi$. Bezeichnet man nun $\sphericalangle SOP_1$ mit ψ , so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck QSO die Beziehung

$$2\varphi + \psi = R.$$

Wir können demnach auch sagen:

Drehen sich um zwei feste Punkte S und O zwei Strahlen, deren Schnittpunkt ich mit P_1 und deren Drehungswinkel P_1SO und P_1OS ich mit φ bzw. ψ bezeichne, derart, daß stets $2\varphi + \psi = R$ ist, so beschreibt P_1 eine Strophoide.

Zu dem Kurvenpunkt O gehört nach dieser Erzeugungsweise $\varphi = 0$, $\psi = R$; bei wachsendem φ wird für $\varphi = 45^\circ$, $\psi = 0$ der Knotenpunkt S erhalten, und um den sich anschließenden, nach links unten gehenden Kurvenzweig (etwa Punkt M darauf) zu erhalten, ist $45^\circ < \varphi < 90^\circ$, ψ dagegen negativ, zwischen 0° und $-R$ zu nehmen.

Da $\sphericalangle P_1OL = R - \psi = 2\varphi$ ist, kann ich auch sagen: Drehen sich zwei Strahlen um die Punkte S und O eines rechten Winkels SOL derart, daß der erste von SO , der zweite von OL als Anfangslage ausgeht und der zweite die doppelte Winkelgeschwindigkeit des ersten besitzt, so beschreibt ihr Schnittpunkt eine Strophoide.

der Dreiecke SOA_1 und P_1OB_1 , $OP_1 = OA_1$ und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke QSP_1 und OP_1A_1 , $QS = QP_1$. Fassen wir diese Gleichung mit der eben erhaltenen zusammen, so haben wir

$$QP_2 = QS = QP_1.$$

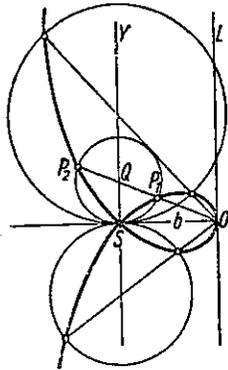


Abb. 19

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion: Gegeben das rechtwinklige Achsenkreuz S mit O auf der x -Achse. Ziehe durch O einen beliebigen Strahl, der die y -Achse in Q schneidet, und trage auf dem Strahl in entgegengesetzten Richtungen $QP_1 = QP_2 = QS$ ab. Dann sind P_1 und P_2 Punkte der Strophoide.

7. Da sich um Q als Mittelpunkt ein Kreis beschreiben läßt, der durch P_1 und P_2 geht und SO in S berührt, so läßt sich die eben gegebene Erzeugungsweise sofort auch in folgender Form aussprechen (s. Abb. 19):

Gegeben $SO = b$ mit den Loten in S und O .

Man zeichne Kreise mit den Mittelpunkten auf dem in S errichteten Lot, die SO in S berühren, und ziehe von O aus die Strahlen durch die Kreismittelpunkte. Deren Schnittpunkte mit den betr. Kreisen sind Punkte der durch SO bestimmten Strophoide.

8. Beschreibt man (s. Abb. 14) über SO als Durchmesser den Kreis, der den Fahrstrahl SB_1 in Z schneidet, so ist $\triangle P_1OA_1$ gleichschenkelig und, da OZ Höhe ist, $P_1Z = ZA_1$. Unsere Kurve kann demnach auch folgendermaßen gefunden werden:

Gegeben ein Kreis mit einem Durchmesser SO und der Tangente in O . Man zeichne einen Strahl durch S , der die Tangente in A_1 und den Kreis in Z schneidet, und trage auf dem Strahl in entgegengesetzter Richtung $ZP_1 = ZA_1$ ab. Der Punkt P_1 beschreibt dann bei der Drehung des Strahles um S eine Strophoide.

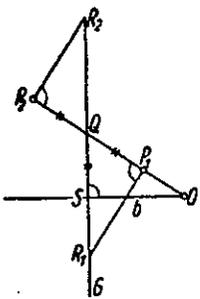


Abb. 20

9. Man errichte (s. Abb. 20) auf dem Fahrstrahl OP_1P_2 in P_1 und P_2 die Lote P_1R_1 und P_2R_2 . Da $QS = QP_1 = QP_2$, so sind die Dreiecke QR_1P_1 , QSO und QP_2R_2 kongruent, mithin $SO = R_1P_1 = R_2P_2 = b$. Wir können also auch sagen:

Bewegt sich die eine Ecke R eines rechtwinkligen Dreiecks mit der konstanten Kathete $PR = b$ auf einer Geraden G , während die andere Kathete stets durch den um b von G entfernten festen Punkt O läuft, so beschreibt P eine Strophoide. Je nachdem, ob ich das Dreieck auf der linken oder rechten

Seite von G anlege, erzeugt P den links oder rechts von G liegenden Teil der Kurve.

10. Verbindet man (s. Abb. 21) einen Kurvenpunkt P mit S , errichtet auf SP in P die Senkrechte PG bis zum Schnitt mit der Scheiteltangente g in G und verbindet G mit F , dem Punkt, in dem der Grundkreis um O mit b die x -Achse schneidet, so ist, da $r = \frac{b \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$, $SH = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{b \cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}$, $HO = b - \frac{b \cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi} = b \frac{\cos^2 \varphi - (2 \cos^2 \varphi - 1)}{\cos^2 \varphi} = b \operatorname{tg}^2 \varphi$.

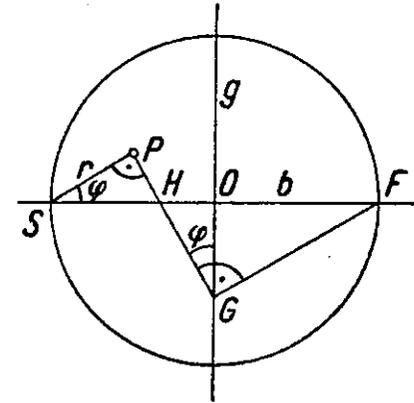


Abb. 21

Demnach ist $OG = HO \cdot \operatorname{ctg} \varphi = b \operatorname{tg} \varphi$. Da nun $HO \cdot OF = b \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot b = b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = OG^2$ ist, muß $\sphericalangle HGF = R$ sein. Beschreibt P die Kurve, so bewegt sich G mit seinem rechten Winkel auf g , während sein einer Schenkel durch F geht. Man kann danach unsere Kurve folgendermaßen erzeugen:

Auf einer festen Geraden g errichte man in O eine Senkrechte und bezeichne auf dieser zwei auf entgegengesetzten Seiten von g liegende, gleich weit von g entfernte Punkte S und F . Läßt man dann einen rechten Winkel mit dem Scheitel G so auf g gleiten, daß sein einer Schenkel ständig durch F geht, so beschreibt der Punkt, in dem die durch S zu GF gezogene Parallele den anderen Schenkel schneidet, eine Strophoide mit dem Doppelpunkt S und dem Scheitel O .

11. Denken wir uns in Abb. 20 um R_1 und R_2 die Kreise mit b beschrieben, so stellen die Kurvenpunkte P_1 und P_2 die Berührungspunkte der Tangenten dar, die sich von O an die beiden Kreise ziehen lassen. Verschieben wir also einen Kreis vom Radius b mit seinem Mittelpunkt auf einer Geraden G und ziehen von dem um b von G entfernt liegenden festen Punkt O aus fortgesetzt die Tangenten an den beweglichen Kreis, so beschreibt der wandernde Berührungspunkt die Strophoide (s. Abb. 22).

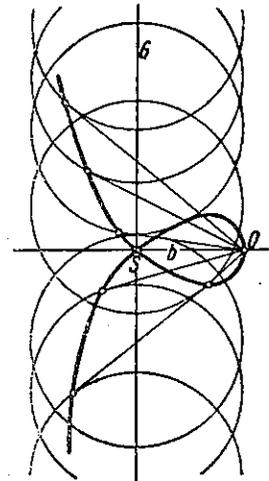


Abb. 22

12. Da nach Abb. 14 $\sphericalangle SP_1R = \sphericalangle OA_1B_1$ als Wechselwinkel und wegen der Kongruenz der Dreiecke SP_1O und OA_1B_1 $\sphericalangle SP_1O = \sphericalangle OA_1B_1$, mithin auch $\sphericalangle SP_1R = \sphericalangle SP_1O$ ist, so können wir die Kurve auch folgendermaßen erzeugen:

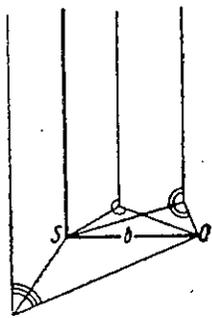


Abb. 23

Gegeben ein rechter Winkel (s. Abb. 23) mit einem unbegrenzten und einem begrenzten Schenkel. Dann ist die Strophoide die Gesamtheit der Punkte, von denen aus die beiden Schenkel des rechten Winkels unter gleichen Schwiwinkeln erscheinen.

13. Hatten unsere bisherigen Betrachtungen sich mehr oder weniger eng an Abb. 14 mit ihrem Grundkreis angeschlossen, so folgen nun einige andere Erzeugungsweisen.

Auf einem anderen Grundkreis beruht folgende Bestimmung:

Gegeben Kreis S mit dem Radius b und einem Durchmesser $S'SC$. Ziehe einen beliebigen durch S' gehenden Strahl $S'Q$, falle $QR \perp S'C$ und zeichne $SP \parallel S'Q$. P ist dann ein Strophoidenpunkt (s. Abb. 24).

Beweis: Es ist

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{b+x}$$

Nun ist $y_1 = \sqrt{b^2 - x^2}$, demnach

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b+x} = \sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$$

$$y = x \sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$$

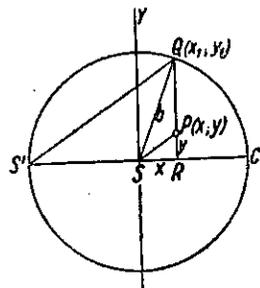


Abb. 24

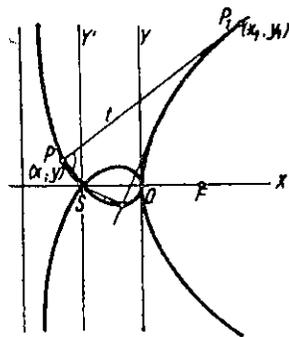


Abb. 25

14. Die Strophoide als Fußpunktkurve der Parabel. Fällt man bei einer Parabel (s. Abb. 25) vom Fußpunkt S der Leitlinie Y' das

Lot SP auf eine Tangente t , so beschreibt P beim Wandern der Tangente eine Strophoide.

Beweis: Betrachten wir die Scheiteltangente der Parabel als y -Achse und bezeichnen die Koordinaten von P mit $x; y$, diejenigen des Tangentenberührungspunktes P_1 mit $x_1; y_1$, so bestehen die drei Gleichungen:

I. $y_1^2 = 2px_1$ Parabelgleichung,

II. $yy_1 = p(x + x_1)$ Tangentengleichung,

III. $y = -\frac{y_1}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right)$ Gleichung des Lotes SP .

Aus diesen ist x_1, y_1 zu beseitigen. Aus I folgt $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, demnach

II a. $yy_1 = px + \frac{y_1^2}{2}$.

Setzt man aus III

$$y_1 = \frac{-2py}{2x+p}$$

in II a ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{-2py^2}{2x+p} &= px + \frac{2p^2y^2}{(2x+p)^2} \\ -4pxy^2 - 2p^2y^2 &= 4px^3 + 4p^2x^2 + p^3x + 2p^2y^2 \\ 4py^2 + 4px^2 + 4y^2x + 4x^3 + p^2x &= 0. \end{aligned}$$

Nun nehmen wir als neue Ordinatenachse die Leitlinie Y' , indem wir $x = x' - \frac{p}{2}$, $y = y'$ setzen, und erhalten nach einigen Umformungen

$$y' = x' \sqrt{\frac{\frac{p}{2} - x'}{\frac{p}{2} + x'}}$$

d. h. die Gleichung einer Strophoide mit dem Schleifendurchmesser $b = \frac{p}{2}$.

15. Als Inverse einer gleichseitigen Hyperbel bezüglich des Scheitels als Inversionszentrum.

Die Hyperbelgleichung lautet $x^2 - y^2 = a^2$, demnach bei Verschiebung des Nullpunktes auf den rechten Scheitel ($y = y'$, $x = x' + a$):

$$x'^2 + 2ax' - y'^2 = 0.$$

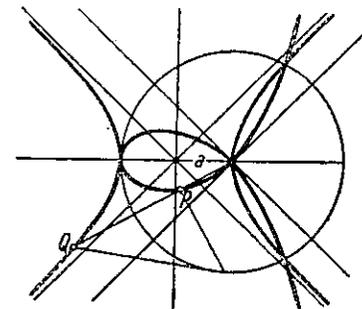


Abb. 26

Führen wir Polarkoordinaten ein, so erhalten wir

$$r^2 \cos^2 \varphi + 2a r \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = 0$$

oder, indem wir $r = 0$ ausscheiden:

$$r \cos 2\varphi + 2a \cos \varphi = 0, \quad r = \frac{-2a \cos \varphi}{\cos 2\varphi}.$$

Führen wir nun die Inversion $rr' = K^2$, $r = \frac{K^2}{r'}$ ein, so folgt

$$\frac{K^2}{r'} = \frac{-2a \cos \varphi}{\cos 2\varphi}$$

$$r' = \frac{-K^2 \cos 2\varphi}{2a \cos \varphi}.$$

Das ist aber die Gleichung einer Strophoide für $b = \frac{K^2}{2a}$, die gegen die normale Lage um 180° gedreht ist. Abb. 26 zeigt die Ausführung der Konstruktion für $K=2a$, $b=2a$.

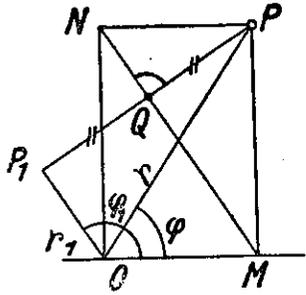


Abb. 27

$$\varphi_1 = 2R - \varphi \quad r_1 = r \cos(\varphi_1 - \varphi)$$

$$\varphi = 2R - \varphi_1 \quad = r \cos(2R - 2\varphi) = -r \cos 2\varphi$$

$$r = \frac{-r_1}{\cos 2\varphi} = \frac{-r_1}{\cos(4\varphi - 2\varphi_1)} = \frac{-r_1}{\cos 2\varphi_1}.$$

In unserem Falle sei die gegebene Kurve die Gerade $x=b$ oder $r \cos \varphi = b$. Führe ich in diese Gleichung die Werte r_1/φ_1 ein, so ergibt sich

$$\frac{r_1 \cos \varphi_1}{\cos 2\varphi_1} = b, \quad r_1 = \frac{b \cos 2\varphi_1}{\cos \varphi_1}, \text{ d. h.}$$

die Gleichung einer Strophoide in normaler Lage. Die Zeichnung (Abb. 28) verläuft sehr einfach, da M für alle Punkte der Geraden konstant ist; man braucht nur von M aus beliebig viele Strahlen MN zu ziehen, durch N die Parallele NP zur x -Achse zu zeichnen und das Lot $PQ \perp MN$ um sich selbst zu verlängern.

B. Auswertung der Kurvengleichungen

1. Die Kurve ist symmetrisch zur x -Achse.

2. Reelle Punkte liegen nur im Intervall $-b < x < +b$.

3. $y=0$ für $x=0$ und $x=b$.

4. Rückt x der Grenze $-b$ zu, so nähert sich y dem Wert ∞ : GG' ist Asymptote.

5. Aus der Polargleichung folgt, daß $r=0$ für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Wir haben in S zwei Kurventangenten: S ist Knotenpunkt.

6. Die breiteste Stelle der Schleife ergibt sich durch Differenzieren von y^2 . Es folgt $x = b/2(\sqrt{5} - 1) \approx \frac{2}{5}b$ und die Schleifenbreite $2y = \sqrt{10\sqrt{5} - 22} \approx \frac{2}{5}b$.

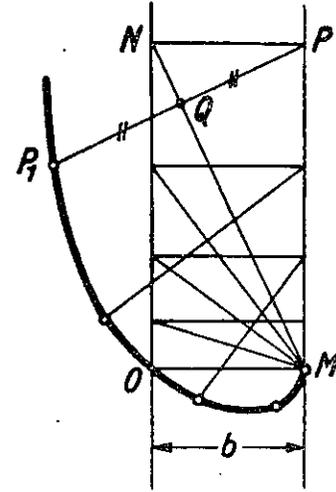


Abb. 28

C. Tangentenkonstruktionen

1. Die Anwendung des Satzes vom augenblicklichen Drehpunkt auf die 9. Erzeugungsweise ergibt folgende einfache Konstruktion: Bei Bewegung des rechten Winkels P_1 bewegt sich Punkt R_1 immer auf L , für ihn liegt also der Drehpunkt auf einer Senkrechten in R_1 auf L , und da QP_1 immer durch O geht, so liegt das Drehzentrum zweitens auf der in O auf QO errichteten Senkrechten. D_1 ist also Drehzentrum, D_1P_1 Normale und das Lot auf ihr in P_1 Kurventangente. Abb. 29 zeigt noch die entsprechende Konstruktion für P_2 .

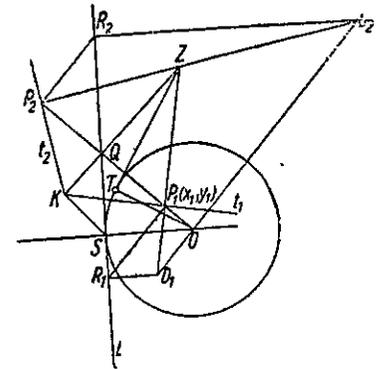


Abb. 29

2. Man ziehe OP_1Q , errichte darauf in Q das Lot und ziehe zu OQ durch S die Parallele, die das Lot in K schneidet (siehe Abb. 29). Dann ist KP_1 die Kurventangente in P_1 . Beweis: Aus der Gleichung der Geraden OP_1

$$y = \frac{-x_1(x-b)}{\sqrt{b^2-x_1^2}} \text{ folgt } y_Q = \frac{bx_1}{\sqrt{b^2-x_1^2}}.$$

Stellt man weiter die Gleichung von $KQ \perp QO$ und $SK \parallel OQ$ auf, so ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunktes K :

$$x_K = \frac{-x_1^2}{b}, \quad y_K = \frac{x_1^2}{b\sqrt{b^2-x_1^2}},$$

woraus als Steigung von KP_1 der Ausdruck

$$\frac{b^2 - x_1^2 - bx_1}{(b+x_1)\sqrt{b^2-x_1^2}}$$

folgt, der mit der Steigung der Kurventangente in P_1 (durch Differenzierung der Kurvengleichung zu finden) übereinstimmt.

Da die Konstruktion der Kurventangente für P_2 dieselben Hilfslinien wie für P_1 benutzt, müssen sich t_1 und t_2 in K schneiden.

3. An dieser Stelle läßt sich ein hübscher Satz bequem anknüpfen. Zwei entsprechende Kurvenpunkte P_1 und P_2 , die auf demselben Strahl durch den Scheitel O liegen, nennt man konjugierte Punkte. Wenn Strahl OP_1P_2 sich um O dreht, beschreibt der Schnittpunkt K der beiden Tangenten (Abb. 29) eine bestimmte Kurve. Es gilt nun der Satz:

Die in je zwei konjugierten Punkten einer Strophoide gezogenen Tangenten schneiden sich in Punkten einer Zissoide, deren Spitze im Doppelpunkt der Strophoide liegt.

Beweis: Setze ich aus der Gleichung für x_K $x_1^2 = -bx_K$ in die

Gleichung $y_K = \frac{x_1^2}{b\sqrt{b^2-x_1^2}}$ ein, so erhalte ich

$$y^2 = \frac{x_1^6}{b^2(b^2+x_1^2)} = -\frac{b^3x^3}{b^2(b^2+bx)} = \frac{-x^3}{b+x}.$$

Das ist aber die Gleichung einer auf der negativen Seite der x -Achse mit der Spitze im Koordinatenanfangspunkt S liegenden Zissoide.

D. Die Strophoide als anallagmatische Kurve

Anallagmatische¹ Kurven sind solche, die durch inverse Abbildung in sich selber transformiert werden können. Daß diese Eigenschaft für die Strophoide besteht, ergibt sich ohne weiteres aus der 5. Erzeugungsweise (Abb. 19). Man ersieht sofort:

$$OP_1 \cdot OP_2 = OS^2 = b^2.$$

Der in Abb. 14 eingezeichnete Kreis O mit dem Radius $OS = b$ ist demnach Grundkreis einer Inversion, die einen Kurvenpunkt P_1 in einen anderen P_2 , also die Kurve in sich selber überführt. Der Doppel-

¹ Vom griech. ἀλλάττω, ich ändere: „sich nicht ändernde Kurven“.

punkt S geht hierbei in sich selber über, während dem Inversionszentrum O der unendlich ferne Punkt der Strophoide entspricht.

Mit der Eigenschaft der Strophoide als einer anallagmatischen Kurve hängt die

17. *Erzeugungsweise*: Die Strophoide als Hüllkurve aufs engste zusammen. Da, wie in C 2 nachgewiesen, in Abb. 29 $KQ \perp P_2P_1$ und, wie früher besprochen, $QP_2 = QP_1$, so muß sich die Normale in P_1 mit der Verlängerung von KQ auf der Normalen P_2D_2 in einem Punkte Z schneiden. Demnach ist $P_2Z = P_1Z$. Ziehen wir weiter von Z an den Inversionskreis die Tangente ZT , so ist

$$\begin{aligned} ZT^2 &= ZO^2 - TO^2 = ZQ^2 + QO^2 - TO^2 \\ &= ZQ^2 + QS^2 + SO^2 - TO^2 \\ &= ZQ^2 + QP_1^2 + SO^2 - TO^2 \quad (QP_1 = QS = QP_2!) \\ &= ZQ^2 + QP_1^2 = ZP_1^2 \\ ZT &= ZP_1. \end{aligned}$$

Beschreibe ich also um Z mit ZP_1 einen Kreis, so berührt dieser die Kurve in P_1 und P_2 und durchsetzt den Inversionskreis rechtwinklig. So ergibt sich die Vorstellung, daß die Strophoide angesehen werden kann als Hüllkurve einer Schar von Kreisen, die den Inversionskreis senkrecht schneiden. Bei der Inversion werden diese Kreise in sich selber und ein innerer Kurvenpunkt P_1 in einen äußeren P_2 übergeführt.

Es erhebt sich nun weiter die Frage, auf was für einer Kurve die Mittelpunkte Z aller dieser Hilfskreise liegen. Um diese Frage zu beantworten, stellen wir die Gleichungen der Normalen P_1Z und der Geraden KZ auf und berechnen die Koordinaten ihres Schnittpunktes Z . Da nach C 2 die Steigung der Kurve

$$\frac{b^2 - x_1^2 - bx_1}{(b+x_1)\sqrt{b^2-x_1^2}}$$

ist, so lautet die Gleichung der Normalen P_1Z :

$$\text{I. } \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{-(b+x_1)\sqrt{b^2-x_1^2}}{b^2-x_1^2-bx_1},$$

und aus den bei C 2 angegebenen Koordinaten von K und Q folgt die Gleichung von KZ :

$$\text{II. } \frac{y - \frac{bx_1}{\sqrt{b^2-x_1^2}}}{x} = \frac{\frac{bx_1}{\sqrt{b^2-x_1^2}} - \frac{x_1^2}{b\sqrt{b^2-x_1^2}}}{\frac{x_1^2}{b}}.$$

Führt man in I weiter nach der Kurvengleichung

$$y_1 = x_1 \sqrt{\frac{b-x_1}{b+x_1}}$$

ein, so lassen sich beide Gleichungen in der Form schreiben:

$$\text{I. } \frac{y\sqrt{b+x_1} - x_1\sqrt{b-x_1}}{x-x_1} = \frac{-(b+x_1)^2\sqrt{b-x_1}}{b^2-x_1^2-bx_1},$$

$$\text{II. } \frac{y\sqrt{b^2-x_1^2}-bx_1}{x} = \frac{b^2-x_1^2}{x_1}.$$

Multipliziert man noch I mit $\sqrt{b-x_1}$ und löst beide Gleichungen nach $y\sqrt{b^2-x_1^2}$ auf, so ergibt die Gleichsetzung der rechten Seiten nach einigen Umformungen

$$x_z = \frac{bx_1^2}{b^2-x_1^2} \quad \text{und} \quad y_z = \frac{2bx_1}{\sqrt{b^2-x_1^2}}.$$

Beseitigt man aus diesen beiden Gleichungen x_1 , so folgt schließlich $y^2 = 4bx$.

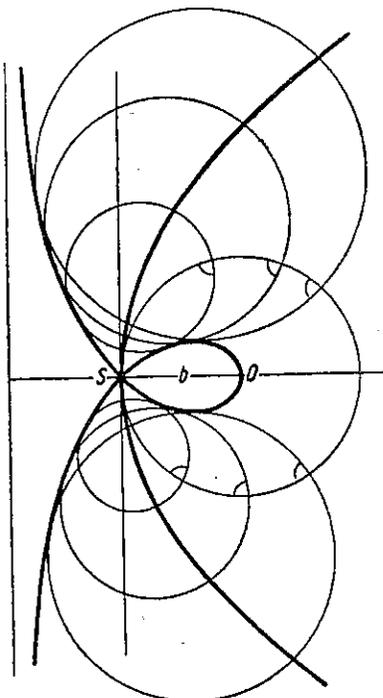


Abb. 30

Die Mittelpunkte der Hüllkreise liegen demnach auf einer Parabel mit S als Scheitel, dem Mittelpunkt des Inversionskreises als Brennpunkt und der x -Achse als Achse.

Wir können also sagen: Die Strophoide ist Hüllkurve aller Kreise, die einen gegebenen Kreis senkrecht durchsetzen und deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen, die den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zum Brennpunkt und seinen Durchmesser zum Halbparameter hat (s. Abb. 30).

E. Quadratur

Wir werten zunächst das allgemeine Integral aus:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi = \frac{b^2}{2} \int \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ \frac{2J}{b^2} &= \int \frac{(2\cos^2 \varphi - 1)^2}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int \frac{4\cos^4 \varphi - 4\cos^2 \varphi + 1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int \left(4\cos^2 \varphi - 4 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi \end{aligned}$$

$$= \sin 2\varphi + 2\varphi - 4\varphi + \operatorname{tg} \varphi$$

$$J = \frac{b^2}{2} [\sin 2\varphi + \operatorname{tg} \varphi - 2\varphi].$$

Nehmen wir als erstes die Schleife, so haben wir dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und $\pi/4$ zu nehmen und danach zu verdoppeln:

$$S_1 = 2 \cdot \frac{b^2}{2} [\sin 2\varphi + \operatorname{tg} \varphi - 2\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} = b^2 \left[1 + 1 - \frac{\pi}{2} \right] = b^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Das zwischen Kurve und Asymptote liegende Flächenstück gewinnen wir auf folgende Weise. Zwischen den Grenzen $\varphi = \pi/4$ und $\varphi = \pi/2$ bleibend ziehen wir (s. Abb. 14) von dem Streifen J_1 , der durch SF_1 und die nach unten verlaufenden Teile von GG_1 und der y -Achse begrenzt wird, das Flächenstück J_2 ab, das zwischen dem nach unten in die Unendlichkeit gehenden Kurvenzweig und der negativen y -Achse liegt. Lautet die Gleichung der Asymptote

$$x = -b \quad \text{oder} \quad r = \frac{-b}{\cos \varphi},$$

so ist

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{b^2}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{b^2}{2} [\operatorname{tg} \varphi]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

und

$$J_2 = \frac{b^2}{2} [\sin 2\varphi + \operatorname{tg} \varphi - 2\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

und demnach ihre Differenz

$$J = J_1 - J_2 = \frac{b^2}{2} [2\varphi - \sin 2\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{b^2}{2} \left[\pi - \frac{\pi}{2} + 1 \right] = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right].$$

Fügen wir hierzu das gleichschenkelig rechtwinklige Dreieck F_1FS , so ist der Inhalt des unter der x -Achseliegenden Teiles der gesuchten Fläche F :

$$\frac{F}{2} = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 1 \right] + \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right)$$

und demnach das gesamte zwischen Kurve und Asymptote liegende Stück der Ebene

$$F = b^2 \left(2 + \frac{\pi}{2} \right).$$

3. Die Trisektrix von Maclaurin

Die Kurve trägt ihren Namen wegen ihrer Verwendung zur Dreiteilung des Winkels sowie zu Ehren des Geometers, der sich zuerst mit ihr beschäftigte (1742).

A. Erzeugungsweisen

1. Um zwei Punkte S und O , die den Abstand $2a$ voneinander haben, drehen sich zwei Strahlen, und zwar der Strahl O dreimal so schnell wie der Strahl S . Ihr Schnittpunkt P beschreibt dann die Trisektrix.

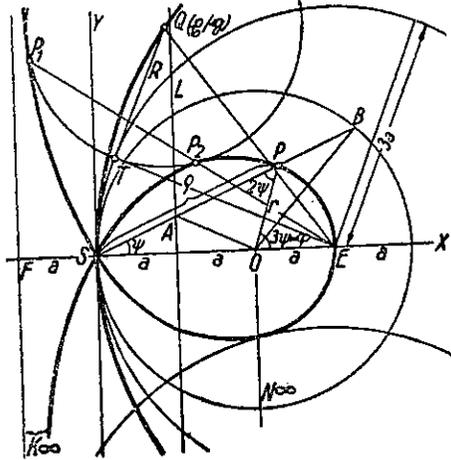


Abb. 31

Führen wir die in Abb. 31 angegebenen Bezeichnungen ein, so ergeben sich folgende Gleichungen:

Nach dem Sinussatz ist im Dreieck SOP :

$$\frac{r}{2a} = \frac{\sin \psi}{\sin 2\psi}, \quad = \frac{\sin \psi}{2\sin \psi \cos \psi},$$

$$r = \frac{a}{\cos \psi} \text{ und, da } 3\psi = \varphi:$$

$$\boxed{r = \frac{a}{\cos \frac{\varphi}{3}}} \quad \text{(1. Polargleichung für } O \text{ als Pol.)}$$

Die Ordinate von P läßt sich sowohl mit ϱ wie mit r ausdrücken:
 $\varrho \sin \psi = r \sin 3\psi$.

Führen wir hierin den eben für r gefundenen Wert ein und berücksichtigen, daß $\sin 3\psi = 3\sin \psi - 4\sin^3 \psi$ ist, so erhalten wir

$$\varrho \sin \psi = \frac{a}{\cos \psi} (3\sin \psi - 4\sin^3 \psi),$$

$$\varrho = \frac{a}{\cos \psi} (3 - 4\sin^2 \psi) = \frac{a}{\cos \psi} (4\cos^2 \psi - 1),$$

$$\boxed{\varrho = 4a \cos \psi - \frac{a}{\cos \psi}} \quad \text{(2. Polargleichung für } S \text{ als Pol.)}$$

Führen wir in diese Gleichung kart. Koordinaten ein, so folgt

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

$$x^2 + y^2 = 4ax - \frac{a(x^2 + y^2)}{x},$$

$$x^3 + xy^2 = 4ax^2 - ax^2 - ay^2,$$

$$\boxed{y = x \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}}}.$$

2. Gegeben $SO = 2a$ mit dem Mittellot L und Kreis O . Ziehe durch S beliebige Strahlen SB , die L in A schneiden, und trage auf jedem Strahl $SP = AB$ ab; dann ist P ein Punkt der Kurve.

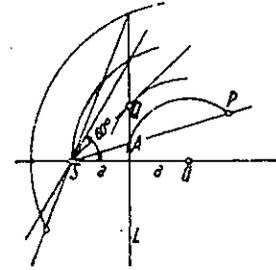


Abb. 32

Begründung ergibt sich aus einer einfachen Betrachtung der Abb. 31. Es ist $\sphericalangle ASO = \sphericalangle AOS = \sphericalangle POB = \sphericalangle PBO = \psi$, mithin $\triangle AOS \cong \triangle PBO$, woraus $AS = PB$ und $SP = AB$.

3. Aus der Kongruenz der Dreiecke SAO und OPB folgt $OA = OP$, sodaß sich (siehe Abb. 32) P auch ohne den Kreis um O mit $2a$ durch einen Kreisbogen ergibt, den man um O mit AO als Radius beschreibt. A und P fallen zusammen in Q , wenn der Strahl durch S unter 45° ansteigt. Ist der Drehungswinkel 60° , so fällt P nach S , wird er noch größer, so kommt P links von L und unterhalb der x -Achse zu liegen; bei 90° liegt P im Unendlichen.

4. $\triangle AOP$ ist gleichschenkelig. Schlage (Abb. 33) ich um O' mit a den Kreis, der SB in C schneidet, so ist OC Höhe im Dreieck AOP , mithin $AC = CP$. Ich kann also mittels L und Kreis O' den Kurvenpunkt P erhalten, indem ich AC um sich selbst bis P verlängere.

5. Ergänzt man Abb. 31 durch den Kreis um O mit a und die Tangente in E (s. Abb. 34) und zieht darauf von P die Tangente PDT

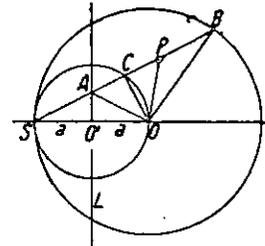


Abb. 33

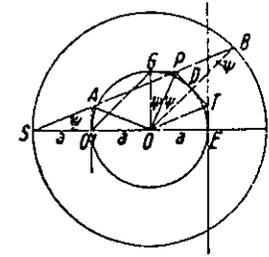


Abb. 34

an den Kreis um O mit a , so ist $\triangle ODT \cong OET$, folglich, da $\sphericalangle POE = 3\psi$, $\sphericalangle DOT = \sphericalangle TOE = \psi$. Mithin sind die Dreiecke POD , TOD und TOE kongruent, also $PD = DT$.

Ist demnach der Kreis um O mit a samt seiner Tangente in E gegeben, so kann man die Kurve erzeugen, wenn man von einem veränderlichen Punkt T dieser Tangente die Kreistangente TD zieht und diese um sich selbst bis P verlängert.

Berechne ich aus III $y_1 = -\frac{py}{x}$

und aus I und III $x_1 = \frac{y^2 + 3px^2}{2x^2}$

und setze diesen Wert in II ein, so erhalte ich:

$$-2py^2x = 2px^3 + p^2y^2 + 3p^2x^2 - 6p^2x^2,$$

$$y^2(p+2x) = x^2(3p-2x),$$

$$y = x \sqrt{\frac{3p-2x}{p+2x}} = x \sqrt{\frac{3 \cdot \frac{p}{2} - x}{\frac{p}{2} + x}}.$$

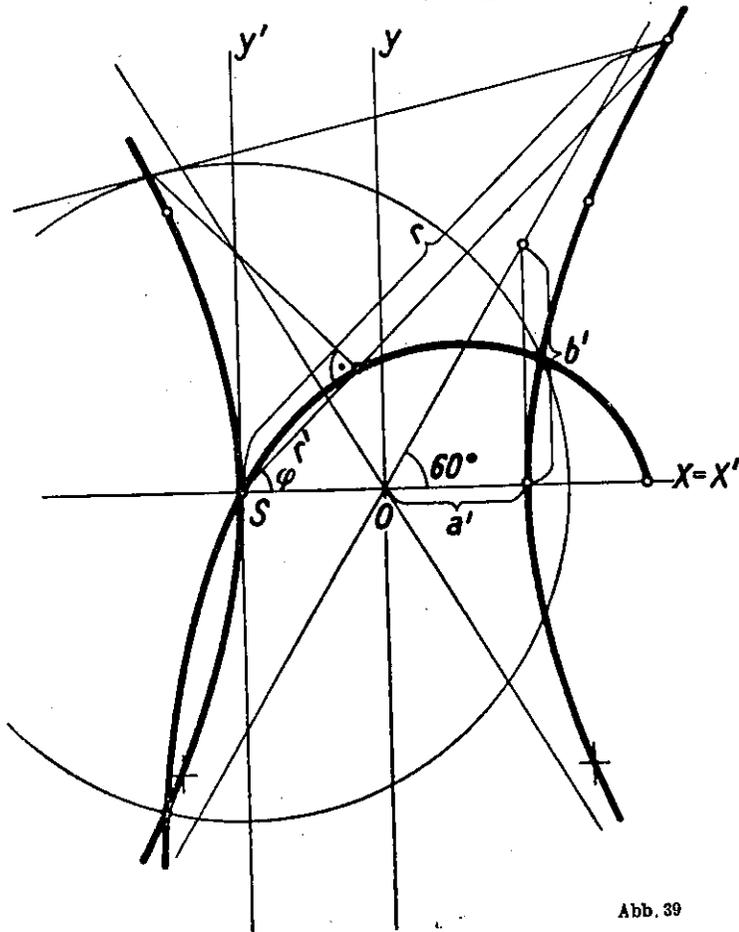


Abb. 39

11. Als Inverse einer Hyperbel mit dem Asymptotenwinkel 120° (Abb. 39). Da $b' = a' \sqrt{3}$, so lautet die Gleichung dieser Hyperbel $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{3a'^2} = 1$ oder $3x^2 - y^2 = 3a'^2$. Verschiebt man die y -Achse in den linken Scheitel S der Hyperbel ($x = x' - a$, $y = y'$), so lautet jetzt deren Gleichung

$$3(x' - a')^2 - y'^2 = 3a'^2$$

$$3x'^2 - 6a'x' - y'^2 = 0.$$

In Polarkoordinaten: $3r^2 \cos^2 \varphi - 6a'r \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = 0$

$$r = \frac{6a' \cos \varphi}{3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = \frac{6a' \cos \varphi}{4 \cos^2 \varphi - 1}.$$

Nehmen wir Punkt S als Zentrum einer Inversion $rr' = K^2$, $r = \frac{K^2}{r'}$, $\varphi = \varphi'$, so erhalten wir:

$$\frac{K^2}{r'} = \frac{6a' \cos \varphi}{4 \cos^2 \varphi - 1}$$

$$r' = \frac{4K^2 \cos \varphi - \frac{6a'}{\cos \varphi}}{6a'}$$

Das ist aber eine Trisektris mit dem Doppelpunkt S und der Konstanten $\frac{K^2}{6a'}$.

B. Die Trisektris als anallagmatische Kurve

1. Da die Strophoide durch Inversion an einem Kreis, der ihren Scheitel zum Mittelpunkt hatte, in sich selber überging, liegt eine gleiche Vermutung für die Trisektris nahe. Wir verschieben, um diese Frage zu prüfen, das Koordinatensystem nach dem Scheitel E (s. Abb. 31), indem wir setzen $y = y'$, $x = x' + 3a$, und erhalten damit als neue Kurvengleichung

$$y' = (x' + 3a) \sqrt{\frac{-x'}{4a + x'}}.$$

Wir bringen nun die Kurve mit einer durch E gehenden Geraden $y' = mx'$ zum Schnitt:

$$mx' = (x' + 3a) \sqrt{\frac{-x'}{4a + x'}},$$

woraus sich ergibt

$$x_1 = -\frac{(+2am^2 + 3a) + am\sqrt{4m^2 + 3}}{m^2 + 1} = \frac{A+B}{m^2 + 1} \text{ (Punkt } P_1),$$

$$x_2 = \frac{A-B}{m^2 + 1} \text{ (Punkt } P_2).$$

Dazu gehören die Ordinaten $y'_1 = mx'_1$ und $y'_2 = mx'_2$.
Dann ist

$$\begin{aligned} EP_1 &= \sqrt{x_1'^2 + m^2 x_1'^2} = x_1' \sqrt{m^2 + 1}, \\ EP_2 &= \sqrt{x_2'^2 + m^2 x_2'^2} = x_2' \sqrt{m^2 + 1}, \\ EP_1 \cdot EP_2 &= \frac{(A+B)(A-B)(m^2+1)}{(m^2+1)^2} = \frac{A^2 - B^2}{m^2 + 1} \\ &= \frac{a^2(4m^4 + 9 + 12m^2) - a^2 m^2(4m^2 + 3)}{m^2 + 1} = 9a^2. \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, daß in der Tat die Trisektrix eine anallagmatische Kurve ist, für die der Inversionskreis durch den Kreis um den Scheitel E mit dem Radius $3a$ dargestellt wird.

2. Wie nun die Strophoide in Verfolg dieser Inversionsbetrachtung sich darstellen ließ als Hüllkurve einer Schar von Kreisen, die den Inversionskreis rechtwinklig schnitten und deren Mittelpunkte auf einer Parabel lagen (entsprechend der Tatsache, daß die Strophoide ebenso wie die Trisektrix nur einen unendlich fernen Punkt besitzt), so liegt ein gleicher Gedanke für die Trisektrix nahe. Wir stellen demnach die Gleichung eines Kreises Q mit dem Radius $QT = R$ auf, der den Inversionskreis rechtwinklig schneidet, und setzen die Koordinaten von Q als einem Parabelpunkt mit ξ ; $\eta = \sqrt{2p\xi}$ an, wobei wir uns vorbehalten, den Halbparameter p zum Schluß derart zu bestimmen, daß sich, wenn möglich, als Hüllkurve unsere Trisektrix ergäbe.

Es ist laut Abb. 31:

$$\begin{aligned} R^2 &= QE^2 - TE^2 = [\eta^2 + (3a - \xi)^2] - (3a)^2, \\ R^2 &= 2p\xi + \xi^2 - 6a\xi. \end{aligned}$$

Demnach lautet die Gleichung des Kreises Q :

$$F(x, y, \xi) \equiv (x - \xi)^2 + (y - \sqrt{2p\xi})^2 = 2p\xi + \xi^2 - 6a\xi.$$

Hier ist ξ als veränderlich zur Erzeugung der Kreisschar zu denken. Wir bilden weiter den partiellen Differentialquotienten nach ξ :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \equiv -2(x - \xi) - 2(y - \sqrt{2p\xi}) \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{\xi}} = 2p + 2\xi - 6a.$$

Hieraus ergibt sich

$$\xi = \frac{2py^2}{(6a - 2x)^2} = \frac{2py^2}{b^2}$$

($6a - 2x$ zur Abkürzung gleich b gesetzt).

Einsetzung dieses Wertes in die F -Gleichung liefert:

$$\left(x - \frac{2py^2}{b^2}\right)^2 + \left(y - \frac{2py}{b}\right)^2 = \frac{4p^2y^2}{b^2} + \frac{4p^2y^4}{b^4} - \frac{12apy^2}{b^2}$$

$$\begin{aligned} (xb^2 - 2py^2)^2 + (yb^2 - 2pyb)^2 &= 4p^2y^2b^2 + 4p^2y^4 - 12apy^2y^2 \\ x^2b^2 - 4xpy^2 + y^2b^2 - 4py^2b + 12apy^2 &= 0. \end{aligned}$$

Wiedereinsetzen von $b = 6a - 2x = 2(3a - x)$:

$$4(3a - x)^2(x^2 + y^2) - 4py^2(3a - x) = 0,$$

$$(3a - x)(x^2 + y^2) - py^2 = 0,$$

$$3ax^2 - x^3 + 3ay^2 - xy^2 - py^2 = 0.$$

Das wäre die Gleichung der Hüllkurve. Sie kann mit der Gleichung der Trisektrix $x^3 + xy^2 - 3ax^2 + ay^2 = 0$ sofort in Übereinstimmung gebracht werden, wenn man setzt:

$$py^2 - 3ay^2 = ay^2,$$

$$py^2 = 4ay^2,$$

$$p = 4a.$$

Die Mittelpunkte unserer Kreisschar sind danach auf einer Parabel anzunehmen, die in S ihren Scheitel und in O ihren Brennpunkt hat. Wir haben damit die

12. Erzeugungsweise: Die Trisektrix als Hüllkurve (siehe Abb. 31). Die Trisektrix ist Hüllkurve aller Kreise, die einen gegebenen Kreis (E mit dem Radius $3a$) rechtwinklig schneiden und deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen, deren Scheitel ein Punkt des Kreises ist, deren Achse durch den Kreismittelpunkt geht und deren Halbparameter $\frac{2}{3}$ des Kreisdurchmessers ist.

C. Auswertung der Kurvengleichungen

Aus der Gleichung

$$y = x \sqrt{\frac{3a - x}{a + x}}$$

folgt:

1. Die Kurve ist symmetrisch zur x -Achse.
2. y ist nur reell für $-a < x < +3a$.
3. Nullstellen: $x = 0$ und $x = 3a$.
4. $y = \infty$ für $x = -a$.
5. Für $x = a$ ist $y = \pm a$, für $x = 2a$ ist $y = \pm \frac{2a}{3} \sqrt{3}$.

Die 1. Polargleichung zeigt:

1. $r = a$ für $\varphi = 0$ (kleinster Wert von r), $r = 2a$ für $\varphi = 180^\circ$.
 $r = \infty$ für $\varphi = 270^\circ$. Im Negativen ergeben sich die gleichen Werte.

2. Für S ist $\varphi = 3\psi = \pm 180^\circ$, also $\psi = \pm 60^\circ$. $\pm 60^\circ$ sind also die Winkel, die die beiden Kurventangenten im Knotenpunkt mit der x -Achse bilden.

Differentiierung der Kurvengleichung

$$y = x \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}}$$

liefert

$$y' = \frac{\sqrt{a+x} \cdot (3a^2 - x^2)}{(a+x)^2 \sqrt{3a-x}} = \frac{3a^2 - x^2}{(a+x) \sqrt{(a+x)(3a-x)}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für } x=2a \text{ ist } y' = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3}, \\ \text{für } x=0 \text{ ist } y' = \pm \sqrt{3}. \\ y' = 0 \text{ für } x = a\sqrt{3}, \\ y = a\sqrt{3} \sqrt{2\sqrt{3}} - 3 \approx 1,2a. \end{array} \right.$$

D. Tangentenkonstruktionen.

1. Die Erzeugungweise 7 liefert den augenblicklichen Drehpunkt D auf eine sehr einfache Weise. Da sich die in A' und O befindenden

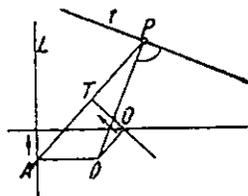


Abb. 40

Punkte des „ T “ in Richtung der eingezeichneten Pfeile bewegen (s. Abb. 40), ergibt sich D einfach, indem man auf L in A' und auf TO in O die Lote errichtet und in D zum Schnitt bringt. DP ist dann Kurvennormale.

2. Eine der eben gegebenen überaus ähnliche Tangentenkonstruktion ist die folgende: Man errichte auf dem Fahrstrahl SP in P die Senkrechte, die die Scheiteltangente in V schneidet, und ziehe durch V eine Parallele zur x -Achse (Abb. 41). Schneidet diese Parallele das Mittellot von SP in N , so ist PN die Kurvennormale.

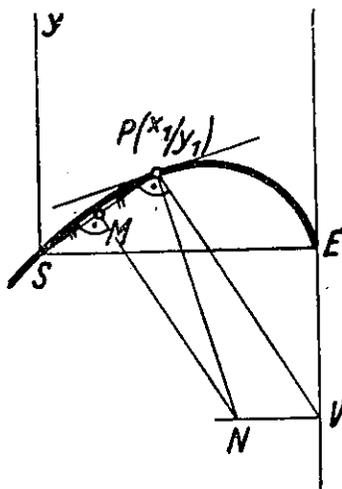


Abb. 41

Beweis: Die Steigung von SP ist $\frac{x_1}{y_1}$, demnach die von PV und MN gleich $-\frac{x_1}{y_1}$. Danach lautet die Gleichung von PV :

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{x_1}{y_1}$. Setzt man in ihr zum Schnitt mit der Scheiteltangente $x=3a$,

so folgt $y_V = y_N = \frac{-3ax + x_1^2 + y_1^2}{y_1}$.

Führt man diesen Wert in die Gleichung

$$MN \equiv \frac{y - \frac{y_1}{2}}{x - \frac{x_1}{2}} = -\frac{x_1}{y_1} \text{ ein, so folgt nach einigen Umformungen}$$

$$x_N = \frac{6ax_1 - x_1^2 - y_1^2}{2x_1}.$$

Sonach ist die Steigung von PN :

$$\frac{y_1 - y_N}{x_1 - x_N} = \frac{y_1 - \frac{-3ax_1 + x_1^2 + y_1^2}{2x_1}}{x_1 - \frac{6ax_1 - x_1^2 - y_1^2}{2x_1}}.$$

Setzt man hierin $y_1 = x_1 \sqrt{\frac{3a-x_1}{a+x_1}}$, so folgt nach einigen Umformungen der Wert

$$\frac{(a+x_1)\sqrt{(a+x_1)(3a-x_1)}}{x_1^2 - 3a^2}.$$

Das ist aber, wie ein Vergleich mit voriger Seite zeigt, der negativ reziproke Wert der Tangentensteigung, womit bewiesen, daß PN Normale ist.

3. Trage $\sphericalangle OPE$ auf der entgegengesetzten Seite an SP in P an (Abb. 42); der freie Schenkel PT stellt dann die Tangente in P dar.

Beweis: Steigung der Tangente ist

$$\frac{3a^2 - x_1^2}{(a+x_1)\sqrt{(a+x_1)(3a-x_1)}}, \text{ die Steigung von } SP: \frac{y_1}{x_1}.$$

Nach der Formel

$$\text{tg } \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \text{ ist dann}$$

$$\text{tg } TPS = \frac{\frac{3a^2 - x_1^2}{(a+x_1)\sqrt{(a+x_1)(3a-x_1)}} - \frac{y_1}{x_1}}{1 + \frac{3a^2 - x_1^2}{(a+x_1)\sqrt{(a+x_1)(3a-x_1)}} \cdot \frac{y_1}{x_1}}.$$

Führt man hierin $y_1 = x_1 \sqrt{\frac{3a-x_1}{a+x_1}}$ ein, so erhält man $\text{tg } TPS = \frac{x_1(a+x_1)\sqrt{3a-x_1}}{(6a^2 + ax_1 - x_1^2)\sqrt{a+x_1}}$.

Andererseits ist die Steigung von $PO: \frac{y_1}{x_1 - 2a}$ und die Steigung von

$$PE: \frac{y_1}{x_1 - 3a}. \text{ Daraus folgt } \text{tg } OPE = \frac{\frac{y_1}{x_1 - 3a} - \frac{y_1}{x_1 - 2a}}{1 + \frac{y_1^2}{(x_1 - 2a)(x_1 - 3a)}}.$$

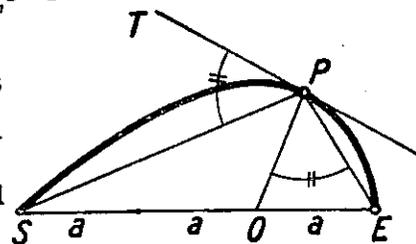


Abb. 42

Setzt man auch hierin wieder $y_1 = x_1 \sqrt{\frac{3a-x_1}{a+x_1}}$, so kommt man schließlich für $\text{tg } OPE$ zu dem gleichen Wert wie oben für $\text{tg } TPS$. Die beiden Winkel sind also gleich.

4. Für den Winkel μ zwischen Leitstrahl und Tangente gilt bei Polarkoordinaten die Gleichung

$$\text{tg } \mu = \frac{r \, d\varphi}{dr}$$

Aus

$$r = \frac{a}{\cos \frac{\varphi}{3}}$$

folgt

$$dr = \frac{a \sin \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{3}}$$

Demnach:

$$\text{tg } \mu = \frac{\frac{a}{\cos \frac{\varphi}{3}} d\varphi}{\frac{a \sin \frac{\varphi}{3} d\varphi}{3 \cos^2 \frac{\varphi}{3}}} = 3 \text{ctg } \frac{\varphi}{3}$$

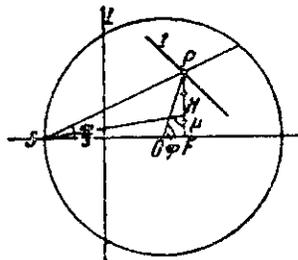


Abb. 43

Da (s. Abb. 43)

$$\text{ctg } \frac{\varphi}{3} = \frac{SF}{PF},$$

so ist, wenn

$$HF = \frac{1}{3} PF, \quad \frac{SF}{HF} = 3 \text{ctg } \frac{\varphi}{3}.$$

Zugleich ist aber auch

$$\text{tg } SHF = \frac{SF}{HF},$$

also $\sphericalangle SHF = \mu$. Man trage also, um die Tangente in P zu erhalten, $\sphericalangle SHF$ an OP in P an.

E. Quadratur

Wir verwenden die 1. Polargleichung und berechnen zunächst die Schleife für $0 < \varphi < \pi$. Nach der Formel $S = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi$ erhalten wir dann für die über der x -Achse liegende Hälfte der Schleife:

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{a^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi.$$

Setzen wir hierin $\frac{\varphi}{3} = x$, $\varphi = 3x$, $d\varphi = 3dx$, so ergibt sich:

$$S_1 = \frac{3a^2}{2} \int_{x=0}^{x=\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{3a^2}{2} \left[\text{tg } x \right]_0^{\pi/3} = \frac{3a^2}{2} \left[\text{tg } \frac{\varphi}{3} \right]_0^\pi = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}.$$

Demnach ist das ganze, von der Schleife umschlossene Flächenstück

$$S = 3a^2 \sqrt{3}.$$

Für das Folgende ziehe man Abb. 31 wieder heran. Die Punkte K_∞ , N_∞ sollen die unendlich fernen Punkte der betr. Linien darstellen. Um nun den Flächeninhalt des zwischen Kurve und Asymptote liegenden Stückes der Ebene zu gewinnen, ziehen wir von dem Flächenstück $K_\infty F O N_\infty$, das zwischen der Asymptote und dem

Fahrstrahl $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ liegt, die Fläche $K_\infty S O N_\infty$ ($\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$) ab.

Die Asymptote hat die Gleichung $x = -3a$ oder $r = \frac{-3a}{\cos \varphi}$.

Demnach ist das Flächenstück $F_\infty F O N_\infty$

$$F_1 = \frac{1}{2} \int_\pi^{3\pi/2} \frac{9a^2}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{9a^2}{2} \left[\text{tg } \varphi \right]_\pi^{3\pi/2}.$$

Für $K_\infty S O N_\infty$ erhalten wir

$$F_2 = \frac{1}{2} \int_\pi^{3\pi/2} \frac{a^2 d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{3}} = \frac{3a^2}{2} \left[\text{tg } \frac{\varphi}{3} \right]_\pi^{3\pi/2}.$$

Also ist das unterhalb der x -Achse liegende, von Kurve und Asymptote begrenzte Stück der Ebene

$$F_1 - F_2 = \left[\frac{9a^2}{2} \text{tg } \varphi - \frac{3a^2}{2} \text{tg } \frac{\varphi}{3} \right]_\pi^{3\pi/2} = \left[\frac{9a^2}{2} \text{tg } \frac{\varphi}{3} \frac{3 - \text{tg}^2 \frac{\varphi}{3}}{1 - 3 \text{tg}^2 \frac{\varphi}{3}} - \frac{3a^2}{2} \text{tg } \frac{\varphi}{3} \right]_\pi^{3\pi/2}$$

(da $\text{tg } 3a = \text{tg } a \frac{3 - \text{tg}^2 a}{1 - 3 \text{tg}^2 a}$)

$$= \frac{3a^2}{2} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} \frac{9 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{3}} \right]_{\pi}^{3\pi/2} = \frac{3a^2}{2} \left[\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} \frac{8}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{3}} \right]_{\pi}^{3\pi/2}$$

$$= 12a^2 \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{3}} \right]_{\pi}^{3\pi/2}$$

Da dieser Bruch für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ den Wert $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, formen wir ihn um:

$$F_1 - F_2 = 12a^2 \left[\frac{\sin \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}}{\cos^2 \frac{\varphi}{3} - 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3}} \right]_{\pi}^{3\pi/2} = 12a^2 \left(0 - \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3} - 3 \sin^2 \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$= \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}.$$

Also ist die Gesamtfläche zwischen Kurve und Asymptote

$$F = 3a^2 \sqrt{3},$$

d. h. ebenso groß wie das von der Schleife umschlossene Ebenenstück.

F. Verwendung zur Dreiteilung des Winkels

Liegt die Kurve gezeichnet vor, so wird der zu drittelnde Winkel in O an der x -Achse angetragen. Ist P der Schnitt seines freien Schenkels mit der Kurve, so ist $\sphericalangle PSX$ das gesuchte Drittel.

4. Das Kartesische Blatt (Folium Cartesii)

Die Kurve ist benannt nach Descartes, der sie in einem Brief zuerst erwähnt (1638). Den ersten Bearbeitern der Kurve, wie z. B. Roberval, entgingen die beiden ins Unendliche verlaufenden Zweige der Kurve, da die Grundlegung der analytischen Geometrie zur damaligen Zeit noch nicht weit genug gediehen war, um diese Erkenntnis zu ermöglichen. Erst 1692 wird von Huygens die richtige Gestalt der Kurve mit ihrer Asymptote angegeben.

A. Erzeugungsweisen

1. Aus der Strophoide. Gemäß der Polargleichung der Strophoide gilt für Punkt P' (s. Abb. 44) der Strophoide — indem ich $OP' = \varrho$ und $\sphericalangle P'SC = \varphi$ setze — die Gleichung $\varrho = \frac{b \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$.

Man wähle nun auf SP' einen Punkt P so, daß SP' in P und A harmonisch geteilt wird. P ist dann ein Punkt des Kartesischen Blattes. Bezeichne ich SP mit r , so besteht die Beziehung

$$\frac{r}{\varrho - r} = \frac{\frac{b}{\cos \varphi}}{\frac{b}{\cos \varphi} - \varrho} = \frac{b}{b - \varrho \cos \varphi},$$

$$r = \frac{b \cos 2\varphi}{\cos \varphi (2 - \cos 2\varphi)}$$

1. Polargleichung

Formen wir um zu

$$r = \frac{b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{\cos \varphi (2 - \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}$$

und setzen, um auf rechtwinklige Koordinaten zu kommen,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$x(x^2 + 3y^2) = b(x^2 - y^2) \quad \text{oder} \quad y = x \sqrt{\frac{b-x}{b+3x}}.$$

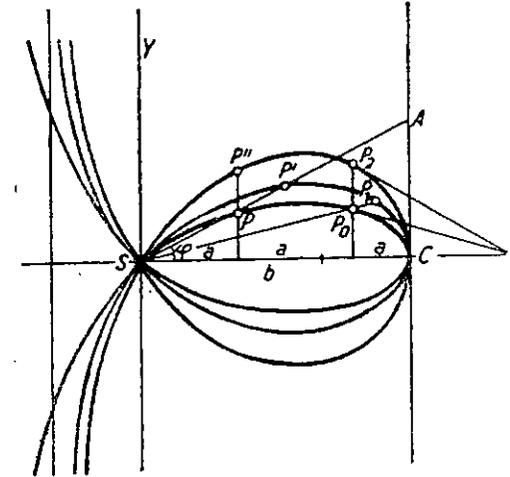


Abb. 44

2. Aus der Trisektrix. Das Kartesische Blatt ist ein affines Bild der Trisektrix bezüglich der x -Achse als Affinitätsachse. Bezeichnen wir das Verkürzungsverhältnis der Ordinaten mit $1:K$, so kämen wir zu der transformierten Gleichung

$$y = K \cdot x \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}}.$$

Nun bilden die Tangenten im Doppelpunkt bei der Trisektrix mit der x -Achse einen Winkel von 60° , bei dem Kartesischen Blatt aber, wie aus der 1. Polargleichung hervorgeht, einen Winkel von 45° .

K müßte demnach so bemessen sein, daß $\lim_{x=y=0} \frac{y}{x} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ wäre.

Schreiben wir die transformierte Gleichung in der Form

$$\frac{y}{x} = K \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}},$$

so erhalten wir für $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = K \sqrt{\frac{3a}{a}} = K \sqrt{3}.$$

Aus $K \sqrt{3} = 1$ folgt $K = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Setzen wir ein, so erhalten wir

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}} = x \sqrt{\frac{3a-x}{3a+3x}}.$$

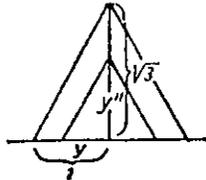


Abb. 45

Das ist aber die Gleichung des Kartesischen Blattes für den Schleifendurchmesser $b=3a$.

Die Konstruktion der Ordinaten y aus den entsprechenden y'' der Trisektris zeigt Abb. 45.

B. Auswertung der Kurvengleichungen. Weitere Gleichungen

1. Aus der zwiefachen Erzeugungsweise folgt, daß das Kartesische Blatt schmäler sowohl als die Strophoide und erst recht als die Trisektris ist. Der Doppelpunkt und der Scheitelpunkt der Schleife bleiben bei beiden Transformationen erhalten.

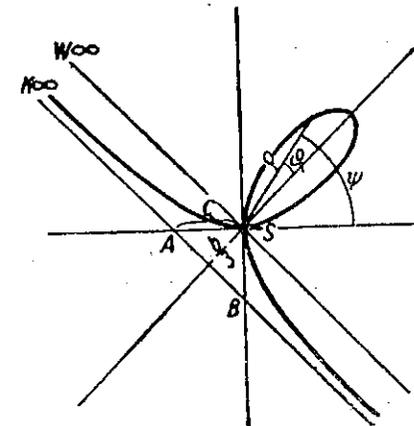


Abb. 46

Aus der Polargleichung geht hervor, daß die Kurventangenten im Doppelpunkt ebenso wie bei der Strophoide mit der x -Achse Winkel von 45° bzw. 135° bilden, also aufeinander senkrecht stehen. Für $x = -\frac{b}{3}$ wird $y = \infty$. Die Asymptote der Trisektris bleibt also bei der Transformation erhalten, während die der Strophoide auf $\frac{1}{3}$ ihres Abstandes an den Doppelpunkt herandrückt.

2. Die Stelle der größten Schleifenbreite ergibt sich durch Differentiation von y^2 ; man erhält

$$x = \frac{b}{3} \sqrt{3} \approx 0,58 b \text{ und } 2y = \frac{2b}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx \frac{2}{5} b.$$

3. In der Regel wird die Gleichung der Kurve auf ein Koordinatensystem bezogen, das gegen das vorige um -45° gedreht ist. Wir setzen demnach in die 1. Polargleichung (s. Abb. 46)

$$r = \rho, \quad \varphi = \psi - 45^\circ, \quad 2\varphi = 2\psi - 90^\circ$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{b \sin 2\psi}{\cos(\psi - 45^\circ) (2 - \sin 2\psi)} \\ &= \frac{2b \sin \psi \cos \psi}{(\cos \psi \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \sin \psi \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}) (2 - \sin 2\psi)} \\ &= \frac{2b \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{2} (\cos \psi + \sin \psi) (1 - \sin \psi \cos \psi)} \\ &= b \sqrt{2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin, um auf die übliche Form zu kommen,

$$b \sqrt{2} = 3c, \quad c = \frac{b}{3} \sqrt{2},$$

so wird

$$\rho = \frac{3c \sin \psi \cos \psi}{\cos^3 \psi + \sin^3 \psi} \quad \text{2. Polargleichung}$$

Führt man hierin wieder kartesische Koordinaten ein, so erhält man nach einigen Umformungen die einfache Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3cxy = 0.$$

C. Tangentenkonstruktionen

1. Mit Benutzung der Strophoide. Es gilt der Satz: Die Tangenten in einem Strophoidenpunkt P' und dem entsprechenden Punkt P des Kartesischen Blattes schneiden sich auf der Scheiteltangente der Schleife (s. Abb. 47).

Beweis: Ziehe ich durch die Strophoide und das Kartesische Blatt zwei beliebige Fahrstrahlen, so erhalten wir (nach der 1. Erzeugungsweise) auf jedem der beiden Strahlen zwei harmonische Punktreihen. Diese beiden projektiven Punktreihen haben aber ein Element (S) entsprechend gemein, sind also perspektiv, d. h. sie sind Schnitte eines Strahlenbündels. Da der durch die Punkte U' und U gehende Strahl aber für alle diese Strahlenbüschel derselbe ist, so müssen die

Mittelpunkte Z aller dieser Strahlenbündel auf der Scheiteltangente liegen, d. h. auf ihr schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Kurven. Rückt Q' auf P' und damit Q auf P , so ergeben sich als Sonderfall die beiden Tangenten in P' und P , die sich also auch auf der Scheiteltangente treffen. Der Beweis läßt sich auch analytisch führen, indem man die beiden Tangentengleichungen aufstellt und die harmonische Teilung berücksichtigt.

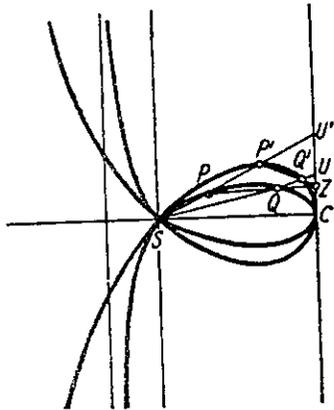


Abb. 47

2. Mit Benutzung der Trisektrix. Aus der Affinität der beiden Kurven folgt, daß sich die Tangente in einem Punkte der Trisektrix und diejenige in dem entsprechenden Punkt des Kartesischen Blattes auf der x -Achse schneiden müssen. Siehe Abb. 44, wo P_0 einen Punkt des Kartesischen Blattes, P_1 den entsprechenden der Strophoide und P_2 den entsprechenden der Trisektrix bezeichnet.

D. Quadratur (s. Abb. 46)

Unter Benutzung der 2. Polargleichung ergibt sich für den Inhalt der Schleife

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \rho^2 d\psi = \frac{9c^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi}{(\cos^3 \psi + \sin^3 \psi)^2}.$$

Man dividiert Zähler und Nenner durch $\cos^6 \psi$:

$$S = \frac{9c^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{d\psi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \psi)^2}$$

und erhält, da

$$\frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = d(\operatorname{tg} \psi):$$

$$S = \frac{9c^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \psi d(\operatorname{tg} \psi)}{(1 + \operatorname{tg}^3 \psi)^2}.$$

Nun setzt man $1 + \operatorname{tg}^3 \psi = z$, also $3 \operatorname{tg}^2 \psi d(\operatorname{tg} \psi) = dz$:

$$S = \frac{9c^2}{2} \int_{(0)}^{(\pi/2)} \frac{dz}{z^2} = \frac{3c^2}{2} \int_{(0)}^{(\pi/2)} z^{-2} dz = \left[\frac{3c^2}{2} \left(-\frac{1}{z} \right) \right]_{(0)}^{(\pi/2)} = \frac{3c^2}{2} \left[-\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^3 \psi} \right]_{(0)}^{\pi/2}$$

$$S = \frac{3c^2}{2}.$$

Der Flächeninhalt der Schleife ist mithin dreimal so groß wie der des Dreiecks AOB , das die Asymptote mit den Achsen einschließt.

Um den Flächeninhalt des zwischen der Kurve und ihrer Asymptote liegenden Stückes der Ebene zu erhalten, stelle ich zunächst die Polargleichung dieser Asymptote auf:

$$\frac{x}{-c} + \frac{y}{-c} = 1,$$

$$\rho = \frac{-c}{\cos \psi + \sin \psi}.$$

Indem ich ψ von $3\pi/4$ bis π laufen lasse, berechne ich den Inhalt F_1 der Fläche $W_\infty SAK_\infty$ (Abb. 46) und ziehe davon die Fläche $F_2 = W_\infty SK_\infty$ ab. Nach der eben behandelten Integrierung bleibt stehen

$$F_1 = \frac{c^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{d\psi}{(\cos \psi + \sin \psi)^2} = \frac{c^2}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \psi)^2 \cos^2 \psi} d\psi.$$

Setze ich hierin

$$1 + \operatorname{tg} \psi = \omega, \quad \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = d\omega,$$

so wird

$$F_1 = \frac{c^2}{2} \int \omega^{-2} d\omega = \frac{c^2}{2} [-\omega^{-1}] = \frac{c^2}{2} \left[-\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \psi} \right]_{3\pi/4}^{\pi}.$$

Nach voriger Seite ist weiter

$$F_2 = \frac{3c^2}{2} \left[-\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^3 \psi} \right]_{3\pi/4}^{\pi}.$$

F_1 sowohl wie F_2 werden jedes für sich unendlich. So muß vor der Vereinigung erst eine Umformung eintreten. Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \psi} - \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^3 \psi} &= \frac{-2 - \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg}^3 \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg}^3 \psi + \operatorname{tg}^4 \psi} \\ &= \frac{-(2 - \operatorname{tg} \psi)(1 + 2 \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg}^2 \psi)}{(1 - \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg}^2 \psi)(1 + 2 \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg}^2 \psi)} = \frac{-(2 - \operatorname{tg} \psi)}{1 - \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg}^2 \psi}. \end{aligned}$$

Wir können nun also schreiben:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{c^2}{2} \left[\frac{2 - \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg}^2 \psi} \right]_{3\pi/4}^{\pi} = \frac{c^2}{2} \left[\frac{2}{1} - \frac{2+1}{1+1+1} \right] = \frac{c^2}{2}.$$

Ebenso groß ist der Inhalt des Dreiecks ASB sowie des Flächenstückes $K_\infty SBK_\infty$, so daß sich für die gesamte zwischen Kurve und Asymptote liegende Fläche der Wert $\frac{3c^2}{2}$ ergibt, d. h.: Die gesamte zwischen Kurve und Asymptote liegende Fläche ist gerade so groß wie die Schleife.

5. Gemeinsame Erzeugungsweisen der bisher behandelten Kurven

A. 1. Die 3. Erzeugungsweise der Zissoide, 1. der Strophoide und 2. der Trisektrix zeigen eine Gemeinsamkeit, die zu folgender Aufgabe führt:

Gegeben ein Kreis O mit einem Radius $SO=b$ und eine auf SO im Abstand a von S senkrecht stehende Gerade L (s. Abb. 48). Man ziehe durch S Fahrstrahlen, die die Gerade in A und den Kreis in B schneiden, und trage auf den Fahrstrahlen $SP=AB$ ab. Was für eine Kurve beschreibt P ?

Es ist: $SB=2b \cos \varphi$, demnach $PB=2b \cos \varphi - r$. Weiter ist $SA=\frac{a}{\cos \varphi}$, und da $SA=PB$, so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{a}{\cos \varphi} = 2b \cos \varphi - r,$$

$$r = 2b \cos \varphi - \frac{a}{\cos \varphi},$$

$$r = \frac{2b \cos^2 \varphi - a}{\cos \varphi}.$$

Setzen wir hierin

$$x = r \cos \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

so folgt

$$x = 2b \frac{x^2}{x^2 + y^2} - a,$$

$$x^3 + xy^2 = 2bx^2 - ax^2 - ay^2,$$

$$y^2(a+x) = 2bx^2 - ax^2 - x^3$$

$$= x^2(2b - a - x),$$

$$y = x \sqrt{\frac{2b - a - x}{a + x}}, \quad y = x \sqrt{\frac{d - x}{a + x}} \quad (d = 2b - a \text{ gesetzt}).$$

In diesen Gleichungen stecken als Sonderfälle die Zissoide für $d=0$, $b=\frac{a}{2}=c$:

$$r = -2c \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi, \quad y = x \sqrt{\frac{-x}{2c + x}},$$

(Kurve auf der negativen Seite der x -Achse!)

die Strophoide für $d=a$, $b=a$:

$$r = \frac{b \cos 2\varphi}{\cos \varphi}, \quad y = x \sqrt{\frac{b-x}{b+x}},$$

die Trisektrix für $d=3a$, $b=2a$:

$$r = 4a \cos \varphi - \frac{a}{\cos \varphi}, \quad y = x \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}}.$$

Es ergibt sich hieraus weiter eine gemeinsame Tangentenkonstruktion. Für den Winkel μ zwischen Tangente und Fahrstrahl gilt die Gleichung $\operatorname{tg} \mu = \frac{r d \varphi}{dr}$.

Wir bilden

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-\cos \varphi \cdot 4b \cos \varphi \sin \varphi + (2b \cos^2 \varphi - a) \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{-2b \cos^2 \varphi \sin \varphi - a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

also

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{(2b \cos^2 \varphi - a) \cos^2 \varphi}{\cos \varphi (-2b \cos^2 \varphi \sin \varphi - a \sin \varphi)} = \operatorname{ctg} \varphi \frac{2b \cos^2 \varphi - a}{-2b \cos^2 \varphi - a}.$$

Wir konstruieren die Tangente auf folgende Weise (s. Abb. 49):

Wir ziehen in B die Kreistangente, die L in T trifft, und machen $BT'=BT$. PT' ist die Kurventangente.

Beweis: Es ist $SB=2b \cos \varphi$,

also

$$AB = 2b \cos \varphi - \frac{a}{\cos \varphi}.$$

Da $\sphericalangle TAB = \sphericalangle TBA = R - \varphi$, so ist $\triangle TAB$ gleichschenkelig. Danach läßt sich TB berechnen:

$$TB = \frac{AB}{2} : \cos(R - \varphi)$$

$$= b \operatorname{ctg} \varphi - \frac{a}{\sin 2\varphi}$$

Das ist also auch die Größe von BT' . Führen wir weiter $\sphericalangle BPT' = x$ ein, so läßt sich $\sphericalangle PT'B$ zu $R - (\varphi + x)$ berechnen. Die Anwendung des Sinussatzes ergibt:

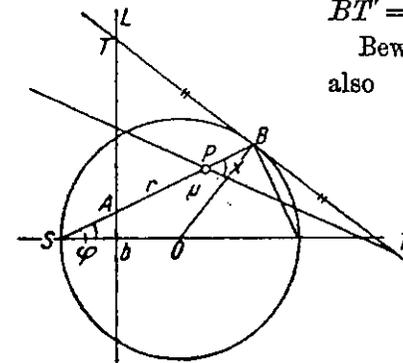


Abb. 49

$$\frac{BT'}{BP} = \frac{\sin x}{\sin [R - (\varphi + x)]}$$

$$\frac{b \operatorname{ctg} \varphi - \frac{a}{\sin 2\varphi}}{\frac{a}{\cos \varphi}} = \frac{\sin x}{\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x} = \frac{1}{\cos \varphi \operatorname{ctg} x - \sin \varphi}$$

Weiterbehandlung dieser Gleichung führt zu

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin \varphi (a + 2b \cos^2 \varphi)}{\cos \varphi (2b \cos^2 \varphi - a)} = \operatorname{tg} \varphi \frac{2b \cos^2 \varphi + a}{2b \cos^2 \varphi - a},$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \varphi \frac{2b \cos^2 \varphi - a}{2b \cos^2 \varphi + a} = -\operatorname{tg} \mu,$$

$$x = 2R - \mu,$$

womit die Richtigkeit der Konstruktion bestätigt ist. Dies gilt also im besonderen für Zissoide, Strophoide und Trisektrix.

2. Setzen wir in der Kurvengleichung

$$y = x \sqrt{\frac{d-x}{a+x}} = x \sqrt{\frac{2b-a-x}{a+x}}$$

$y = 0$, so erhalten wir als Durchmesser der Schleife $x = d = 2b - a$. Somit ist (s. Abb. 48) $UV = a$. Ziehe ich demnach durch U eine Parallele zu L und $VQ \parallel BP$, so ist $VQ = \frac{a}{\cos \varphi} = SA = PB$, also $PBVQ$ ein Rechteck. Daraus ergibt sich folgende Erzeugungsweise:

Gegeben auf einer Geraden 3 aufeinanderfolgende Punkte S, U, V mit den Abständen $SU = d$ und $UV = a$, sowie in U eine Gerade p lotrecht zu SU . Ziehe durch V einen Strahl VQ in beliebiger Richtung, errichte auf QV in Q das Lot und zeichne durch S die Parallele zu QV . Der Schnittpunkt mit dem Lot ist dann ein Punkt unserer Kurve.

3. Als Fußpunktkurven der Parabel. Die Tatsache, daß unsere 3 Kurven sich für bestimmte Punkte der Achse als Fußpunktkurven der Parabel darstellen (s. Erzeugungsweise 9 der Zissoide, 14 der Strophoide und 10 der Trisektrix), läßt vermuten, daß auch die umfassendere Kurve

$$y = x \sqrt{\frac{d-x}{a-x}}$$

als Fußpunktkurve der Parabel erzeugt werden kann. Als festen Punkt S (s. etwa Abb. 38), von dem aus wir die Lote auf die Parabeltangente fallen, wählen wir den um d vom Parabelscheitel in negativer Richtung entfernten Achsenpunkt.

Dann gelten die Gleichungen:

Gleichung der Parabel	I.	$y_1^2 = 2p(x_1 - d)$
„ „ Tangente	II.	$yy_1 = p(x + x_1 - 2d)$
„ des Lotes	III.	$y = -\frac{y_1}{p}x$

Berechnen wir aus III

$$y_1 = -\frac{py}{x}$$

und aus I und III

$$x_1 = \frac{py^2}{2x^2} + d$$

und setzen in II ein, so folgt

$$-\frac{y^2 p}{x} = px + \frac{p^2 y^2}{2x^2} + pd - 2pd,$$

$$y^2 = \frac{-2x^2 + 2dx^2}{2x + p},$$

$$y = x \sqrt{\frac{d-x}{\frac{p}{2} + x}}$$

Unsere Kurve hat den Schleifendurchmesser d . Als schon behandelte Sonderfälle sind enthalten die Zissoide für $d=0, a=2c=\frac{p}{2}$, die Strophoide für $d=a=\frac{p}{2}$ und die Trisektrix für $d=3a=3 \cdot \frac{p}{2}$.

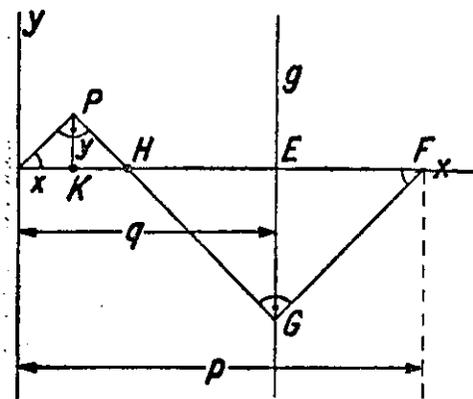


Abb. 50

4. Die Erzeugungsweise 7 der Zissoide und 8 der Trisektrix gliedern sich folgendem allgemeinen Verfahren ein. Im Achsenkreuz mit dem Anfangspunkt S (Abb. 50) nehme man auf der x -Achse einen festen Punkt F mit $SF = p$ und ziehe in der Entfernung $SE = q$ zur y -Achse eine Parallele g . Darauf zeichne man einen rechten Winkel FGH , der seinen Scheitel auf g hat, und ziehe durch S eine Parallele zu GF , die

die Verlängerung von GH in P schneidet. Gebe ich P die Koordinaten $SK = x$, $KP = y$, so ist, da $PK^2 = SK \cdot K \cdot H$, $KH = \frac{y^2}{x}$, also

$HE = q - \frac{y^2}{x} - x$. Weil $EF = p - q$, folgt als mittlere Proportionale

$$EG^2 = HE \cdot EF = \left(q - \frac{y^2 + x^2}{x} \right) (p - q).$$

Andererseits ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke SKP und FEG $\frac{EG}{EF} = \frac{y}{x}$, $EG = \frac{(p-q)y}{x}$, $EG^2 = \frac{(p-q)^2 y^2}{x^2}$. Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für EG^2 ergibt:

$$\begin{aligned} \left(q - \frac{y^2 + x^2}{x} \right) (p - q) &= \frac{(p-q)^2 y^2}{x^2} \\ q x^2 - y^2 x - x^3 &= p y^2 - q y^2 \\ y^2 (p - q + x) &= x^2 (q - x) \\ y &= x \sqrt{\frac{q-x}{p-q+x}}. \end{aligned}$$

Das ist also die Gleichung der durch P erzeugten Kurve, wenn G sich auf q verschiebt und der eine Schenkel des rechten Winkels stets durch F geht.

Sonderfälle: 1. $q = 0$, d. h. lasse S und E zusammenfallen, und

setze $p = 2c$: $y = x \sqrt{\frac{-x}{2c+x}}$. Das ist eine Zissoide, die auf der linken Seite der y -Achse mit der Spitze in $S = E$ liegt.

2. $q = b$, $p = 2b$, d. h. mache $SE = EF$: $y = x \sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$. Das ist eine Strophoide mit dem Doppelpunkt S und dem Scheitel E .

3. $p = 4a$, $q = 3a$, d. h. mache $EF = \frac{1}{3}SE$: $y = x \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}}$. Das ist eine Trisektrix mit dem Doppelpunkt S und dem Scheitel E .

5. Als anallagmatische und Hüllkurven. Da Strophoide und Trisektrix als anallagmatische Kurven erkannt worden waren, liegt der Gedanke nahe, ob nicht aus der für unsere 3 erstbehandelten Kurven geltenden gemeinsamen Gleichung $y = x \sqrt{\frac{d-x}{a+x}}$ sich diese Eigenschaft allgemein ableiten ließe. Die Beweisführung ist genau die gleiche wie die § 3 B gegebene Ableitung für die Trisektrix, nur daß statt $3a$ nun allgemein d zu setzen wäre.

1. So ergibt sich zunächst $EP_1 \cdot EP_2 = d^2$.

Da für die Zissoide $d = 0$ ist, scheidet sie als anallagmatische Kurve aus, und es bleiben nur Strophoide und Trisektrix als anallagmatische Kurven bestehen für Inversionskreise, die den Scheitel zum Mittelpunkt und den Durchmesser der Schleife zum Radius haben.

2. Unsere Kurven als Hüllkurven von Kreisscharen leiten sich in der gleichen Weise ab. Es ergibt sich die Gleichung der Hüllkurve

$$dx^2 - x^3 + dy^2 - xy^2 - py^2 = 0.$$

Der Vergleich mit der Kurvengleichung

$$ay^2 + xy^2 - dx^2 + x^3 = 0$$

liefert

$$p = a + d.$$

Wir können danach sagen: Zissoide, Strophoide und Trisektrix sind Hüllkurven von Kreisscharen, die einen gegebenen Kreis senkrecht schneiden und deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen, die den gegebenen Kreis einschließend berührt und deren Halbparameter $p = a + d$ ist.

Dabei ist im besonderen für die Strophoide $a = d = b$ zu setzen:

$$p = 2b;$$

für die Trisektrix ist $d = 3a$, mithin

$$p = 4a.$$

Für die Zissoide schrumpft, wie wir vorher sahen, der gegebene Kreis als Inversionskreis zu einem Punkt zusammen. Wir erhalten demnach eine Kreisschar durch den Scheitel der Parabel als gemeinsamen Punkt. Der Halbparameter ergibt sich, da $d = 0$ und $a = 2c$ ist, zu

$$p = 2c.$$

Wir sind so auf diesem Wege zu der § 1 A 10 gegebenen Einhüllungskonstruktion der Zissoide gelangt.

B. Die Erzeugungsweisen Nr. 2 der Zissoide, Nr. 13 der Strophoide und Nr. 9 der Trisektrix weisen in ihrer Ähnlichkeit hin auf ein gemeinsames Konstruktionsverfahren, dem sich außerdem noch das Kartesische Blatt einordnet.

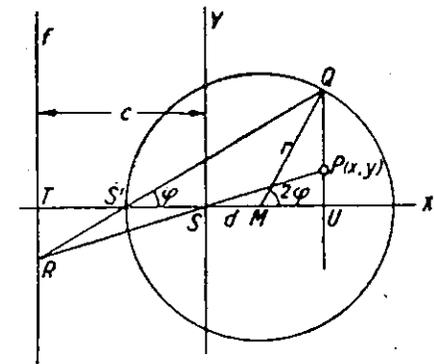


Abb. 51

Es sei gegeben ein Kreis M mit dem Radius r , auf ihm ein Umfangspunkt S' , dazu auf dem durch S' und M gehenden Durchmesser ein Punkt S in der Entfernung $SM = d$, endlich eine feste Gerade f , die im Abstande c von S senkrecht zu $S'M$ verläuft. Gesucht die Gleichung der nach Abb. 51 von P beschriebenen Kurve. $S'M$ sei x -Achse, das Lot in S die y -Achse.

Dann ist für einen beliebigen, durch S' gehenden Strahl $S'Q$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + (r - d) \operatorname{tg} \varphi = (x + r - d) \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Um die Koordinaten von R zu erhalten, setze $x = c$:

$$y_R = (c + r - d) \operatorname{tg} \varphi.$$

Dann ergibt sich, da $\operatorname{tg} PSK = \frac{TR}{TS}$, für SP die Gleichung:

$$y = \frac{(c + r - d)}{c} \operatorname{tg} \varphi \cdot x.$$

Um aus dieser Gleichung $\operatorname{tg} \varphi$ zu beseitigen, bilden wir aus $\triangle S'QU$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r \sin 2\varphi}{x + r - d} = \frac{2r \sin \varphi \cos \varphi}{x + r - d},$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2r \sin \varphi \cos \varphi}{x + r - d},$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{x + r - d}{2r}, \quad \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{r - x + d}{2r},$$

also

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{r + d - x}{r - d + x}}$$

und

$$y = \frac{c + r - d}{c} \cdot x \sqrt{\frac{r + d - x}{r - d + x}},$$

$$y = \left(1 + \frac{r - d}{c}\right) x \sqrt{\frac{r + d - x}{r - d + x}}$$

Sonderfälle:

1. f sei die unendlich ferne Gerade. S liege im Gegenpunkt von S' , also $c = \infty$, $d = -r$:

$$y = x \sqrt{\frac{-x}{2r + x}}$$

Zissoide (s. Abb. 52).

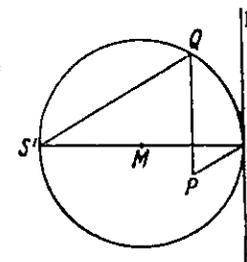


Abb. 52

2. f unendlich fern. S mit M zusammenfallend, also $c = \infty$, $d = 0$:

$$y = x \sqrt{\frac{r - x}{r + x}} \text{ Strophoide (s. Abb. 53).}$$

3. f im Unendlichen S in der Mitte zwischen S' und M , also

$$c = \infty, \quad d = \frac{r}{2}:$$

$$y = x \sqrt{\frac{3 \cdot \frac{r}{2} - x}{\frac{r}{2} + x}}$$

Trisektrix (s. Abb. 54).

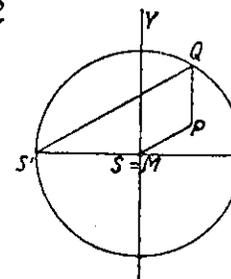


Abb. 53

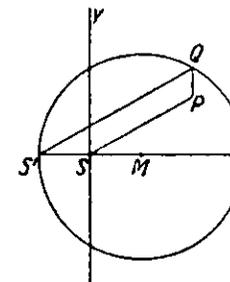


Abb. 54

4. Vergleichen wir unsere Gleichung mit der des Kartesischen Blattes, die wir in der Form schreiben

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3a - x}{a + x}},$$

so müssen, wenn unsere Konstruktion zu einem Kartesischen Blatt führen soll, die Konstanten so gewählt werden, daß

$$\begin{aligned} r + d &= 3a & \frac{c + r - d}{c} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ r - d &= a & r &= 2a \\ & & d &= a \end{aligned} \quad \begin{aligned} & & \frac{c + a}{c} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

woraus

$$c = -\left(\frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\right).$$

Wir müssen also bei unserem Kreis S in der Mitte zwischen S' und M annehmen. f liegt nicht mehr im Unendlichen, vielmehr muß sein Schnittpunkt T mit dem Durchmesser gemäß der Gleichung für c konstruiert werden (s. Abb. 55).

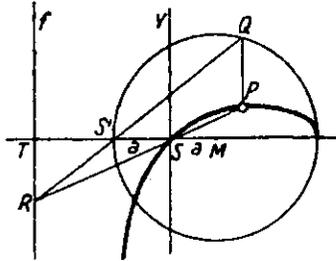


Abb. 55

Daß die unter Nr. 1 des Paragraphen gegebene gemeinsame Konstruktion von Zissoide, Strophoide und Trisektrix in der zuletzt gegebenen, auch rein konstruktiv betrachtet, enthalten ist, veranschaulicht Abb. 56. Statt SB sich im Kreise O um S drehen zu lassen und $BP = SA$ abzutragen, kann $S'Q$ im Kreise M mit dem Lot QU in Umdrehung um S' versetzt werden.

Die Begründung ergibt sich sehr einfach:

Die Punkte S, A, P, B entsprechen den gleichen der Abb. 48. Ziehen wir nun noch durch P das Lot QU sowie durch B die Parallele BQ ,

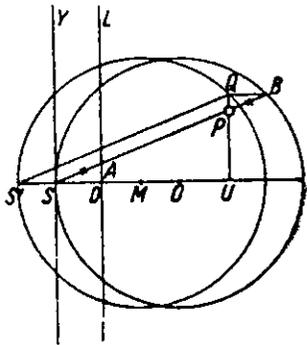


Abb. 56

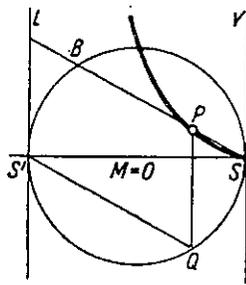


Abb. 57

machen $SS' = SD$ und verbinden S' mit Q , so ist wegen der Kongruenz der Dreiecke SAD und BPQ $QB = SD = S'S$, mithin $S'SBQ$ ein Parallelogramm. Q beschreibt demnach, wenn B den Kreis O durchläuft, einen dazu kongruenten Kreis M , der durch Parallelverschiebung

um $QB = SD$ aus Kreis O entstanden ist. Damit sind wir zu den Abb. 52, 53, 54 gelangt. Wir stellen die drei Sonderfälle noch einmal in Zeichnung zusammen: Abb. 57, 58, 59.

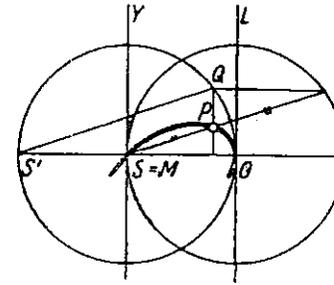


Abb. 58 Strophoide

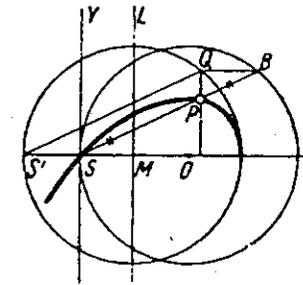


Abb. 59 Trisektrix

ZWEITE GRUPPE

6. Die Serpentine

A. Erzeugungsweise (NEWTON)

Gegeben (s. Abb. 60) ein Kreis M mit dem Radius r und eine Gerade g parallel dem Durchmesser OMO' im Abstand a . Ziehe eine durch O gehende Sehne OA , darauf durch A die Parallele zu g und im Schnitt B von OA mit g das Lot auf g : P ist dann ein Punkt der Serpentine. (Statt des Kreises könnten auch nur die Punkte OO' fest angenommen und von O' auf die um O sich drehende Gerade das Lot gefällt werden, das A ergibt; dann weiter PA und PB .)

Schon aus der Erzeugungsweise geht hervor, daß die Kurve sich innerhalb der Parallelen h und i halten muß, weiter, daß sie durch

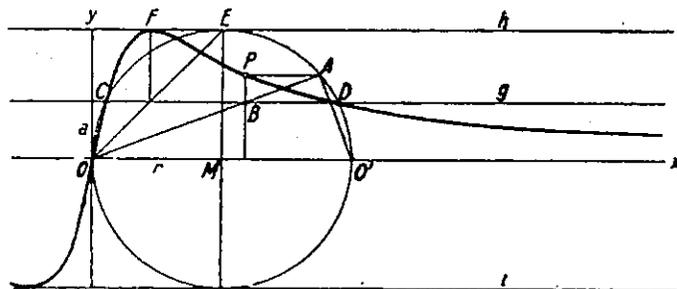


Abb. 60

die Punkte C und D geht, in denen g den Kreis schneidet. OA in der Lage der y -Achse liefert den Nullpunkt als Kurvenpunkt. Der Scheitelpunkt F wird erhalten durch die Stellung OE des beweglichen Strahles. Je mehr OA der x -Achse sich nähert, um so weiter rückt P unter Annäherung an die x -Achse ins Unendliche: die x -Achse ist Asymptote. Zur Aufstellung der Kurvengleichung setzen wir

$$OA \equiv y = mx,$$

$$\text{Kreis } M \equiv (x - r)^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$\underline{x^2 - 2rx + y^2 = 0}$$

und berechnen zunächst die Koordinaten von A :

$$x^2 - 2rx + m^2x^2 = 0,$$

$$x(x - 2r + m^2x) = 0,$$

$$x_A = \frac{2r}{m^2 + 1}.$$

Einsetzen ergibt:

$$y_A = mx_A = \frac{2mr}{m^2 + 1} = y_P.$$

Für B erhalten wir:

$$y = mx,$$

$$\underline{y = a},$$

$$x_B = x_P = \frac{a}{m},$$

woraus

$$m = \frac{a}{x_P}.$$

Setzen wir diesen Wert in y_P ein, so folgt

$$y_P = \frac{\frac{a}{x} \cdot 2r}{\frac{a^2}{x^2} + 1},$$

$$\boxed{y = \frac{2arx}{a^2 + x^2}}.$$

B. Auswertung der Kurvengleichung

1. Setzen wir $-x$ an Stelle von $+x$, so erhalten wir den entgegengesetzt gleichen Wert $-y$, d. h. die Kurve ist zentralsymmetrisch bezüglich des Nullpunktes.

2. Zu negativen x -Werten gehören nur negative y , ebenso zu positiven x nur positive y , d. h. im II. und IV. Quadranten liegen keine Kurvenpunkte.

3. Setzt man sowohl in der Kurvengleichung als auch in der Kreisgleichung $y = a$, so erhält man in beiden Fällen

$$x = r \pm \sqrt{r^2 - a^2},$$

d. h. die Kurve geht durch C und D zusammen mit dem Kreis.

4. Für den höchsten Punkt F ($y = r$) wird $x_F = a$. Bilden wir

$$y' = \frac{(a^2 + x^2)2ar - 2arx \cdot 2x}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{2ar(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2},$$

so erkennen wir, da für $|x| < a$ y' positiv ist, daß die Kurve von O bis F steigt, und da für $|x| > a$ y' negativ, daß sie von F ab nach rechts unaufhörlich fällt.

5. Nullstellen: $y=0$ für $x=0$. Schreiben wir weiter die Kurvengleichung in der Form

$$y = \frac{2ar}{\frac{a^2}{x} + x},$$

so sehen wir, daß für $x = \infty$ ebenfalls $y=0$ ist.

6. Extrema. Wir bilden y'' :

$$y'' = 2ar \frac{(a^2 + x^2)^2(-2x) - (a^2 - x^2) \cdot 2(a^2 + x^2)2x}{(a^2 + x^2)^4},$$

$$y'' = -4ar \frac{(a^2 + x^2)x + (a^2 - x^2)2x}{(a^2 + x^2)^3} = -4arx \frac{3a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^3}.$$

y' wird Null für $x = \pm a$. y'' zeigt, daß wir für $x = +a$ einen Hoch-, für $x = -a$ einen Tiefwert haben.

7. Wendepunkte. y'' wird Null:

$$\text{a) für } x_1 = 0 \quad y_1' = \frac{2ar \cdot a^2}{a^4} = \frac{2r}{a},$$

$$y_1 = 0$$

$$\text{b) für } 3a^2 - x^2 = 0$$

$$x_2 = \pm a\sqrt{3}$$

$$y_2 = \pm \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$y_2' = -\frac{2r}{8a} = -\frac{r}{4a}.$$

C. Tangentenkonstruktion (s. Abb. 61):

Verlängere AP bis zum Schnitt R mit der y -Achse, ziehe RB und bringe RB mit der durch A gelegten Kreistangente in T zum Schnitt. TP ist dann Kurventangente.

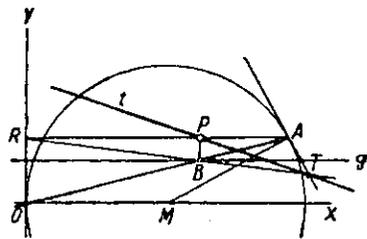


Abb. 61

Beweis: Wir stellen die Gleichungen der 3 Geraden AT , PT und RT auf und bestimmen zu diesem Zweck zunächst die Koordinaten von P , B , A , R : Setze

$$x_p = x_1, \quad y_p = y_1.$$

Dann ist

$$y_A = y_1, \quad x_A = \frac{2r}{m^2 + 1} = \frac{2r}{\frac{a^2}{x_1^2} + 1} = \frac{2rx_1^2}{a^2 + x_1^2},$$

$$x_B = x_1, \quad y_B = a,$$

$$x_R = 0, \quad y_R = y_1.$$

Steigung von MA :

$$m_{MA} = \frac{y_1}{\frac{2rx_1^2}{a^2 + x_1^2} - r}$$

Demnach die Steigung der Kreistangente in A :

$$m_{AT} = \frac{r - \frac{2rx_1^2}{a^2 + x_1^2}}{y_1} = \frac{r - \frac{2rx_1^2}{a^2 + x_1^2}}{\frac{2arx_1}{a^2 + x_1^2}},$$

$$m_{AT} = \frac{a^2r + rx_1^2 - 2rx_1^2}{2arx_1} = \frac{a^2r - rx_1^2}{2arx_1} = \frac{a^2 - x_1^2}{2ax_1}.$$

$$\text{Kurv tangenten in } P \equiv y - y_1 = (x - x_1) \frac{2ar(a^2 - x_1^2)}{(a^2 + x_1^2)^2}. \quad (\text{I})$$

$$\text{Kreistangenten in } A \equiv y - y_1 = \left(x - \frac{2rx_1^2}{a^2 + x_1^2}\right) \frac{a^2 - x_1^2}{2ax_1}. \quad (\text{II})$$

$$RB \equiv y - y_1 = \frac{x(y_1 - a)}{-x_1} = \frac{-x}{x_1} \left(\frac{2arx_1}{a^2 + x_1^2} - a\right). \quad (\text{III})$$

Bringen wir diese 3 Geraden paarweise zum Schnitt, so erhalten wir denselben Schnittpunkt mit der Abszisse

$$x = \frac{2rx_1^2(a^2 - x_1^2)}{4a^2rx_1 - 2a^2x_1^2 - a^4 - x_1^4},$$

womit der Beweis erbracht ist.

Die tiefere Begründung, die zu dieser Konstruktion führt, bringt (um Wiederholung zu vermeiden) § 8.

7. Die Versiera

(Behandelt von Maria Gaetana Agnesi 1748)

A. Erzeugungsweise

Gegeben ein Kreis M mit dem Radius r samt 2 aufeinander senkrechten Durchmesser OC und g (s. Abb. 62). Ziehe den Strahl OAB und in A

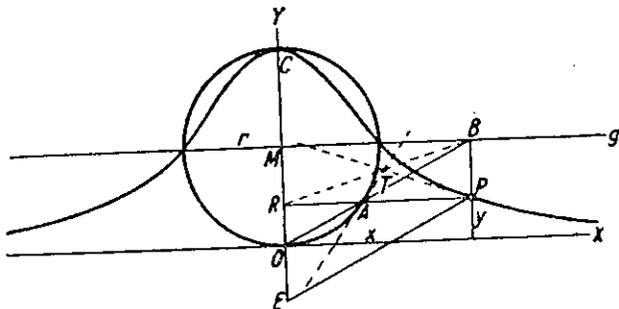


Abb. 62

und B die Parallelen zu den beiden Durchmessern, die sich in P schneiden. Bei Drehung des Strahles um O beschreibt dann P die Versiera.

Kurvengleichung. Als mittlere Proportionale zu OR und RC ist zunächst

$$AR = \sqrt{y(2r-y)},$$

Zieht man weiter $PE \parallel OB$, so ist $RE = RO + OE = RO + BP = RO + MR = r$. Nach dem Strahlensatz folgt

$$RO : RE = AR : PR$$

$$y : r = \sqrt{y(2r-y)} : x.$$

$$yx = r\sqrt{y(2r-y)},$$

$$y^2 x^2 = r^2(2ry - y^2),$$

$$y = \frac{2r^3}{r^2 + x^2}.$$

B. Auswertung der Kurvengleichung

1. Die Kurve ist symmetrisch zur y -Achse.

2. Auch wenn x negativ wird, bleibt y positiv; Die Kurve bleibt oberhalb der x -Achse.

3. Für $x=0$ ist $y=2r$, für $x=\pm r$ ist $y=r$, y wird 0, wenn x gegen Unendlich wächst: die x -Achse ist Asymptote.

4. Schreibt man die Kreisgleichung in der Form $x_K = \sqrt{(2r-y)y}$ und die Kurvengleichung entsprechend $x_V = \sqrt{(2r-y)\frac{r^2}{y}}$, so erkennt man, daß die Kurve innerhalb des erzeugenden Kreises verläuft für $\frac{r^2}{y} < y$, $y > r$, d. h. für alle Punkte oberhalb g — und außerhalb des Kreises für $\frac{r^2}{y} > y$, $y < r$, also für alle Punkte unterhalb von g .

5. Wir bilden die Differentialquotienten

$$y' = \frac{-4r^3 x}{(r^2 + x^2)^2},$$

$$y'' = \frac{(r^2 + x^2)^2(-4r^3) + 4r^3 x \cdot 2(r^2 + x^2) \cdot 2x}{(r^2 + x^2)^4} = \frac{4r^3(3x^2 - r^2)}{(r^2 + x^2)^3}.$$

6. Wir schließen aus dem Differentialquotienten:

a) Für $x=0$ besitzt die Kurve einen Hochwert ($y'=0$, $y'' < 0$).

b) Wendepunkte liegen vor für $y''=0$, d. h. $x_W = \pm \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Dazu gehört $y_W = \frac{3}{2}r$, $y'_W = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

C. Tangentenkonstruktion

Sie erfolgt genau wie bei der Serpentine, worüber im nächsten Paragraphen nähere Begründung zu geben ist.

Man ziehe also in A die Kreistangente und bringe diese mit RB in T zum Schnitt. Dann ist TB die Kurventangente.

Zum Beweis dieses Verfahrens geben wir hier (ebenso wie bei der Serpentine) besonderen analytischen Beweis.

Bezeichnen wir die Koordinaten des Kurvenpunktes P mit

$$x_P = x_1, \quad y_P = y_1,$$

so ist

$$y_A = y_1, \quad x_A = \sqrt{(2r - y_1)y_1} \quad (\text{Kreispunkt!})$$

$$= \sqrt{\left(2r - \frac{2r^3}{r^2 + x_1^2}\right) \frac{2r^3}{r^2 + x_1^2}} = \frac{2r^2 x_1}{r^2 + x_1^2}$$

$$x_B = x_1, \quad y_B = r,$$

$$x_R = 0, \quad y_R = y_1.$$

Steigung von MA :

$$m_{MA} = \frac{-(r - y_1)(r^2 + x_1^2)}{2r^2 x_1},$$

demnach Steigung der Kreistangente

$$m_{AT} = \frac{2r^2 x_1}{\left(r - \frac{2r^3}{r^2 + x_1^2}\right)(r^2 + x_1^2)} = \frac{2r x_1}{x_1^2 - r^2}.$$

Sonach können wir die Gleichungen der drei in Betracht kommenden Geraden aufstellen:

$$\text{Kurventangente: } y - y_1 = -(x - x_1) \frac{4r^3 x_1}{(r^2 + x_1^2)^2}. \quad (\text{I})$$

$$\text{Kreistangente: } y - y_1 = \left(x - \frac{2r^2 x_1}{r^2 + x_1^2}\right) \cdot \frac{2r x_1}{x_1^2 - r^2} \quad (\text{II})$$

$$\text{RB: } y - y_1 = \frac{x \left(\frac{2r^3}{r^2 + x_1^2} - r\right)}{-x_1} = \frac{-xr(r^2 - x_1^2)}{x_1(x_1^2 + r^2)}. \quad (\text{III})$$

Bringen wir diese drei Geraden paarweise zum Schnitt, so ergibt sich stets derselbe Punkt mit der Abszisse

$$x = \frac{4r^2 x_1^3}{x_1^4 + 4r^2 x_1^2 - r^4},$$

womit der Beweis erbracht ist.

D. Anwendungen der Integralrechnung

1. Quadratur. Es ist $F = \int y dx$, also in unserem Falle die halbe (im I. Quadranten liegende) Fläche

$$F = \int_0^{\infty} \frac{2r^3}{r^2 + x^2} dx.$$

Nun setzen wir $x = rt$, also $dx = r dt$, $t = x/r$ und erhalten:

$$F = \int_0^{\infty} \frac{2r^3}{r^2 + x^2} dx = 2r^3 \int_0^{\infty} \frac{r dt}{r^2 + r^2 t^2} = 2r^2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = [2r^2 \arctg t]_0^{\infty},$$

$$F = \left[2r^2 \arctg \frac{x}{r}\right]_0^{\infty} = 2r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = r^2 \pi.$$

Der Inhalt des zu beiden Seiten der y -Achse liegenden, von der x -Achse begrenzten Flächenstückes ist mithin $2r^2 \pi$, also doppelt so groß wie der erzeugende Kreis.

2. Kubatur. Läßt man die Kurve um die x -Achse sich drehen, so ist der Inhalt des entstehenden Körpers

$$V = \pi \int y^2 dx = 4\pi r^6 \int \frac{dx}{(r^2 + x^2)^2}.$$

Setzen wir

$$r^2 + x^2 = z^2, \quad x = \sqrt{z^2 - r^2}, \quad dx = \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - r^2}},$$

so folgt

$$\begin{aligned} V &= 4\pi r^6 \int_r^{\infty} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - r^2} \cdot z^4} = 4\pi r^6 \int_r^{\infty} \frac{dz}{z^3 \sqrt{z^2 - r^2}} \\ &= 4\pi r^6 \left[\frac{\sqrt{z^2 - r^2}}{2r^2 z^2} + \frac{1}{2r^2} \int_r^{\infty} \frac{dz}{z \sqrt{z^2 - r^2}} \right]_r^{\infty} \\ &= 4\pi r^6 \left[\frac{\sqrt{z^2 - r^2}}{2r^2 z^2} + \frac{1}{2r^2} \left(-\frac{1}{r} \arcsin \frac{r}{z}\right) \right]_r^{\infty} \\ &= 4\pi r^6 \left[\sqrt{\frac{1}{4r^4 z^2} - \frac{1}{4r^2 z^4}} - \frac{1}{2r^3} \arcsin \left(\frac{r}{z}\right) \right]_r^{\infty} \\ &= 4\pi r^6 \left[\frac{1}{2r^3} \arcsin 1 \right] = 4\pi r^6 \frac{\pi}{4r^3} = r^3 \pi^2, \end{aligned}$$

also der Gesamtkörper $2r^3\pi^2$. Zum Vergleich berechnen wir nach der Guldinschen Regel den Inhalt des durch Rotation des erzeugenden Kreises entstehenden Kugelringes:

$$V_R = r^2\pi \cdot 2r\pi = 2r^3\pi^2.$$

Beide Körper haben also gleichen Rauminhalt.

3. Schwerpunkt der Fläche zwischen Kurve und x -Achse. Nach der Guldinschen Regel gilt mit Bezug auf die Ergebnisse der Quadratur und Kubatur:

$$U = J \cdot 2y\pi,$$

$$2r^3\pi^2 = 2r^2\pi \cdot 2y\pi,$$

$$y = \frac{r}{2}.$$

8. Gemeinsame Erzeugungsweise von Serpentine und Versiera

Die dargestellten Erzeugungsweisen der Serpentine und Versiera zeigen ein Gemeinsames: Beide Male ein um einen Kreispunkt O sich drehender Strahl, der mit einem festen Kreis in A und einer festen Geraden in B zum Schnitt gebracht wird. Dann wird durch A eine Parallele zu der Geraden und durch B eine Gerade senkrecht zur gegebenen Geraden gezogen, die sich im Kurvenpunkt P schneiden.

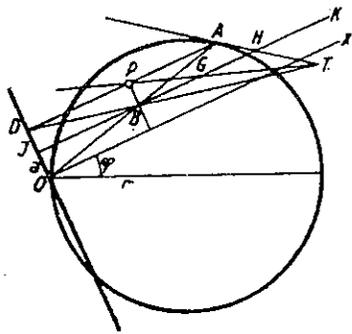


Abb. 63

In allgemeiner Form — wenn wir uns die Lage der festen Geraden JK beliebig denken — erhalten wir das Bild der Abb. 63. Ziehen wir durch O parallel zur gegebenen Geraden (Abstand a) die x -Achse und senkrecht dazu durch O die y -Achse, so bestehen offenbar, wenn wir die Koordinaten des Kurvenpunktes P mit $x; y$ und die des entsprechenden Kreispunktes A mit $\xi; \eta$ bezeichnen, die Beziehungen:

$$\eta = y, \quad \xi = \frac{xy}{a}.$$

Unser Kreis hat die Gleichung

$$(\xi - r \cos \varphi)^2 + (\eta + r \sin \varphi)^2 = r^2$$

oder
$$\xi^2 - 2r\xi \cos \varphi + \eta^2 + 2r\eta \sin \varphi = 0$$

Einsetzen der Kurvenkoordinaten ergibt

$$\frac{x^2 y^2}{a^2} - 2r \frac{xy}{a} \cos \varphi + y^2 + 2ry \sin \varphi = 0,$$

$$x^2 y^2 - 2arxy \cos \varphi + a^2 y^2 + 2a^2 ry \sin \varphi = 0.$$

Diese Gleichung besagt, daß eigentlich auch die x -Achse ($y=0$) zur Kurve gehört. Wir schließen diesen entarteten Teil aus und erhalten:

$$y(x^2 + a^2) = 2arx \cos \varphi - 2a^2 r \sin \varphi,$$

$$y = \frac{2ar(x \cos \varphi - a \sin \varphi)}{a^2 + x^2}.$$

Diese Gleichung muß durch Spezialisierung sowohl die Gleichung der Serpentine als auch die der Versiera ergeben.

Für die Serpentine müssen wir setzen

$$\varphi = 0, \quad a = a$$

und erhalten:

$$y = \frac{2arx}{a^2 + x^2}.$$

Die Versiera ergibt sich für

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad a = r: \quad y = \frac{2r^3}{r^2 + x^2}.$$

Diese Tatsache, daß sich die beiden Kurven aus dem Kreis durch die Transformationsgleichungen $\eta = y$, $\xi = \frac{xy}{a}$ gemeinsam ableiten lassen, gibt die tiefere Begründung für folgende — bei den beiden Kurven schon angewandte — **Tangentenkonstruktion**.

Es ist

$$d\eta = dy$$

$$d\xi = \frac{1}{a}(y dx + x dy),$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{ady}{y dx + x dy} = \frac{a \frac{dy}{dx}}{y + x \frac{dy}{dx}},$$

$$\eta' = \frac{ay'}{y + xy'}; \quad y' = \frac{y}{\frac{a}{y'} - x}.$$

Diese letzte Gleichung für die Neigung y' der Kurventangente gilt es nun in eine passende Zeichnung umzusetzen. Wir ziehen in A die Kreistangente, verlängern AP bis D , bringen DB mit der Kreistangente in T zum Schnitt und ziehen TP . TP ist dann Kurventangente.

Zunächst stellen wir fest, daß $\eta' = -\text{tg } AHG$ und $y' = -\text{tg } PGB$.

Nun besteht die Beziehung:

$$\frac{DP}{DA} = \frac{BG}{BH}.$$

Es ist aber $DP = x$, $DA = r$ und $BH = r - x + \frac{y-a}{-y'}$. BG nenne ich z :

$$\frac{x}{r} = \frac{z}{r - x + \frac{y-a}{-y'}}.$$

Setze $r = \frac{xy}{a}$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{xy}{a}} &= \frac{a}{y} = \frac{z}{\frac{xy}{a} - x + \frac{y-a}{-y'}} = \frac{-ay'z}{-xy\eta' + ax\eta' + (y-a)a} \\ &= \frac{-ay'z}{-(y-a)x\eta' + (y-a)a} = \frac{-ay'z}{(y-a)a - xy'} \\ z &= \frac{(y-a)(a - xy')}{-y\eta'}, \end{aligned}$$

also

$$y' = -\frac{PB}{BG} = -\frac{(y-a)}{z} = \frac{y\eta'}{a - xy'} = \frac{y}{\frac{a}{\eta'} - x}.$$

Damit ist die Richtigkeit der Konstruktion bestätigt.

9. Die Kappa-Kurve

(Gutschovsische Kurve)

Die Kurve ist benannt nach dem griechischen Buchstaben κ , der in seiner Form der Gestalt der Kurve ähnelt.

A. Erzeugungsweisen

1. (Joh. Bernoulli) (Abb. 64): Nimm auf dem Umfang eines Kreises M mit dem Radius a Bogen OK gleich Bogen KL , ziehe OL und durch K die Parallele zu OM , so ergibt sich der Kurvenpunkt P .

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPF und MEK folgt:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

$$\boxed{x^2 = \frac{y^4}{a^2 - y^2}}.$$

Zieht man $PN \parallel KM$, so ist auch $PN = a$, und es folgt sofort die Polargleichung

$$\text{tg } \varphi = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{r},$$

$$\boxed{r = \pm a \text{ ctg } \varphi}.$$

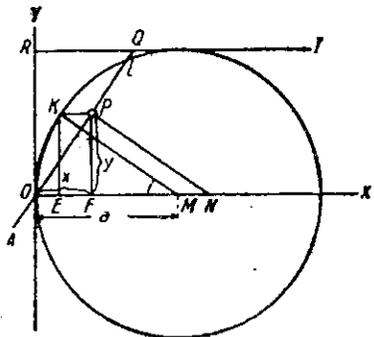


Abb. 64

Da $\sphericalangle OPN = R$ und $PN = a$ ist, läßt sich sofort folgende Vorschrift geben:

2. (Newton): Bewegt sich ein rechter Winkel APN so, daß der eine (unbegrenzte) Schenkel immer durch den Punkt O einer festen Geraden OX geht, während der Endpunkt N des zweiten Schenkels von der Länge $PN = a$ auf OX gleitet, so beschreibt P unsere Kurve.

3. Da OP Tangente an den mit konstantem Radius a um N geschlagenen Kreis ist, kann ich die Newtonsche Definition auch in folgender Form aussprechen:

Die Kappa-Kurve ist der geometrische Ort für die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkte einer festen Geraden an die unendlich vielen Kreise von gegebenem Radius, die ihren Mittelpunkt auf dieser Geraden haben, ziehen kann.

4. Baut man auf dem eben verwandten Newtonschen Winkel OPN ein Parallelogramm auf, indem man (Abb. 65)

$OQ \parallel PN$ und $QP \parallel OX$ zieht, so bewegt sich, während P die Kurve beschreibt, Q auf einem Kreis um O mit a , und ich kann als eleganteste

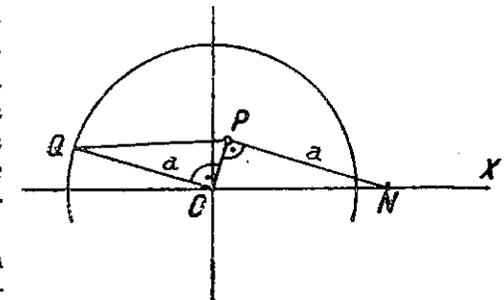


Abb. 65

und einfachste Erzeugung der Kurve mittels eines rechten Winkels folgende aufstellen: Um den Punkt O einer Geraden OX drehe sich ein rechter Winkel mit dem Scheitel in O und einem Schenkel von konstanter Länge $OQ = a$. Zieht man dann durch Q eine Parallele zur x -Achse, die den anderen Schenkel in P trifft, so beschreibt P bei Drehung des Winkels eine Kappa-Kurve.

Verlängert man noch in Abb. 64 OL bis Q , so ist, da $OR = PN = a$, $\sphericalangle QRO = \sphericalangle OPN = 90^\circ$ und $\sphericalangle RQO = \sphericalangle PON$, $\triangle QRO \cong \triangle OPN$. Mithin ist $OP = RQ$. Ich kann also auch sagen:

5. (Barrow): Gegeben zwei senkrecht aufeinander stehende Gerade OR und RT , wobei $OR = a$ bestimmt ist. Durch O ziehe man eine Transversale OQ , auf der $OP = RQ$ abgetragen werde. Dann beschreibt P unsere Kurve (s. Abb. 64 und 66).

Auch aus dieser, wie aus der vorigen Erzeugungsweise, sind die Kurvengleichungen leicht abzuleiten.

B. Auswertung der Kurvengleichungen

1. Die Kurve ist symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen.
2. x ist nur reell für $|y| \leq a$.
3. $x = \infty$ für $y = \pm a$. Die Geraden $y = \pm x$ sind Asymptoten.

C. Tangentenkonstruktionen

1. Legt man die kinematische Erzeugungsweise 2 zugrunde, so ergibt sich (Abb. 66), da N auf OX gleitet und der andere Schenkel

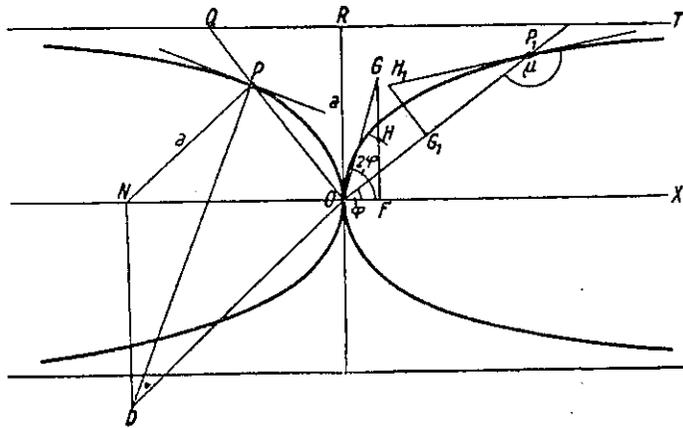


Abb. 66

sich durch O durchschiebt, ohne weiteres der augenblickliche Drehpunkt D , wenn man in N auf ON und in O auf OP die Lote errichtet. DP ist Normale.

2. Für den Winkel μ , den der Fahrstrahl OP_1 mit der Tangente in P_1 bildet, gilt die Gleichung $\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\varphi}{dr}$. Nun ist nach der Polargleichung unserer Kurve

$$dr = -\frac{a}{\sin^2 \varphi} d\varphi,$$

also

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\sin^2 \varphi}{a}$$

und

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{a \operatorname{ctg} \varphi \sin^2 \varphi}{a} = -\cos \varphi \sin \varphi = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Wir nehmen danach auf dem freien Schenkel des Winkels 2φ einen beliebigen Punkt G , fällen $GF \perp OX$ und halbieren GF in H . Dann ist $\frac{GF}{OG} = \sin 2\varphi$, demnach $\frac{GH}{OG} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$. Nun tragen wir auf dem Fahrstrahl $P_1 G_1 = OG$ und senkrecht dazu $G_1 H_1 = GH$ ab. Dann ist $\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{tg} H_1 P_1 G_1 = -\frac{H_1 G_1}{G_1 P_1} = -\frac{GH}{OG} = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi$, also $H_1 P_1$ Tangente.

3. de Sluse (17. Jahrh.) hat — s. Abb. 67, worin TP Tangente ist — die Beziehung aufgestellt:

$$\overline{TN} \cdot \overline{MN} = \overline{ON}^2.$$

Sie läßt sich folgendermaßen begründen: Differentiation der Kurvengleichung ergibt

$$2x dx = \frac{(a^2 - y^2) 4y^2 + y^4 \cdot 2y dy}{(a^2 - y^2)^2},$$

woraus

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 (2a^2 - y^2)}{x(a^2 - y^2)^2}.$$

Nun ist in $\triangle OPN$

$$MN = \frac{y^2}{x}$$

und

$$ON = x + \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

und unter Berücksichtigung der Kurvengleichung

$$= \frac{y^4}{a^2 - y^2} + y^2 = \frac{a^2 y^2}{x(a^2 - y^2)}.$$

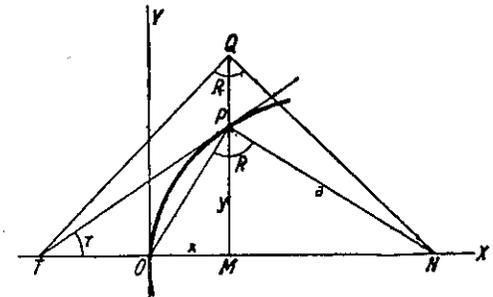


Abb. 67

Weiter folgt

$$TN = y \cdot \operatorname{ctg} \tau + MN = y \frac{dx}{dy} + MN = \frac{y^4(2a^2 - y^2)}{x(a^2 - y^2)} + \frac{y^2}{x}$$

$$= \frac{2a^2 y^4 - y^6 + a^4 y^2 - 2a^2 y^4 + y^6}{x(a^2 - y^2)^2} = \frac{a^4 y^2}{x(a^2 - y^2)^2},$$

demnach $\overline{TN} \cdot \overline{MN} = \frac{a^4 y^4}{x(a^2 - y^2)^2} = \overline{ON}^2.$

Man erhält daher Punkt T , wenn man um N mit ON einen Kreis beschreibt, der die Verlängerung von MP in Q schneidet, und auf QN das Lot QT errichtet.

D. Quadratur

Der Inhalt des zwischen der positiven y -Achse, der Geraden RT (Abb. 64) und dem im I. Quadranten liegenden Kurvenzweig ist

$$F = \int_0^a x dy = \int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy = \left[-\frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a} \right]_0^a$$

$$= \frac{a}{2} \arcsin 1 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Demnach ist die Gesamtfläche zwischen der Kurve und ihren beiden Asymptoten gleich $4 \cdot \frac{a^2 \pi}{4} = a^2 \pi$, d. h. gleich dem Inhalt des erzeugenden Kreises.

10. Gemeinsame Erzeugungsweise von Strophoide und Kappa-Kurve

Die 9. (11.) Erzeugungsweise der Strophoide bzw. die 2. (3.) der Kappa-Kurve lassen diese Linien als *Sonderfälle folgender allgemeineren Kurvenschar* erscheinen:

Man betrachte die Kurve, die durch den Scheitel P eines rechten Winkels beschrieben wird, während der andere Endpunkt R des einen Schenkels $PR = a$ auf einer Geraden G gleitet und der zweite Schenkel stets durch den von G um b entfernten festen Punkt O läuft.

Statt dieser Definition können wir auch die folgende setzen: Verschieben wir einen Kreis vom Radius a mit seinem Mittelpunkt auf einer Geraden G und ziehen von dem um b von G entfernt liegenden festen Punkt O aus fortgesetzt die Tangenten an den beweglichen Kreis, so beschreibt der wandernde Berührungspunkt die in Rede stehende Kurve.

Die Abb. 68 und 69 zeigen in zwei verschiedenen Erscheinungsformen ($a < b$, $a > b$) unsere Kurve. Läßt man, von Abb. 68 ausgehend, O immer näher an G heranrücken, so ergibt sich (zwischen Abb. 68 und 69 liegend) für $a = b$ die Strophoide und, wenn schließlich $b = 0$, die Kappa-Kurve.

Die Kurvengleichung leitet sich (s. Abb. 70) folgendermaßen ab:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{b - x}.$$

Nun ist aber auch

$$x = a \sin \beta, \quad \sin \beta = \frac{x}{a},$$

demnach

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{y}{b - x},$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{y}{b - x},$$

$$\boxed{y = \frac{x(b - x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}}$$

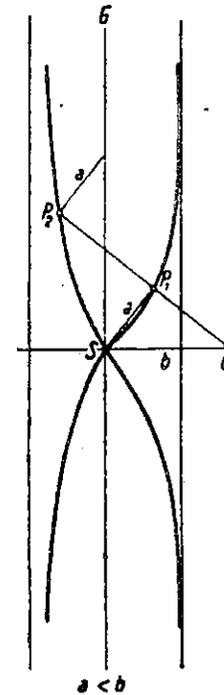


Abb. 68

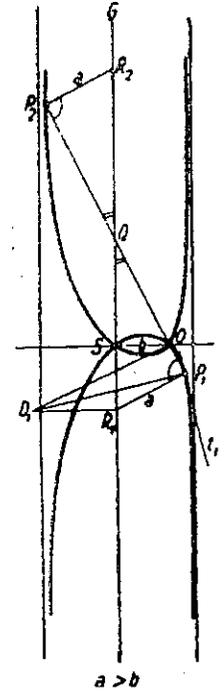


Abb. 69

Für $a = b$:

$$y = x \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} \text{ (Strophoide).}$$

Für $b = 0$: $y = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}$

(Kappa-Kurve, gegen die in § 9 dargestellte Lage um 90° gedreht).

$y = r \sin \varphi$ und $x = r \cos \varphi$ führen die kartesische in die Polargleichung über:

$$r = b \cos \varphi \pm \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi}$$

(Für S als Pol).

Sonderfälle: $a = b$: $r = \frac{b \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ (Strophoide),

$b = 0$: $r = \pm a \operatorname{tg} \varphi$ (Kappa-Kurve).

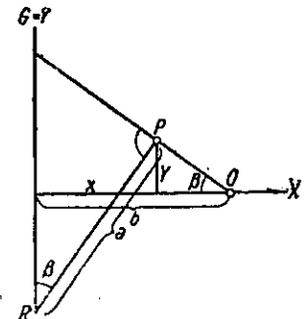


Abb. 70

Auswertung der Kurvengleichung

1. Die Kurve ist symmetrisch zur x -Achse.
2. Daß auf allen durch O gehenden Strahlen (s. Abb. 69) die Kurve gleiche Abschnitte $P_1Q = QP_2$ herauschneidet, ist zwar analytisch leicht zu beweisen, ergibt sich aber am einfachsten aus der Kongruenz der Dreiecke R_1P_1Q und R_2P_2Q . Bei der Strophoide im besonderen ist $QP_1 = QP_2 = QS$.
3. Die Kurve hat reelle Punkte nur für $|x| < a$.
4. $y = \infty$ für $x = \pm a$. Die Geraden $x = \pm a$ sind Asymptoten.
5. $y = 0$ für $x = 0$ und $x = b$. Im Falle $a < b$ ist O ein singulärer Punkt der Kurve.
6. Der Differentialquotient

$$y' = \frac{(a^2 - x^2)(b - 2x) + x^2(b - x)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

zeigt für die Doppelpunkte S und O die Steigungen;

$$x = 0: y' = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^6}} = \pm \frac{b}{a}$$

(folgt auch leicht aus der Polargleichung für $r = 0$),

$$x = b \quad y' = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Die Anwendung des Satzes vom augenblicklichen Drehpunkt ergibt folgende einfache Tangentenkonstruktion (s. die gleiche bei Strophoide und Kappa-Kurve): Bei Bewegung des rechten Winkels P_1 (s. Abb. 69) bewegt sich Punkt R_1 immer auf G , für ihn liegt also der Drehpunkt auf einer Senkrechten in R_1 auf G , und da QP_1 immer durch O geht, so liegt das Drehzentrum zweitens auf der in O auf QO errichteten Senkrechten. D_1 ist also Drehpunkt, D_1P_1 Normale und das Lot auf D_1P_1 in P_1 Kurventangente.

DRITTE GRUPPE

11. Die Lemniskate

Im besonderen heißt diese Kurve die „Lemniskate von Jak. Bernoulli“, auch „schlichte Lemniskate“ oder „Schleifenlinie“, vom griechischen λεμνίσκος, Bändchen, Schleife.

A. Erzeugungsweisen

1. Gegeben sei eine Strecke $F_1F_2 = 2c$. Dann ist die Lemniskate der Ort der Punkte P der Ebene, für die $PF_1 \cdot PF_2 = c^2$ ist.

In bipolaren Koordinaten lautet demnach die Kurvengleichung

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = c^2$$

Führen wir kartesische Koordinaten ein, so ergibt sich aus $\rho_1 = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$ und $\rho_2 = \sqrt{y^2 + (c - x)^2}$ nach einigen Umformungen leicht und mit Einsetzung von $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= 2c^2(x^2 - y^2) \\ r^2 &= 2c^2 \cos 2\varphi \end{aligned}$$

In Parameterdarstellung lassen sich diese Gleichungen auch schreiben:

$$x = c \sqrt{t + t^{-2}}$$

$$y = c \sqrt{t - t^{-2}}$$

Aus dieser 1. Definition der Kurve ergibt sich folgende einfache Konstruktion. Schlage über OF_2 als Durchmesser einen Kreis (s. Abb. 72) und um F_2 einen weiteren Kreis mit dem beliebigen Radius ρ_2 , der den festen Kreis in T

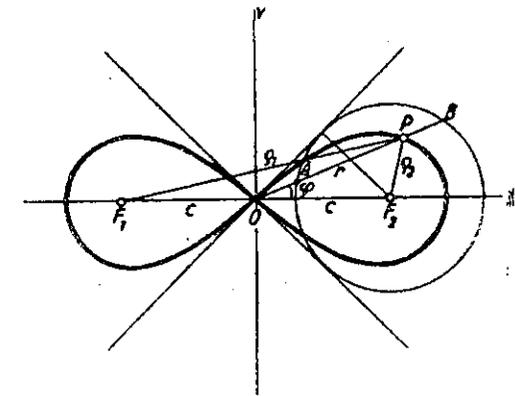


Abb. 71

schneidet, und ziehe die Gerade F_2T , deren Verlängerung die y -Achse in R trifft. Beschreibt man dann mit F_2R um F_1 einen Kreis, der Kreis F_2 in P schneidet, so ist P ein Punkt der Lemniskate. Denn es ist in dem rechtwinkligen Dreieck ORF_2

$$F_2R \cdot F_2T = \varrho_1 \cdot \varrho_2 = OF_2^2 = c^2.$$

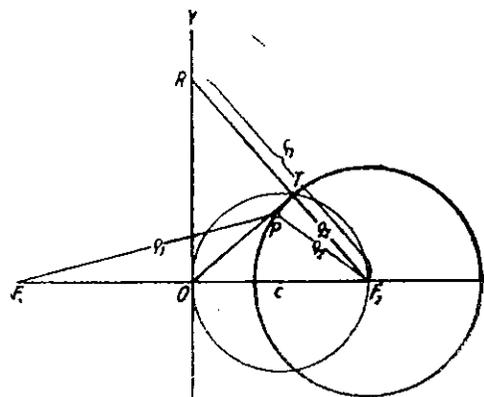


Abb. 72

Die beiden Kreise F_1 und F_2 ergeben den äußersten, auf der x -Achse gelegenen Kurvenpunkt, wenn

$$\varrho_1 = 2c + \varrho_2$$

oder, da $\varrho_2 = \frac{c^2}{\varrho_1}$, wenn

$$c^2 = (2c + \varrho_2) \varrho_2, \text{ woraus}$$

$$\varrho_2 = c(\sqrt{2}-1).$$

Der halbe große Durchmesser der Kurve ist demnach $c\sqrt{2}$.

2. Gegeben ein Kreis mit dem Mittelpunkt O (s. Abb. 73) und dem Radius c , dazu ein Durchmesser F_1F_2 und 2 feste Punkte A_1 und A_2 auf seiner Verlängerung im gleichen Abstand $OA_1 = OA_2 = c\sqrt{2}$. Man ziehe durch A_2 oder A_1 einen beliebigen Strahl, der den Kreis in M und N schneidet, und beschreibe um F_2 mit A_2M und um F_1 mit A_2N Kreise, die sich in P schneiden. Dreht sich der Strahl um A_2 , so beschreibt P eine Lemniskate. Nach dem Begriff der Kreispotenz ist nämlich $A_2M \cdot A_2N = \varrho_1 \cdot \varrho_2 = c^2$.

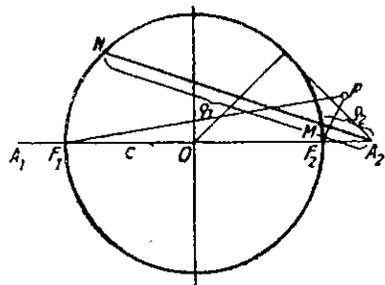


Abb. 73

3. Beschreibt man um F_2 mit $\frac{c}{2}\sqrt{2}$ den Kreis (s. Abb. 71), so ist dessen Gleichung $(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}$ oder in Polarkoordinaten

$$r' = c \cos \varphi \pm \sqrt{-\frac{c^2}{2} + c^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= c \cos \varphi \pm \frac{c}{2} \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Es ist demnach

$$Ot = r'_1 = c \cos \varphi - \frac{c}{2} \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi},$$

$$OB = r'_2 = c \cos \varphi + \frac{c}{2} \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi},$$

mithin

$$BP = OB - OP = r'_2 - r = c \cos \varphi + \frac{c}{2} \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi} - c \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi},$$

$$= c \cos \varphi - \frac{c}{2} \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi},$$

d. h. $BP = OA$.

Da $OF_2 = c$ und der Kreisradius $\frac{c}{2}\sqrt{2}$ ist, ergibt sich folgende Konstruktion:

Gegeben ein Kreis (F_2) und ein Punkt O , von dem aus sich zwei rechtwinklig kreuzende Tangenten ziehen lassen. Man trägt dann auf einem durch O gehenden Strahl, der den Kreis in A und B schneidet, $OP = PB$ ab. Bei der Bewegung des Strahles beschreibt dann P eine Lemniskate, deren Mittelpunkt O und deren einer Brennpunkt der Kreismittelpunkt ist.

4. Erzeugung durch einen Gelenkviereckzirkel. Von vier in A, B, C, D gelenkig miteinander verbundenen Stäben $AC = BD = 2c$ (s. Abb. 74) und $AB = CD = c\sqrt{2}$ werden die Punkte A und C festgehalten, sodaß sich also B und D auf Kreisen um A bzw. C bewegen; dann beschreibt der Mittelpunkt P von BD eine Lemniskate.

Beweis: Es besteht für eine Mittellinie im Dreieck die Gleichung

$$2t_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}.$$

Danach ist

$$2PC^2 = DC^2 + BC^2 - \frac{1}{2}DB^2,$$

$$= 2c^2 + BC^2 - \frac{4c^2}{2},$$

$$2PC^2 = BC^2.$$

Ebenso ergibt sich in $\triangle ABD$:

$$2AP^2 = AD^2,$$

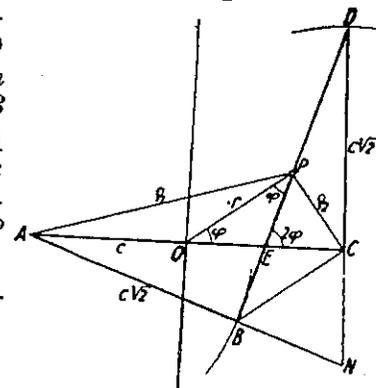


Abb. 74

$$\text{folglich } 4 PC^2 \cdot AP^2 = BC^2 \cdot AD^2, \\ 2 PC \cdot AP = BC \cdot AD.$$

Wegen der Kongruenz der Dreiecke ABC und DBC ist $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$; folglich läßt sich um B, C, D, A ein Kreis beschreiben. Nach dem ptolemäischen Lehrsatz ist dann

$$BC \cdot AD + AB \cdot DC = BD \cdot AC, \\ BC \cdot AD = 4c^2 - 2c^2 = 2c^2.$$

Demnach

$$PC \cdot AP = \frac{2c^2}{2} = c^2,$$

$$Q_1 \cdot Q_2 = c^2, \text{ also eine Lemniskate.}$$

5. Als Fußpunktcurve der gleichseitigen Hyperbel (s. Abb. 75):

Hyperbeltangente:

$$\text{I. } x x_1 - y y_1 = a^2$$

$$\text{Lot durch O: II. } y = -\frac{y_1}{x_1} x$$

$$\text{II}^a: y_1 = -\frac{y x_1}{x},$$

eingesetzt in I:

$$x x_1 + \frac{y^2 x_1}{x} = a^2,$$

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2},$$

$$\text{eingesetzt in II}^a: y_1 = \frac{-a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

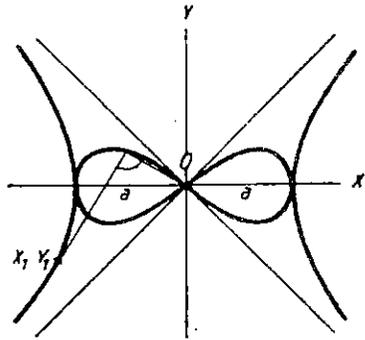


Abb. 75

Führen wir diese Werte in die Hyperbelgleichung $x_1^2 - y_1^2 = a^2$ ein, so folgt

$$\frac{a^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{a^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = a^2 \\ a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2.$$

Das ist aber die Gleichung einer Lemniskate vom halben Schleifendurchmesser $a = c\sqrt{2}$.

6. Als Inverse der gleichseitigen Hyperbel. Die Lemniskate ist zugleich Inverse zu derselben gleichseitigen Hyperbel, deren Fußpunktcurve sie ist.

$$\text{Gleichung der Hyperbel: } x^2 - y^2 = a^2$$

$$\varrho^2 \cos^2 \varphi - \varrho^2 \sin^2 \varphi = a^2$$

$$\varrho^2 \cos 2\varphi = a^2.$$

Nehmen wir nun die inverse Transformation $r\varrho = a^2$, $\varrho = \frac{a^2}{r}$ vor, so

$$\text{erhalten wir } \frac{a^4}{r^2} \cos 2\varphi = a^2$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

also wieder dieselbe Lemniskate.

7. Als Hüllkurve einer Kreisschar unter Verwendung einer gleichseitigen Hyperbel.

Wir nehmen einen erst später (C 1) bewiesenen Satz voraus: Der Fahrstrahl schließt mit der Normalen einen Winkel ein, der gleich der doppelten Amplitude ist. Sei P ein Kurvenpunkt. Wir tragen (s. Abb 76) $\sphericalangle XOP$ auf der anderen Seite von OX an und erhalten damit im Schnitt mit der Normalen den Punkt A .

$\triangle AOP$ ist gleichschenkelig. Bezeichnen wir $OA = AP$ mit ϱ , so ist nach dem Kosinussatz für OA :

$$\varrho^2 = \varrho^2 + r^2 - 2r\varrho \cos \varphi$$

$$\varrho = \frac{r}{2 \cos 2\varphi} = \frac{c\sqrt{2} \cos 2\varphi}{2 \cos 2\varphi}.$$

Das ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Achsen mit denen des Koordinatensystems zusammenfallen und deren Halbachse $a = b = \frac{c}{2} \sqrt{2}$ ist. (Leicht zu bestätigen, indem man in ihre Gleichung $x^2 - y^2 = \left(\frac{c}{2} \sqrt{2}\right)^2$ $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$ einsetzt.) Beschreibe ich also um A einen Kreis mit OA , so

wird dieser in P die Lemniskate berühren.

Wir haben damit bewiesen: Die Lemniskate ist Hüllkurve einer Schar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen und deren Radien gleich den Fahrstrahlen der betreffenden Hyperbelpunkte

Wir haben damit bewiesen: Die Lemniskate ist Hüllkurve einer Schar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen und deren Radien gleich den Fahrstrahlen der betreffenden Hyperbelpunkte

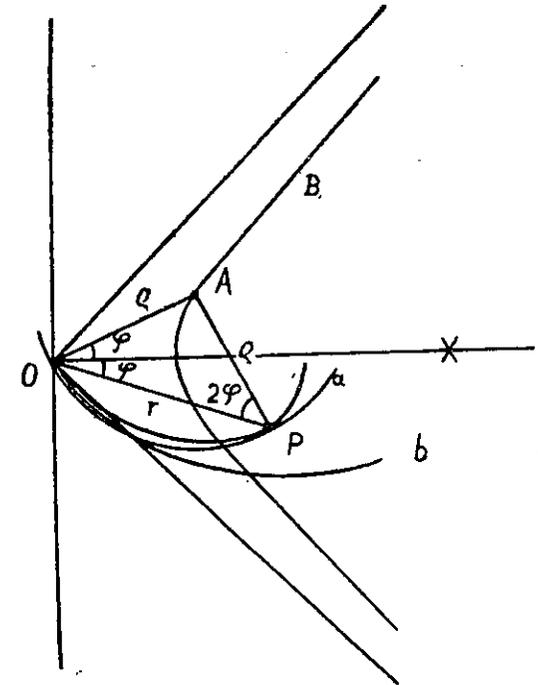


Abb. 76

sind. Die Scheitel der Hyperbel liegen in den Mittelpunkten der beiden halben Schleifendurchmesser der erzeugten Lemniskate.

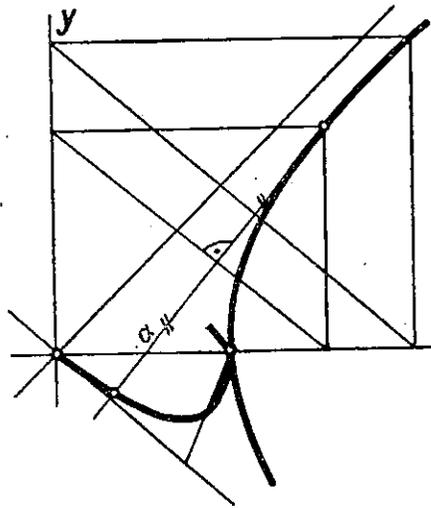


Abb. 77

8. Als Gegenkurve der gleichseitigen Hyperbel. Zum Begriff der Gegenkurve vgl. S. 26. Setzen wir in die Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = a^2$ oder $r^2 \cos 2\varphi = a^2$ die Seite 26 gegebenen Transformationsgleichungen $r = \frac{-r_1}{\cos 2\varphi_1}$, $\varphi = 2R - \varphi_1$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{r_1^2 \cos 2\varphi_1}{\cos^2 2\varphi_1} = a^2$$

 $r_1^2 = a^2 \cos 2\varphi_1$, d. h. (Abb. 77) eine Lemniskate mit dem Durchmesser $2a$.

Von besonderem Interesse dürften zwei räumliche Erzeugungen unserer Kurve sein, die wir als letzte folgen lassen.

9. Ein senkrecht stehendes Rotationsparaboloid und ein Rotationszylinder, dessen waagerechte Achse durch den Brennpunkt des Paraboloides geht und dessen Kreisdurchmesser gleich dem Halbparameter des Paraboloides ist, durchdringen sich in einer Raumkurve, deren Projektion auf eine horizontale Ebene eine Lemniskate ist.

Die darstellende Geometrie lehrt, daß man (Abb. 78) die Punkte der Schnittkurve erhalten kann, indem man parallel zur Grundrißebene ebene Schnitte durch die beiden Körper legt, wobei jeder Schnitt das Paraboloid in einem Kreis und die Zylinderfläche in einem Parallelenpaar durchdringt (Verwendung des Seitenrisses ist zu dieser Konstruktion nötig). Der Schnittkreis und das Parallelenpaar ergeben vier Punkte der Raumkurve. Bezeichnen wir die Grundrißebene, die wir im Abstand p von dem Paraboloidscheitel annehmen, als xy -Ebene und nehmen wir die nach oben gerichtete Paraboloidachse als z -Achse, so lautet die Gleichung der erzeugenden Parabel in der xz -Ebene: $x^2 = -2p(z-p)$ und die des Zylinderquerschnittes in der yz -Ebene: $(z - \frac{p}{2})^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}$. Da in der xy -Ebene der Abstand eines Kurvenpunktes P vom Koordinatenanfangspunkt O gleich dem Radius $O'P'$ des entsprechenden Paraboloidkreises, d. h. gleich der betreffenden

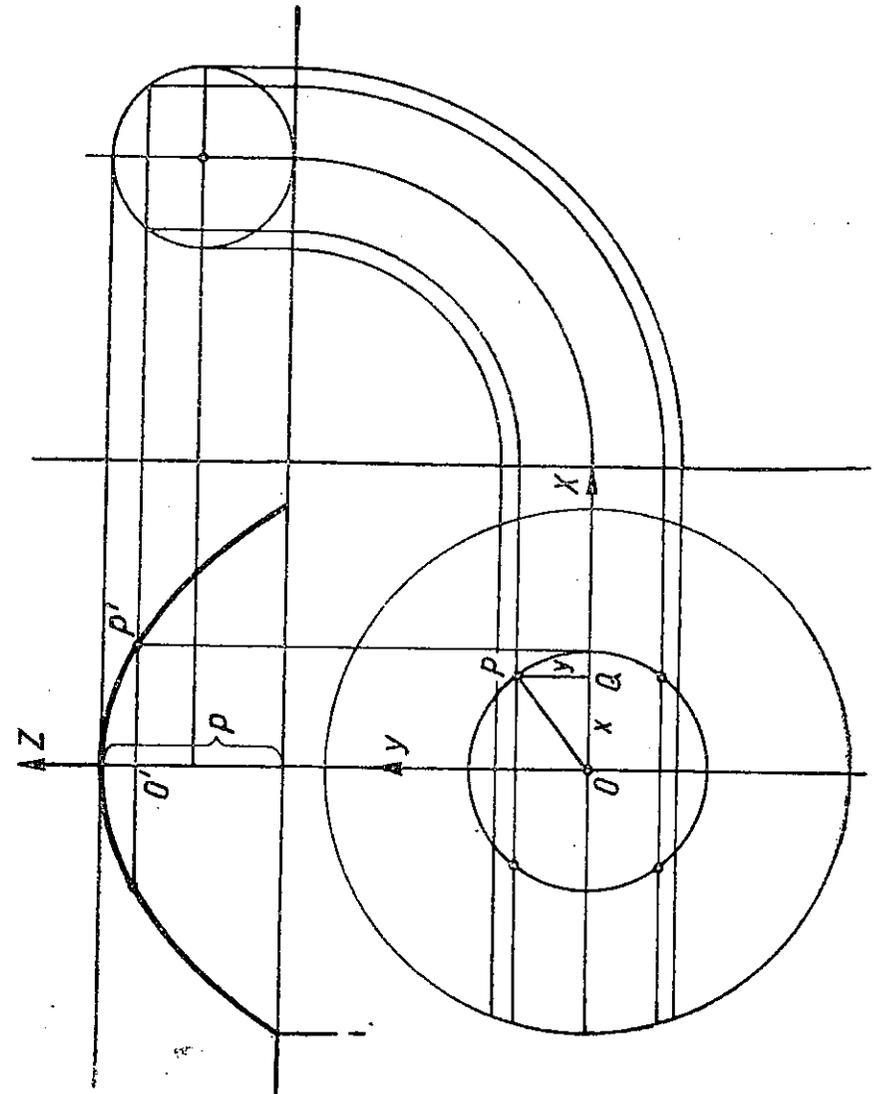


Abb. 78

Parabelordinate, also gleich $\sqrt{-2p(z-p)} = \sqrt{2p^2 - 2pz}$ ist, so ergibt das Grundrißdreieck OQP die Gleichung $x^2 + y^2 = 2p^2 - 2pz$. Nun entnehmen wir aus der Kreisgleichung

$$z = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4y^2}}{2}$$

und setzen diesen Wert in die letzte Gleichung ein:

$$x^2 + y^2 = 2p^2 - 2p \frac{p + \sqrt{p^2 - 4y^2}}{2},$$

$$x^2 + y^2 - 2p^2 = -p^2 - p\sqrt{p^2 - 4y^2},$$

$$x^2 + y^2 - p^2 = -p\sqrt{p^2 - 4y^2},$$

$$x^4 + y^4 + p^4 + 2x^2y^2 - 2x^2p^2 - 2p^2y^2 = p^4 - 4p^2y^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2p^2(x^2 - y^2).$$

Wir erhalten also die Gleichung einer Lemniskate mit dem Durchmesser $2p\sqrt{2}$.

10. Als Sonderfall der spirischen Linien des Perseus

Mit dem Namen Spira ($\sigma\pi\epsilon\tilde{\rho}\alpha$) bezeichneten die alten Geometer den Körper, der entsteht, wenn ein Kreis um eine in seiner Ebene gelegene Achse rotiert. Heute ist für diesen ringförmigen Körper der Name Torus gebräuchlich. Die Bernoullische Lemniskate zeigt sich auf einer bestimmten Spire: Ist der Abstand des Kreismittelpunktes von der Drehachse c , so ist der Radius des rotierenden Kreises $\frac{c}{2}$. Wir stellen den Körper im Grund- und Aufriß dar (Abb. 79) und führen durch ihn einen Schnitt im Abstand $\frac{c}{2}$ von der Rotationsachse und parallel zur Aufrißebene. Die Schnittfigur kann dann nach den Regeln der darstellenden Geometrie punktweise gefunden werden, indem man horizontale Schnittebenen durchlegt, deren jede die Spire in zwei konzentrischen Kreisen schneidet, und nun die Schnittpunkte dieses Kreispaars mit der vertikalen Schnittebene bestimmt. P sei ein solcher Punkt. Bezeichnen wir den Radius des inneren der beiden Schnittkreise mit ρ , so zeigt der Grundriß: $\rho^2 = x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$ und der Aufriß: $(c - \rho)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - y^2$. Setzt man aus der ersten dieser beiden Gleichungen $\rho = \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{4}}$ in die zweite Gleichung ein, so erhält man:

$$c^2 - 2c\sqrt{x^2 + \frac{c^2}{4}} + x^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} - y^2,$$

$$2c\sqrt{x^2 + \frac{c^2}{4}} = x^2 + y^2 + c^2,$$

$$4c^2x^2 + c^4 = (x^2 + y^2)^2 + 2c^2(x^2 + y^2) + c^4,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

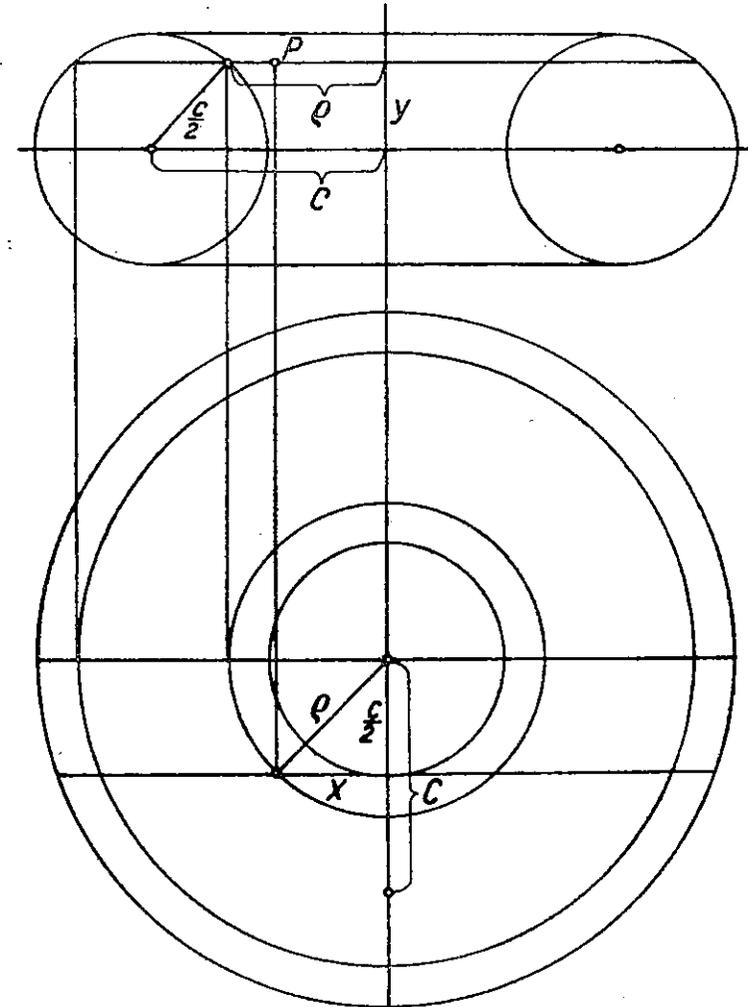


Abb. 79

B. Auswertung der Kurvengleichung

Die Polargleichung zeigt, daß, wenn φ von 0° bis 45° wächst, r^2 und damit r abnimmt von $2c^2$ bzw. $c\sqrt{2}$ bis 0 ; für $\varphi = 30^\circ$ ist $r = c$. Wir haben an dieser Stelle den größten Abstand von der Hauptachse F_1F_2 gleich $\frac{c}{2}$, und das zugehörige x ist dann als Höhe im gleichseitigen Dreieck $\frac{c}{2}\sqrt{3}$. Bestätigt wird diese Tatsache durch Lösung der Extremaufgabe: „Die größte zur Hauptachse senkrechte Sehne einer Lemniskate zu finden.“ Diese Aufgabe läßt sich in dreifacher Weise (kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten, Parameterdarstellung) leicht lösen. — Von $\varphi = 45^\circ$ bis 135° ist r^2 negativ, also schneidet der Fahrstrahl die Kurve in diesem Intervall nicht; von 135° bis 225° wächst r von 0 bis $c\sqrt{2}$ und nimmt dann wieder ab bis 0 ; von $180^\circ + 45^\circ$ bis $270^\circ + 45^\circ$ ist r^2 wieder negativ, von $270^\circ + 45^\circ$ bis 360° wächst r von 0 bis $c\sqrt{2}$. Punkt O ist Doppelpunkt, denn jede Gerade durch O , deren Polargleichung $\varphi = \alpha$ für den oberen und $\varphi = 180^\circ + \alpha$ für den unteren Strahl ist, schneidet die Kurve außer in O in zwei reellen (oder imaginären) entgegengesetzt liegenden Punkten. Für $\varphi = 45^\circ$ bzw. $45^\circ + 180^\circ$ und 135° bzw. $180^\circ + 135^\circ$ fallen alle vier Schnittpunkte in O zusammen. O ist Doppelpunkt und zugleich für jeden Kurvenast Wendepunkt. Die beiden Wendetangenten haben die Neigungswinkel 45° und 135° .

C. Tangentenkonstruktionen

1. Differentiierung der Kurvengleichung liefert für die Steigung

$$y' = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}$$

und demnach für den Steigungswinkel n der

Normalen

$$\operatorname{tg} n = -\frac{1}{y'} = \frac{y(x^2 + y^2 + c^2)}{x(x^2 + y^2 - c^2)}$$

Mit Einführung von Polarkoordinaten wird hieraus:

$$\operatorname{tg} n = \frac{r \sin \varphi (r^2 + c^2)}{r \cos \varphi (r^2 - c^2)} = \frac{\sin \varphi (2c^2 \cos 2\varphi + c^2)}{\cos \varphi (2c^2 \cos 2\varphi - c^2)} = \frac{\sin \varphi (2 \cos 2\varphi + 1)}{\cos \varphi (2 \cos 2\varphi - 1)}$$

$$\operatorname{tg} n = \frac{\sin \varphi [2(1 - 2\sin^2 \varphi) + 1]}{\cos \varphi [2(2\cos^2 \varphi - 1) - 1]} = \frac{\sin \varphi (3 - 4\sin^2 \varphi)}{\cos \varphi (4\cos^2 \varphi - 3)} = \frac{3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi}{4\cos^2 \varphi - 3\cos \varphi}$$

$$\operatorname{tg} n = \frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi} = \operatorname{tg} 3\varphi$$

Demnach ist (s. Abb. 80) in $\triangle OPQ \sphericalangle OPQ = 2\varphi$, und wir können sagen: Der Fahrstrahl schließt mit der Normalen einen Winkel ein, der gleich der doppelten Amplitude ist. Hiernach ist die Tangente sehr einfach zu zeichnen.

2. Die Erzeugung durch das Gelenkviereck führt mit der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes zu folgender, ebenfalls sehr einfachen Tangentenbestimmung: Für die Punkte D und B in Abb. 74 ist N der augenblickliche Drehpunkt, demnach PN Normale.

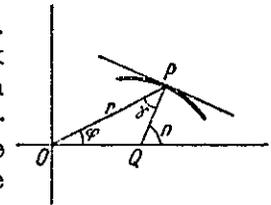


Abb. 80

3. In Abb. 81 sei PN die Normale und PW die Halbierungslinie des Winkels OPN . Wir gehen darauf aus, zu beweisen, daß PW auch den Winkel F_1PF_2 halbiert. Wie in Nr. 1 gezeigt ist $\sphericalangle OPN = 2\varphi$, also $\sphericalangle ONP = 2R - 3\varphi$. Der Sinussatz liefert nun folgende Gleichungen:

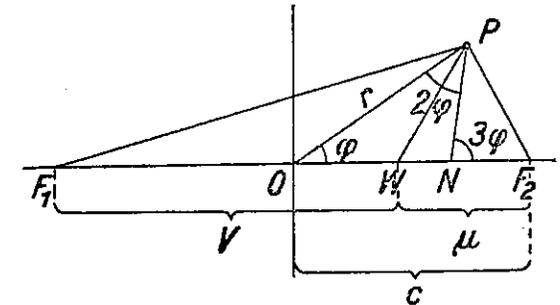


Abb. 81

$$PN = \frac{r \sin \varphi}{\sin 3\varphi} = \frac{r \sin \varphi}{3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi} = \frac{r}{3 - 4\sin^2 \varphi}$$

$$ON = \frac{r \sin 2\varphi}{\sin 3\varphi} = \frac{2r \sin \varphi \cos \varphi}{3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi} = \frac{2r \cos \varphi}{3 - 4\sin^2 \varphi}$$

Weiter besteht für PW als Winkelhalbierende die Proportion:

$$\frac{OW}{WN} = \frac{OP}{PN}, \quad \frac{OW}{ON - OW} = \frac{OP}{PN}$$

$$OW \cdot PN = OP \cdot ON - OP \cdot OW,$$

$$OW = \frac{OP \cdot ON}{PN + OP}$$

$$OW = \frac{r \frac{2r \cos \varphi}{3 - 4\sin^2 \varphi}}{\frac{r}{3 - 4\sin^2 \varphi} + r} = \frac{2r^2 \cos \varphi}{r + 3r - 4r \sin^2 \varphi} = \frac{2r^2 \cos \varphi}{4r \cos^2 \varphi} = \frac{r}{2 \cos \varphi}$$

Wir gehen nun zum Dreieck $F_1 F_2 P$ über:

$$F_1 P = \sqrt{r^2 + c^2 + 2cr \cos \varphi} \text{ und, da } F_1 P \cdot F_2 P = c^2:$$

$$F_2 P = \frac{c^2}{\sqrt{r^2 + c^2 + 2cr \cos \varphi}},$$

$$F_1 W = c + OW = c + \frac{r}{2 \cos \varphi} = \frac{2c \cos \varphi + r}{2 \cos \varphi},$$

$$F_2 W = c - OW = \frac{2c \cos \varphi - r}{2 \cos \varphi}.$$

Nun bilden wir einerseits

$$\frac{F_1 W}{F_2 W} = \frac{2c \cos \varphi + r}{2c \cos \varphi - r} \text{ und anderseits } \frac{F_1 P}{F_2 P} = \frac{r^2 + c^2 + 2cr \cos \varphi}{c^2}.$$

Wir erweitern den ersten Bruch mit $2c \cos \varphi + r$:

$$\frac{F_1 W}{F_2 W} = \frac{4c^2 \cos^2 \varphi + 4cr \cos \varphi + r^2}{4c^2 \cos^2 \varphi - r^2} \text{ und setzen darin}$$

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi = 2c^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi):$$

$$\frac{F_1 W}{F_2 W} = \frac{4c^2 \cos^2 \varphi + 4cr \cos \varphi + 2c^2 \cos^2 \varphi - 2c^2 \sin^2 \varphi}{4c^2 \cos^2 \varphi - 2c^2 \cos^2 \varphi + 2c^2 \sin^2 \varphi}$$

$$= \frac{3c^2 \cos^2 \varphi - c^2 \sin^2 \varphi + 2cr \cos \varphi}{c^2}$$

$$= \frac{2c^2 \cos^2 \varphi - 2c^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi + 2cr \cos \varphi}{c^2}$$

$$= \frac{r^2 + c^2 + 2cr \cos \varphi}{c^2}.$$

Also: $\frac{F_1 W}{F_2 W} = \frac{F_1 P}{F_2 P}$. Demnach ist PW auch Halbierer des Winkels $F_1 P F_2$ und folglich $\sphericalangle F_1 P O = \sphericalangle N P F_2$. Daraus folgt eine einfache Normalenkonstruktion: Ziehe $P F_1$, $P O$ und $P F_2$ und trage $\sphericalangle F_1 P O$ an $P F_2$ nach innen zu ab.

Weitere, aber weniger einfache Tangentenkonstruktionen bringt der folgende Abschnitt (§ 12 C) über Cassinische Kurven, zu denen die Lemniskate als Sonderfall gehört.

D. Quadratur

Es ist

$$S = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi = c^2 \int \cos(2\varphi) d\varphi = c^2 \int \cos(2\varphi) \frac{d(2\varphi)}{2}$$

$$= \frac{c^2}{2} \int \cos(2\varphi) d(2\varphi) = \frac{c^2}{2} [\sin 2\varphi].$$

Den vierten Teil der Lemniskatenfläche erhält man, wenn man φ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{4}$, also 2φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nimmt; folglich wird der Flächeninhalt des ganzen, von der Kurve umschlossenen Ebenenstückes

$$F = 4 \cdot \frac{c^2}{2} \left[\sin 2\varphi \right]_{2\varphi=0}^{2\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2c^2.$$

Das Feld der Lemniskate ist gleich dem halben Quadrat ihrer großen Achse ($2c$).

12. Cassinische Kurven

Im Jahre 1680 ersann Johann Dominicus Cassini eine Kurve, die dazu dienen sollte, „die wahren Bewegungen der Sonne und ihre verschiedenen Entfernungen von der Erde“ zu veranschaulichen. Wenn die erdachte Kurve auch in keiner Beziehung den Bedingungen des Problems, für das sie erfunden worden war, entsprach, so wurde sie dennoch von vielen Gelehrten untersucht, die verschiedene Eigenschaften an ihr entdeckten. Einer ihrer Sonderfälle wird durch die im vorigen Abschnitt behandelte Lemniskate dargestellt. Als besonders eigenartig verdient erwähnt zu werden, daß die Cassinischen Kurven in der Optik eine Rolle spielen, wo sie bei den Polarisationserscheinungen in Kristallen auftreten.

A. Erzeugungsweisen

1. Die Punkte der Cassinischen Kurven haben die Eigenschaft, daß das Produkt ihrer Abstände von zwei festen Punkten, die den Abstand $2c$ haben (den Brennpunkten) einen konstanten Wert a^2 hat (s. die 1. Erzeugungsweise der Lemniskate).

Es ist (s. Abb. 82) $P F_1 \cdot P F_2 = a^2$.

$$\boxed{e_1 \cdot e_2 = a^2}.$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\sqrt{y^2 + (x+c)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (c-x)^2} = a^2,$$

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4}.$$

Setzt man $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, so folgt sofort die Polargleichung

$$\boxed{r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi = a^4 - c^4}.$$

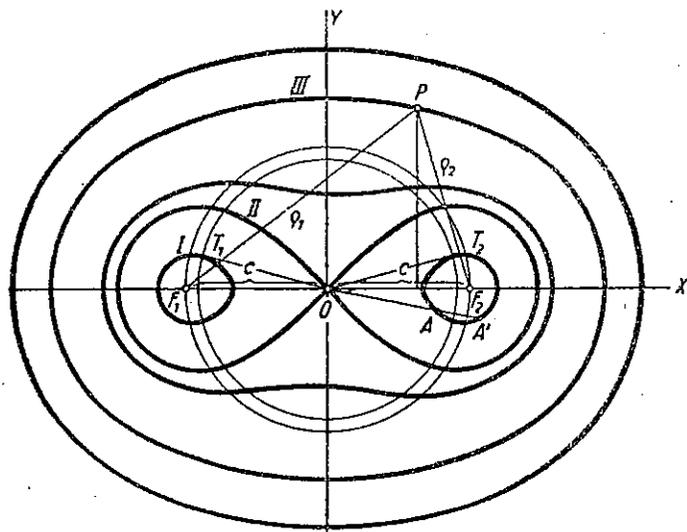


Abb. 82

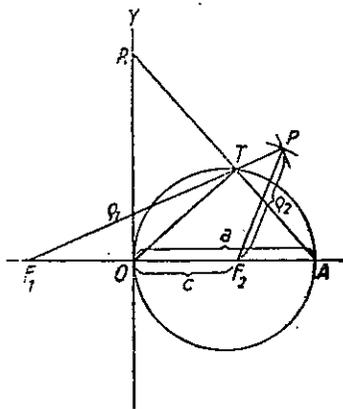


Abb. 83

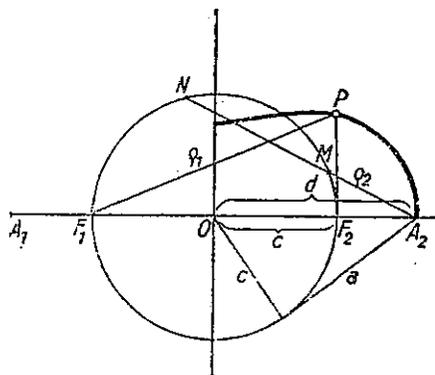


Abb. 84

Nach Abb. 83 lassen sich Paare von Fahrstrahlen Q_1, Q_2 folgendermaßen konstruieren (vgl. dazu Abb. 78). Man beschreibe über $OA = a$ als Durchmesser einen Kreis und ziehe einen Strahl ATR . Dann sind AT und AR zwei zusammengehörige Fahrstrahlen, da für das rechtwinklige Dreieck ROA mit der Höhe OT $AT \cdot AR = a^2$. Durch Drehen des Strahles um A lassen sich beliebig viele Fahrstrahlenpaare finden.

Ein ähnliches Verfahren zeigt folgende Konstruktion (die der zweiten Erzeugungsweise der Lemniskate entspricht):

2. Gegeben ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius c , dazu ein Durchmesser F_1F_2 und zwei feste Punkte A_1 und A_2 auf seiner Verlängerung im gleichen Abstand d von O . Man ziehe durch A_2 (oder A_1) eine beliebige Gerade, die den Kreis in M und N schneidet, und schlage um F_2 mit A_2M und um F_1 mit A_2N Kreise, die sich in P schneiden. Dreht sich der Strahl um A_2 , so beschreibt P eine Cassinische Kurve.

Nach dem Begriff der Kreispotenz ist nämlich (s. Abb. 84):

$$A_2M \cdot A_2N = Q_1 \cdot Q_2 = d^2 - c^2 = \text{const.} = a^2.$$

B. Auswertung der Kurvengleichung

Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$y^2 = -(x^2 + c^2) \pm \sqrt{4c^2x^2 + a^4},$$

so erkennt man: Für reelle Punkte scheidet das negative Vorzeichen vor der Wurzel aus. Aber auch im Falle des positiven Vorzeichens erhalten wir reelle Punkte nur, so lange

$$\begin{aligned} \sqrt{4c^2x^2 + a^4} &\geq x^2 + c^2, \\ 4c^2x^2 + a^4 &\geq (x^2 + c^2)^2, \\ 4c^2x^2 + a^4 &\geq x^4 + 2c^2x^2 + c^4, \\ a^4 &\geq (x^2 - c^2)^2, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 1. \quad x^2 - c^2 &\leq a^2, & x^2 &\leq c^2 + a^2, \\ 2. \quad c^2 - x^2 &\leq a^2, & x^2 &\geq c^2 - a^2, \end{aligned}$$

d. h. es muß sein

$$\sqrt{c^2 - a^2} \leq |x| \leq \sqrt{c^2 + a^2}.$$

Während die obere Grenze $\sqrt{c^2 + a^2}$ immer reell ist, ist es die untere nur für $c \geq a$. Daraus ergeben sich drei Formen der Cassinischen Kurven (s. Abb. 82):

$$\begin{aligned} \text{I. } c > a: y &\text{ reell bei } \sqrt{c^2 - a^2} \leq |x| \leq \sqrt{c^2 + a^2}, \\ \text{II. } c = a: y &\text{ " " } 0 \leq |x| \leq a\sqrt{2}, \\ \text{III. } c < a: y &\text{ " " } |x| \leq \sqrt{c^2 + a^2}. \end{aligned}$$

II hat den besonderen Namen Lemniskate (§ 11).

Es erhebt sich die Frage, von welcher Grenze ab die Kurven der Form III keine sattelförmige Einbuchtung mehr haben. Wir bestimmen zunächst den Schnittpunkt der Kurve mit der (positiven)

y -Achse und erhalten (für $x=0$) aus der Kurvengleichung

$$y = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Nun denken wir uns durch diesen Schnittpunkt eine Parallele zur x -Achse gelegt und stellen fest, unter welcher Bedingung diese Parallele keine weiteren reellen Schnitte mit der Kurve mehr besitzt. $y = \sqrt{a^2 - c^2}$ in die Kurvengleichung eingesetzt ergibt:

$$(x^2 + a^2 - c^2)^2 - 2c^2(x^2 - a^2 + c^2) = a^4 - c^4,$$

woraus

$$x^2 = 4(2c^2 - a^2)^2,$$

$$x = \pm 2\sqrt{2c^2 - a^2}.$$

Daraus folgt:

Für $c > \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (mit der oberen Grenze $c=a$) bestehen zwei besondere, symmetrisch liegende Schnittpunkte: die Kurve hat einen Sattel. Für $c = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ verschwindet der Sattel; das ist die Kurve, die wegen $y = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = c$ den Kreis mit c um O in seinem Schnitt mit der y -Achse berührt. Für $c < \frac{a}{2}\sqrt{2}$ werden die Schnittpunkte zwischen Parallele und Kurve imaginär. Zusammengefaßt: Ein Sattel besteht für den Bereich $\frac{a}{2}\sqrt{2} < c < a$. Mit diesen Ergebnissen im Einklang steht die Lösung der Frage nach den Extremen der Cassinischen Kurven mit demselben c . Differentiation der (unentwickelten) Kurvengleichung führt bei Setzung von $y' = 0$ zu der Gleichung

$$x(c^2 - x^2 - y^2) = 0.$$

Die Extrema einer c -Kurve liegen also 1. auf der y -Achse ($x=0$) und 2. auf dem Kreis $x^2 + y^2 = c^2$, der durch F_1 und F_2 geht. Je mehr sich also die Kurve nach außen weitet, d. h. der Grenze $c = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ nähert, um so näher rücken die drei Extrema nach der y -Achse zusammen. Für $c < \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (kein Sattel mehr vorhanden) wird der Schnitt des Kreises mit der Kurve imaginär, und es bleibt als reelles Extremum nur der Schnittpunkt mit der y -Achse übrig.

3. Erzeugungsweise. Wie die Lemniskate als Sonderfall der sogenannten spirischen Linien sich einer räumlichen Erzeugungsweise erfreut, gilt ein Gleiches für die Cassinischen Kurven, die die Lemniskaten in sich begreifen. Man vergleiche dazu das S. 84

und 85 Gesagte. Wir legen wieder Abb. 79 zugrunde, freilich ohne die für die Lemniskate nötige Spezialisierung: Der Abstand des Kreismittelpunktes von der Rotationsachse sei wieder c , der der schneidenden senkrechten Ebene aber statt $\frac{c}{2}$ allgemein e und der Radius des rotierenden Kreises d . Dann gelten die beiden Gleichungen

$$q^2 = x^2 + e^2,$$

$$(c - q)^2 = d^2 - y^2.$$

Setzt man q aus der ersten in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$e^2 - 2cq + q^2 = d^2 - y^2,$$

$$c^2 - 2c\sqrt{x^2 + e^2} + x^2 + e^2 = d^2 - y^2,$$

$$4c^2(x^2 + e^2) = (x^2 + y^2 + c^2 + e^2 - d^2)^2.$$

Setzt man zur Abkürzung $f^2 = c^2 + e^2 - d^2$, so hat man

$$4c^2x^2 + 4c^2e^2 = [(x^2 + y^2) + f^2]^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2f^2(x^2 + y^2) + f^4 - 4c^2x^2 - 4c^2e^2 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2f^2x^2 + 2f^2y^2 - 4c^2x^2 = 4c^2e^2 - f^4,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (2f^2 - 4c^2)x^2 + 2f^2y^2 = 4c^2e^2 - f^4.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der der Cassinischen Kurven

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4,$$

so besteht Übereinstimmung, wenn

$$-2f^2 + 4c^2 = 2f^2,$$

$$c = f \text{ ist:}$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 4c^2e^2 - c^4.$$

Aus $c = f$, $c^2 = f^2$ folgt nach Wiedereinsetzen des Wertes für f^2 : $c^2 = c^2 + e^2 - d^2$, $e = d$, d. h.:

Wir erhalten als Schnitt eine Cassinische Kurve, wenn der Abstand der Schnittebene von der Rotationsachse gleich ist dem Radius des rotierenden Kreises.

Ist im besonderen $e = d = \frac{c}{2}$, so erhalten wir eine Bernoullische Lemniskate (§ 11):

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Um uns die verschiedenen Typen Cassinischer Kurven bei dieser Erzeugungsweise klar zu machen, gehen wir noch einmal auf Abb. 79 zurück. Im dort dargestellten Falle erhalten wir eine Lemniskate. Halten wir nun

die Schnittebene fest und weiten den Ring (unter Beibehaltung seiner Dicke), so ergeben sich Cassinische Kurven des Typus I, die aus zwei in sich geschlossenen Kurven bestehen; bei Verengerung des Ringes erhält man Cassinische Kurven des Typus III, die aus einem einzigen Kurvenzug gebildet sind.

C. Tangentenkonstruktionen

1. Durch Differentiation der Kurvengleichung folgt:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') + 2c^2(2yy' - 2x) = 0,$$

$$\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{-x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)} = \frac{-x(r^2 - c^2)}{y(r^2 + c^2)}.$$

Die Konstruktion dieses Ausdrucks zeigt Abb. 85. Stellt O den Koordinatenanfangs- und Mittelpunkt der Kurve dar, P einen Kurvenpunkt, PT die Tangente und PN die Normale, so ist

$$\operatorname{tg} \tau' = -\frac{1}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{y(r^2 + c^2)}{x(r^2 - c^2)}.$$

Da nun $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, so folgt

$$\frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{r^2 + c^2}{r^2 - c^2}.$$

Schlägt man nun über OT einen Halbkreis, der PQ in S trifft, so ist $SQ^2 = OQ \cdot QT$, ebenso $y^2 = NQ \cdot QT$, d. h. $QT = \frac{y^2}{NQ}$ woraus sich ergibt.

$$SQ^2 = OQ \cdot \frac{y^2}{NQ},$$

$$\frac{SQ^2}{y^2} = \frac{OQ}{NQ} = \frac{y \operatorname{ctg} \varphi}{y \operatorname{ctg} \tau'} = \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{r^2 + c^2}{r^2 - c^2},$$

$$\frac{SQ}{y} = \frac{\sqrt{r^2 + c^2}}{\sqrt{r^2 - c^2}}.$$

Danach läßt sich zu jedem Kurvenpunkt $P(r, y)$ SQ konstruieren. Das Lot auf OS in S ergibt dann T und damit PT .

2. Mit bipolaren Koordinaten ($q_1 \cdot q_2 = a^2$). Aus Abb. 86 ergibt sich für die Winkel μ_1 und μ_2 , die die Fahrstrahlen q_1 und q_2 mit der Tangente (Bogenelement ds) bilden:

$$\cos \mu_1 = \frac{dq_1}{ds},$$

$$\cos \mu_2 = \frac{dq_2}{ds},$$

$$\frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} = \frac{dq_1}{dq_2}.$$

Differentiation der Kurvengleichung

$q_1 \cdot q_2 = a^2$ liefert nun

$$q_2 dq_1 + q_1 dq_2 = 0,$$

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{q_1}{q_2}, \text{ also } \frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} = -\frac{q_1}{q_2}.$$

Daraus ergibt sich (Abb. 87) folgende Tangentenkonstruktion:

Mache $PG = \frac{1}{n} PF_1$ (n beliebig) und $PH = \frac{1}{n} PF_2$ und zeichne $GT \perp F_1G$, $HT \perp F_2P$. Dann ist

$$\cos(2R - \mu_1) = \frac{PG}{PT},$$

$$\cos \mu_2 = \frac{PH}{PT},$$

$$\frac{\cos(2R - \mu_1)}{\cos \mu_2} = \frac{PG}{PH} = \frac{\frac{1}{n} q_1}{\frac{1}{n} q_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

$$\frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} = -\frac{q_1}{q_2}.$$

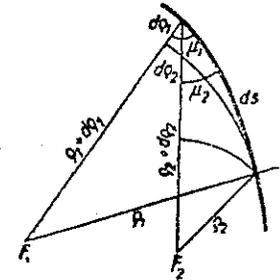


Abb. 86

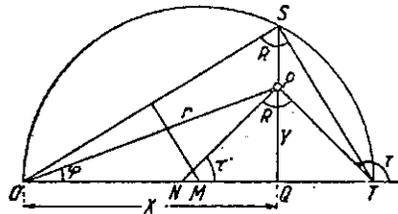


Abb. 85

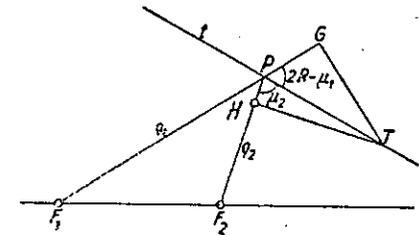


Abb. 87

Den gleichen Grundgedanken zeigt folgende Konstruktion.

3. Errichtet man auf den Fahrstrahlen PF_1 und PF_2 die Lote in F_1 bzw. F_2 und zieht durch P eine Gerade so, daß für ihre Schnitte T_1 und T_2 mit den beiden Loten die Beziehung $PT_1 = PT_2$ gilt, dann ist T_1T_2 Tangente (s. Abb. 88).

Beweis: Aus der Abbildung geht hervor, daß

$$\frac{\cos(2R - \mu_1)}{\cos \mu_2} = \frac{\frac{q_1}{T_1P}}{\frac{q_2}{T_2P}},$$

$$\text{also } \frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

womit die Bedingungsgleichung erfüllt ist.

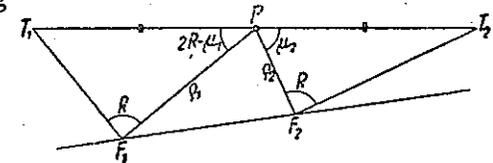


Abb. 88

Die Zeichnung von T_1PT_2 erfolgt als Diagonale eines Parallelogramms, das man erhält (s. Abb. 89), wenn man auf PF_1 und PF_2 die Lote F_1U bzw. F_2U errichtet, $VP=PU$ macht und durch V zu UF_1 und UF_2 die Parallelen zieht, die T_1 und T_2 ergeben, deren Verbindungs-

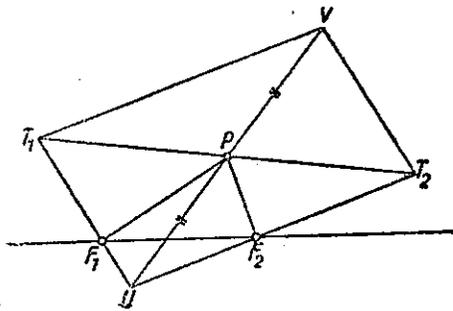


Abb. 89

ist $\mu_1 = \nu_1 + R$ und $\mu_2 = R - \nu_2$, und die Gleichung

$$\frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} = -\frac{Q_1}{Q_2}$$

F_1U bzw. F_2U errichtet, $VP=PU$ macht und durch V zu UF_1 und UF_2 die Parallelen zieht, die T_1 und T_2 ergeben, deren Verbindungsline durch P gehen muß. Nach dem Diagonalsatz ist $T_1P=PT_2$.

4. Bezeichnen wir (Abb. 90) die Winkel, die die Normale n mit den beiden Brennstrahlen bildet mit ν_1 und ν_2 , so

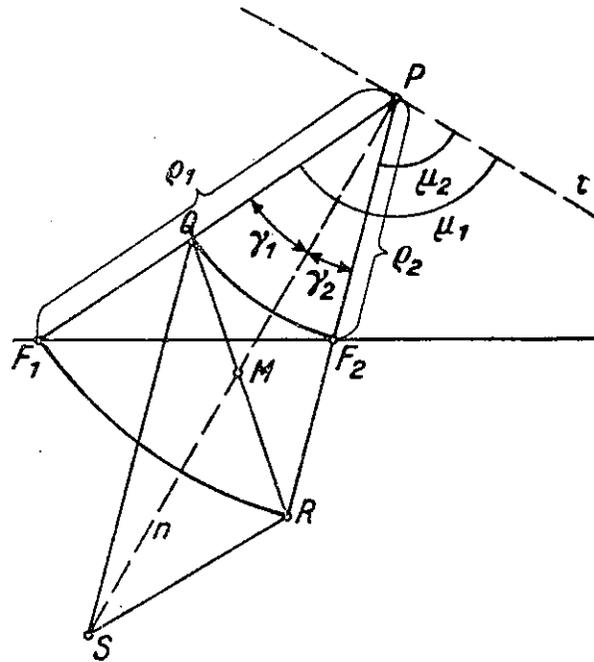


Abb. 90

geht über in

$$\frac{\cos(\nu_1 + R)}{\cos(R - \nu_2)} = -\frac{\sin \nu_1}{\sin \nu_2} = -\frac{Q_1}{Q_2},$$

$$\frac{\sin \nu_1}{\sin \nu_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Diese Beziehung führt zu folgender einfachen Normalenkonstruktion. Mache $PR=PF_1=Q_1$ und $PQ=PF_2=Q_2$ und zeichne das

Parallelogramm $PRSQ$; so ist $\frac{PR}{RS} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sin \nu_1}{\sin \nu_2}$ und demnach die

Diagonale PS Kurvennormale. Statt das Parallelogramm vollständig zu zeichnen, genügt es, Q_2 auf Q_1 von P bis Q und Q_1 auf Q_2 von P

bis R abzutragen (oder auch $\frac{1}{n}Q_1$ bzw. $\frac{1}{n}Q_2$), Q mit R zu verbinden

und von der Mitte M der Strecke QR nach P eine Gerade zu ziehen, die dann die Normale darstellt.

5. Die einfachste Normalenkonstruktion beruht auf folgendem Satz: Die Normale einer Cassinischen Kurve ist Symmediane des Brennstrahlendreiecks (anders gesagt: Der Winkel, den der Fahrstrahl mit dem einen Brennstrahl bildet, ist gleich demjenigen, den die Normale mit dem anderen Brennstrahl einschließt). In Abb. 91 sei PN die Normale, und der Satz behauptet dann, daß $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \varphi'$ sei. Nach S. 94 ist die Steigung der Normalen

$$m_{PN} = \operatorname{tg} \tau' = \frac{y(r^2 + c^2)}{x(r^2 - c^2)}.$$

Weiter ist $m_{F_1P} = \frac{y}{x+c},$

$$m_{F_2P} = \frac{y}{x-c},$$

also

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_{F_2P} - m_{F_1P}}{1 + m_{F_2P} \cdot m_{F_1P}} = \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{y}{x+c}}{1 + \frac{y^2}{x(x+c)}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{yc}{x^2 + cx + y^2}.$$

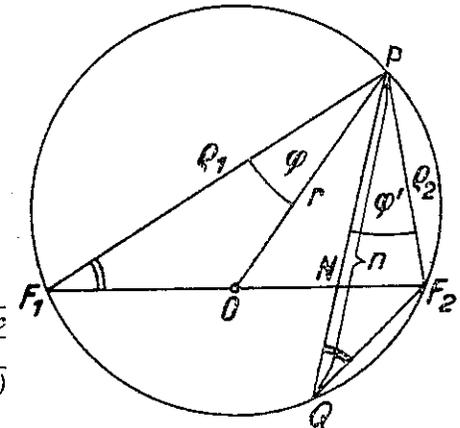


Abb. 91

Ebenso ergibt sich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{m_{PF_2} - m_{PN}}{1 + m_{PF_2} \cdot m_{PN}} = \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{y(r^2+c^2)}{x(r^2-c^2)}}{1 + \frac{y^2(r^2+c^2)}{x(x-c)(r^2-c^2)}} = \frac{xy(r^2-c^2) - (xy-yc)(r^2+c^2)}{(x^2-cx)(r^2-c^2) + y^2(r^2+c^2)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{yc(c^2 - 2cx + r^2)}{x^2r^2 - cxr^2 - c^2x^2 + c^2x + y^2r^2 + y^2c^2}$$

Man setze $r^2 = x^2 + y^2$ und kommt so nach einigen Umformungen auf

$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{yc}{x^2 + cx + y^2}$, d. h. auf denselben Wert, den $\operatorname{tg} \varphi$ hat. Damit ist der Satz bewiesen und eine sehr einfache Normalenkonstruktion gefunden.

Zugleich läßt sich noch ein bemerkenswerter Satz hier anschließen. Zeichnet man (Abb. 91) noch den Umkreis des Brennstrahldreiecks, so ist auch $\sphericalangle F_1 = \sphericalangle Q$, demnach $\triangle F_1PO \sim \triangle QPF_2$, also $\frac{\rho_1}{r} = \frac{n}{\rho_2}$

oder $n \cdot r = \rho_1 \cdot \rho_2$, d. h. Für jeden Punkt einer Cassinischen Kurve ist das Produkt aus dem Fahrstrahl des Punktes und der vom Umkreis des Brennstrahldreiecks begrenzten Normalen gleich dem Brennstrahlprodukt.

6. Als Abschluß unserer Betrachtungen über Tangenten- und Normaleneigenschaften der Cassinischen Kurven sei folgender Satz angeführt und kurz bewiesen:

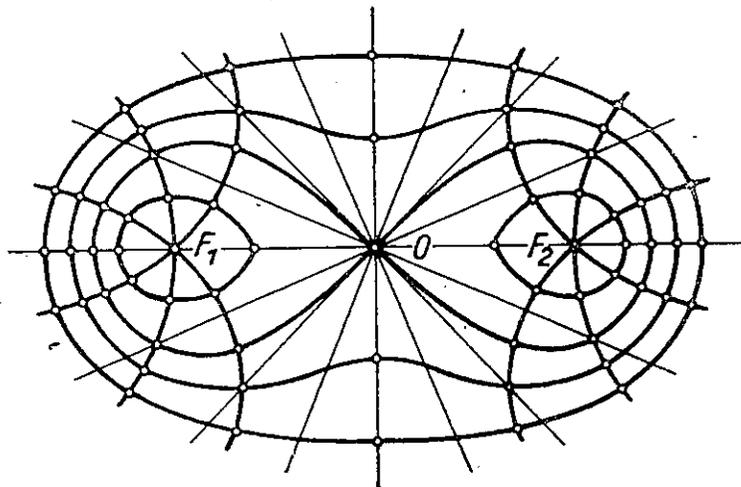


Abb. 92

Eine Schar konfokaler Cassinischer Kurven wird senkrecht gekreuzt von einer Schar gleichseitiger Hyperbeln, die den gleichen Mittelpunkt wie die Cassinischen Kurven haben und durch die beiden Brennpunkte gehen (Abb. 92).

Der Beweis könnte etwa in folgender Weise geführt werden. Es handelt sich um den Nachweis, daß dieselbe Konstruktion, die die Normale einer Cassinischen Kurve liefert, zugleich die Tangente einer gleichseitigen Hyperbel ergibt. In Abb. 93 sei in einer gleichseitigen Hyperbel ($xy = \frac{a^2}{2}$) ein Durchmesser AB gezogen und ein Kurvenpunkt P mit A und B verbunden. Es seien gemäß der Hyperbelgleichung die Koordinaten von $P: x_1 / \frac{a^2}{2x_1}$, von $B: x_2 / \frac{a^2}{2x_2}$, von $A: -x_2 / \frac{-a^2}{2x_2}$. Dann ist die Steigung von $AP: m_{AP} = \frac{a^2}{2x_1x_2}$ und die von $BP: m_{BP} = \frac{-a^2}{2x_1x_2}$. Die Halbierungslinie des Winkels APB muß

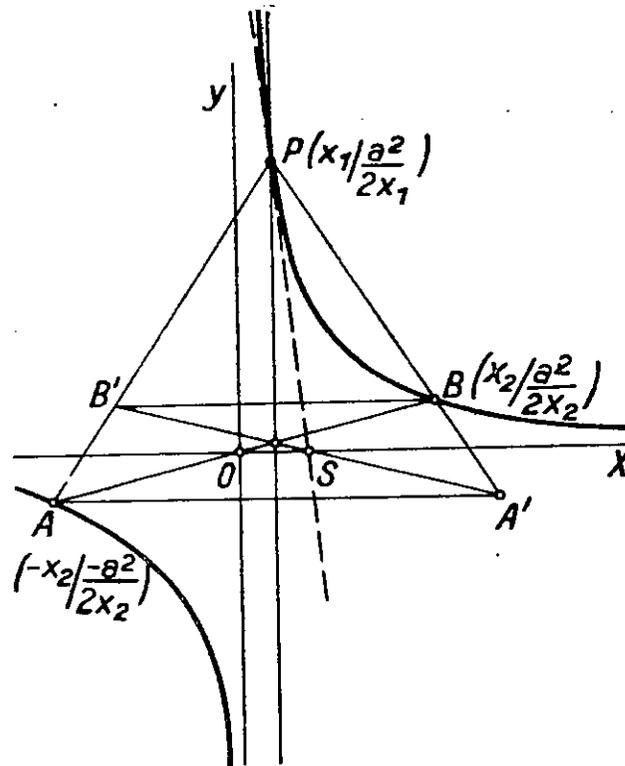


Abb. 93

mithin der y -Achse parallel sein. Ziehe ich weiter BB' und AA' parallel zur x -Achse, so ist $PB' = PB$ und $PA' = PA$. Die zu AB bezüglich der Winkelhalbierenden symmetrische Gerade ist mithin $A'B'$, und dem Punkt O entspricht der auf der x -Achse liegende Punkt S von $B'A'$. Die Koordinaten von S sind demnach $2x_1/a$, und die Gleichung der Geraden PS lautet:

$$\frac{y - \frac{a^2}{2x_1}}{x - x_1} = \frac{\frac{a^2}{2x_1}}{x_1 - 2x_1} = \frac{a^2}{-2x_1^2}.$$

Bringe ich diese Gerade nun mit der Hyperbel $xy = \frac{a^2}{2}$ zum Schnitt, so ergibt sich bei Auflösung der Gleichungen nur ein Schnittpunkt, nämlich P . PS ist folglich Hyperbeltangente. Ich konnte sie dadurch erhalten, daß ich auf den Fahrstrahlen PA und PB $PB' = PB$ und $PA' = PA$ abtrug und $A'B'$ halbierte. Diese selbe Konstruktion hätte aber, wie wir aus Nr. 4 wissen, zur Konstruktion der Normalen einer Cassinischen Kurve mit den Brennpunkten A und B in einem Kurvenpunkte P geführt. Eine Cassinische Kurve mit den Brennpunkten A und B wird also in einem beliebigen Kurvenpunkt P senkrecht gekreuzt von einer gleichseitigen Hyperbel, die denselben Mittelpunkt O hat und durch die Brennpunkte A und B der Cassinischen Kurve verläuft.

D. Die Cassinischen Kurven als anallagmatische Kurven

Die Gruppe I der Cassinischen Kurven ($c > a$) hat die Eigenschaft, daß jede ihrer Kurven sich durch Inversion an einem bestimmten Kreis mit dem Kurvenmittelpunkt als Inversionszentrum in sich selber transformieren läßt. Ersetzt man nämlich gemäß der Inversionsbeziehung $rr' = K^2$ (worin K noch zu bestimmen ist) in der Kurvengleichung

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi = a^4 - c^4$$

r durch r' , so erhält man:

$$\frac{K^8}{r'^4} - \frac{2c^2 K^4}{r'^2} \cos 2\varphi = a^4 - c^4,$$

$$K^8 - 2c^2 K^4 r'^2 \cos 2\varphi = (a^4 - c^4) r'^4,$$

$$r'^4 + \frac{2c^2 K^4}{a^4 - c^4} r' \cos 2\varphi = \frac{K^8}{a^4 - c^4}.$$

Diese Gleichung ist mit der Kurvengleichung identisch, wenn

$K^4 = -(a^4 - c^4)$, $K = \sqrt[4]{c^4 - a^4}$. Danach lassen sich nur die Cassinischen Kurven der Gruppe I ($c > a$), bei denen jede Kurve aus zwei getrennten Zweigen besteht, durch eine reelle Inversion ineinander überführen. Abb. 82 zeigt für die innerste Kurve ($a = 1,3$ cm, $c = 1,8$ cm, $K = 1,6$ cm) den Inversionskreis mit zwei entsprechenden Punkten A und A' . Die Lemniskate (Gruppe II, $a = c$) ist nicht anallagmatisch, da für sie $a = c$, also $K = 0$ ist.

Wie alle anallagmatischen Kurven hat auch ein Cassinisches Oval die Eigenschaft, sich als Hüllkurve einer Schar von Kreisen darstellen zu lassen, die den Inversionskreis senkrecht durchsetzen und die Kurve in je zwei inversen Punkten berühren. Da diese Erzeugungsweisen der Cassinischen Kurven jedoch wenig anschaulich und die analytische Ableitung etwas umständlich ist, sei von einer eingehenden Darstellung abgesehen. Die Mittelpunkte der Hüllkreise liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten auf OT_1 und OT_2 (s. Abb. 82) senkrecht stehen. Ein Sonderfall ist die Hüllkonstruktion der Lemniskate (s. § 11 A 7).

VIERTE GRUPPE

13. Die Konchoide des Nikomedes

Nikomedes (etwa 200 v. Chr.) erfand diese Kurve zur Verwendung bei der Würfelverdoppelung und Dreiteilung des Winkels. Der Name der Kurve ist abgeleitet vom griechischen κόγχη, Muschel, also Muschel-*linie*, wohl mit Rücksicht auf die Gestalt, die sie zeigt (nicht zu verwechseln mit der von Dürer so benannten Kurve).

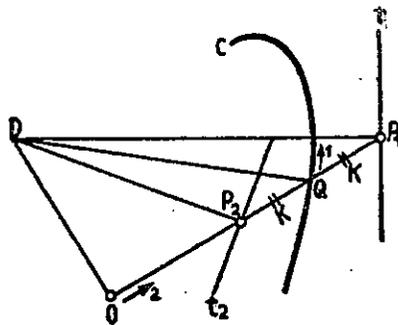


Abb. 94

A. Unter Konchoiden im allgemeineren Sinne versteht man Kurven, die auf folgende Weise entstehen. Sei C eine ebene Kurve und O ein Punkt in ihrer Ebene. Man ziehe zu einem Punkt Q der Kurve den Fahrstrahl OQ und trage auf ihm von Q aus nach entgegengesetzten Richtungen $QP_1 = QP_2 = K$ ab. Der geometrische Ort der Punkte P bei Drehung des Strahles um O ist dann eine Konchoide (s. Abb. 94).

Ich kann mir danach auch die Kurve in mechanischer Weise erzeugt denken durch die Bewegung einer festen Strecke K , deren einer Endpunkt Q sich auf der Kurve verschiebt, während ihre Verlängerung immer durch O geht. Die augenblickliche Bewegungsrichtung von Q wird also durch Pfeil 1 angegeben, die des augenblicklich mit O zusammenfallenden Geradenpunktes durch Pfeil 2. Mithin ergeben die C -Kurvennormale in Q und das Lot auf OQ in O in ihrem Schnittpunkt D den augenblicklichen Drehpunkt: DP_1 und DP_2 sind Normale der Konchoide. Darauf beruht eine höchst einfache Tangentenkonstruktion, die für alle Konchoidenarten gilt.

B. Ist die gegebene Kurve C eine Gerade, so erhalten wir die eigentliche Konchoide oder Konchoide des Nikomedes. Sie ist also der geometrische Ort eines Punktes, dessen Verbindungslinie mit einem festen Punkt, dem Pol, durch eine feste Gerade, die Basis, so geschnitten wird, daß das Stück zwischen Ort und Gerade eine gegebene Länge besitzt. (s. Abb. 95).

Die Kurve besteht, wie aus ihrer Erzeugungsweise hervorgeht, aus zwei unendlichen Zweigen, die zu beiden Seiten der Basis liegen und diese zur Asymptote haben. Es gilt für

$$P_1 : r = \frac{a}{\cos \varphi} + K$$

oder

$$\left(r - \frac{a}{\cos \varphi}\right) - K = 0,$$

$$P_2 : r = \frac{a}{\cos \varphi} - K$$

oder

$$\left(r - \frac{a}{\cos \varphi}\right) + K = 0.$$

Demnach für beide Punkte:

$$\left[\left(r - \frac{a}{\cos \varphi}\right) - K\right] \left[\left(r - \frac{a}{\cos \varphi}\right) + K\right] = 0,$$

$$\boxed{\left(r - \frac{a}{\cos \varphi}\right)^2 = K^2}.$$

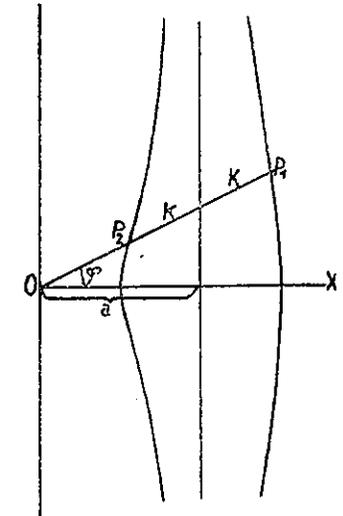


Abb. 95

Setzt man hierin $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so folgt

$$\left(r - \frac{ar}{x}\right)^2 = K^2,$$

$$r^2 - \frac{2ar^2}{x} + \frac{a^2 r^2}{x^2} = K^2,$$

$$x^4 + x^2 y^2 - 2ax^3 - 2axy^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 = K^2 x^2,$$

$$\boxed{(x^2 + y^2)(x - a)^2 = K^2 x^2}.$$

C. Auswertung der Kurvengleichungen

1. Die Kurve ist symmetrisch zur x -Achse.

2. Wird $x = a$, so kann die Gleichung nur bestehen, wenn zugleich $y = \infty$ wird, d. h. die Basis ist Asymptote.

Steigung der Kurve in P ist. Da $PQ = OP_0 = \frac{a}{\cos \varphi}$, so ist $QT = \frac{PQ}{\cos \varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$, und da $SQ = K \cos \varphi$, so stellt ST den Zähler des Bruches $\operatorname{tg} \tau$ dar, und da $SR = K \sin \varphi$, entspricht SR dem Nenner, und folglich muß $\sphericalangle SRT = 2R - \tau$ sein. Der Beweis ist nun geschlossen, wenn ich nachweise, daß $\sphericalangle SRT = \sphericalangle SPU$ ist. Nun folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SQR und QRT , daß auch $\triangle SQP \sim \triangle RQT$, so daß $\sphericalangle STR = \sphericalangle SPR$. Also ergibt sich: $\sphericalangle SPU = 2R - \sphericalangle SPT = 2R - (\sphericalangle SPR + \sphericalangle RPT) = 2R - (\sphericalangle STR + \sphericalangle RST) = \sphericalangle SRT$.

F. Verwendung bei den Unlösbaren Problemen

1. Verwendung der Konchoide zur Würfelverdoppelung (Abb. 101). Zeichne eine Konchoide von der Formzahl $f=1$ ($a=K$)

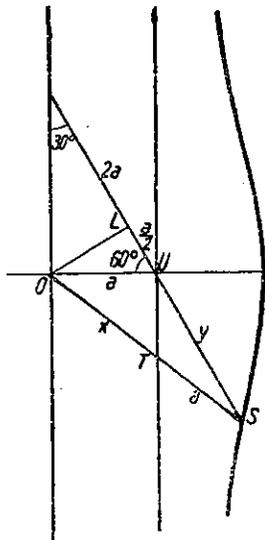


Abb. 101

mit dem Abstand a gleich der gegebenen Würfelkante und ziehe durch U unter 60° eine Gerade, die den rechten Zweig der Kurve in S schneidet. Trifft dann OS die Basis in T , so ist $OT = x$ die gesuchte Würfelkante.

Zu beweisen ist, daß $x = a \sqrt[3]{2}$.

Nach dem Strahlensatz ist $x:a = 2a:y$.

$$\text{I. } xy = 2a^2.$$

Fällt man OL , so ist in $\triangle OSL$

$$(x+a)^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + OL^2$$

und in $\triangle OLU$:

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + OL^2$$

$$(x+a)^2 - a^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{II. } x^2 + 2ax = y^2 + ay,$$

und aus I eingesetzt:

$$2a = \frac{xy}{a},$$

$$x^2 + \frac{x^2 y}{a} = y^2 + ay,$$

$$\frac{x^2}{a}(a+y) = y(a+y),$$

$$x^2 = ay,$$

eingesetzt in II:

$$\frac{y^2 = 2ax}{x^2 = a^2 \cdot 2ax},$$

$$\underline{x = a \sqrt[3]{2}}.$$

2. Verwendung der Konchoide zur Drittelung des Winkels (Pappus). Ist α der zu teilende Winkel O (Abb. 102), so trage man auf dessen einem Schenkel eine beliebige Strecke $OU = a$ ab und errichte in U das Lot, das den anderen Schenkel in N trifft. Bezeichne ich ON mit c , so zeichne man zu O als Pol und NU als Basis die Konchoide mit $K = 2c$ und ziehe durch N die Parallele zu OU , die die Kurve in P trifft.

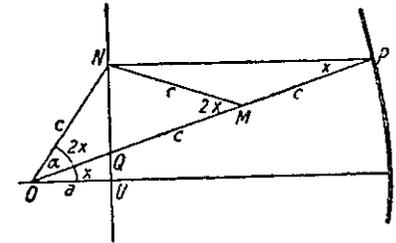


Abb. 102

Dann ist $\sphericalangle POU = \frac{\alpha}{3}$.

Beweis: Ist M die Mitte von QP , so ist, da N mit Q und P auf einem Kreis liegt ($\sphericalangle QNP = R!$) $PM = MQ = MN = c$, demnach, wenn $\sphericalangle POU = x$, letzten Endes $\sphericalangle NOP = 2x$, also $a = 2x + x$, $x = \frac{a}{3}$.

Die Aufgabe läßt sich (ebenso wie die vorige zur Würfelverdoppelung) als Papierstreifenkonstruktion geben: Gegeben $\sphericalangle NOU = \alpha$. Man ziehe durch N eine Parallele zu OU und lege nun einen Papierstreifen, auf dem eine Strecke $QP = 2c$ markiert ist, so durch O , daß Q auf NU und P auf die durch N gelegte Parallele fällt.

14. Die Kardioiden

(vom griech. καρδιά, Herz, also Herzlinie).

A. Erzeugungsweisen

1. Als Kreiskonchoide. Gegeben ein Kreis M mit dem Durchmesser a . Man ziehe durch einen Punkt O des Umfangs eine Sehne OQ und trage auf dieser bzw. ihrer Verlängerung nach beiden Seiten die Strecken $QP_1 = QP_2 = a$ ab. Bei Drehung der Sehne um O beschreiben P_1 und P_2 die Kardioiden (s. Abb. 103).

Aus der Abbildung liest man ab für

$$P_1: r = a + a \cos \varphi,$$

$$P_2: r = a - a \cos \varphi.$$

Läßt man P_2 durch Drehung um $\varphi' = \varphi + \pi$ erzeugt werden, so ist die Gleichung für P_2 in der Gleichung für P_1 enthalten, so daß wir als Polargleichung der Kurve nur schreiben:

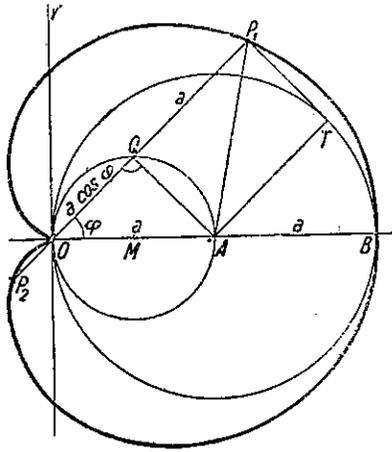


Abb. 103

wenn man von einem festen Punkt eines Kreises auf die Tangenten des Kreises die Lote fällt.

3. Als Epizykloide. Eine Epizykloide wird durch einen markierten Umfangspunkt eines Kreises beschrieben, der außen auf einem gegebenen Kreis abrollt. Wir lassen einen Kreis vom Radius b auf einem gleich großen festen Kreis abrollen. Die hierfür geltenden Gleichungen leiten wir in doppelter Weise ab: a) für eine Kardioide mit der größten Ausweitung in Richtung der positiven x -Achse (negative x -Achse als Null-Lage) (Abb. 104a), b) für die um 180° gedrehte Kurvenlage (Abb. 104b):

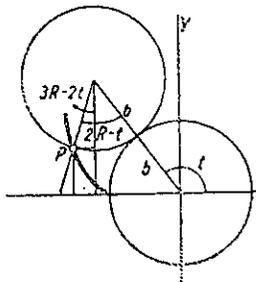


Abb. 104a

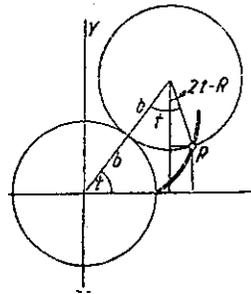


Abb. 104b

$$r = a(1 + \cos \varphi) = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Die Einführung kartesischer Koordinaten bringt:

$$a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - ax)^2.$$

2. Als Fußpunktcurve. Zieht man die Kreistangente P_1T , so ist $\sphericalangle P_1QA = P_1TA = R$ und $QP_1 = AT = a$, mithin $\triangle P_1QA \cong \triangle P_1TA$, also auch $QA = P_1T$, mithin $QATP_1$ ein Rechteck und $\sphericalangle QP_1T = R$. Ich kann also sagen:

Die Kardioide ist der geometrische Ort aller Punkte, die sich ergeben,

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 2b \sin(2R - t) - b \cos(3R - 2t) \\ x &= -2b \cos(2R - t) - b \sin(3R - 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= b(2 \sin t + \sin 2t) \\ x &= b(2 \cos t + \cos 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= 2b \sin t - b \cos(2t - R) \\ x &= 2b \cos t + b \sin(2t - R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= b(2 \sin t - \sin 2t) \\ x &= b(2 \cos t - \cos 2t). \end{aligned}$$

Daß es sich bei dieser Rollkurve wirklich um eine Kardioide handelt, ergibt sich sofort, wenn man das Koordinatensystem nach O verschiebt (Abb. 104 u. 105), r und φ einführt und $b = a/2$ setzt. Wegen der Gleichheit der Bogen PB und OB ist $\sphericalangle N = \sphericalangle M$, also $\triangle AMN$ gleichschenkelig und $OP \parallel MN$. Aus $OP : MN = AO : AM$ folgt

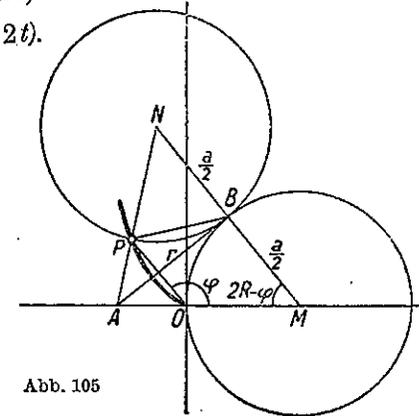


Abb. 105

$$r : a = \frac{r}{2 \cos(2R - \varphi)} : \left(\frac{r}{2 \cos(2R - \varphi)} + \frac{a}{2} \right),$$

$$\frac{r}{a} = \frac{-r}{-r + a \cos \varphi},$$

$$r = a(1 + \cos \varphi).$$

4. Als Inverse einer Parabel. Das Zentrum der Inversion liege im Brennpunkt, ihre Bedingungsgleichung sei $rr' = K^2$. Die Parabelgleichung für den Brennpunkt als Pol lautet

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}.$$

Setzen wir

$$r = \frac{K^2}{r'},$$

so erhalten wir ($\varphi = \varphi'$):

$$\frac{K^2}{r'} = \frac{p}{1 + \cos \varphi'}, \quad r = \frac{K^2}{p}(1 + \cos \varphi').$$

Wir erhalten also eine Kardioiden mit $a = \frac{K^2}{p}$.

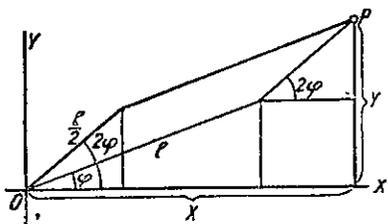


Abb. 106

5. Ein Gelenk-Parallelogramm (Abb. 106) von den Seiten l und $l/2$ drehe sich mit einer Ecke um O derart, daß die Seite $l/2$ sich in derselben Richtung wie l , aber mit der doppelten Umdrehungsgeschwindigkeit bewege. Dann beschreibt die Gegenecke P eine Kardioiden.

Man liest aus der Abbildung sofort die Gleichung ab:

$$y = l \sin \varphi + \frac{l}{2} \sin 2\varphi = \frac{l}{2} (2 \sin \varphi + \sin 2\varphi),$$

$$x = l \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos 2\varphi = \frac{l}{2} (2 \cos \varphi + \cos 2\varphi).$$

Wir erhalten also eine Kardioiden mit $a = l$, deren größte Ausweitung nach rechts gerichtet ist.

6. Als Hüllkurve einer Geradenschar (1. Art): Wenn zwei Punkte sich mit konstanten Geschwindigkeiten im selben Umlaufssinn auf einem Kreis bewegen, derart, daß der eine Punkt sich doppelt so rasch bewegt wie der andere, so umhüllt die Gerade, die ihre Stellungen verbindet, eine Kardioiden.

Beweis (s. Abb. 107): A bewege sich doppelt so rasch wie B ; die positive x -Achse sei der gemeinsame Anfang ihrer Bewegungen. Da A die Koordinaten

$$x_A = r \cos 2\alpha, \quad y_A = r \sin 2\alpha$$

und B die Koordinaten

$$x_B = r \cos \alpha, \quad y_B = r \sin \alpha$$

besitzt, so lautet die Gleichung von AB :

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha) &= \frac{y - r \sin 2\alpha}{x - r \cos 2\alpha} \\ &= \frac{r \sin 2\alpha - r \sin \alpha}{r \cos 2\alpha - r \cos \alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y (\cos 2\alpha - \cos \alpha) - r \sin 2\alpha \cos 2\alpha + r \sin 2\alpha \cos \alpha \\ = x (\sin 2\alpha - \sin \alpha) - r \sin 2\alpha \cos 2\alpha + r \sin \alpha \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Nach den Formeln

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ist

$$y \left(-2 \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) - x \left(2 \cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = -r \sin \alpha,$$

$$x \cos \frac{3\alpha}{2} + y \sin \frac{3\alpha}{2} - r \cos \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (I)$$

Wir differenzieren:

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = -3x \sin \frac{3\alpha}{2} + 3y \cos \frac{3\alpha}{2} + r \sin \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (II)$$

Aus (I)

$$3x \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 3y \sin^2 \frac{3\alpha}{2} - 3r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} = 0$$

und (II)

$$-3x \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 3y \cos^2 \frac{3\alpha}{2} + r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} = 0$$

folgt

$$3y = r \left(3 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad (Ia)$$

und

$$3x = r \left(3 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (IIa)$$

Nun ist aber

$$\sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \alpha$$

und

$$2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{4\alpha}{2} + \sin \frac{2\alpha}{2},$$

addiert:

$$3 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin 2\alpha + 2 \sin \alpha. \quad (a)$$

Entsprechend:

$$\cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{2\alpha}{2} = \cos \alpha,$$

$$2 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{4\alpha}{2} + \cos \frac{2\alpha}{2},$$

$$3 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + 2 \cos \alpha. \quad (b)$$

Setzen wir (a) und (b) in (Ia) und (IIa) ein, so folgt

$$3y = r(\sin 2\alpha + 2\sin \alpha),$$

$$3x = r(\cos 2\alpha + 2\cos \alpha).$$

Wir erhalten mithin eine Kardioide mit $b = \frac{a}{2} = \frac{r}{3}$. Abb. 108 zeigt die so erzeugte Kurve.

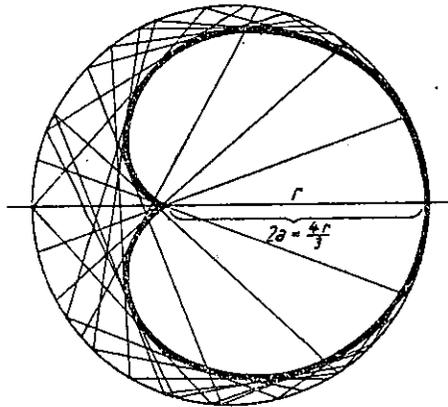


Abb. 108

7. Als Hüllkurve einer Geradenschar (2. Art). Sei A ein fester Punkt (Abb. 109), g eine feste Gerade, und B der Fußpunkt des von A auf g gefällten Lotes. Zieht man durch A einen beliebigen Strahl, der g in P trifft, und trägt an AP in P nach der Seite, auf der AB liegt, einen Winkel an, der doppelt so groß ist wie $\sphericalangle PAB$, so umhüllt der freie Schenkel eine Kardioide.

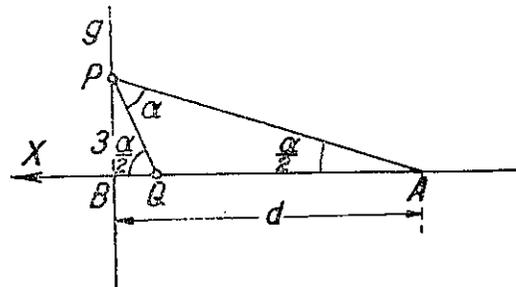


Abb. 109

Beweis: Nehme ich AB als positive x -Richtung und g als y -Achse, bezeichne AB mit d und $\sphericalangle PAB$ mit $\frac{\alpha}{2}$, so ist $PB = d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Da PQ den Neigungswinkel $\frac{3\alpha}{2}$ hat, so lautet die Gleichung von PQ :

$$y = x \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} + d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ich habe also:

$$F(\alpha) \equiv y - x \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} - d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,$$

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} \equiv \frac{-3x}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}} - \frac{d}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 0.$$

Ich multipliziere die obere Gleichung mit $\frac{3}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}}$ und die untere mit $\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}$:

$$\frac{3y}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}} - \frac{3x \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}} - \frac{3d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}} = 0,$$

$$\frac{-3x \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}} - \frac{d \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 0 \text{ und subtrahiere:}$$

$$\frac{3y}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}} = \frac{3d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2}} - \frac{d \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$3y \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 3d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - d \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} \cos^2 \frac{3\alpha}{2},$$

$$y = \frac{d}{3} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{d}{3} \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$= \frac{d}{3} \frac{3 \sin \alpha - 3 \sin \alpha + 4 \sin^3 \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (\text{Formel: } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$$

$$= \frac{d}{3} \frac{4 \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{1 + \cos \alpha} = \frac{d}{3} 4 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)$$

$$= \frac{4d}{3} \left(\sin \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \frac{2d}{3} (2 \sin \alpha - \sin 2\alpha).$$

$$\text{Entsprechend: } x = \left| \frac{2d}{3} (2 \cos \alpha - \cos 2\alpha) \right|.$$

Das sind aber die Gleichungen einer Kardioide, die entsteht durch Abrollen eines Kreises vom Radius $\frac{2d}{3}$ auf einem festen Kreis von gleichem Radius und dem Mittelpunkt A . g ist die Doppeltangente.

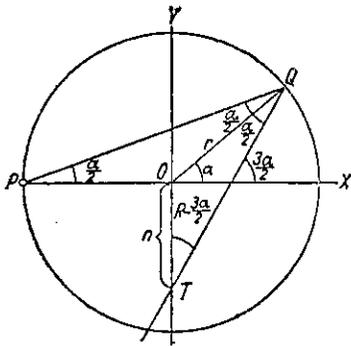


Abb. 110

8. Noch in einer dritten Weise läßt sich die Kardioide als Einhüllende einer Geradenschar darstellen, nämlich als katakustische Linie:

Gehen von einem leuchtenden Punkt auf dem Umfang eines Kreises Strahlen aus, die an dem Kreis reflektiert werden, so umhüllen die reflektierenden Strahlen eine Kardioide, deren ruhender und rollender Kreis den dritten Teil des Radius des gegebenen Kreises zum Halbmesser haben.

Beweis (Abb. 110): Der leuchtende Punkt sei P. Für einen reflektierten Strahl QT ist die Steigung $m = \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}$ und nach dem Sinussatz aus

$\triangle OQT$ ist die Steigung $m = \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}$ und nach dem Sinussatz aus

$$\triangle OQT \text{ ist die Steigung } m = \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} \text{ und nach dem Sinussatz aus}$$

$$\triangle OQT \text{ ist die Steigung } m = \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} \text{ und nach dem Sinussatz aus}$$

$$\triangle OQT \text{ ist die Steigung } m = \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} \text{ und nach dem Sinussatz aus}$$

$$QT \equiv y = x \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} - \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{3\alpha}{2}}$$

$$F(x, y, \alpha) \equiv y \cos \frac{3\alpha}{2} - x \sin \frac{3\alpha}{2} + r \sin \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (I)$$

Wir differenzieren ($\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$):

$$-3y \sin \frac{3\alpha}{2} - 3x \cos \frac{3\alpha}{2} + r \cos \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (II)$$

Nun multiplizieren wir (I) mit $3 \sin \frac{3\alpha}{2}$, (II) mit $\cos \frac{3\alpha}{2}$ und addieren:

$$-3x + r \left(3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \right) = 0,$$

$$-3x + r \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \right) = 0.$$

Nun ist

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} = -(\cos 2\alpha - \cos \alpha)$$

gemäß der Formel

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

und

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} = \cos \alpha,$$

demnach

$$-3x + r [\cos \alpha - (\cos 2\alpha - \cos \alpha)] = 0,$$

$$-3x + r(2 \cos \alpha - \cos 2\alpha) = 0,$$

$$x = \frac{r}{3} (2 \cos \alpha - \cos 2\alpha).$$

Entsprechend:

$$y = \frac{r}{3} (2 \sin \alpha - \sin 2\alpha).$$

Die so entstandene Kurve zeigt Abb. 111.

8. Als Hüllkurve einer Schar von Kreisen läßt sich unsere Kurve foldendermaßen bestimmen (s. Abb. 112): Die Kardioide ist die Hüllkurve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem festen Kreise liegen

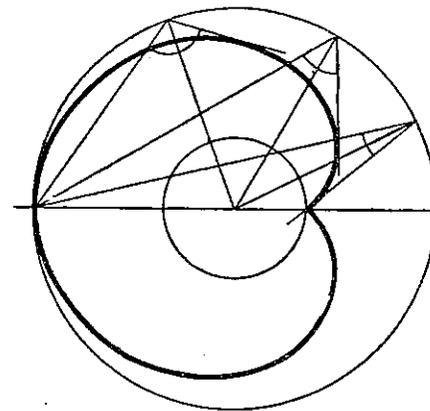


Abb. 111

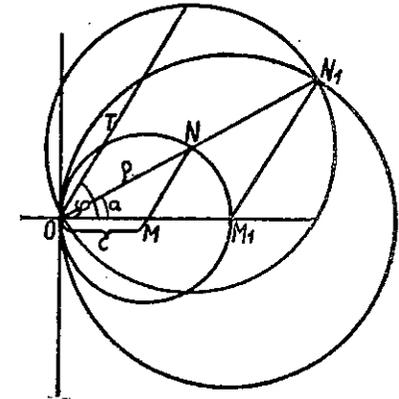


Abb. 112

und die durch einen auf dem festen Kreis liegenden gegebenen Punkt gehen. — Sei M der gegebene Kreis, O der feste Punkt und N eine Lage des veränderlichen Kreises, so ist die Polargleichung des Kreises M:

$$\rho^2 - 2\rho c \cos \alpha + c^2 = c^2,$$

$$\rho = 2c \cos \alpha$$

und die des Kreises N :

$$F(r, \varphi, \alpha) \equiv r^2 - 2r \cdot 2c \cos \alpha \cos(\varphi - \alpha) = 0.$$

Dann ist

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} \equiv \cos(\varphi - \alpha) \sin \alpha + \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha) = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha),$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{2}.$$

Führen wir diesen Wert in F ein, so folgt die Kardioidengleichung

$$r = 4c \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Es ist also $a = 2c$, und Kreis (M, c) ist der Grundkreis der Abb. 103.

Verlängert man in Abb. 112 OM und ON um sich selber bis M_1 bzw. N_1 , so beschreibt N_1 , während N Kreis M durchläuft, den Kreis M_1 , und ich kann somit unsere Definition der Kurve auch in folgender Form aussprechen:

Die Kardioiden ist die Hüllkurve aller Kreise, die zum Durchmesser die Strecke haben, die einen festen Punkt (O) eines gegebenen Kreises (M_1) mit einem beweglichen Punkt (N_1) dieses Kreises verbindet.

B. Auswertung der Kurvengleichungen

1. Die Kurve ist symmetrisch zur x -Achse.

2. r hat seinen größeren Wert für $\varphi = 0$. Für $\varphi = 90^\circ$ wird $r = a$, für $\varphi = 180^\circ$ ist $r = 0$. Von 0° bis 180° nimmt r stetig ab von $2a$ bis 0 , von 180° bis 360° wieder stetig zu. Im O -Punkt hat die Kurve eine Spitze mit der x -Achse als Tangente.

3. Zur Entscheidung der Frage, welches die beiden am weitesten nach links gelegenen Punkte der Kurve sind, in denen die Kurve von einer parallel zur y -Achse verlaufenden Doppeltangente berührt wird, denken wir uns im Abstände d parallel zur y -Achse eine Gerade durch die Kurve gelegt. Es ergibt sich für $x = d$ aus der Kurvengleichung:

$$a^2 (d^2 + y^2) = (d^2 + y^2 - ad)^2,$$

woraus

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 + 2ad - 2d^2) \pm a\sqrt{a^2 + 4ad}}.$$

Hiernach erhalten wir nur zwei reelle Schnittpunkte, wenn $a^2 + 4ad = 0$, d. h. wenn $d = -\frac{a}{4}$ ist. Die zugehörigen Ordinaten sind

$$y = \pm \frac{a}{4} \sqrt{3}.$$

C. Tangentenkonstruktionen

1. Als Epizykloide. D ist augenblicklicher Drehpunkt, also PD Kurvennormale (Abb. 113).

2. Als Konchoide. Das Lot in O auf OQ und der Radius QM ergeben den Drehpunkt N .

3. Die Ausrechnung der Winkel ergibt, daß der Winkel, den die Tangente mit dem Fahrstrahl bildet, gleich $R + \frac{\varphi}{2}$ ist, eine Tatsache, die übrigens mittels Differentialrechnung leicht zu bestätigen ist (μ Winkel zwischen Fahrstrahl und Tangente):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \mu &= \frac{r d\varphi}{dr} = \frac{2a \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi}{-a \sin \varphi d\varphi} \\ &= \frac{2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{-2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

$$\mu = R + \frac{\varphi}{2}.$$

Wir können also auch sagen: Man erhält die Tangente in einem Kurvenpunkt der Kardioiden, wenn man an dem Fahrstrahl in dem betreffenden Kurvenpunkt den Winkel $R + \frac{\varphi}{2}$ anträgt.

4. Mache ich weiter $QR = QM = \frac{a}{2}$, so zeigt sich, daß $\sphericalangle ORM = R + \frac{\varphi}{2}$, also MR parallel t , woraus sich eine weitere Tangentenkonstruktion gewinnen läßt.

5. Derselbe Kreis, den die Umhüllungskonstruktion der Abb. 108 zeigt, tritt bei der folgenden Tangentenkonstruktion mittels des Umkreises in die Erscheinung (Abb. 114).

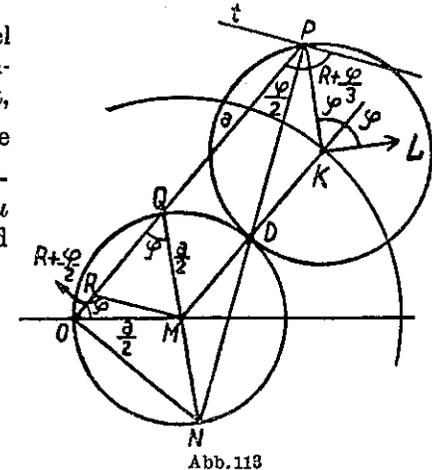


Abb. 113

Ziehen wir durch die Spitze der Kurve eine Sehne P_2P_1 , so folgt zunächst aus der Entstehung der Kardioiden als Kreiskonchoide, daß $P_2P_1 = 2a$, also konstant ist. Wir haben weiter den Winkel, den Fahrstrahl und Tangente miteinander bilden, eben berechnet zu

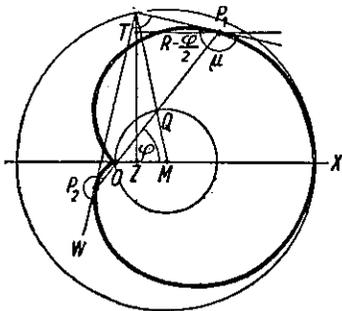


Abb. 114

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2a \cos^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi}{-\sin \varphi d\varphi} = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

$$u = R + \frac{\varphi}{2},$$

also ist

$$\sphericalangle P_2P_1S = R - \frac{\varphi}{2}.$$

Da zu P_2 der Polarwinkel $2R + \varphi$ gehört, so folgt, daß der markierte $\sphericalangle P_1P_2W = R + \frac{2R + \varphi}{2} = 2R + \frac{\varphi}{2}$ ist, mithin $\sphericalangle SP_2P_1 = \frac{\varphi}{2}$. Dann muß $\sphericalangle P_2SP_1$, also der Winkel, den die beiden Tangenten miteinander bilden, gleich einem Rechten sein.

Wir berechnen weiter die Koordinaten des Punktes S . Ist $P_1T \perp SZ$, so errechnet sich $\sphericalangle SP_1T = R - \frac{3\varphi}{2}$. Da $SP_1 = P_2P_1 \cdot \sin SP_2P_1 = 2a \sin \frac{\varphi}{2}$, so ergibt sich in $\triangle STP_1$ $ST = 2a \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}$ und $TP_1 = 2a \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}$. Da die Koordinaten von P_1 sind

$$y_{P_1} = r \sin \varphi = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \quad \text{und} \quad x_{P_1} = r \cos \varphi = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos \varphi,$$

so ergeben sich als Koordinaten $x_1; y_1$ von S :

$$y_1 = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + 2a \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2},$$

woraus nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} y_1 &= 6a \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - 6a \sin^3 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= 6a \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi = 3a \sin \varphi \cos \varphi = \frac{3a}{2} \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} x_1 &= 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos \varphi - 2a \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ &= a \left[2 \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \\ &= a [2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi] = a [2 - 3 \sin^2 \varphi]. \end{aligned}$$

Wir tragen nun $OM = \frac{a}{2}$ ab. Dann ist in $\triangle SZM$ $SZ = y_1$ und

$$\begin{aligned} ZM &= \frac{a}{2} - x_1 = \frac{a}{2} - 2 \cdot \frac{a}{2} (2 - 3 \sin^2 \varphi) = \frac{a}{2} (6 \sin^2 \varphi - 3) \\ &= \frac{3a}{2} (2 \sin^2 \varphi - 1), \end{aligned}$$

$$ZM = \frac{3a}{2} \cos 2\varphi.$$

Dann folgt

$$SM^2 = y_1^2 + \left(\frac{a}{2} - x_1 \right)^2 = 9 \frac{a^2}{4} (\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi) = 9 \frac{a^2}{4},$$

$$SM = \frac{3a}{2}.$$

Fassen wir diese Ergebnisse zu einem Satz zusammen, so können wir sagen:

Die durch die Spitze einer Kardioiden gehenden Sehnen sind gleich lang ($= 2a$), die Tangenten in ihren Endpunkten stehen aufeinander senkrecht, und die Scheitel dieser rechten Winkel liegen auf einem Kreis (Radius $\frac{3a}{2}$).

Weiter ist

$$\operatorname{tg} SMZ = \frac{SZ}{ZM} = \frac{y_1}{\frac{a}{2} - x_1} = \frac{\frac{3a}{2} \sin 2\varphi}{-\frac{3a}{2} \cos 2\varphi} = -\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg}(2R - 2\varphi).$$

Daraus folgt $\sphericalangle SMX = 2\varphi$. Dann muß der Schnittwinkel von OP_1 und SM gleich φ sein, woraus wieder folgt, daß dieser Schnittpunkt Q auf dem um M mit $\frac{a}{2}$ beschriebenen Grundkreis liegt.

Daraus gewinnt man folgende Tangentenkonstruktion: Verbinde P_1 mit O , wodurch sich der Schnittpunkt Q mit dem Grundkreis M ergibt. Verlängere MQ bis zum Schnitt S mit dem Kreis, der sich mit $\frac{3a}{2}$ um M beschreiben läßt, und ziehe SP_1 .

Liegen die beiden Kreise um M gezeichnet vor, so lassen sich hiernach sehr rasch auf beliebig vielen durch O gehenden Sehnen die Kurvenpunkte mit ihren Tangenten zeichnen.

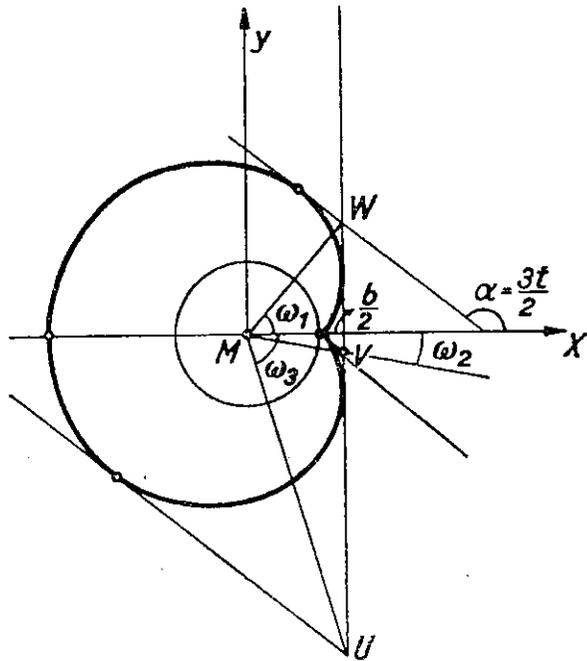


Abb. 115

D. Zwei Lehrsätze. 1. Wir gehen aus von der Darstellung der Kardioiden als Rollkurve mit den Gleichungen

$$y = b(2 \sin t - \sin 2t),$$

$$x = b(2 \cos t - \cos 2t)$$

und bilden aus ihnen den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t + \cos 2t}{-\sin t + \sin 2t} = \frac{\sin \frac{3t}{2}}{\cos \frac{3t}{2}} = \operatorname{tg} \frac{3t}{2}.$$

Die Tangente in einem zum Wälzungswinkel t gehörigen Kurvenpunkt hat mithin den Neigungswinkel $\alpha = \frac{3t}{2}$ gegen die positive Richtung der x -Achse. Die Gleichung dieser Tangente lautet dann:

$$\frac{y - b(2 \sin t - \sin 2t)}{x - b(2 \cos t - \cos 2t)} = \frac{\sin \frac{3t}{2}}{\cos \frac{3t}{2}}.$$

$$x \sin \frac{3t}{2} - y \cos \frac{3t}{2} = 2b \sin \frac{t}{2} + b \sin \frac{t}{2} = 3b \sin \frac{t}{2}.$$

Wir bestimmen nun (Abb. 115) den Schnittpunkt W dieser Tangente mit der Doppeltangente ($x = \frac{3b}{2}$) der Kurve. Einsetzen von $x = \frac{3b}{2}$ in die Tangentengleichung liefert:

$$y \cos \frac{3t}{2} = \frac{3b}{2} \sin \frac{3t}{2} - 3b \sin \frac{t}{2},$$

$$y_W = \frac{3b \left(\sin \frac{3t}{2} - 2 \sin \frac{t}{2} \right)}{2 \cos \frac{3t}{2}}.$$

Demnach ist, wenn wir $\sphericalangle WMX$ mit ω_1 bezeichnen,

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{y_W}{\frac{3b}{2}} = \frac{\sin \frac{3t}{2} - 2 \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{3t}{2}} = \frac{3 \sin \frac{t}{2} - 4 \sin^3 \frac{t}{2} - 2 \sin \frac{t}{2}}{4 \cos^3 \frac{t}{2} - 3 \cos \frac{t}{2}},$$

(gemäß den Formeln für $\sin 3\alpha$ und $\cos 3\alpha$) — oder:

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{\sin \frac{t}{2} (1 - 4 \sin^2 \frac{t}{2})}{\cos \frac{t}{2} (4 \cos^2 \frac{t}{2} - 3)} = \operatorname{tg} \frac{t}{2},$$

$$\omega_1 = \frac{t}{2}.$$

Nun hat aber die Tangentenfunktion die Periodizität π , und so befriedigt nicht nur $\alpha = 3\omega$ die Gleichung $\operatorname{tg} \omega_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$, sondern die drei Winkelpaare

$$\begin{aligned} \alpha = 3\omega & \quad \text{oder} \quad \omega_1 = \frac{\alpha}{3} \\ \alpha = 3\omega + \pi & \quad \text{„} \quad \omega_2 = \frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \\ \alpha = 3\omega + 2\pi & \quad \text{„} \quad \omega_3 = \frac{\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Die dreifache Lösung hat ihre Begründung darin, daß es (s. Abb. 115) zu einer vorgelegten Richtung α immer drei parallele Tangenten (ein Tripel) an die Kurve gibt, die ein Tripel von Schnittpunkten mit der Doppeltangente (U, V, W) zur Folge haben. Wir haben so den merkwürdigen Satz erhalten: Die Tripel paralleler Tangenten der Kardioide schneiden die Doppeltangente in Tripeln von Punkten, die vom Mittelpunkt des Grundkreises aus unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ erscheinen.

$$\text{Es ist also } \sphericalangle WMV = \sphericalangle VMU = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Diese Tatsache eröffnet die Möglichkeit, die Kardioide als Hüllkurve solcher Tripel paralleler Tangenten zu zeichnen.

2. Es besteht der Satz: Verschiebt man den Kreis, von welchem die Kardioide die Fußpunktkurve ist (s. Abb. 103), so, daß sein Mittelpunkt auf der Achse innerhalb der Kardioide bleibt, von der Spitze der Kardioide aber nur noch um den halben Radius $\left(\frac{a}{2}\right)$ entfernt ist, so schneidet jeder von der Spitze ausgegangene und hierauf an der Kardioide zurückgeworfene Strahl nach der Reflexion den Kreis so in zwei Punkten, daß das Stück des reflektierten Strahls zwischen der Kardioide und dem einen Kreisschnittpunkt die konstante Länge des halben Radius besitzt. In diesem Punkte wird der Strahl von dem Kreis parallel zur Achse der Kardioide zurückgeworfen. (Abb. 116)

Die Begründung dieses Satzes ergibt sich ohne weiteres aus der Betrachtung der Abb. 113 (S. 117). $OMKP$ ist ein gleichschenkliges Trapez, und die Normale PN halbiert $\sphericalangle QPK$. Ein von O ausgehender Strahl OP , der sich in P an der Kardioide spiegelt, wird somit nach K reflektiert, und beschreibe ich um M mit $MK = a$ den im Satz erwähnten Kreis, so trifft PK die Verlängerung der Kreisnormale MK unter φ , wird also auch unter φ in die Richtung RL zurückgeworfen. KL aber ist, wie ein Blick auf die Abbildung zeigt, der Achse parallel.

Umgekehrt: Jeder zur Achse parallele Strahl muß nach Reflexion am Kreis und danach an der Kardioide durch die Kardioide Spitze O gehen (vgl. Abb. 116).

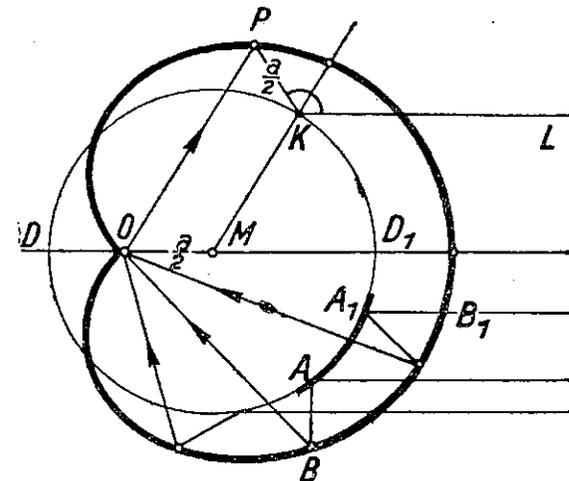


Abb. 116

Denkt man sich das Ganze um die Achse gedreht, so beschreiben die Kardioide und der Kreis zwei Rotationskörper, die also, wenn der Kardioidekörper innen und die Kugel außen spiegelnd belegt sind, achsenparallele Strahlen in der Spitze O konzentrieren. Diese Tatsache hat Siedentopf benutzt, um einen sogenannten Kardioide Kondensator für Dunkelfeldbeleuchtung zu konstruieren. Er verwandte freilich die Körper nicht in ihrer Gesamtheit, sondern nur zwei durch Rotation von Bogenstücken AA_1 bzw. BB_1 entsprechend zugeordnete Kugel- bzw. „Kardioide“zonen.

Unsere Abbildung führt zugleich zu einer einfachen Kurvenkonstruktion. Liegt ein Kreis mit einem Durchmesser DD_1 gezeichnet vor, so ziehe ich parallel zu DD_1 eine Gerade LK bis zum ersten Schnitt K mit dem Kreis, spiegele sie am Radius MK und trage auf dem Spiegelbild von K aus nach außen KP gleich der Hälfte des Kreisradius ab. Denke ich mir nun LK parallel zu sich verschoben, so beschreibt P eine Kardioide.

E. Anwendungen der Integralrechnung

1. Quadratur.

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^\varphi \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi.$$

Setzt man $\varphi = 2t$, so folgt

$$S = 2a^2 \int_0^t \cos^4 t \cdot 2 dt = 4a^2 \int_0^t \cos^4 t dt = 4a^2 \left[\frac{1}{4} \cos^3 t \sin t + \frac{3}{8} \cos t \sin t + \frac{3}{8} t \right]$$

$$= 4a^2 \left[\frac{1}{4} \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{8} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\varphi}{2} \right].$$

Läßt man nun φ von 0 bis π , also $\frac{\varphi}{2}$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so erhält man als Flächeninhalt der halben Kardioide

$$S = 4a^2 \left[\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 + \frac{3\pi}{16} \right] = \frac{3a^2\pi}{4},$$

demnach hat die ganze Kurve den Flächeninhalt

$$F = \frac{3a^2\pi}{2},$$

d. h. ihr Flächeninhalt ist sechsmal so groß wie der des Kreises, aus dem die Kurve durch Abrollen entstanden ist, und $\frac{3}{2}$ mal so groß wie der Inhalt des Kreises, dessen Fußpunktkurve sie ist.

2. Rektifikation. Es ist $dr = -a \sin \varphi d\varphi$, also

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = a^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2 + 4a^2 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi^2$$

$$= \left[4a^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 4a^2 \cos^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi^2$$

$$= 4a^2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \left[\sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] d\varphi^2 = 4a^2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi^2,$$

$$ds = 2a \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi,$$

also

$$s = 2a \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 4a \int \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 4a \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Läßt man φ von 0 bis π wachsen, so ergibt sich als Länge der halben Kardioide $s = 4a$, folglich als Umfang der ganzen Kurve

$$U = 8a.$$

d. h.: Die Kardioide ist achtmal so lang wie der Radius des Kreises, dessen Fußpunktkurve sie ist, oder sechzehnmal so lang wie der Radius des Kreises, durch dessen Abrollen sie entsteht.

15. Die Pascalsche Schnecke

(Etienne Pascal, der Vater des berühmten Blaise Pascal.)

A. Erzeugungsweisen

1. Als Kreiskonchoide (s. § 13): Die Pascalsche Schnecke ist der Ort der Punkte auf allen von einem bestimmten Umfangspunkt eines Kreises ausgehenden Sehnen, die von dem zweiten Durchschnittspunkt der Sehnen mit dem Kreis gleich weit entfernt sind (Abb. 117). M mit dem Durchmesser b sei der gegebene Kreis, a der gegebene Abstand. Man liest aus der Abbildung sofort ab:

für P_1 :

$$OP_1 = OQ + QP_1$$

$$r = b \cos \varphi + a = a + b \cos \varphi,$$

für P_2 :

$$r = -a + b \cos \varphi.$$

Die erste Formel gilt nur für Punkte des äußeren, die zweite nur für Punkte des inneren Bogens. Wir können aber auf die zweite Formel verzichten, wenn wir auch negative Werte von r zulassen. Ein Punkt des inneren Bogens, der mit dem Punkt r_1 ; φ_1 des äußeren Bogens auf demselben Fahrstrahl liegt, hat die Koordinaten $-r_2$; $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. Wir können also als allgemeingültige Formel schreiben:

$$r = a + b \cos \varphi.$$

Führt man kartesische Koordinaten ein, so ergibt sich:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a + b \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$x^2 + y^2 = a \sqrt{x^2 + y^2} + bx,$$

$$a^2 (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - bx)^2 = 0.$$

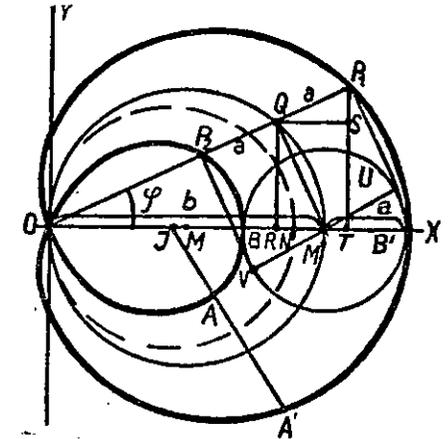


Abb. 117

Ist $a=b$, so ergibt sich als Sonderfall die Kardioiden (§ 14).

2. Als Fußpunktcurve. Zeichnet man Kreis M' mit a und zieht die Tangenten P_1U und P_2V an ihn, so sind $P_1UM'Q$ und $P_2VM'Q$, weil $QM' \perp OP_1$, kongruente Rechtecke, also $\sphericalangle OP_2V = \sphericalangle OP_1U = R$. Wir können also auch sagen:

Nimmt man auf einem Durchmesser eines Kreises vom Radius a einen Punkt O an, der vom Mittelpunkt um die Länge b absteht, so ist die Fußpunktcurve von O in bezug auf den Kreis eine Pascalsche Schnecke.

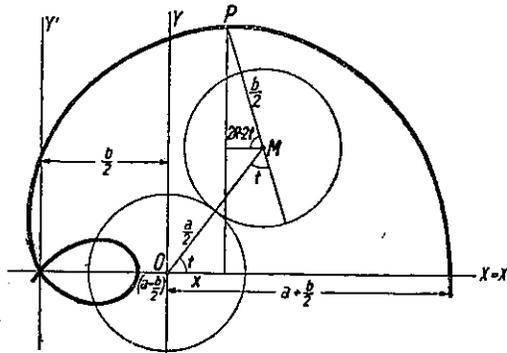


Abb. 118

sowohl der feste O wie der rollende M , denselben Radius $\frac{a}{2}$ haben; die Entfernung des markierten Punktes P von M sei $\frac{b}{2}$; die Anfangslage der Rollbewegung sei die positive x -Achse. Dann folgt aus der Abbildung:

$$y = a \sin t + \frac{b}{2} \sin 2t,$$

$$x = a \cos t + \frac{b}{2} \cos 2t.$$

$$x = a \cos t + b \cos^2 t - \frac{b}{2}.$$

Daraus:

$$\cos t = \frac{-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)b + \frac{a^2}{4}}}{b}.$$

Für die Kardioiden liegt der Festpunkt auf dem Umfang des Kreises.

3. Die Schneckenlinie als Rollkurve (Epitrochoide).

Rollt ein Kreis außen auf einem festen Kreis, so beschreibt ein markierter Punkt, der mit dem rollenden Kreis fest verbunden ist, eine Epitrochoide.

In unserem Fall (Abb. 118) mögen die beiden Kreise,

Verschieben wir das Koordinatensystem um $\frac{b}{2}$ nach y' , setzen also $x = x' - \frac{b}{2}$, $y = y'$, so folgt

$$\cos t = \frac{-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + bx'}}{b}, \quad \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2} - bx'} + a \sqrt{\frac{a^2}{4} + bx'}}{b}.$$

Eingesetzt in die Gleichung:

$$by' = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2} - bx'} + a \sqrt{\frac{a^2}{4} + bx'} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + bx'} \right).$$

Quadrieren und Vereinfachen führt schließlich auf

$$x'^4 + y'^4 - a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - 2bx'y'^2 + 2x'^2 y'^2 - a^2 x'^2 - 2bx'^3 = 0$$

$$a^2(x'^2 + y'^2) - (x'^2 + y'^2 - bx')^2 = 0.$$

Liegt P auf dem Umfang des rollenden Kreises ($\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$), so erhalten wir als Epizykloide die Kardioiden.

4. Ein Gelenkparallelogramm (Abb. 119) mit den Seiten l_1 und l_2 drehe sich mit einer Ecke um O derart, daß l_2 sich im selben Sinne wie l_1 , aber mit der doppelten Umdrehungsgeschwindigkeit, bewege. Dann beschreibt die Gegenecke eine Pascalsche Schnecke.

Man liest aus der Abbildung leicht die Gleichungen ab:

$$y = l_1 \sin \varphi + l_2 \sin 2\varphi,$$

$$x = l_1 \cos \varphi + l_2 \cos 2\varphi.$$

Sie entsprechen den unter Nr. 3 gegebenen Kurvengleichungen.

Die Kardioiden ergibt sich für $l_2 = \frac{l_1}{2}$ (s. § 14, A 5).

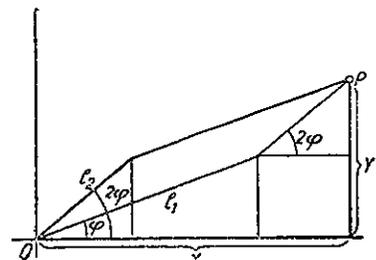


Abb. 119

B. Auswertung der Kurvengleichungen

1. Da die eine Kurvengleichung y nur im Quadrat zeigt und in der anderen φ nur in der Kosinusfunktion vertreten ist, zeigen zunächst beide Gleichungen, daß die Kurve zur x -Achse symmetrisch ist. Die Polargleichung allein ergibt: Für $\varphi = 0$ hat r seinen größten Wert $a+b$. Wächst φ , so nimmt r ab. Für $\varphi = 90^\circ$ wird $r = a$. r wird 0 für $a = -b \cos \varphi$. $\cos \varphi = -\frac{a}{b}$. Wächst φ über diesen Wert hinaus, so wird r negativ: der Fahrstrahl fängt an, die untere Hälfte des inneren Bogens zu beschreiben. Für $\varphi = 180^\circ$ ($r = a - b = -(b - a)$) ist der Schnittpunkt des inneren Bogens mit der x -Achse erreicht. Bei weiter wachsendem φ ist r immer noch negativ und ergibt die Punkte der oberen Hälfte des inneren Bogens bis zum Grenzwert $\cos \varphi' = \cos(4R - \varphi) = \cos \varphi = -\frac{a}{b}$. Von da ab bis $\varphi = 360^\circ$ wird r wieder positiv und beschreibt die untere Hälfte des äußeren Bogens.

Zum O -Punkt ($r = 0$) gehören zwei Werte φ : φ' und $360^\circ - \varphi'$ oder $-\varphi'$. Der O -Punkt ist Knotenpunkt. Seine Existenz als Kurvenpunkt hängt jedoch von $\cos \varphi = -\frac{a}{b}$ ab, d. h. er besteht nur für $b > a$. Ist $b = a$, so ergibt sich als Sonderfall eine Kurve mit Spitze in O , die Kardioiden (§14). Ist $b < a$, so ist $r = 0$ unmöglich, und es erscheint die Schnecke in der Form der Abb. 120.

2. Je größer a im Vergleich zu b ist, um so mehr flacht sich die auf der linken Seite der Kurve liegende sattelförmige Einbuchtung ab. Um die Grenzlage festzustellen, von der ab diese Einbuchtung fehlt, bestimmen wir zunächst den Schnittpunkt der Kurve mit der negativen x -Achse, indem wir $y = 0$ setzen, und erhalten aus der Kurvengleichung

$$a^2 x^2 - (x^2 - b x)^2 = 0,$$

$$x = b \pm a,$$

$$x = b - a$$

(nur ein negatives x kommt in Betracht).

Nun denken wir uns durch diesen Schnittpunkt eine Parallele zur y -Achse

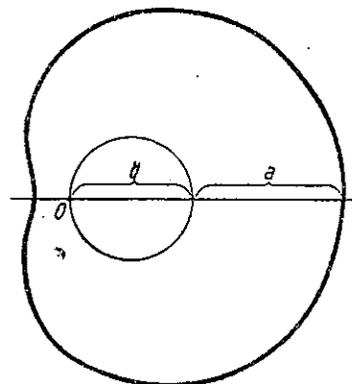


Abb. 120

gelegt und bestimmen deren Schnittpunkte mit der Kurve. $x = b - a$ in die Kurvengleichung eingesetzt liefert

$$y = \pm \sqrt{a^2 - 2b^2 + 4ab - 2a^2 + 2b^2 - 2ab \pm a\sqrt{(a-2b)^2}}.$$

Das positive Vorzeichen vor der inneren Wurzel liefert wieder $y = 0$; wir nehmen also die Innenwurzel negativ und erhalten

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2a(2b-a)}.$$

Ist $a = 2b$, so wird die Wurzel Null: die Parallele hat nur den Schnittpunkt auf der x -Achse mit der Kurve gemein. Ist $a < 2b$, so erhalten wir noch 2 symmetrisch zur x -Achse gelegene Schnitte: die Kurve hat eine Einbuchtung. Ist $a > 2b$, so wird die Wurzel imaginär: die Kurve ist ohne Einbuchtung.

C. Weitere Erzeugungsweisen

5. Als Inverse eines Kegelschnittes. Die Bedingungsgleichung der Inversion sei $rr' = K^2$, $\varphi = \varphi'$, das Zentrum der Inversion liege in einem Brennpunkt des Kegelschnittes. Ist dessen Gleichung, auf diesen Brennpunkt bezogen,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

so folgt, da $r = \frac{K^2}{r'}$: $\frac{K^2}{r'} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$,

$$r' = \frac{K^2}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi) = \frac{K^2}{p} + \frac{K^2}{p} \varepsilon \cos \varphi'.$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung $r = a + b \cos \varphi$ der Schnecke, und wir stellen also fest: Ist $\frac{K^2}{p} \varepsilon > \frac{K^2}{p}$, d. h. ist $\varepsilon > 1$, so geht aus einer Hyperbel (für die $\varepsilon > 1$) eine Schnecke mit Doppelpunkt hervor. $\varepsilon = 1$: Aus einer Parabel wird eine Kardioiden. $\varepsilon < 1$ bestimmt eine Ellipse, und als ihre Inverse erscheint eine Schnecke ohne Doppelpunkt. Aus den unendlich fernen Punkten der Hyperbel bzw. der Parabel wird der Doppelpunkt der Schnecke bzw. die Spitze der Kardioiden.

6. Hat man ein in einen festen Kreis eingeschriebenes Dreieck, dessen Ecke A festliegt und dessen Winkel $A = 2\alpha$ konstant bleibt, so ist der Ort der Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise dieses veränderlichen Dreiecks eine Schneckenlinie.

Ableitung für den Inkreismittelpunkt (Abb. 121): Der halbe Dreiecksumfang s läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken. Da $CE = CF$, $BE = BD$ und $AF = AD$, so ist einmal ($R =$ Radius des Umkreises):

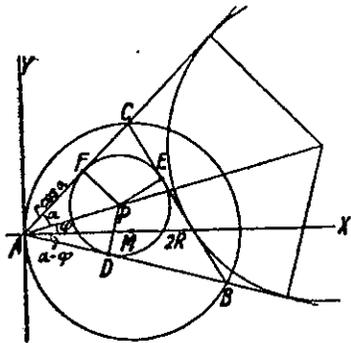


Abb. 121

$$s = AF + CE + BD = AF + CE + BE = AF + CB = r \cos \alpha + 2R \sin 2\alpha$$

Andererseits ist

$$AB = 2R \cos(\alpha - \varphi)$$

und

$$AC = 2R \cos(\alpha + \varphi),$$

demnach

$$s = R [\sin 2\alpha + \cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi)].$$

Gleichsetzung beider s -Werte ergibt

$$r \cos \alpha + 2R \sin 2\alpha = R \sin 2\alpha + 2R \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$r = \frac{2R \sin \alpha \cos \alpha + 2R \cos \alpha \cos \varphi - 4R \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$r = 2R \cos \varphi - 2R \sin \alpha,$$

$$\text{I) } r = -2R \sin \alpha + 2R \cos \varphi.$$

Wir geben dann noch die Ableitung für den Ankreismittelpunkt der Seite a . Man erhält ähnlich wie eben:

$$s = r \cos \alpha = R (\sin 2\alpha + \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha - \varphi))$$

$$= 2R \sin \alpha \cos \alpha + 2R \cos \alpha \cos \varphi,$$

$$\text{II) } r = 2R \sin \alpha + 2R \cos \varphi.$$

Die scheinbare Unstimmigkeit zwischen den Formeln I und II läßt sich durch folgende Überlegung beheben. Die Formel I gilt nur für den inneren Bogen der Schneckenlinie, Formel II für den äußeren Bogen. Lassen wir auch negative r zu, so schließt, wie schon die Besprechung der Polargleichung der Kurve zeigte, die Gleichung II, die unserer Form $r = a + b \cos \varphi$ entspricht, die Gleichungsform I ein. Der Sonderfall der *Kardioide* scheidet bei dieser Erzeugungsweise aus, da $\sin \alpha = 1$, also der Dreieckswinkel $2\alpha = 180^\circ$ sein müßte.

7. Bewegt sich ein konstanter Winkel so, daß seine Schenkel zwei feste Kreise ständig berühren, so beschreibt sein Scheitelpunkt eine Pascalsche Schnecke.

Seien A und B die festen Kreise mit den Radien ρ_1 und ρ_2 und der konstante Winkel ω in einer Stellung FSH (Abb. 122). Man ziehe zunächst durch A und B die Parallelen AK und BD zu den Schenkeln des Winkels ω , die sich in C schneiden. Da $\sphericalangle ACB = \omega$, bewegt sich C auf einem festen Kreis über AB , der ω als Umfangswinkel

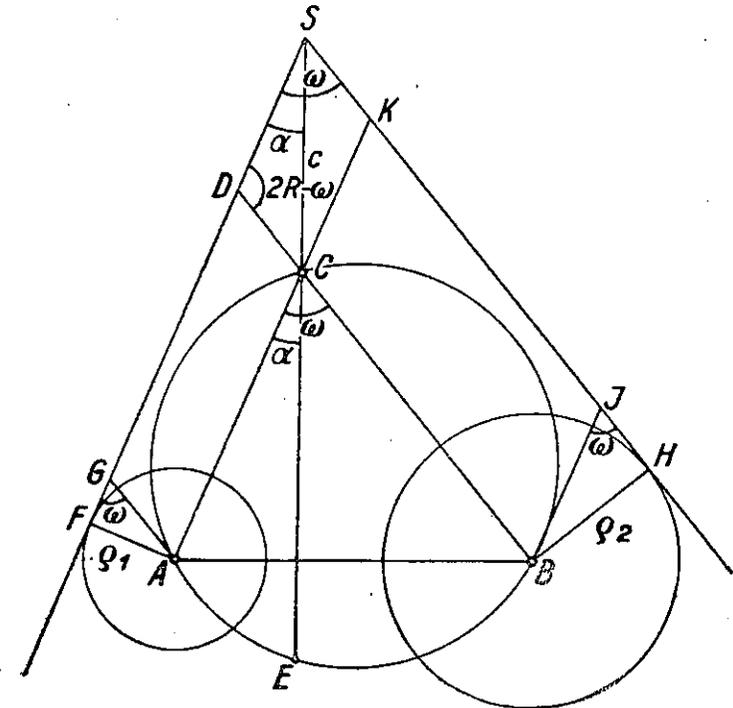


Abb. 122

winkel faßt. Man ziehe weiter $AG \parallel CD$ und $BJ \parallel CK$. Dann ist $CD = GA = \frac{\rho_1}{\sin \omega}$ und $DS = CK = BJ = \frac{\rho_2}{\sin \omega}$. Also sind in dem Dreieck DCS die Seiten DS und DC samt dem Winkel $SDC = 2R - \omega$ als konstante Stücke bekannt, mithin SC ebenfalls als konstant berechenbar ($= c$), ebenso wie der Winkel $DS C = \alpha$. Ziehe ich SC durch bis E , so ist also auch $\sphericalangle ACE = \alpha = \text{const.}$ Da aber in einem festen Kreis zu einem bestimmten Umfangswinkel (α)

eine bestimmte Bogenlänge (AE) gehört, so ist also Punkt E ein fester Punkt, der bei der Bewegung des Winkels ω seinen Ort nicht verändert. Punkt S beschreibt demnach gemäß der Bestimmung der Kreiskonchoide eine Pascalsche Schnecke.

Mit einem Sonderfall der Pascalschen Schnecke befaßt sich folgende Erzeugungsweise:

8. Durch Bewegung zweier Strahlen mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten, die sich wie 2:3 verhalten.

Zeichnet man eine Schneckenlinie mit $a = \frac{b}{2}$, so ergibt die Winkelberechnung (s. Abb. 123) für einen Punkt P_1 des äußeren Bogens, daß $\sphericalangle P_1 M X = \frac{3}{2} \sphericalangle P_1 O X$ ist. Wir können demnach sagen: *Drehen sich zwei Strahlen derart um zwei feste Punkte, daß ihre gleichförmigen Winkelgeschwindigkeiten sich wie 2:3 verhalten, so beschreibt ihr Schnittpunkt eine Schnecke, für die $a = \frac{b}{2}$ ist.* Daß durch diese Bewegung auch die Punkte der Schleife erhalten werden, zeigt die Abbildung. Zu Punkt P_2 z. B. gehört der Drehungswinkel $\sphericalangle X O N = 2R + 2a$ des linken Strahls und $\sphericalangle X M T = 3R + 3a = \frac{3}{2} \sphericalangle X O N$ des rechten Strahls.

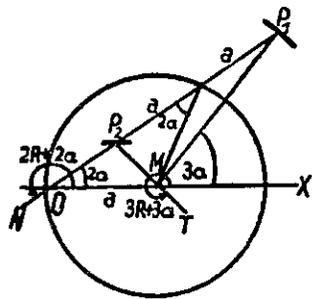


Abb. 123

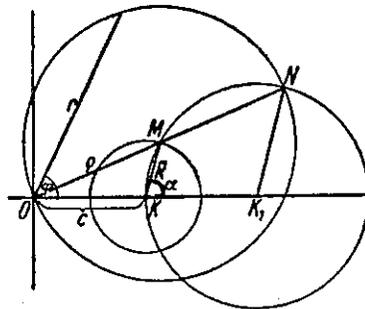


Abb. 124

9. Als Hüllkurve (1. Art): Die Pascalsche Schnecke ist Hüllkurve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem festen Kreise liegen und die durch einen festen Punkt der Ebene gehen.

Sei K (Abb. 124) der gegebene Kreis und O der feste Punkt, Kreis M also einer der die Kurve erzeugenden Kreise. a sei die den Kreis M charakterisierende Veränderliche. OM läßt sich nach dem Kosinussatz aus $\triangle OMK$ ausdrücken:

$$OM^2 = c^2 + R^2 + 2cR \cos a,$$

und da M die Koordinaten $c + R \cos a$; $R \sin a$ hat, so lautet die Gleichung des Kreises M :

$$F(x, y, a) \equiv (x - c - R \cos a)^2 + (y - R \sin a)^2 = c^2 + R^2 + 2cR \cos a.$$

Vereinfacht:

$$F \equiv x^2 - 2cx - 2Rx \cos a + y^2 - 2Ry \sin a = 0.$$

Wir differenzieren:

$$\frac{\delta F}{\delta a} \equiv 2Rx \sin a - 2Ry \cos a = 0$$

$$x \sin a = y \cos a$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{y}{x}.$$

Daraus folgt:

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

$$\cos a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin^2 a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = 1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2},$$

$$\sin a = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung F in ihrer vereinfachten Form ein, so erhalten wir:

$$x^2 - 2cx - \frac{2Rx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y^2 - \frac{2Ry^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2cx = \frac{2R(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2R\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Quadriert: } 4R^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - 2cx)^2 = 0.$$

Das ist aber die Gleichung einer Schnecke für $a = 2R$ und $b = 2c$.

Liegt O auf dem Kreis K , ist also $R = c$, so liefert diese Erzeugungsweise eine *Kardioide*.

Verlängert man in Abb. 124 OM und OK um sich selbst bis N bzw. K_1 , so beschreibt, während M den Kreis K durchläuft, N den Kreis K_1 . Ich kann danach unsere Begriffsbestimmung als Hüllkurve auch in folgender Form aussprechen:

Die Pascalsche Schnecke ist Hüllkurve aller Kreise (M), die zum Durchmesser (ON) die Strecke haben, die einen festen Punkt (O) mit dem beweglichen Punkt (N) eines festen Kreises (K_1) verbindet.

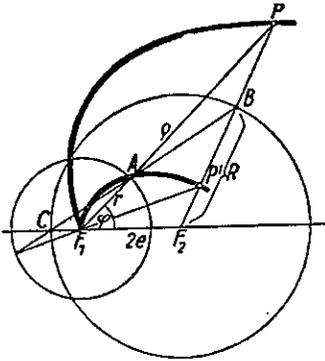


Abb. 125

10. Man kann sich die Pascalsche Schnecke erzeugt denken als 3. Ecke (P , Abb. 125) eines Dreiecks, dessen beiden anderen Ecken (A und B) sich auf zwei Kreisumfängen (F_1 mit Radius r , F_2 mit Radius R) bewegen, während sich die Grundlinie (AB) um einen der Schnittpunkte (C) der Kreise mit ihrer Zentrale dreht und die beiden anderen Seiten (AP und BP) um die beiden Kreismittelpunkte rotieren.

Wendet man auf das Dreieck PF_1F_2 den Satz des Menelaus bezüglich der Transversale CB an, so ist

$$F_1A \cdot PB \cdot CF_2 = AP \cdot BF_2 \cdot CF_1$$

oder, da

$$PF_2 = \sqrt{\varrho^2 + 4e^2 - 4e\varrho \cos \varphi}$$

$$r(\sqrt{\varrho^2 + 4e^2 - 4e\varrho \cos \varphi} - R) \cdot R = (\varrho - r) \cdot R \cdot (R - 2e),$$

woraus

$$\varrho - 4e \cos \varphi = \frac{(R-2e)^2}{r^2} \cdot \varrho + \frac{(R-2e)4e}{r},$$

$$\varrho \left(1 - \frac{(R-2e)^2}{r^2}\right) = 4e \cos \varphi + \frac{(R-2e)4e}{r},$$

$$\varrho = \frac{(R-2e)4er}{r^2 - (R-2e)^2} + \frac{4er^2}{r^2 - (R-2e)^2} \cos \varphi,$$

also ein Ausdruck von der Form der Polargleichung der Pascalschen Schnecke

$$\varrho = a + b \cos \varphi.$$

Aus unserer, nach dem Satz des Menelaus gewonnenen Gleichung folgt auch:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{F_1A}{BF_2} \cdot \frac{CF_2}{CF_1} = \frac{rR}{R(R-2e)} = \frac{r}{R-2e}.$$

Ich kann demnach auch sagen:

11. Die Pascalsche Schnecke ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Kreisumfängen sich verhalten wie der Radius des einen Kreises zur Differenz aus dem anderen Kreisradius und dem Mittelpunktsabstand der beiden Kreise. Für den Sonderfall der Kardioide ($a = b$) versagt diese Konstruktion, da die Bedingung

$$\frac{(R-2e)4er}{r^2 - (R-2e)^2} = \frac{4er^2}{r^2 - (R-2e)^2},$$

$$\frac{4er[(R-2e) - r]}{[(R-2e) + r][(R-2e) - r]} = 0,$$

$$\frac{4er}{[(R-2e) + r]} = 0$$

durch $e = 0$ zu befriedigen wäre, womit F_1 und F_2 zusammenfielen.

D. Die Pascalsche Schnecke als anallagmatische Kurve

Vorbemerkung (s. Abb. 126). Für zwei bzgl. O inverse Punkte P und P' mit den Fahrstrahlen r und r' und den kartesischen Koordinaten $x; y$ bzw. $x'; y'$ gilt die Gleichung

$$\frac{x'}{x} = \frac{r'}{r} = \frac{rr'}{r^2}.$$

Setzen wir hierin, indem wir den Radius des Inversionskreises mit K bezeichnen, $rr' = K^2$, so folgt

$$x' = \frac{K^2x}{r^2} = \frac{K^2x}{x^2 + y^2}$$

und entsprechend

$$y' = \frac{K^2y}{x^2 + y^2}.$$

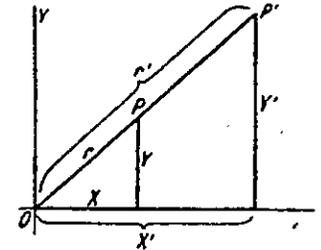


Abb. 126

Gehen wir nun von der Vermutung aus, daß der innere Kurvenzug (die Schleife) der Pascalschen Schnecke sich durch Inversion in den äußeren transformieren lasse, so müßte (s. Abb. 117) der Mittelpunkt J des Inversionskreises so liegen, daß der Durchmesser ON durch B und B' harmonisch geteilt wäre. Bezeichne ich OJ mit K , so müßte danach die Proportion bestehen:

$$\frac{OB}{BN} = \frac{OB'}{B'N}$$

oder

$$\frac{b-a}{2K - (b-a)} = \frac{b+a}{(b+a) - 2K},$$

$$(b^2 - a^2) - (b - a) 2K = (b + a) 2K - (b^2 - a^2),$$

$$K = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Daß dieser Kreis J nun wirklich der gesuchte Inversionskreis ist, der die Kurve in sich selber überführt, läßt sich folgendermaßen zeigen. Verschiebt man das kartesische Koordinatensystem von O nach J , setzt also $y = y'$ und $x = x' + K$, so lautet die Kurvengleichung für das neue System statt

$$a^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - bx)^2 = 0$$

nun

$$a^2(x'^2 + y'^2 + K^2 + 2Kx') - (x'^2 + y'^2 + K^2 + 2Kx' - bx' - bK)^2 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich übersichtlicher schreiben in der Form:

$$[x'^2 + y'^2 + K^2]^2 + 2cx'[x'^2 + y'^2 + K^2] + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = 0,$$

worin $c = 2K - b$ und A, B, C gewisse konstante Koeffizienten sind. Wenden wir auf diese Gleichung nun unsere oben stehende inverse Transformation

$$x' = \frac{K^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{K^2 y}{x^2 + y^2}$$

an, so erhalten wir:

$$\left[\frac{K^4 x^2}{(x^2 - y^2)^2} + \frac{K^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + K^2 \right]^2 + \frac{2cK^2 x}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{K^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{K^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + K^2 \right]$$

$$+ A \frac{K^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} + B \frac{K^4 xy}{(x^2 + y^2)^2} + C \frac{K^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch

$$\frac{K^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

so ergibt sich schließlich

$$[x^2 + y^2 + K^2]^2 + 2cx[x^2 + y^2 + K^2] + Ax^2 + Byx + Cy^2 = 0,$$

also die ursprüngliche Gleichung. Wir haben damit bewiesen, daß die Pascalsche Schnecke durch Inversion an dem Kreis J mit dem Radius $K = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ (in Abb. 117 gestrichelt gezeichnet) in sich selber übergeht.

Bei der Kardioide als Sonderfall der Pascalschen Schnecke versagt diese inverse Abbildungsmethode, da für sie $a = b$, also $K = 0$ ist. — Da $b > a$ sein muß, besteht diese Eigenschaft des Anallagmatismus nur für Pascalsche Schnecken mit Schleife.

Auf dieser Tatsache, daß die Schnecke eine anallagmatische Kurve ist, beruht eine neue Umhüllungskonstruktion:

12. Als Hüllkurve (2. Art): Die Tatsache, daß durch Inversion an Kreis J mit dem Radius $\frac{b^2 - a^2}{2b}$ die Schleife der Kurve in ihren äußeren Zug transformiert werden kann, legt den Gedanken nahe, ob sich nicht — wie bei allen anallagmatischen Kurven — zwischen den inneren und äußeren Kurvenzug eine Schar von berührenden Kreisen einschreiben ließe, die den Inversionskreis rechtwinklig kreuzen, bei der Inversion also in sich selber übergehen. Man vermutet zugleich, daß die Mittelpunkte dieser Kreise auf dem Kreise mit dem Durchmesser b liegen könnten. So sagen wir:

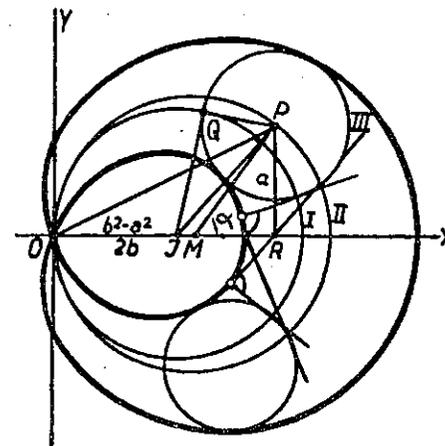


Abb. 127

Die Pascalsche Schnecke ($b > a$) ist Hüllkurve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem gegebenen Kreis (M mit dem Durchmesser b) liegen und die einen zweiten festen Kreis (J) rechtwinklig schneiden, der den ersten festen Kreis von innen (in O) berührt.

Beweis (Abb. 127): Wir führen als Veränderliche $\sphericalangle PMX = \alpha$ ein und setzen zur Abkürzung vorübergehend den Radius des Kreises J $\frac{b^2 - a^2}{2b} = c$ und denjenigen des Kreises M $\frac{b}{2} = \rho$. Dann ist $JM = \rho - c$, und da $MP = \rho$, so ergibt der Kosinussatz für $\triangle JMP$:

$$JP^2 = \rho^2 + (\rho - c)^2 + 2\rho(\rho - c)\cos\alpha.$$

Da weiter Kreis P den Kreis J rechtwinklig schneidet, also $\sphericalangle JQP = 90^\circ$ ist, so folgt

$$QP^2 = JP^2 - JQ^2 = \rho^2 + (\rho - c)^2 + 2\rho(\rho - c)\cos\alpha - c^2.$$

P hat die Koordinaten $JM + MR = \rho + \rho\cos\alpha$ und $PR = \rho\sin\alpha$. Demnach lautet die Gleichung des Kreises P :

$$F(x, y, \alpha) \equiv (x - \rho - \rho\cos\alpha)^2 + (y - \rho\sin\alpha)^2 = \rho^2 + (\rho - c)^2 + 2\rho(\rho - c)\cos\alpha - c^2,$$

vereinfacht:

$$F \equiv x^2 - 2\rho x - 2\rho x\cos\alpha + y^2 - 2\rho y\sin\alpha = -2\rho c - 2\rho c\cos\alpha.$$

Wir differenzieren:

$$\frac{\delta F}{\delta a} \equiv 2 \rho x \sin a - 2 \rho y \cos a = \rho c \sin a$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{y}{x-c}.$$

Daraus folgt:

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{(x-c)^2}{(x-c)^2 + y^2}, \quad \cos a = \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

$$\text{und } \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}.$$

Wir setzen diese Werte in die vereinfachte Gleichung für F ein:

$$x^2 - 2 \rho x - \frac{2 \rho x (x-c)}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} + y^2 - \frac{2 \rho y^2}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = -2 \rho c - \frac{2 \rho c (x-c)}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \rho x + y^2 + 2 \rho c &= \frac{2 \rho x (x-c) + 2 \rho y^2 - 2 \rho c (x-c)}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} \\ &= \frac{2 \rho (x^2 - 2 c x + y^2 + c^2)}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} \\ &= \frac{2 \rho [(x-c)^2 + y^2]}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = 2 \rho \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Wir quadrieren:

$$[x^2 - 2 \rho x + y^2 + 2 \rho c]^2 = 4 \rho^2 [(x-c)^2 + y^2]$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 2 \rho x + y^2)^2 + 4 \rho c (x^2 - 2 \rho x + y^2) + 4 \rho^2 c^2 \\ = 4 \rho^2 x^2 - 8 \rho^2 c x + 4 \rho^2 c^2 + 4 \rho^2 y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - 2 \rho x)^2 + 4 \rho c x^2 - 8 \rho^2 c x + 4 \rho c y^2 + 4 \rho^2 c^2 \\ = 4 \rho^2 x^2 - 8 \rho^2 c x + 4 \rho^2 c^2 + 4 \rho^2 y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - 2 \rho x)^2 = x^2 (4 \rho^2 - 4 \rho c) + y^2 (4 \rho^2 - 4 \rho c) \\ = (4 \rho^2 - 4 \rho c) (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Führen wir wieder $\rho = \frac{b}{2}$ und $c = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ ein, so folgt endlich

$$\begin{aligned} (4 \rho^2 - 4 \rho c) (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - 2 \rho x)^2 = 0 \\ a^2 (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - b x)^2 = 0, \end{aligned}$$

womit der Beweis erbracht ist.

Bei der *Kardioide* versagt natürlich diese Hüllkonstruktion, da bei ihr ein Inversionskreis fehlt.

E. Tangentenkonstruktionen

1. Als Epitrochoide. Da D_1 und D_2 (s. Abb. 128) die augenblicklichen Drehpunkte sind, stellen $P_1 D_1$ bzw. $P_2 D_2$ die Kurvennormalen dar.

2. Als Konehoide. Der Radius QM und das Lot in O auf OQ ergeben N als augenblicklichen Drehpunkt; mithin sind NP_1 und NP_2 Kurvennormalen. Da wir eben sahen, daß D_1 und D_2 auch auf den betreffenden Kurvennormalen liegen, so sind P_1, D_1, N , bzw. P_2, D_2, N Punkte einer Geraden.

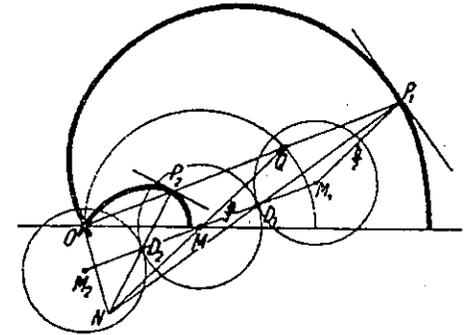


Abb. 128

Da QMN Durchmesser des Leitkreises M ist und $\sphericalangle QON = R$, muß N auf dem Leitkreis M liegen. Also ergibt sich als einfachste Tangentenkonstruktion: Bringe OP_1 in Q mit dem Leitkreis zum Schnitt, ziehe den Durchmesser QMN und dann die Normale NP_1 .

F. Vorrichtung zur mechanischen Erzeugung einer Schneckenlinie (Abb. 129)

Es ist $QM = OM = \frac{b}{2}$ und $QP = a$. Der Zirkel wird mit O und M fest aufgesetzt. Dreht man MQ um M , so beschreibt Q den Grundkreis und P die Schneckenlinie.

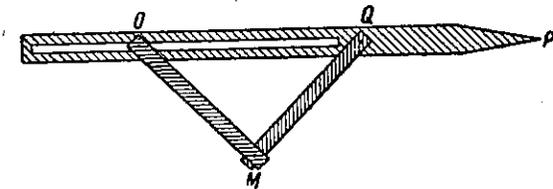


Abb. 129

G. Verwendung zur Dreiteilung des Winkels

Da in Abb. 123 $\sphericalangle P_1 M X = 3 \cdot \sphericalangle O P_1 M$, so könnte die Pascalsche Schnecke, bei der $a = \frac{b}{2}$ ist, zur Dreiteilung eines in M anzutragenden Winkels verwandt werden.

H. Quadratur der Pascalschen Schnecke

Es ist nach der Formel $J = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi$ der Inhalt des halben, von r überstrichenen Flächenraumes

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\pi (a + b \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \left[\int a^2 d\varphi + \int 2ab \cos \varphi d\varphi + \int b^2 \cos^2 \varphi d\varphi \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2} \left[a^2 \varphi + 2ab \sin \varphi + \frac{b^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{b^2 \varphi}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left(a^2 \pi + \frac{b^2 \pi}{2} \right),$$

demnach die Gesamtfläche

$$F = a^2 \pi + \frac{b^2 \pi}{2}.$$

Sonderfall der Kardioiden ($a = b$):

$$F = \frac{3a^2 \pi}{2}.$$

16. Die kartesischen Ovale

A. Erste Erzeugungsweise

Ein kartesisches Oval ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 , jeder Abstand mit einem Faktor a bzw. β multipliziert, eine konstante Summe haben:

$$\alpha \rho_1 + \beta \rho_2 = c.$$

Für die Punkte T auf dem Mittellot von $F_1 F_2$ (Abb. 130) muß sein

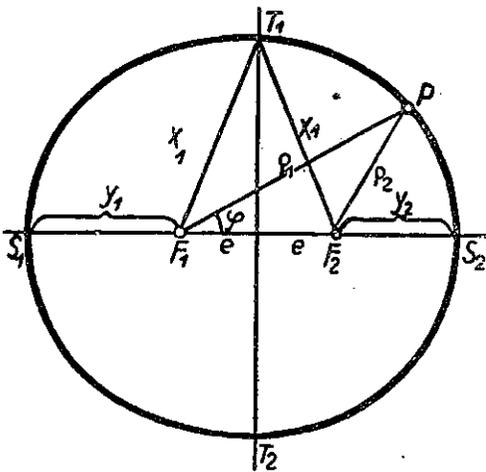


Abb. 130

$$a x_1 + \beta x_2 = c,$$

$$x_1 = \frac{c}{a + \beta}.$$

Zur Bestimmung der Scheitelpunkte S_1 und S_2 ergibt sich:

$$a y_1 + \beta (2e + y_1) = c,$$

$$y_1 = \frac{c - 2\beta e}{a + \beta}$$

und y_2 aus

$$a (2e + y_2) + \beta y_2 = c$$

zu

$$y_2 = \frac{c - 2ae}{a + \beta}.$$

Aus diesen Gleichungen sind die vier „Scheitelpunkte“ rechnerisch leicht zu bestimmen.

Für unsere Zeichnung sind $a = 3$, $\beta = 2$, $c = 13\frac{1}{2}$ cm, $e = 1,0$ cm angenommen; allgemein sei $a > \beta$ und $\frac{c}{a} > 2e$ vorausgesetzt.

Die *Ellipsen* kann für $a = \beta$, die *Hyperbel* $a = -\beta$ als Sonderfall der kartesischen Ovale angesehen werden; indessen seien diese beiden Kurven im folgenden unberücksichtigt gelassen.

B. Ableitung der Kurvengleichungen. Weitere Erzeugungsweisen

1. Die Definitionsgleichung $a \rho_1 + \beta \rho_2 = c$ stellt die Kurve in bipolaren Koordinaten dar.

2. Um auf gewöhnliche Polarkoordinaten zu kommen, nehmen wir F_1 zum Pol und demnach $\rho_1 = r$ als Fahrstrahl. Der Kosinussatz ergibt dann (s. Abb. 130):

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1^2 + 4e^2 - 4e \rho_1 \cos \varphi}.$$

Nun ist $a \rho_1 + \beta \rho_2 = c$, also

$$a \rho_1 + \beta \sqrt{\rho_1^2 + 4e^2 - 4e \rho_1 \cos \varphi} = c,$$

$$\beta \sqrt{\rho_1^2 + 4e^2 - 4e \rho_1 \cos \varphi} = c - a \rho_1,$$

$$\rho_1^2 (a^2 - \beta^2) - \rho_1 (2ac - 4e\beta^2 \cos \varphi) = 4e^2 \beta^2 - c^2,$$

$$\rho_1^2 - \rho_1 \left(\frac{2ac}{a^2 - \beta^2} - \frac{4e\beta^2}{a^2 - \beta^2} \cos \varphi \right) = \frac{4e^2 \beta^2 - c^2}{a^2 - \beta^2}.$$

Wir setzen:

$$\rho_1 = r, \quad \frac{2ac}{a^2 - \beta^2} = a, \quad \frac{-4e\beta^2}{a^2 - \beta^2} = b, \quad \frac{c^2 - 4e^2 \beta^2}{a^2 - \beta^2} = d^2.$$

$$r^2 - r(a + b \cos \varphi) + d^2 = 0.$$

Es fällt auf, daß diese Gleichung quadratisch ist, daß also zu jedem Winkel φ zwei Kurvenpunkte gehören, während die Grunddefinition nur einen Kurvenpunkt zu jedem Fahrstrahl liefert. Um uns hierüber Klarheit zu verschaffen, konstruieren wir die Kurve (Abb. 131) nach der Polargleichung für die Werte $a = 3$, $\beta = 2$, $c = 13\frac{1}{2}$ cm, $e = 0,25$ cm, demnach $a = 4$, $b = -0,8$, $d^2 \approx 2$ (Abb. 130 auf $\frac{1}{4}$ verkleinert). Es ergibt sich nicht nur der innere Kurvenzug, der mit dem in der Abb. 130 übereinstimmt, sondern dazu das zweite, äußere Oval. Der Grund

dafür, daß die Polargleichung zwei Ovale liefert, liegt darin, daß sie sich nicht ändert, wenn man $-\beta$ statt $+\beta$ setzt. Das äußere Oval zeigt mithin die Kurve $a \rho_1 - \beta \rho_2 = c$.

Die Pascalsche Schnecke kann als Sonderfall der kartesischen Ovale angesehen werden. Ist $d^2 = 0$, so folgt die Gleichung der Schneckenlinie $r = a + b \cos \varphi$. Und gehen wir in der Spezialisierung noch weiter und nehmen außer $d^2 = 0$ auch $a = b$, so ergibt sich die Kardioide mit der Gleichung $r = a(1 + \cos \varphi)$.

3. Führt man in die Polargleichung $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ein, so erhält man eine Gleichung in kartesischen Koordinaten

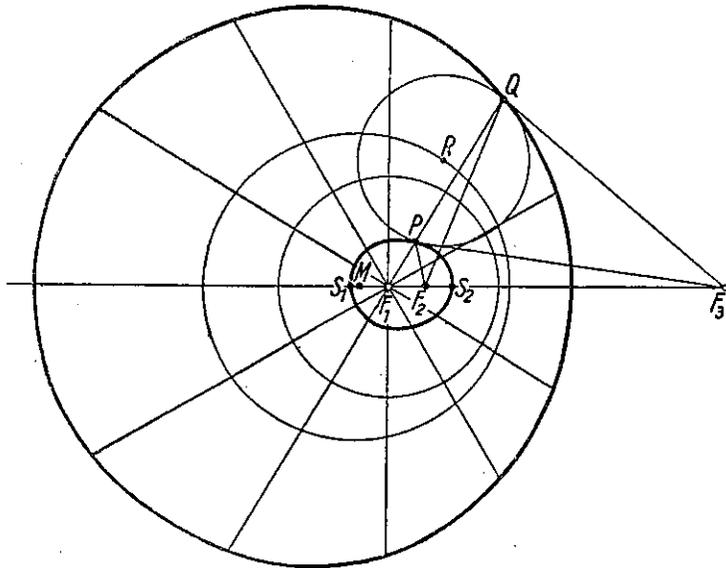


Abb. 131

$$x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} \left(a + \frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + d^2 = 0,$$

$$a \sqrt{x^2 + y^2} = bx - x^2 - y^2 - d^2.$$

Setzt man unter Verschiebung der y -Achse $x + \frac{b}{2}$ statt x , so ergibt sich nach einigen Umformungen eine Gleichung der Art

$$(x^2 + y^2 - f^2)^2 + g(x - h) = 0.$$

Diese Gleichung besteht in ihrem ersten Summanden auf der linken Seite aus einer Kreisgleichung, während der zweite Summand eine Gerade darstellt. Man wird so zu einer neuen Kurvendefinition geführt:

2. Erzeugungsweise (Abb. 132). Gegeben ein Kreis O mit dem Radius f und eine Gerade L im Abstand h vom Kreismittelpunkt. Gesucht ist der geometrische Ort der Punkte, für die die vierte Potenz der Tangente an den Kreis und der Abstand von der Geraden L in einem bestimmten Verhältnis g stehen.

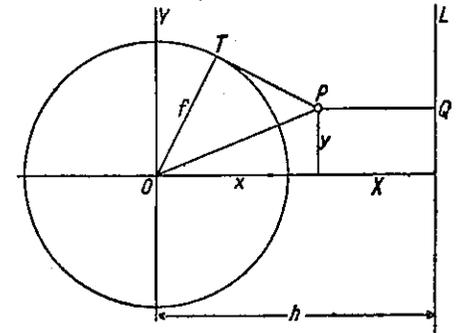


Abb. 132

Man liest aus der Abbildung ab:

$$PT = \sqrt{x^2 + y^2 - f^2}, \quad PQ = h - x,$$

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2 - f^2})^4}{h x} = g,$$

$$(x^2 + y^2 - f^2)^2 + g(x - h) = 0.$$

Eine Spezialisierung dieser Erzeugungsweise auf die Pascalsche Schnecke ist unmöglich, da $f^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + d^2$ im Falle $d = 0$ eine negative Größe, der Radius des Kreises also imaginär wäre.

3. Die Schnittlinie zweier Rotationskegel mit parallelen Achsen projiziert sich auf eine zu diesen Achsen senkrechte Ebene in einem kartesischen Oval. Die Schnittlinie der beiden Kegel kann, wie Abb. 133 zeigt, punktweise in der Art gefunden werden, daß man senkrecht zu den Achsen eine Reihe von Schnitten durch die beiden Kegel legt und für je zwei sich bildende Schnittkreise die Schnittpunkte festlegt. Bezeichne ich die Grundkreisradien der Kegel mit r_1 und r_2 , ihre Höhen mit h_1 und h_2 , die Höhe, in der eine Schnittebene durch die Kegel geführt wird, mit x und die Radien der beiden Schnittkreise mit ρ_1 und ρ_2 , so bestehen die beiden Proportionen:

$$\frac{h_1 - x}{h_1} = \frac{\rho_1}{r_1}, \quad \frac{h_2 - x}{h_2} = \frac{\rho_2}{r_2},$$

$$h_1 r_1 - x r_1 = h_1 \rho_1, \quad h_2 r_2 - x r_2 = h_2 \rho_2,$$

$$x = \frac{h_1 r_1 - h_1 \rho_1}{r_1}, \quad x = \frac{h_2 r_2 - h_2 \rho_2}{r_2}.$$

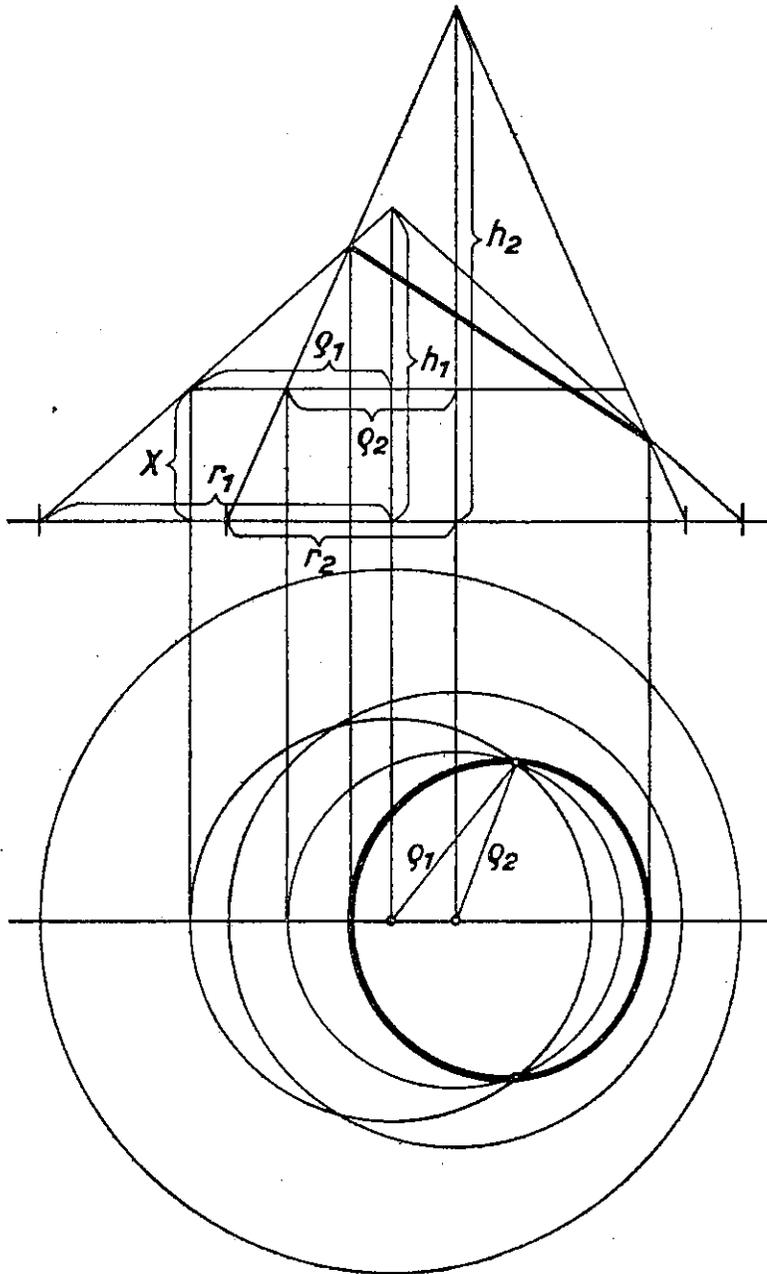


Abb. 133

Gleichsetzung dieser beiden Werte von x ergibt:

$$\frac{h_1 r_1 - h_1 \rho_1}{r_1} = \frac{h_2 r_2 - h_2 \rho_2}{r_2}$$

$$\frac{h_2 \rho_2}{r_2} - \frac{h_1 \rho_1}{r_1} = h_2 - h_1$$

$$\left(\frac{-h_1}{r_1}\right) \rho_1 + \frac{h_2}{r_2} \rho_2 = h_2 - h_1.$$

Diese Gleichungen entsprechen den Definitionsgleichungen der kartesischen Ovale für

$$a = -\frac{h_1}{r_1}, \quad \beta = \frac{h_2}{r_2}, \quad c = h_2 - h_1.$$

Für $a = -\beta$, $\frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}$, d. h. für den gleichen Neigungswinkel der Mantellinien der beiden Kegel, erhalten wir Hyperbeln. $a = \beta$ ist die Bedingung für die Entstehung von Ellipsen. $\frac{-h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}$ besagt, daß dann die Mantellinien der beiden Kegel zwar dieselbe Neigung gegen ihre Grundkreisebene besitzen, die beiden Kegel aber ihre Öffnungen nach entgegengesetzten Richtungen haben.

C. Die kartesischen Ovale als anallagmatische Kurve.

Der 3. Brennpunkt.

Aus der Polargleichung geht hervor, daß das Produkt ihrer beiden Wurzeln $r' \cdot r'' = d^2 = \text{const.}$ ist. Da also (s. Abb. 131) für zwei auf demselben Fahrstrahl liegende Kurvenpunkte P und Q $F_1 P \cdot F_1 Q = d^2$ ist, so geht durch Inversion an einem um F_1 mit d geschlagenen Kreis das eine Oval der Kurve in das andere über: es ist eine anallagmatische Kurve. (Die zu jeder anallagmatischen Kurve gehörige Erzeugung als Hüllkurve von Kreisen folgt für unsere Kurve später.)

Konstruiere ich nun zu F_2 den inversen Punkt F_3 und verbinde F_2 und F_3 mit P und Q , so ist wegen der Beziehung

$$F_1 P \cdot F_1 Q = F_1 F_2 \cdot F_1 F_3 \quad \triangle F_1 P F_2 \sim \triangle F_1 F_3 Q.$$

Führe ich nun in der Definitionsgleichung $a \rho_1 + \beta \rho_2 = c$ statt c den Ausdruck $\gamma \cdot F_1 F_2$ ein, so besteht zunächst die Beziehung

$$a \cdot F_1 P + \beta \cdot F_2 P = \gamma \cdot F_1 F_2.$$

Da nun $F_1 P$, $F_2 P$ und $F_1 F_2$ wegen der eben genannten Ähnlichkeitsbeziehung zu $F_1 F_3$, $F_3 Q$ und $F_1 Q$ proportional sind, so gilt auch die Gleichung

$$a \cdot F_1 F_3 + \beta \cdot F_3 Q = \gamma \cdot F_1 Q$$

oder

$$\gamma \cdot F_1 Q - \beta \cdot F_3 Q = a \cdot F_1 F_3 = \text{const} = g.$$

Nenne ich $F_1 Q$ ρ_1 , $F_3 Q$ ρ_3 , so gilt also für einen Punkt Q des äußeren Ovals

$$\gamma \rho_1 - \beta \rho_3 = g.$$

In ähnlicher Weise folgt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $F_1 P F_3$ und $F_1 F_2 Q$ aus der Definitionsgleichung

$$a \cdot F_1 Q - \beta \cdot F_2 Q = \gamma \cdot F_1 F_2,$$

weil die Strecken $F_1 Q, F_2 Q, F_1 F_2$ zu $F_1 F_3, F_3 P, F_1 P$ proportional sind, die neue Beziehung

$$a \cdot F_1 F_3 - \beta \cdot F_3 P = \gamma \cdot F_1 P,$$

$$\gamma \cdot F_1 P + \beta \cdot F_3 P = a \cdot F_1 F_3,$$

oder für einen Punkt des inneren Ovals gültig

$$\gamma \rho_1 + \beta \rho_3 = g.$$

Für den Punkt F_3 gelten also bezüglich der Punkte der Ovale ganz entsprechende Gleichungen wie für F_1 und F_2 . F_3 heißt darum der dritte Brennpunkt der Ovale.

4. Erzeugungsweise (Abb. 134). Man kann sich die Kurve als 3. Ecke (P) eines Dreiecks erzeugen denken, dessen beide anderen Ecken (A und B) sich auf zwei Kreisumfängen (F_1 mit dem Radius R und F_2 mit r) bewegen, während sich die Basis (AB) um einen Punkt C auf der Zentrale ($F_1 F_2$) dreht und die beiden anderen Seiten (AP und BP) um die beiden Kreismittelpunkte rotieren.

Wendet man nämlich den Satz des Menelaus auf $\triangle P F_1 F_2$ mit der Transversalen AC an, so erhält man ($F_1 C = p$ und $C F_2 = q$ gesetzt):

$$R(\rho_2 - r)q = (R - \rho_1)r \cdot p,$$

$$rp \cdot \rho_1 + Rq \rho_2 = Rr(p + q),$$

$$a \cdot \rho_1 + \beta \rho_2 = c.$$

Nun läßt sich unsere Ausgangsgleichung auch folgendermaßen ausdeuten:

$$Rq(\rho_2 - r) = (R - \rho_1)pr,$$

$$Rq \cdot BP = AP \cdot pr,$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{Rq}{pr} = \frac{\beta}{a}.$$

Ich kann demnach auch sagen:

5. Erzeugungsweise: Ein kartesisches Oval ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Kreisumfängen in einem konstanten Verhältnis stehen ($|\beta| = |a|$ Ellipse!).

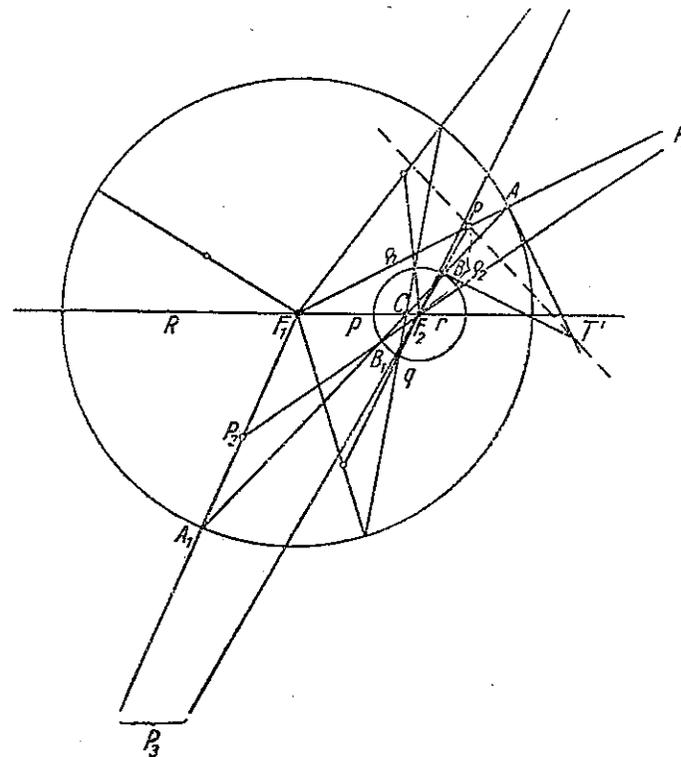


Abb. 134

Nehmen wir auf CA den zu B entgegengesetzten Kreispunkt B_1 , so ergibt sich ein Punkt P_1 des äußeren Ovals, und der zu A entgegengesetzte Kreispunkt A_1 liefert zwei weitere Kurvenpunkte P_2 und P_3 . Die Abb. 134 ist den Maßen der Abb. 130 und 131 entsprechend (auf $\frac{1}{4}$ verkleinert bzw. 3fach vergrößert) konstruiert. Schon eine oberflächliche Betrachtung zeigt, daß Kreis F_1 mit dem Inversionskreis (s. Abb. 131, 3fach zu vergrößern) nicht identisch ist, ebensowenig C etwa mit dem dritten Brennpunkt F_3 . Es erhebt sich natürlicherweise die Frage, wie die Konstruktion der 4. und 5. Erzeugungsweise sich für den Sonderfall der Pascalschen Schnecke spezialisiert. Aus den

Gleichungen unter B folgt zunächst für $d = 0$: $\beta = \pm \frac{c}{2e}$. Danach bleiben, wenn ich a und b als gegeben ansehe, in den beiden Gleichungen für a und b immer noch drei Unbekannte a, c, e übrig, so daß ich über deren eine, etwa a , noch verfügen kann. Setze ich β positiv an, so können die Gleichungen für a und b , die beide positive Größen sind, nur bestehen, wenn zugleich $|\beta| > |a|$ und $a < 0$ ist. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{2ac}{a^2 - \frac{c^2}{4e^2}} = a,$$

$$\frac{-4ec^2}{a^2 - \frac{c^2}{4e^2}} = b,$$

folgt:

$$e = \frac{b^2 - a^2}{4b}, \quad c = -\frac{(b^2 - a^2)a}{2a}, \quad \beta = -\frac{ab}{a}.$$

Zur Berechnung von p, q, R, r benutzen wir die aus den Gleichungen bei der 4. Erzeugungsweise sich ergebenden Beziehungen

$$rp = a,$$

$$Rq = \beta = \frac{-ab}{a},$$

$$p + q = 2e = \frac{b^2 - a^2}{2b},$$

$$Rr \frac{b^2 - a^2}{2b} = \frac{-(b^2 - a^2)a}{2a},$$

aus denen sich ergibt

$$q = \frac{b^2 - a^2 \pm \sqrt{(b^2 - a^2)^2 - 16ab^2}}{4b}$$

(q muß mit Rücksicht auf $Rq = \beta$ bei positivem β ebenfalls positiv sein!),

$$p = \frac{b^2 - a^2 \mp \sqrt{(b^2 - a^2)^2 - 16ab^2}}{4b} \quad (p \text{ negativ!}),$$

$$R = \frac{-ab}{a \cdot q}, \quad r = \frac{a}{p} = q.$$

Das Wichtigste: es muß, um eine Pascalsche Schnecke zu erhalten, $r = q$ sein, d. h. C muß mit einem der Schnittpunkte der beiden Kreise mit ihrer Zentrale zusammenfallen. Als Zeichnungsbeispiel sei auf Abb. 125 hingewiesen, an welcher Stelle diese Konstruktion als

besondere, 10. Erzeugungsweise der Pascalschen Schnecke bereits behandelt worden ist. Die dort sich anschließende 11. Erzeugungsweise der Schnecke entspricht der 5. Erzeugungsweise der Kartesischen Ovale. Die hierbei abgeleitete Tatsache — daß die beiden Abstände von den zwei Kreisumfängen sich verhalten wie der Radius des einen Kreises zur Differenz aus dem anderen Kreisradius und dem Mittelpunktsabstand der beiden Kreise — läßt sich aus unseren letzten Formeln bestätigen. Da für den Fall der Schnecke $p = 2e - r$ und $q = r$ ist, so ergeben die beiden Formeln

$$rp = a$$

$$Rp = \beta \text{ nun}$$

$$\frac{\beta}{a} = \frac{Rr}{r(2e-r)} = \frac{R}{2e-r}.$$

Daß der Fall der Kardioide hier ausscheidet, ergibt sich daraus, daß für $b = a$ der Brennpunktstrecke $2e$ gleich 0 wäre.

D. Tangentenkonstruktionen

1. Mit *bipolaren Koordinaten*. Wie wir in § 12 abgeleitet haben, besteht für die Fahrstrahlen ρ_1 und ρ_2 und die Winkel μ_1 und μ_2 , die diese mit der Tangente des Kurvenpunktes P bilden, die Gleichung

$$\frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} = \frac{d\rho_1}{d\rho_2}.$$

Differentiation unserer Kurvengleichung $a\rho_1 + \beta\rho_2 = c$ ergibt

$$a d\rho_1 + \beta d\rho_2 = 0$$

$$\frac{d\rho_1}{d\rho_2} = \frac{-\beta}{a}.$$

Daraus leitet sich folgende Tangentenkonstruktion ab (Abb. 135): Trage auf den beiden Fahrstrahlen in einer beliebigen Einheit

$$PR = \beta \text{ und } PS = a$$

Einheiten ab und errichte in R und S die Lote auf den Fahrstrahlen, die sich in T schneiden. Dann ist PT Tangente.

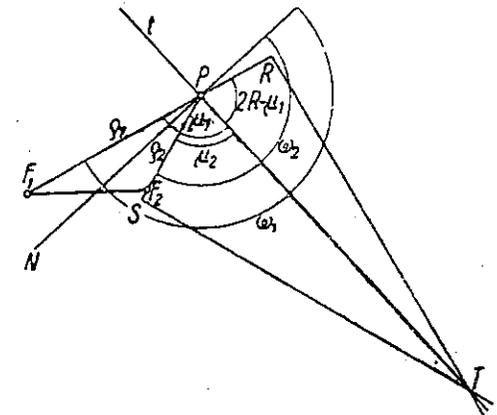


Abb. 135

Da nach der 4. Erzeugungsweise $\frac{AP}{BP} = \frac{\beta}{\alpha}$, so kann ich bei Zugrundelegung der Abb. 104 die Tangente für P erhalten, indem ich in A und B die Kreistangenten ziehe, die sich in T' schneiden. PT' ist dann Tangente an das innere Oval.

2. Mittels des dritten Brennpunktes (Abb. 136). Sei P ein Punkt des inneren, Q der entsprechende, inverse Punkt des äußeren Ovals und F_1, F_2, F_3 die drei Brennpunkte, so kann ich, da $F_1P \cdot F_1Q = F_1F_2 \cdot F_1F_3$, durch P, F_2, F_3, Q einen Kreis legen. Ziehe ich weiter in $\sphericalangle PF_2Q$ die Winkelhalbierende, die PQ in D und den genannten Kreis in R schneidet, und verbinde noch R mit P, Q und F_3 , so wollen wir beweisen, daß RP und RQ Kurvennormalen sind.

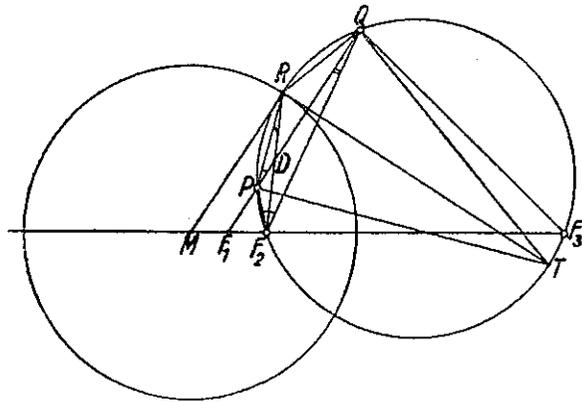


Abb. 136

Wir führen diesen Beweis, indem wir zunächst zwei Vorbemerkungen erledigen.

a) Nach dem Satz von der Winkelhalbierenden ist

$$\frac{DQ}{PD} = \frac{QF_2}{PF_2},$$

$$\frac{DQ}{DQ+PD} = \frac{QF_2}{QF_2+PF_2} \text{ oder } \frac{DQ}{PQ} = \frac{QF_2}{QF_2+PF_2}.$$

Nun ist nach der Kurvendefinition

$$\alpha \cdot F_1P + \beta \cdot F_2P = c, \text{ also } F_2P = \frac{c - \alpha \cdot F_1P}{\beta},$$

$$\alpha \cdot F_1Q - \beta \cdot F_2Q = c, \text{ also } F_2Q = \frac{\alpha \cdot F_1Q - c}{\beta},$$

demnach

$$\frac{DQ}{PQ} = \frac{QF_2 \cdot \beta}{\alpha(F_1Q - F_1P)},$$

$$\frac{DQ}{QF_2} = \frac{\beta \cdot PQ}{\alpha(F_1Q - F_1P)} = \frac{\beta \cdot PQ}{\alpha \cdot PQ} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

b) Bezeichne ich in Abb. 135 die Winkel, die die Kurvennormale PN mit den Fahrstrahlen bildet, mit ω_1 und ω_2 , so ist

$$\mu_1 = \omega_1 - R \text{ und } \mu_2 = \omega_2 - R,$$

demnach

$$\frac{\cos \mu_1}{\cos \mu_2} = \frac{-\sin \omega_1}{-\sin \omega_2}, \quad \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Für einen äußeren Punkt Q , für den β mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen ist, ist

$$\frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Nun folgt der eigentliche Beweis: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PRF_2 und DQF_2 folgt zunächst

$$RQ : RF_2 = DQ : QF_2 = \beta : \alpha.$$

Da F_2R Winkelhalbierende, ist $RQ = RP$, und bezeichne ich den Durchmesser des durch P, F_2, F_3, Q gehenden Kreises mit D , so kann ich setzen $RQ = RP = D \sin RQP$ und $RF_2 = D \sin RQF_2$, mithin

$$RQ : RF_2 = \sin RQP : \sin RQF_2,$$

also

$$\sin RQP : \sin RQF_2 = \beta : \alpha,$$

$$\sin RQF_1 : \sin RQF_2 = \beta : \alpha.$$

Daraus folgt, daß RQ Kurvennormale ist. Ein Gleiches läßt sich entsprechend von RP beweisen. So ergibt sich folgende Tangenten- (Normalen-) Konstruktion:

Sind P und Q zwei mit F_1 auf einem Fahrstrahl liegende Kurvenpunkte, so lege man durch P, F_2, F_3, Q den Kreis und halbiere die beiden über PQ stehenden Bogen in R und T , so sind PR und QR Kurvennormalen, mithin PT und QT Kurventangenten.

E. Weitere Eigenschaften der Kurve

Zieht man in R die Kreistangente RM (Abb. 136), so ist diese, da $RT \perp PQ$, parallel zu F_1Q und daher

$$F_2M : F_1M = F_2R : DR = F_2R^2 : (F_2R \cdot DR).$$

Nun ist aber wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke PDR und F_2PR $F_2R : PR = PR : DR$, also $F_2R \cdot DR = PR^2$:

$$F_2M : F_1M = F_2R^2 : PR^2.$$

Weiter folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PRF_2 und QDF_2

$$F_2R : PR = F_2Q : DQ = \alpha : \beta \text{ (s. Seite 151),}$$

$$F_2R^2 : PR^2 = \alpha^2 : \beta^2,$$

mithin

$$F_2M : F_1M = \alpha^2 : \beta^2$$

oder

$$F_2M : (F_2M - F_1M) = F_2M : F_1F_2 = \alpha^2 : (\alpha^2 - \beta^2).$$

Damit ist die Lage von M als die eines festen Punktes bestimmt.

Wir wollen weiter beweisen, daß MR eine Konstante ist, und berechnen zu diesem Zwecke zunächst F_1D .

Da F_2D Winkelhalbierende ist, gilt die Proportion

$$\frac{F_2P}{F_2Q} = \frac{PD}{DQ} = \frac{F_1D - F_1P}{F_1Q - F_1D}.$$

Setzen wir nun für F_2P und F_2Q die unter D 2 stehenden Ausdrücke und bedenken andererseits, daß $F_1P \cdot F_1Q = d^2$, also $F_1Q = \frac{d^2}{F_1P}$, so folgt

$$\frac{c - a \cdot F_1P}{\frac{a d^2}{F_1P} - c} = \frac{F_1D - F_1P}{\frac{d^2}{F_1P} - F_1D},$$

aus welcher Gleichung sich schließlich ergibt

$$F_1D = \frac{c(F_1P^2 - d^2)}{a(F_1P^2 - d^2)} = \frac{c}{a}.$$

Nun liefert die Proportion

$$\frac{MR}{F_1D} = \frac{MF_2}{F_1F_2} \quad MR = \frac{F_1D \cdot MF_2}{F_1F_2} = \frac{\frac{c}{a} \cdot a^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{ca}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Da $PR = QR$ Kurvennormalen sind, so berührt ein mit diesem Radius um R beschriebener Kreis die beiden Ovale der Kurve. Sein Mittelpunkt R liegt, wie eben bewiesen, auf einem Kreis M mit dem Radius MR . Wir können also sagen:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die die beiden kartesischen Ovale berühren, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der durch die Brennpunkte gehenden Symmetrieachse der kartesischen Ovale liegt.

Weiter: Da für jeden dieser berührenden Kreise $F_1P \cdot F_1Q = d^2$ ist, die von F_1 an ihn gezogene Tangente also die konstante Länge d (Radius des Inversionskreises) hat, so durchsetzt der Inversionskreis alle diese Berührungskreise lotrecht. Wir können also sagen:

6. Erzeugungsweise: *Wenn ein veränderlicher Kreis einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, während sein Mittelpunkt sich auf einem festen Kreis bewegt, so umhüllt er ein kartesisches Oval.*

Abb. 131 zeigt einen Berührungskreis R mit dem ihn rechtwinklig durchschneidenden Inversionskreis und dem Kreis M , auf dem sein Mittelpunkt liegt.

Zum Schluß lassen wir noch einen Lehrsatz folgen.

Lehrsatz: *Die Summe der Abstände eines Brennpunktes von den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden mit der Kurve ist konstant:*

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \text{const.}$$

Beweis: Gleichung der Kurve: $r^2 - r(a + b \cos \varphi) = d^2$.

Gleichung der Geraden: $(y = mx + n)$.

$$r \sin \varphi = r m \cos \varphi + n.$$

Rechnet man aus der letzten Gleichung $\cos \varphi$ aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{-mn \pm \sqrt{(m^2+1)r^2(r^2-n^2) + m^2n^2r^2}}{m^2r^2+r^2} \\ &= \frac{-mn \pm \sqrt{m^2r^2+r^2-n^2}}{(m^2+1)r}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Kurvengleichung:

$$r^2 - ar - \frac{-bmn \pm b\sqrt{m^2r^2+r^2-n^2}}{m^2+1} = d^2,$$

$$b\sqrt{m^2r^2+r^2-n^2} = m^2d^2 + d^2 - bmn + am^2r + ar - m^2r^2 - r^2.$$

Quadrieren ergibt eine Gleichung 4. Grades. Da deren Wurzelsumme $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ aber konstant sein soll und andererseits nach dem Vietaschen Wurzelsatz für die Gleichung

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1$$

ist, so genügt es, von unserer Gleichung lediglich die Glieder mit r^4 und r^3 zu bilden. Man erhält durch Quadrieren und Ordnen:

$$r^4(m^4 + 2m^2 + 1) + r^3(-2am^4 - 2am^2 - 2a) + \dots = 0,$$

$$r^4 + r^3 \frac{-2a(m^4 + 2m^2 + 1)}{m^4 + 2m^2 + 1} + \dots = 0.$$

Demnach ist für die vier Wurzeln dieser Gleichung

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2a = \text{const.}$$

Für die Nachprüfung durch Ausmessen ist zu berücksichtigen, daß die r sowohl positiv als auch negativ sein können.

FÜNFTE GRUPPE

17. Die Rosette (vierblättriges Rosenblatt)

A. Erzeugungsweisen

1. Eine Strecke $AB = a$ gleite mit ihren Endpunkten (s. Abb. 137) auf den Achsen: Fällt man dann von O auf AB das Lot OP , so beschreibt P eine Rosette. — Aus der Abbildung folgt:

$$OB = a \cos \varphi,$$

$$OP = OB \cdot \sin \varphi,$$

demnach

$$r = a \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$\boxed{r = \frac{a}{2} \sin 2\varphi}.$$

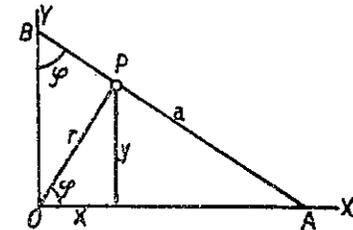


Abb. 137

Setzt man

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

so folgt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\boxed{(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2}.$$

2. Die Polargleichung

$$r = \frac{a}{2} \sin 2\varphi$$

läßt sich zu folgender einfachen Konstruktion auswerten. Man ziehe in einem Kreis O (Abb. 138) mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$ einen Mittelpunktswinkel XOD mit dem halbierenden Radius OG und falle von D auf OX das Lot DE . Bezeichne ich $\sphericalangle XOG$ mit φ , so ist $DE = \frac{a}{2} \sin 2\varphi$ und, wenn ich $OP = DE$ mache, P ein Punkt der Kurve.

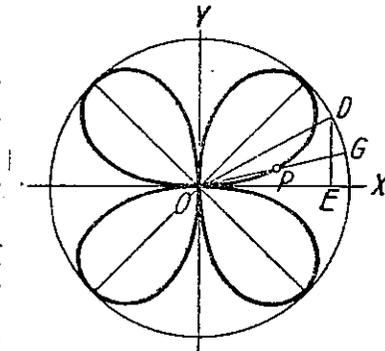


Abb. 138

Auswertung der Kurvengleichungen:

Aus der letzten Gleichung folgt, daß die Kurve zu den Achsen symmetrisch ist.

Die Polargleichung besagt:

I. $\frac{a}{2}$ ist die obere Grenze von r , die Kurve ist also von einem Kreise vom Radius $\frac{a}{2}$ umschlossen (s. Abb. 108).

II. Sie erreicht diesen Kreis an den Stellen $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, da hier $r = \pm \frac{a}{2}$ wird.

III. $r = 0$ für $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Die Kurve berührt die beiden Achsen in O zu beiden Seiten.

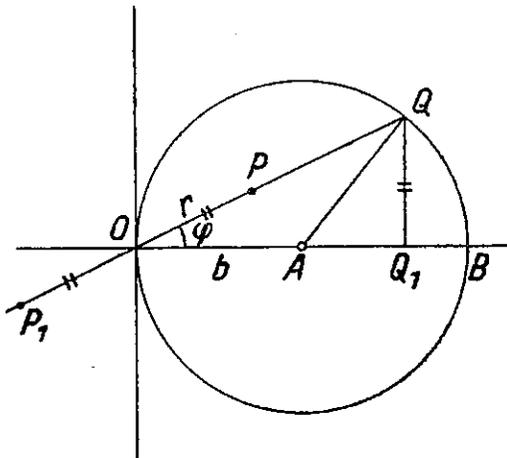


Abb. 139

3. In einem Kreis mit dem Durchmesser $OAB = 2b$ (Abb. 139) ziehe eine Sehne OQ , falle das Lot QQ_1 auf den Durchmesser und trage QQ_1 von O aus auf OQ nach beiden Richtungen bis P bzw. P_1 ab. Dreht sich OQ um O , so beschreibt P bzw. P_1 eine Rosette um O als Mittelpunkt. Führt man nämlich Polarkoordinaten ein, so folgt, da sich aus dem gleichschenkligen Dreieck OAQ $OQ = 2b \cos \varphi$ ergibt, $QQ_1 = r = 2b \cos \varphi \sin \varphi = b \sin 2\varphi$.

4. Die Rosette als Rollkurve (Hypotrochoide). Wenn ein Kreis im Innern eines festen Kreises auf dessen Umfang abrollt, so beschreibt ein Punkt, der mit dem rollenden Kreis fest verbunden ist, eine Hypotrochoide. Der rollende Kreis (O_1) habe in unserem Falle den Radius b , der feste (O) den Radius $4b$ (Abb. 140) und der die Kurve beschreibende Punkt P sei um $3b$ vom Mittelpunkt O_1 des rollenden Kreises entfernt. In der Anfangslage auf der x -Achse falle O_1P in die Verlängerung von OO_1 , so daß also $-P$ auf A liegend $-OA = 6b$ ist. Da $\widehat{NR} = \widehat{NS}$, also $b \cdot \psi = 4b \cdot t$, ist $\psi = 4t$. Aus der Abbildung liest man die Koordinaten von P ab:

$$y = O_1T - O_1V = 3b \sin t - 3b \sin 3t = -6b \cos 2t \sin t,$$

$$x = OT + VP = 3b \cos t + 3b \cos 3t = 6b \cos 2t \cos t.$$

Da die entstehende Kurve offenbar im Gegensatz zur normalen Lage der Rosette, wie sie Abb. 108 zeigt, in Richtung der x -Achse ihre größte Ausweitung besitzt, drehen wir das Koordinatensystem um 45° . Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit ξ, η , so gelten die Gleichungen

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{2} - \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sqrt{2},$$

$$y = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{2} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \sqrt{2},$$

$$\xi = \frac{y+x}{\sqrt{2}},$$

$$\eta = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

In unserem Falle:

$$\xi = 6b \cos 2t \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}} \right) = 6b \cos 2t \cos(45^\circ + t),$$

$$\eta = -6b \cos 2t \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}} = -6b \cos 2t \sin(45^\circ + t),$$

$$\xi^2 = 36b^2 \cos^2 2t \cos^2(45^\circ + t),$$

$$\eta^2 = 36b^2 \cos^2 2t \sin^2(45^\circ + t),$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 36b^2 \cos^2 2t, \quad \xi^2 \cdot \eta^2 = 36^2 b^4 \cos^4 2t \frac{\sin^2(90^\circ + t)}{4} = \frac{36^2 b^4 \cos^6 2t}{4},$$

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 = 36^3 b^6 \cos^6 2t = 4 \cdot 36 \cdot b^2 \xi^2 \eta^2.$$

Vergleicht man diese Zeile mit der Kurvengleichung der Rosette in kartesischen Koordinaten, so erkennt man die Übereinstimmung, wenn man setzt $a^2 = 4 \cdot 36 \cdot b^2 = 144b^2$, also $a = 12b$, $\frac{a}{2} = 6b$. Der feste Kreis der Hypotrochoide hat also $\frac{2}{3}$ vom Radius des Umkreises der Rosette, der rollende Kreis den Radius $b = a/12$.

5. An diese Erzeugungsweise läßt sich eine neue durch folgende Betrachtung anschließen. Nach Abb. 109 ist

$$OO_1 = O_1P = O_1B = 3b,$$

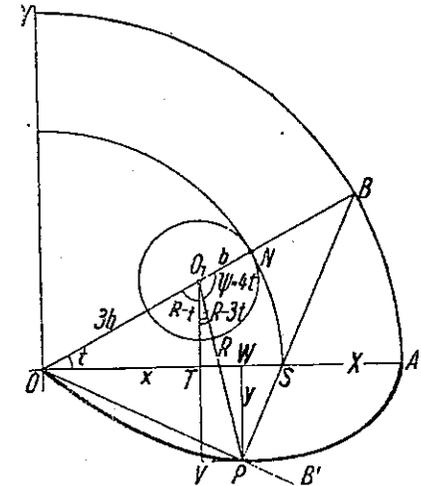


Abb. 140

also

$$\sphericalangle O_1OP = \sphericalangle OPO_1 = 2t,$$

und da auch $\triangle BO_1P$ gleichschenkelig, $\sphericalangle O_1PB = R - 2t$, mithin $\sphericalangle OPB = R$. So können wir noch auf folgende Weise zu unserer Kurve gelangen: In einem Kreis (vom Radius $a/2$) drehe sich der Radius OB von der festen Lage AO aus um O und mit ihm in entgegengesetzter Richtung zugleich sein Spiegelbild OB' bezüglich OA . Fällt man dann von B auf OB' das Lot BP , so beschreibt P die von dem Kreis eingeschlossene Rosette. Aus dieser Erzeugungsweise läßt sich übrigens die Polargleichung der Kurve (Drehung um 45°) ohne weiteres ableiten:

$$r = \frac{a}{2} \cos 2t = \frac{a}{2} \cos 2(45^\circ - t') = \frac{a}{2} \cos (90^\circ - 2t') = \frac{a}{2} \sin 2t'.$$

6. Man erhält dieselbe Rosette auf folgende Weise:

Um den Mittelpunkt O eines Kreises drehen sich zwei Radien OB und OB' derart, daß OB' die dreifache Umdrehungsgeschwindigkeit wie OB besitzt. Fällt man dann von B auf OB' das Lot BP , so beschreibt P die Rosette (s. Abb. 141).

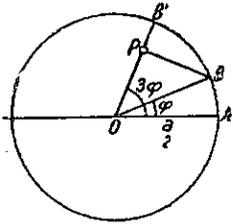


Abb. 141

6a. Statt die beiden Radien im gleichen Umlaufsinn mit den Geschwindigkeiten 1 und 3 laufen zu lassen, kann man sie mit gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten sich drehen lassen; auch hier liest man sofort die Kurvengleichung $r = \frac{a}{2} \cos 2\varphi$ ab.

7. Ganz ähnlich Nr. 6 erscheint folgende Erzeugungsweise: Die Seiten einer Raute seien gelenkig miteinander verbunden. Drehen sich nun zwei zusammenstoßende Seiten um die eine Ecke O nach entgegengesetzten Richtungen und mit Geschwindigkeiten, die sich wie 1:3 verhalten, so beschreibt die gegenüberliegende Ecke (P) eine Rosette.

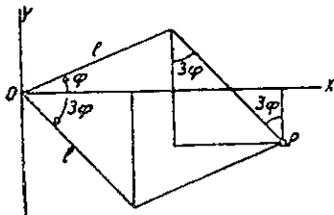


Abb. 142

Man liest aus Abb. 142 sofort die Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} y &= l \sin \varphi - l \sin 3\varphi \\ &= 3 \cdot \frac{l}{3} (\sin \varphi - \sin 3\varphi), \\ x &= l \cos \varphi + l \cos 3\varphi \\ &= 3 \cdot \frac{l}{3} (\cos \varphi + \cos 3\varphi). \end{aligned}$$

Das ist eine Rosette für $b = \frac{l}{3}$ mit dem Schleifendurchmesser $\frac{a}{2} = 2l$.

8. Ein Punkt schwinde auf einer Geraden, die sich zugleich um einen ihrer Punkte gleichförmig dreht, und zwar derart, daß einer vollen Schwingung des Punktes eine halbe Umdrehung der Geraden um den festen Punkt entspricht. Der schwingende Punkt beschreibt dann eine Rosette. Lassen wir die Schwingung des Punktes von dem festen Geradenpunkt ausgehen und bezeichnen die Elongation mit r , so ist nach dem Gesetz der harmonischen Schwingung (a eine Konstante, ω der Phasenwinkel)

$$r = a \sin \omega.$$

Nennen wir den Drehungswinkel der Geraden gegen eine durch den festen Punkt gehende x -Achse φ , so ist $\omega = 2\varphi$ und $r = a \sin 2\varphi$ die Gleichung der Kurve.

Über die engen Beziehungen der Rosette zur Astroide vgl. den folgenden Paragraphen.

B. Tangentenkonstruktionen

1. Für den Winkel μ zwischen Fahrstrahl und Tangente gilt die Formel

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r \, d\varphi}{r \, d}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} dr &= a \cos 2\varphi \, d\varphi, \\ \frac{dr}{d\varphi} &= a \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\frac{a}{2} \sin 2\varphi}{a \cos 2\varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Wir konstruieren danach (s. Abb. 143) folgendermaßen: Im Kurvenpunkt P tragen wir an OP 2φ an, fällen von einem beliebigen Punkt S des freien Schenkels auf OP das Lot SF , halbieren SF in T und ziehen PT . Dann ist PT Kurventangente. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg} TPF = \frac{FT}{FP} = \frac{1}{2} \frac{FS}{FP} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varphi.$$

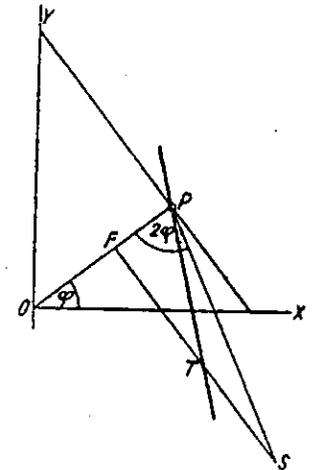


Abb. 143

2. In der Erzeugung der Kurve als Hypotrochoide stellt für jeden Augenblick des Rollens der Berührungspunkt zwischen festem und rollendem Kreis den augenblicklichen Drehpunkt dar. Demnach ist in Abb. 140 NP Kurvennormale und das Lot darauf in P Kurventangente.

C. Quadratur

$$S = \int r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{a^2}{4} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{a^2}{4} \sin^2(2\varphi) \frac{d(2\varphi)}{2}$$

$$= \frac{a^2}{16} \int \sin^2(2\varphi) d(2\varphi).$$

Demnach ist der Inhalt einer halben Schleife

$$S = \frac{a^2}{16} \int_0^{\pi/4} \sin^2(2\varphi) d(2\varphi) = \frac{a^2}{16} \left[-\frac{1}{2} \sin 2\varphi \cos 2\varphi + \varphi \right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{16} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{64},$$

also der Inhalt der von der ganzen Kurve umschlossenen Fläche



Abb. 144

Die Rosette ist also halb so groß wie ihr Umkreis, und der Bogen der Rosette (s. Abb. 144) halbiert den Oktanten.

$$F = \frac{a^2\pi}{8}.$$

18. Die Astroide

(vom griech. αστήρ, Stern, also Sternkurve)

A. Erzeugungsweisen

1. Eine Strecke $AB = a$ gleite mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels O . Zeichnet man für jede ihrer Lagen das Rechteck $BOAE$ und fällt von E auf AB das Lot EP , so beschreibt P eine Astroide (Abb. 145).

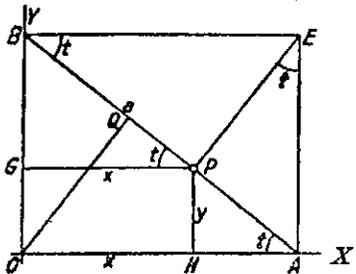


Abb. 145

Aus

$$\boxed{x = a \cos^3 t}$$

$$\boxed{y = a \sin^3 t}$$

Führt man als Parameter $\sphericalangle OAB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle BPG = \sphericalangle PEA = t$ ein, so ergibt sich

$$BE = a \cos t,$$

$$BP = BE \cos t = a \cos^2 t,$$

$$x = GP = BP \cos t = a \cos^3 t.$$

Entsprechend: $y = a \sin^3 t,$

folgt (da $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$):

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

2. Als Rollkurve (*Hypozykloide*). Rollt ein Kreis im Inneren eines festen Kreises auf dessen Umfang ab, so beschreibt ein markierter Punkt seines Umfangs eine Hypozykloide. Der feste Kreis habe den Radius a , der rollende $a/4$. Die Anfangslage, mit der die Bewegung beginne, möge diejenige sein, in der der rollende Kreis mit dem markierten Punkt P , der die Kurve erzeugt, den festen Kreis in seinem Schnittpunkt B mit der x -Achse berührt (Abb. 146). Da

$$\widehat{PN} = \widehat{NB}, \text{ also } \frac{a}{4} \psi = at,$$

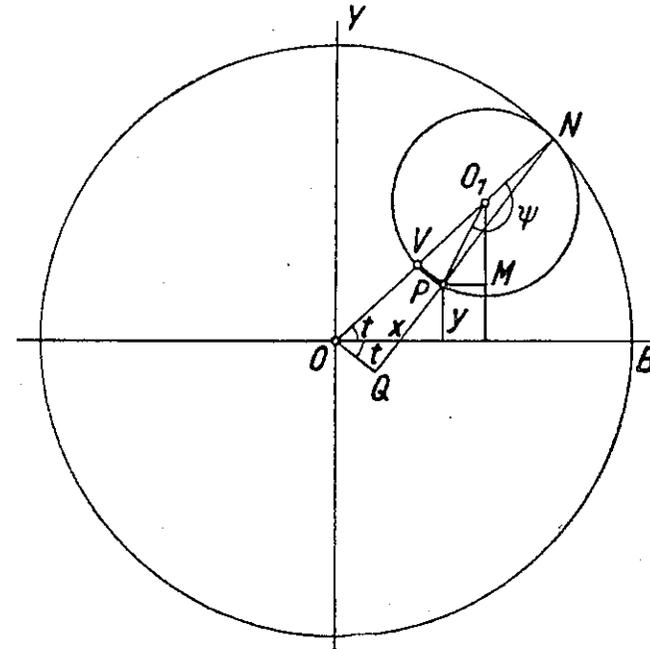


Abb. 146

so ist $\psi = 4t$ und mithin

$$\sphericalangle PO_1M = \psi - R - t = 3t - R,$$

$$\sphericalangle O_1PM = 2R - 3t.$$

Es ergibt sich

$$y = \frac{3a}{4} \sin t - \frac{a}{4} \sin 3t,$$

$$x = \frac{3a}{4} \cos t + \frac{a}{4} \cos 3t,$$

$$y = \frac{a}{4} (3 \sin t - \sin 3t)$$

$$x = \frac{a}{4} (3 \cos t + \cos 3t)$$

Nun gelten die Formeln

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

dennach:

$$y = a \sin^3 t, \quad x = a \cos^3 t,$$

womit die Übereinstimmung mit der Kurve von Nr. 1 bewiesen.

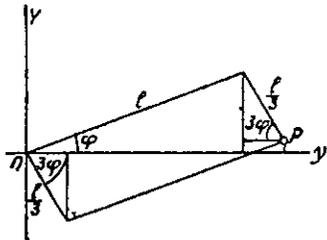


Abb. 147

3. Ein Gelenk-Parallelogramm von den Seiten l und $l/3$ drehe sich mit zwei zusammenstoßenden Seiten derart um O , daß die beiden Seiten sich nach entgegengesetzten Richtungen, die kleinere mit der dreifachen Geschwindigkeit der größeren, bewegen. Dann beschreibt die vierte Ecke eine Astroide (s. Abb. 147).

Man liest sofort aus der Abbildung ab:

$$y = l \sin \varphi - \frac{l}{3} \sin 3\varphi = \frac{l}{3} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi),$$

$$x = l \cos \varphi + \frac{l}{3} \cos 3\varphi = \frac{l}{3} (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi).$$

Das ist eine Astroide für $\frac{a}{4} = \frac{l}{3}$, $a = \frac{4}{3}l$.

4. Die Astroide als Hüllkurve. Eine Strecke von der Länge a gleite mit ihren Endpunkten A und B auf den Achsen. Welches ist ihre Hüllkurve? (Abb. 149).

a) (Abb. 148) Bewegt sich A nach links, B nach oben, so ergeben die Lote auf den Achsen in A bzw. B den augenblicklichen Drehpunkt E . Fällt ich nun $EP \perp AB$, so weiß ich nach Nr. 1, daß P eine Astroide beschreibt, und da das Lot auf dem Drehstrahl EP in P Kurventangente ist, so hüllt also AB unsere, bereits bekannte, durch P beschriebene Astroide ein.

Wir geben noch zwei analytische Ableitungen:

b) Seien p und q die Abschnitte der Geraden (Abb. 148), so ist ihre Gleichung

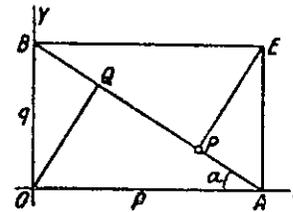


Abb. 148

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

$$qx + py = pq.$$

Nun ist $p = a \cos \alpha$, $q = a \sin \alpha$, dennach

$$F(x, y, \alpha) \equiv x \sin \alpha + y \cos \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (I)$$

Differentiiert:

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} \equiv x \cos \alpha - y \sin \alpha - a(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0. \quad (II)$$

Multipliziert man (I) mit $\sin \alpha$ und (II) mit $\cos \alpha$ und addiert, so erhält man

$$x - a(\sin^2 \alpha \cos \alpha + \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha) = 0,$$

Entsprechend

$$x = a \cos^3 \alpha.$$

$$y = a \sin^3 \alpha.$$

c) Man kann zu dieser Erzeugungsart auch auf umgekehrtem Wege gelangen. Man geht von der Kurvengleichung aus und bildet die Tangentengleichung. Aus der Kurvengleichung folgt durch Differenzieren $y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$. Setzt man diesen Wert in die allgemeine Tangentengleichung $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ ein, so folgt die Tangentengleichung der Astroide:

$$y - y_1 = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}(x - x_1).$$

Berechnen wir nun die Schnittpunkte der Tangente mit den Achsen und, darauf fußend, das Stück, das die Achsen aus der Tangente herauszuschneiden, so ergibt sich die Strecke a .

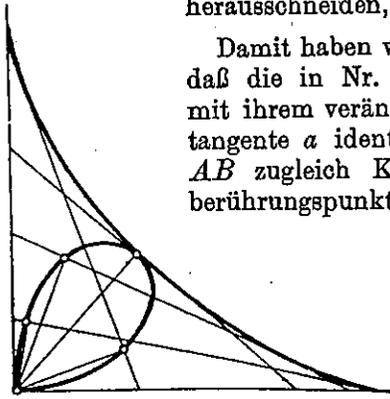


Abb. 150

Damit haben wir den dreifachen Nachweis geführt, daß die in Nr. 1 die Kurve erzeugende Strecke a mit ihrem veränderlichen Punkt P mit der Kurventangente a identisch ist. Es ist also in Abb. 145 AB zugleich Kurventangente und P Tangentenberührungspunkt. Da Q eine Rosette beschreibt (§ 17), so erscheint damit die Rosette als Fußpunktkurve der Astroide (s. Abb. 150).

5. *Bewegen sich zwei Punkte mit gleichförmigen, aber entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten, die sich wie 1:3 verhalten, auf dem Umfang eines Kreises,*

so umhüllt die Gerade, die ihre Stellungen verbindet, eine Astroide.

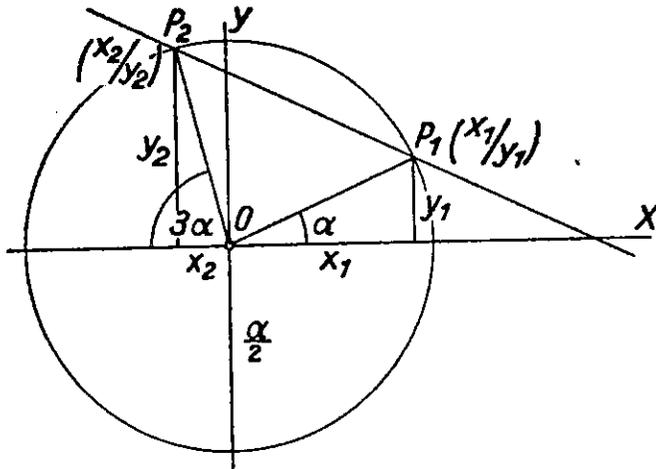


Abb. 151

Wir beweisen diesen Satz, indem wir, gewissermaßen in umgekehrter Richtung, von der Kurventangente ausgehen. Deren Gleichung lautet (Formel I S. 163):

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Wir bestimmen die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem Inkreis der Astroide $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Der aus der ersten der beiden Gleichungen sich ergebende Wert $x = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha - y \cos \alpha}{\sin \alpha}$ in die Kreisgleichung eingesetzt liefert

$$a^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - 2 a y \sin \alpha \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha = \frac{a^2}{4} \sin^2 \alpha$$

$$y = a \sin \alpha \cos^2 \alpha \pm \frac{a}{2} \sin \alpha \sqrt{1 - 4 \cos^2 \alpha + 4 \cos 4 \alpha}$$

$$= a \sin \alpha \cos^2 \alpha \pm \frac{a}{2} \sin \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{a}{2} \sin 2 \alpha \mp \frac{a}{2} \cos 2 \alpha \sin \alpha,$$

$$y_1 = \frac{a}{2} \sin \alpha,$$

$$y_2 = \frac{a}{2} \sin 3 \alpha.$$

Einsetzen dieser beiden Werte in die Tangentengleichung ergibt:

$$x_1 = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha - \frac{a}{2} \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{a}{2} \cos \alpha$$

$$x_2 = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha - \frac{a}{2} \sin 3 \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = a \cos \alpha - \frac{a}{2} \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 2 a \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$x_2 = \frac{a}{2} (\cos \alpha + 4 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha) = \frac{a}{2} (3 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha)$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} \cos 3 \alpha.$$

Die Lage dieser beiden Schnittpunkte der Kurventangente mit dem Kreis $\frac{a}{2}$ veranschaulicht Abb. 151. Denken wir uns nun α veränderlich, so bewegen sich die beiden Strahlen OP_1 und OP_2 in entgegengesetzter Richtung, der eine mit der dreifachen Geschwindigkeit des andern. $P_1 P_2$ umhüllt dann eine Astroide mit dem Inkreis O .

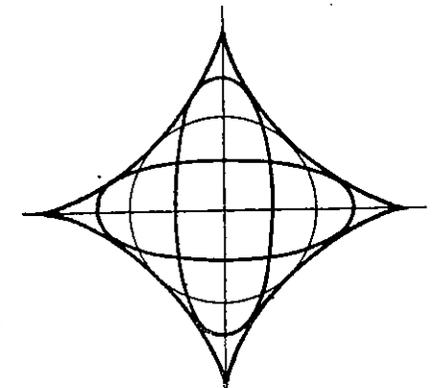


Abb. 152

6. Es ist eine Schar konzentrischer Ellipsen gegeben, deren Halbachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen und die konstante Summe a haben. Die Gleichung der Hüllkurve zu bestimmen (s. Abb. 152).

a) Nenne ich die eine Halbachse a , so ist die andere $a - \alpha$ und demnach die Gleichung der veränderlichen Ellipse

$$F(x, y, \alpha) \equiv (a - \alpha)^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - \alpha^2 (a - \alpha)^2 = 0. \quad (I)$$

Wir differenzieren:

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} \equiv -2(a - \alpha)x^2 + 2\alpha y^2 - 2\alpha(a - \alpha)(a - 2\alpha) = 0 \quad (II)$$

oder, mit $\alpha/2$ multipliziert:

$$\underline{a(a - \alpha)x^2 - \alpha^2 y^2 + \alpha^2(a - \alpha)(a - 2\alpha) = 0}, \quad (IIa)$$

(I) und (IIa) addiert:

$$a(a - \alpha)x^2 - (a - \alpha)\alpha^3 = 0,$$

$$x^2 = \frac{\alpha^3}{a}, \quad x^{2/3} = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{a}}.$$

$x^2 = \frac{\alpha^3}{a}$ in (I) eingesetzt liefert

$$y^2 = \frac{(a - \alpha^3)}{a}, \quad y^{2/3} = \frac{a - \alpha}{\sqrt[3]{a}},$$

also

$$x^{2/3} + y^{2/3} = \frac{a}{\sqrt[3]{a}} = a^{2/3},$$

also eine Astroide.

b) Bekanntlich ist (s. Abb. 145) P Punkt einer Ellipse mit dem Mittelpunkt O und den (auf den Koordinatenachsen liegenden) Halbachsen von den Längen BP und PA . Da nach dem Satz vom augenblicklichen Drehpunkt BA zugleich Tangente der betreffenden Ellipse ist (s. Anhang), haben Ellipse und Astroide diese Gerade als gemeinsame Tangente. Bei Bewegung der Strecke a mit ihren Endpunkten auf den Achsen gehört demnach zu jedem Astroidenpunkt P eine Ellipse, die die Astroide in diesem Punkt berührt, und da für alle diese Ellipsen die Summe ihrer Halbachsen $BP + PA = \text{const}$ ist, so ist damit die Umhüllung dieser Ellipsen durch eine Astroide ebenfalls bewiesen.

7. Aus der Erzeugungsweise 2 läßt sich durch Ausgestaltung der Abb. 146 eine neue Herstellungsart der Kurve ableiten. Zieht man nämlich NP und trägt andererseits an OB nach unten $\sphericalangle t$ an, wobei man den Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Verlängerung von NP mit Q bezeichnet, so ist, da $\psi = 4t$, in dem gleichschenkligen Dreieck $PO_1N \sphericalangle O_1NQ = R - 2t$, demnach in $\triangle OQN \sphericalangle OQN = R$. Weiter ist, da $\sphericalangle VP N = R$, $VP \parallel OQ$, und da $VN = \frac{1}{2}ON$, so liegt P in der Mitte von NQ . So ergibt sich folgende gemeinsame Erzeugungsweise von Astroide und Rosette (s. Abb. 153):

Drehe ich in einem Kreis O vom Radius a den Radius OB von einer festen Lage OA aus um O und mit ihm zugleich sein Spiegelbild OB' bezüglich OA , und fälle ich dabei stets die Lote BQ auf OB' , so beschreibt der Mittelpunkt P von QB eine vom Kreis umschlossene Astroide (Q beschreibt, s. § 17, eine Rosette).

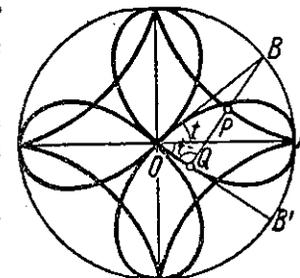


Abb. 153

Das Ergebnis läßt sich übrigens auch durch Aufstellung der Kurvengleichungen leicht bestätigen.

Die enge Verwandtschaft zwischen Astroide und Rosette möge in diesem Zusammenhang noch durch folgende hübsche Beziehung beleuchtet werden.

Wie wir (Nr. 4) sahen, läßt sich die Gleichung der Astroidentangente in der Form schreiben:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

$$\frac{x}{a \cos \alpha} + \frac{y}{a \sin \alpha} = 1,$$

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = a.$$

Die zu dieser Tangente senkrechte Astroidentangente bildet mit der x -Achse den Winkel $\alpha' = R + \alpha$. Da nun $\cos(R + \alpha) = -\sin \alpha$ und $\sin(R + \alpha) = \cos \alpha$, so lautet deren Gleichung

$$\frac{-x}{\sin \alpha} + \frac{y}{\cos \alpha} = a.$$

Ich beseitige aus diesen beiden Gleichungen a und erhalte damit eine Gleichung für den Schnittpunkt der beiden Tangenten. Die beiden Gleichungen lauten in veränderter Form:

$$\begin{aligned} x \sin \alpha + y \cos \alpha &= a \sin \alpha \cos \alpha \\ -x \cos \alpha + y \sin \alpha &= a \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Subtr.: } \sin \alpha (x - y) = -\cos \alpha (x + y),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{x + y}{x - y}.$$

Da nun

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \text{ und } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

und demnach

$$\sin \alpha = -\frac{(x + y)}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}} \text{ und } \cos \alpha = \frac{x - y}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}$$

ist, so folgt durch Einsetzen eine etwas umständliche Gleichung, die sich auf die Form bringen läßt

$$a^2 (x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)^3.$$

Führen wir hierin Polarkoordinaten ein, so erhalten wir

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos 2\varphi.$$

Diese Gleichung ist ohne weiteres in die gewöhnliche Rosettengleichung überführbar, wenn das Koordinatensystem um 45° gedreht wird. Wir können demnach als Ergebnis feststellen:

Die Scheitel der einer Astroide mit der Halbachse a umschriebenen rechten Winkel liegen auf einer Rosette vom Schleifendurchmesser $\frac{a}{2} \sqrt{2}$, deren Achsen gegen diejenigen der Astroide um 45° gedreht sind (Abb. 154).

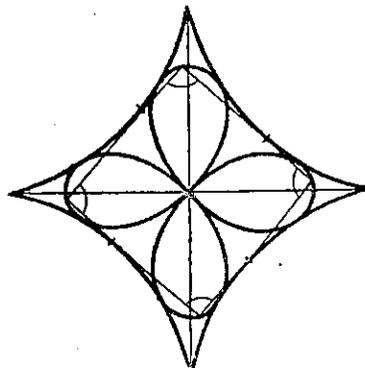


Abb. 154

B. Auswertung der Kurvengleichung

Die Gleichung in kartesischen Koordinaten besagt zunächst, wenn wir sie in der Form $(x^2)^{1/3} + (y^2)^{1/3} = a^{2/3}$ schreiben, daß die Kurve zu beiden Achsen symmetrisch ist. Setze ich einen der beiden Werte x oder y gleich Null, so nimmt der andere die Werte $\pm a$ an. Die Kurve geht also durch die Punkte $O|a$, $O|-a$, $a|0$, $-a|0$. Fragt man nach den Punkten der Kurve, die dem O -Punkt am nächsten liegen, für

die also $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ ein Tiefwert ist, so erhalten wir durch Differenzieren der Funktion $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (a^{2/3} - x^{2/3})^3$ $x_1 = \frac{a}{4} \sqrt{2}$ und durch Einsetzen in die Kurvengleichung auch $y_1 = \frac{a}{4} \sqrt{2}$. Die Schnittpunkte der Kurve mit den Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes kommen also dem O -Punkt am nächsten; dieser Abstand, also der Radius des der Kurve einbeschriebenen Kreises, ist $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{a}{2}$. In den Spitzen schmiegt sich die Kurve den Achsen an, wie sich aus der Betrachtung des Differentialquotienten $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$ ergibt.

C. Tangentenkonstruktionen

1. Als Hypozykloide. Aus der Erzeugung der Kurve durch Abrollen (Abb. 146) ergibt sich der gemeinsame Berührungspunkt N der beiden Kreise als der augenblickliche Drehpunkt: NP ist Kurvennormale.

2. Als Umhüllungskurve einer Geradenschar. Schon in Nr. 4 wurde festgestellt, daß die Gerade AB der Abb. 145 Tangente der Kurve ist:

D. Ein Lehrsatz. Zieht man in den beiden Punkten, in denen eine Tangente der Astroide diese außerdem noch schneidet, wieder die Tangenten, so treffen sich diese auf einem Punkte des Umkreises.

Beweis: Setze ich der Einfachheit halber den Radius des Umkreises gleich 1, so lautet die Kurvengleichung in Parameterdarstellung

$$X = \cos^3 t$$

$$Y = \sin^3 t$$

und die Gleichung der Tangente in einem Kurvenpunkte P (Abb. 155) mit dem Parameter α :

$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = 1.$$

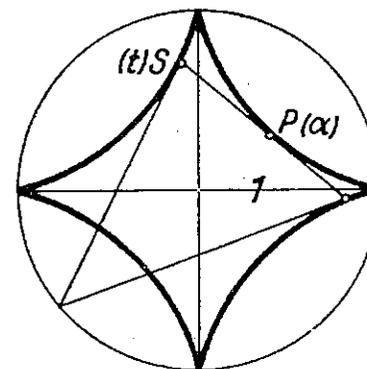


Abb. 155

Setze ich hierin für x und y die obigen Werte X und Y , so lautet für einen Schnittpunkt S der Tangente mit der Kurve die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\cos^3 t}{\cos a} + \frac{\sin^3 t}{\sin a} = 1.$$

Wir führen zur Vereinfachung ein:

$$\begin{aligned} \cos t &= x, & \sin t &= y & (x^2 + y^2 = 1!) \\ \cos a &= a, & \sin a &= b & (a^2 + b^2 = 1!) \end{aligned} \text{ und schreiben:}$$

$$\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} = 1.$$

Ich drücke y und b durch x und a aus:

$$\frac{y^3}{b} = 1 - \frac{x^3}{a}, \quad \frac{y^6}{b^2} = \left(1 - \frac{x^3}{a}\right)^2, \quad \frac{(y^2)^3}{b^2} = \left(1 - \frac{x^3}{a}\right)^2$$

und setze $y^2 = 1 - x^2$:

$$\frac{(1-x^2)^3}{b^2} = \left(1 - \frac{x^3}{a}\right)^2, \quad \frac{1-3x^2+3x^4-x^6}{b^2} = 1 - \frac{2x^3}{a} + \frac{x^6}{a^2},$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)x^6 - 3a^2x^4 - 2ab^2x^3 + 3a^2x^2 - a^2(1-b^2) &= 0 \\ x^6 - 3a^2x^4 - 2ab^2x^3 + 3a^2x^2 - a^4 &= 0. \end{aligned}$$

Setze $b^2 = 1 - a^2$:

$$x^6 - 3a^2x^4 - 2ax^3 + 2a^3x^3 + 3a^2x^2 - a^4 = 0.$$

Da die Tangente zunächst den doppelt zu zählenden Berührungspunkt P mit der Kurve gemein hat, der durch $a = \cos a$ charakterisiert ist, so ist a eine doppelte Wurzel dieser Gleichung diese muß also durch $(x-a)^2$ teilbar sein. Das ist, wie man durch Ausdividieren zeigen kann, in der Tat der Fall. Es bleibt übrig die biquadratische Gleichung

$$x^4 + 2ax^3 - 2ax - a^2 = 0.$$

Ganz ebenso ergibt sich zur Berechnung von y die Gleichung

$$y^4 + 2by^3 - 2by - b^2 = 0.$$

Wir addieren diese beiden Gleichungen, nachdem wir sie durch a^2 bzw. b^2 geteilt haben:

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} + 2\left(\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b}\right) - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) - 2 = 0.$$

Nun ist aber, wie wir wissen, $\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} = 1$, folglich

$$(1) \quad \frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Andererseits entsteht durch Multiplikation der Gleichung $\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} = 1$

mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ die neue Gleichung

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} + \frac{xy}{ab} - (x^2 + y^2) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \text{ oder, da } x^2 + y^2 = 1:$$

$$(2) \quad \frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} + \frac{xy}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{xy}{ab} = -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \text{ oder}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = -1.$$

Mit Wiedereinsetzung der Werte für a , b , x und y :

$$\frac{-\cos a}{\cos t} + \frac{-\sin a}{\sin t} = 1.$$

Die Gleichung gilt also für einen Schnittpunkt $S(t)$ der Tangente in $P(a)$ mit der Kurve. Nun würde aber die Gleichung der Tangente in S lauten:

$$\frac{\xi}{\cos t} + \frac{\eta}{\sin t} = 1.$$

Diese Gleichung wird also von $\xi = \cos a$ und $\eta = -\sin a$ befriedigt, d. h. der Punkt $\xi = -\cos a = \cos(a + \pi)$, $\eta = \sin(a + \pi)$ liegt auf der in S an die Astroide gezogenen Tangente.

Ein Punkt mit den Koordinaten $\xi = \cos(a + \pi)$, $\eta = \sin(a + \pi)$ ist aber zugleich ein Punkt des Umkreises mit dem Radius 1. ($\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1!$ Ein Astroidenpunkt kann es nicht sein, da für einen solchen $\xi = \cos^3(a + \pi)$, $\eta = \sin^3(a + \pi)$ sein müßte) Weiter: Die Tangente in P hat zwei Schnittpunkte in S mit der Kurve gemein. Für jeden dieser Punkte S gilt die letzte Gleichung, und die Tangente in jedem der Punkte S geht durch den Kreisbogen $\xi = \cos(a + \pi)$, $\eta = \sin(a + \pi)$, d. h. die Tangenten in den beiden Punkten S schneiden sich auf dem Umkreis.

E. Die Evolute der Astroide

Es ist $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$, $y'' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^4 y}}$. Setzt man diese Werte in die

Formel für den Krümmungsradius $R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}$ ein, so folgt

$R = \sqrt[3]{axy}$ oder in Parameterdarstellung

$$R = 3\sqrt[3]{a^3 \cos^3 t \sin^3 t} = \frac{3a}{2} \sin 2t.$$

Hiernach hat R seinen größten Wert für $t = 45^\circ$ ($R = \frac{3a}{2}$); R wird Null für $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Für die Koordinaten XY des Krümmungsmittelpunktes eines Kurvenpunktes xy bestehen die Gleichungen:

$$X = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''},$$

$$Y = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}.$$

Setzen wir hierin

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}\right] \left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \cdot 3x^{4/3}y^{1/3}}{a^{2/3}} \\ &= x + 3 \frac{(x^{2/3} + y^{2/3})x^{1/3}y^{2/3}}{a^{2/3}} = x + 3x^{1/3}y^{2/3} \end{aligned}$$

und ganz entsprechend $Y = y + 3x^{2/3}y^{1/3}$.

Wir drehen das Koordinatensystem um 45° nach den für die neuen Koordinaten (ξ, η) geltenden Beziehungen:

$$X = \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\eta}{\sqrt{2}},$$

$$Y = \frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}},$$

$$\xi = \frac{(Y+X)\sqrt{2}}{2} = \frac{Y+X}{\sqrt{2}} = \frac{y+x+3x^{1/3}y^{2/3}+3x^{2/3}y^{1/3}}{\sqrt{2}},$$

$$\eta = \frac{(x^{1/3} + y^{1/3})^3}{\sqrt{2}}.$$

Entsprechend $\eta = \frac{(y^{1/3} - x^{1/3})^3}{\sqrt{2}}$. Demnach

$$\xi^{2/3} + \eta^{2/3} = \frac{(x^{1/3} + y^{1/3})^2 + (y^{1/3} - x^{1/3})^2}{(\sqrt{2})^{2/3}} = \frac{2(x^{2/3} + y^{2/3})}{(\sqrt{2})^{2/3}} = \frac{2a^{2/3}}{(\sqrt{2})^{2/3}},$$

$$\xi^{2/3} + \eta^{2/3} = (2a)^{2/3}.$$

Die Evolute der Astroide ist demnach eine um 45° gedrehte Astroide mit doppeltem Maßstab.

F. Anwendungen der Integralrechnung

1. Rektifikation

$$s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx,$$

$$s = 4 \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = 4 a^{1/3} \int x^{-1/3} dx = \left[\frac{4 a^{1/3} x^{2/3}}{2/3} \right]_0^a = 6a.$$

2. Quadratur. $S = 1/2 \int (x dy - y dx)$. Aus den Parametergleichungen $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ findet man

$$dx = -3a \cos^2 t \sin t dt,$$

$$dy = +3a \sin^2 t \cos t dt,$$

$$x dy - y dx = 3a^2 (\sin^2 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt,$$

$$S = \frac{3a^2}{2} \int_0^t \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^t 4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^t \sin^2(2t) d(2t)$$

$$= \frac{3a^2}{16} \left[-\frac{1}{2} \sin(2t) \cos(2t) + t \right]_0^t = \frac{3a^2}{16} \left[t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right]_0^t.$$

Für $t = \pi/2$ erhält man den vierten Teil der Astroidenfläche, folglich ist das gesamte Feld $F = \frac{3a^2\pi}{8}$.

3. Kubatur

a) In kartesischen Koordinaten:

Aus der Kurvengleichung folgt

$$y^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}, \quad y^2 = a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2.$$

Demnach

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{+a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{+a} (a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2) dx \\ &= \pi \left[a^2 x - \frac{3a^{4/3}x^{5/3}}{5/3} + \frac{3a^{2/3}x^{7/3}}{7/3} - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} \\ &= \pi \left[a^2 x - \frac{9a^{4/3}x^{5/3}}{5} + \frac{9a^{2/3}x^{7/3}}{7} - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} \\ &= \pi \left[a^3 - \frac{9a^3}{5} + \frac{9a^3}{7} - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{9a^3}{5} + \frac{9a^3}{7} - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{32a^3\pi}{105}. \end{aligned}$$

b) In Parameterdarstellung:

Aus $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ folgt $dx = -3a \cos^2 t \sin t dt$, demnach ist das nur von einem Viertel des Umfangs beschriebene halbe Körpervolumen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int y^2 dx = -3a^2 \pi \int_{\pi/2}^0 \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt \text{ oder, da } \sin t dt \\ &= -d(\cos t): \end{aligned}$$

$$V = 3a^2 \pi \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t).$$

Setzt man $\cos t = z$, so wird

$$\begin{aligned} V &= 3a^2 \pi \int_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz = 3a^2 \pi \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right]_0^1 \\ &= 3a^2 \pi \left[\frac{4}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right] = \frac{16a^3\pi}{105}. \end{aligned}$$

Demnach das Gesamtvolumen $V = \frac{32a^3\pi}{105}$.

4. Komplanation. Bei der Rektifikation ergab sich

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2} = a^{1/3} x^{-1/3} dx;$$

demnach ist die Oberfläche des durch Rotation eines Astroidenquadranten um die y -Achse entstehenden Körpers

$$O = 2\pi \int x ds = 2\pi \int_0^a a^{1/3} x^{2/3} dx = \left[\frac{2\pi a^{1/3} x^{5/3}}{5/3} \right]_0^a = \frac{2\pi a^{1/3} a^{5/3}}{5/3} = \frac{6\pi a^2}{5},$$

so daß die Gesamtoberfläche $\frac{12a^2\pi}{5}$ Einheiten groß ist.

5. Schwerpunkt des Bogens des Astroidenquadranten.

Formel: $x_m = \int \frac{x ds}{s}$. Da nach dem Ergebnis der Rektifikation

$s = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$ und $ds = a^{1/3} x^{-1/3} dx$, so erhalten wir

$$x_m = \int_0^a \frac{x a^{1/3} x^{-1/3} dx}{3a/2} = \frac{2\sqrt[3]{a}}{3a} \int_0^a x^{2/3} dx = \frac{2\sqrt[3]{a} \cdot a^{5/3} \cdot 3}{3a \cdot 5} = \frac{2a}{5}.$$

Damit ist die Lage des Schwerpunktes, der im übrigen natürlich auf der Winkelhalbierenden liegt, festgelegt.

19. Die Steinersche Kurve

(Dreispitziige Hypozykloide)

Die Kurve trägt ihren Namen nach Jakob Steiner (1769–1863), dem Meister der projektiven Geometrie, der die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sie lenkte.

A. 1. Erzeugungsweise

Als Hypozykloide (s. Abb. 156). Sie entsteht durch Abrollen eines Kreises im Inneren eines größeren, wenn letzterer den dreifachen Radius des kleineren Kreises hat. Ein Punkt des Umfangs (P) beschreibt dabei die Kurve. Bezeichne ich den Radius des kleineren Kreises mit b , sehe die positive x -Achse als Anfangslage an und nenne den Wälzungswinkel, der die dargestellte Lage bezeichnet, t , so ist, da $\widehat{BP} = \widehat{BS}$, $b \cdot \psi = 3b \cdot t$, $\psi = 3t$. Man liest aus der Zeichnung ab:

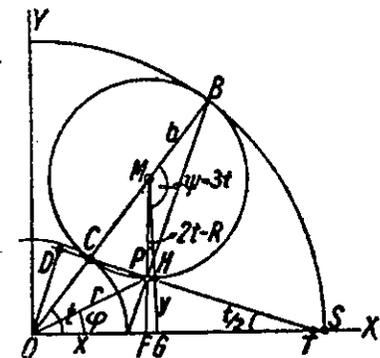


Abb. 156

$$y = PF = MG - MH = 2b \sin t - b \cos(2t - R) = 2b \sin t - b \sin 2t,$$

$$x = OF = OG - PH = 2b \cos t - b \sin(2t - R) = 2b \cos t + b \cos 2t,$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= b(2 \sin t - \sin 2t) \\ x &= b(2 \cos t + \cos 2t) \end{aligned}}$$

Für den Fahrstrahl r erhalten wir aus $r^2 = x^2 + y^2$

$$r^2 = b^2 (4 \cos^2 t + 4 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t + 4 \sin^2 t - 4 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t),$$

$$r^2 = b^2 [4 + 4(\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t) + 1] = b^2 (5 + 4 \cos 3t).$$

B. Auswertung der Kurvengleichungen

Die Gleichung für r^2 zeigt, daß r^2 und damit r alle Werte, die es überhaupt annehmen kann, im Intervall $0^\circ - 120^\circ$ annimmt, und zwar doppelt für t und $120^\circ - t$ [da $\cos 3t = \cos(360^\circ - 3t)$]. Den Hochwert für r haben wir für $t = 0$ ($r = 3b$), den Tiefwert für $t = 60^\circ$, ($\cos 3t = 0$, $r = b$). In den Intervallen $120^\circ - 240^\circ$ und $240^\circ - 360^\circ$ kehren dieselben Werte wieder. Die Kurve besteht also aus drei kongruenten Zweigen, die in Spitzen zusammenstoßen. Da jeder Zweig symmetrisch gebaut ist, hat die Kurve also 3 Symmetrieachsen. Mit dem Tiefwert $r = b$ läßt sich der Kurve der Scheitelkreis einbeschreiben. Für $t = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ und $t = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$, d. h. für die Hoch- und Tiefwerte von r , fällt der Wälzungswinkel t mit der Amplitude φ zusammen. Die drei ersten Punkte (Spitzen) sind Berührungspunkte des festen und rollenden Kreises, entsprechend je einer vollen Umwälzung des letzteren. Die drei Tiefwerte sind ihren entsprechenden Berührungspunkten diametral gegenüberliegend und entsprechen je einer halben ($1\frac{1}{2}$ -, $2\frac{1}{2}$ -fachen) Umdrehung.

C. Tangenteneigenschaften

Bevor wir weitere Erzeugungsweisen der Kurve besprechen, sei eine Reihe bemerkenswerter, für die weitere Entwicklung notwendiger Sätze über die Tangenten der Kurve eingefügt.

Da B augenblicklicher Drehpunkt ist, ist BP Normale und das Lot hierauf in P (PT) Tangente. Die Verlängerung von TP muß dann natürlich durch C gehen. Durch einfache Winkelausrechnung findet man $\sphericalangle PTO = t/2$. Die *Tangentengleichung* stellen wir nach der Hesseschen Normalform auf ($x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$). In unserem Falle ist der Winkel des Lotes OD mit der x -Achse gleich $R - \frac{t}{2}$, demnach $\cos \alpha = \sin \frac{t}{2}$ und $\sin \alpha = \cos \frac{t}{2}$. Weiter ist $OC (= \frac{1}{3} OB!) = b$ und $\sphericalangle DCO = \frac{3t}{2}$, demnach $OD = \delta = b \sin \frac{3t}{2}$, so daß die Gleichung der Tangente lautet

$$\underline{x \sin \frac{t}{2} + y \cos \frac{t}{2} = b \sin \frac{3t}{2}}.$$

Wir wollen nun die Schnittpunkte der Tangente mit den beiden anderen Kurvenzweigen feststellen. Nehmen wir an, zu dem gesuchten Schnittpunkt gehöre ein Wälzungswinkel t' , so sind die Gleichungen aufzulösen

$$x \sin \frac{t}{2} + y \cos \frac{t}{2} = b \sin \frac{3t}{2} \text{ Tangente,}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= b(2 \sin t' - \sin 2t') \\ x &= b(2 \cos t' + \cos 2t') \end{aligned} \right\} \text{ Kurve.}$$

Setzen wir $\cos t' = u$ und $\sin t' = v$ und führen die Werte von x und y aus den Kurvengleichungen in die obere Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2ub \sin \frac{t}{2} + b \sin \frac{t}{2} (2u^2 - 1) + 2bv \cos \frac{t}{2} - 2buv \cos \frac{t}{2} \\ = b \sin \frac{3t}{2} = b \sin \frac{t}{2} (4 \cos^2 \frac{t}{2} - 1). \end{aligned}$$

Durch $2b$ dividiert und $b \sin \frac{t}{2}$ weggehoben:

$$\begin{aligned} u \sin \frac{t}{2} + u^2 \sin \frac{t}{2} + v \cos \frac{t}{2} - uv \cos \frac{t}{2} = 2 \sin t \cos \frac{t}{2} \\ \left(\text{da } 4 \sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} = 2 \sin t \cos \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

und nach Division mit $\cos \frac{t}{2}$, wenn $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \lambda$:

$$u \lambda + v + u(u \lambda - v) = \sin t.$$

Die Auflösung dieser Gleichung zusammen mit $u^2 + v^2 = 1$ ergäbe eine Gleichung 4. Grades, die sehr schwierig zu behandeln wäre. Es zeigt sich aber bei Betrachtung der letzten Gleichung, daß sie erfüllt wird, wenn man $u \lambda + v = 0$ setzt. Denn aus $u \lambda + v = 0$ oder $\cos t' \cdot \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \sin t' = 0$ folgt

$$\operatorname{tg} t' = -\operatorname{tg} \frac{t}{2}, \text{ woraus } t'_1 = 180^\circ - \frac{t}{2} \text{ und } t'_2 = 360^\circ - \frac{t}{2}.$$

Es ist dann nämlich

$$\begin{aligned} u(u \lambda - v) &= \cos^2 t' \operatorname{tg} \frac{t}{2} - \cos t' \sin t', \\ &= \cos^2 \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}, \\ &= \sin t. \end{aligned}$$

Es ist also unter dieser Annahme die Gleichung

$$\frac{u\lambda + v + u(u\lambda - v)}{\sin t} = \sin t$$

befriedigt.

Danach haben die zur Tangente in P_1 (Abb. 157) gehörigen zwei Schnittpunkte P_2 und P_3 die Wälzungswinkel $t'_1 = 180^\circ - \frac{t}{2}$ und

$$t'_2 = 360^\circ - \frac{t}{2}.$$

Setzt man nun diese Werte von t'_1 und t'_2 in die Kurvengleichung ein, so erhält man als die Koordinaten von P_2 und P_3 :

$$x' = b \left(-2 \cos \frac{t}{2} + \cos t \right),$$

$$y' = b \left(2 \sin \frac{t}{2} + \sin t \right)$$

und

$$x'' = b \left(2 \cos \frac{t}{2} + \cos t \right),$$

$$y'' = b \left(-2 \sin \frac{t}{2} + \sin t \right).$$

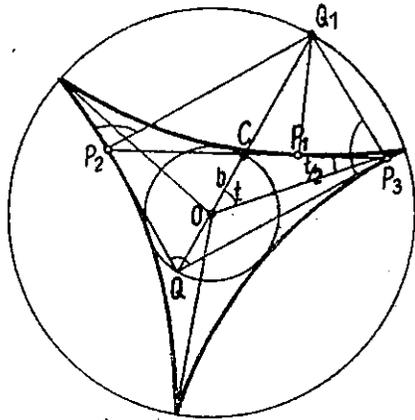


Abb. 157

Aus diesen Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Sätzen:

1. Koordinaten des Mittelpunktes von P_2P_3 :

$$x = \frac{x' + x''}{2} = b \cos t,$$

$$y = \frac{y' + y''}{2} = b \sin t.$$

Dieselben Koordinaten hat aber der Punkt C , in dem der Wälzungstrahl des Punktes P_1 (s. auch Abb. 156) den Scheitelkreis schneidet. Also bestehen die beiden Sätze:

Jede Tangente wird als Sehne von dem Wälzungstrahl des Berührungspunktes halbiert.

Die Mitten aller Tangenten liegen auf dem Scheitelkreis.

2. Wir berechnen P_2P_3 nach der Formel

$$d = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$

und erhalten

$$P_2P_3 = 4b,$$

d. h.: Die Länge der Tangenten ist innerhalb der Kurve konstant und gleich dem Vierfachen des Scheitelkreisradius.

3. Setzt man die Werte t'_1 und t'_2 in die Tangentengleichung ein, so erhält man

$$x \sin \left(90^\circ - \frac{t}{4} \right) + y \cos \left(90^\circ - \frac{t}{4} \right) = \sin 3 \left(90^\circ - \frac{t}{4} \right),$$

$$x \cos \frac{t}{4} + y \sin \frac{t}{4} = -b \cos \frac{3t}{4} \quad (I)$$

und entsprechend

$$x \sin \frac{t}{4} - y \cos \frac{t}{4} = b \sin \frac{3t}{4}. \quad (II)$$

Setzt man aus (I)

$$y = -\frac{b \cos \frac{3t}{4} + x \cos \frac{t}{4}}{\sin \frac{t}{4}}$$

in (II) ein, so folgt

$$x \sin^2 \frac{t}{4} + b \cos \frac{3t}{4} \cos \frac{t}{4} + x \cos^2 \frac{t}{4} = b \sin \frac{3t}{4} \sin \frac{t}{4},$$

$$x \left(\sin^2 \frac{t}{4} + \cos^2 \frac{t}{4} \right) = -b \cos \left(\frac{3t}{4} + \frac{t}{4} \right) = -b \cos t.$$

$$x = -b \cos t.$$

Dieser Wert wird wieder in (II) eingesetzt:

$$-b \cos t \sin \frac{t}{4} - b \sin \left(t - \frac{t}{4} \right) = y \cos \frac{t}{4},$$

$$-b \cos t \sin \frac{t}{4} - b \sin t \cos \frac{t}{4} + b \cos t \sin \frac{t}{4} = y \cos \frac{t}{4},$$

$$y = -b \sin t,$$

d. h. der Schnittpunkt Q der beiden Tangenten liegt auf dem Scheitelkreis dem Punkt C diametral gegenüber.

Und weiter: Aus den Gleichungen (I) und (II) geht hervor, daß Tangente (I) die Steigung $-\operatorname{ctg} \frac{t}{4}$, Tangente (II) die Steigung $\operatorname{tg} \frac{t}{4}$ hat, daß sie also aufeinander senkrecht stehen.

Wir fassen beide Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

Die Tangenten in den Schnittpunkten einer Tangente schneiden sich auf dem Scheitelkreis in dem der Mitte der Tangente diametral gegenüberliegenden Punkte unter einem rechten Winkel.

4. Errichtet man (Abb. 157) in P_2 und P_3 die Kurvennormalen, die sich in Q_1 schneiden, so muß Q_1 , da $CP_2 = CP_3$ ist, auf der Verlängerung von QC liegen und $CQ_1 = CQ$ sein. Q_1 liegt mithin auf dem Umkreis O mit dem Radius $3b$. Um nachzuweisen, daß auch die Normale von P durch Q_1 geht, bilden wir zunächst ihre Gleichung. Wie die Tangenten stellen wir auch die Normalgleichung nach der Hesseschen Normalform auf. Aus Abb. 156 geht hervor, daß für die Normale BP $\alpha = -\frac{t}{2}$ und $\delta = OB \sin OBP = 3b \cdot \sin\left(R - \frac{3t}{2}\right) = 3b \cos \frac{3t}{2}$ ist. Ihre Gleichung lautet mithin:

$$x \cos \frac{t}{2} - y \sin \frac{t}{2} = 3b \cos \frac{3t}{2}.$$

Nun hat Q_1 als Punkt des Kreises O die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= 3b \cos t \\ y &= 3b \sin t. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in die Normalgleichung ein, so erhalten wir:

$$3b \cos t \cos \frac{t}{2} - 3b \sin t \sin \frac{t}{2} = 3b \cos \frac{3t}{2}.$$

Die Koordinaten von Q_1 befriedigen mithin die Gleichung der Normalen in P . Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Normalen in den drei Kurvenpunkten, die derselben Tangente angehören, schneiden sich in dem Punkte des Umkreises, der dem Schnittpunkt der beiden Tangenten auf dem Scheitelkreis diametral gegenüber liegt.

D. Weitere Erzeugungsweisen

Die unter Nr. 1 und 2 gewonnenen Tangentensätze führen zu folgender

2. *Erzeugungsweise* (Abb. 158): Bewegt sich eine Strecke von der Länge $4b$ mit ihrer Mitte auf einem festen Kreis mit dem Radius b so, daß die Winkel, die der Radius nach der Mitte (t) und die Strecke selbst ($t/2$) mit einer festen Anfangsrichtung (OX) bilden, sich wie 2:1 verhalten, so umhüllt die Strecke die Steinersche Kurve, welche ihre Endpunkte beschreiben, und der feste Kreis ist der Scheitelkreis.

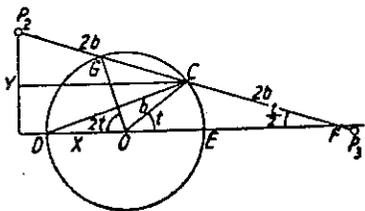


Abb. 158

Wollte man übrigens auf Grund dieser Bestimmung die Kurvengleichungen ableiten, so würde man zunächst für P_2 erhalten

$$y = 2b \sin \frac{t}{2} + b \sin t,$$

$$x = -(2b \cos \frac{t}{2} - b \cos t),$$

zwei Gleichungen, die mit den oben gegebenen Kurvengleichungen nicht übereinzustimmen scheinen. Es ist jedoch zu bedenken, daß t Wälzungswinkel für P_1 ist (Abb. 157), während für den Wälzungswinkel von P_2 noch die Beziehung besteht $t' = 180^\circ - \frac{t}{2}$ oder $t = 360^\circ - 2t'$.

Um also in unseren Gleichungen Koordinaten und Wälzungswinkel in Übereinstimmung zu bringen, muß ich noch $t = 360^\circ - 2t'$ setzen und erhalte dann

$$\begin{aligned} y &= 2b \sin (180^\circ - t') + b \sin (360^\circ - 2t') = 2b \sin t' - b \sin 2t', \\ x &= -2b \cos (180^\circ - t') + b \cos (360^\circ - 2t') = 2b \cos t' + b \cos 2t' \end{aligned}$$

also unsere eigentlichen Kurvengleichungen.

Einfache Winkelausrechnung zeigt, daß $\sphericalangle CDE = \frac{t}{2}$, also $CD = CF$.

Ich kann demnach auch sagen:

3. *Erzeugungsweise*: Gegeben ein Kreis O mit einem Durchmesser DE . Ziehe von einem beliebigen Kreispunkt C aus $CF = CD$. Bei Bewegung von C auf den Kreis umhüllt CF eine Steinersche Kurve.

Weiter: Es errechnet sich $\sphericalangle GOD = 2t$. Trage ich danach von DE aus zwei Bogen CE und GD so ab, daß letzterer doppelt so groß wie ersterer ist, so umhüllt GC eine Steinersche Kurve. Ich kann diese Erzeugungsweise auch in folgende Worte kleiden:

4. *Erzeugungsweise*: Wenn zwei Punkte sich mit konstanten, entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten, die sich wie 2:1 verhalten, auf einem Kreis bewegen, so umhüllt die Gerade, die ihre Stellungen verbindet, eine Steinersche Kurve.

Es ist dabei gleichgültig, von welchen Anfangspunkten aus die beiden beweglichen Punkte ihren Lauf beginnen. Dadurch wird lediglich die Lage der entstehenden Kurve bezüglich des Achsenkreuzes bestimmt. Zu unserer gewöhnlichen Lage der Kurve kommen wir, wenn wir die beiden Punkte gemeinsam von der positiven x -Achse aus ihren Lauf beginnen lassen.

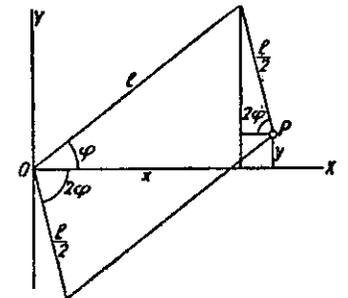


Abb. 159

Ähnlichkeit mit dieser vierten zeigt die

5. Erzeugungsweise (Abb. 159): Ein Gelenkparallelogramm von den Seiten l und $l/2$ drehe sich mit zwei zusammenstoßenden Seiten derart um eine Ecke O , daß die beiden Seiten sich nach entgegengesetzten Richtungen — die kleinere doppelt so schnell wie die größere — bewegen. Dann beschreibt die gegenüberliegende Ecke eine Steinersche Kurve.

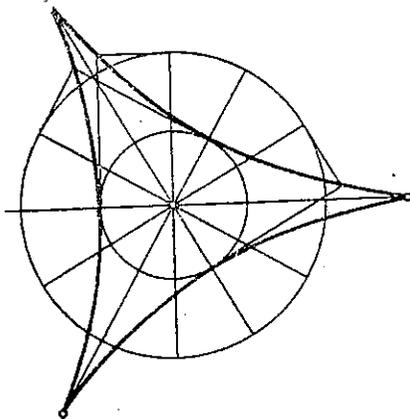


Abb. 160

Man liest die Kurvengleichungen unmittelbar aus der Zeichnung ab:

$$\begin{aligned} y &= l \sin \varphi - \frac{l}{2} \sin 2\varphi \\ &= \frac{l}{2} (2 \sin \varphi - \sin 2\varphi), \\ x &= l \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos 2\varphi \\ &= \frac{l}{2} (2 \cos \varphi + \cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Die auf diese Weise erzeugte Kurve zeigt Abb. 160.

Endlich sei noch ohne den zu schwierigen Beweis eine letzte,

6. Erzeugungsweise der Kurve kurz angeführt, die auf folgendem Satze der elementaren Geometrie beruht (Abb. 161): Fällt man von einem beliebigen Punkte des Umkreises eines Dreiecks die Lote auf die drei Seiten, so liegen deren Fußpunkte auf einer Geraden (einersogenannten Simpsonschen oder Wallace-schen Geraden). Es läßt sich nun die überraschende Tatsache beweisen:

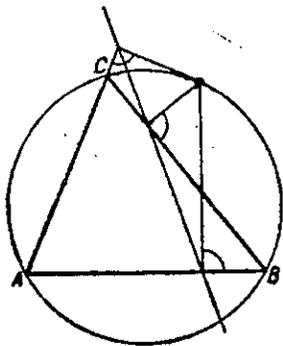


Abb. 161

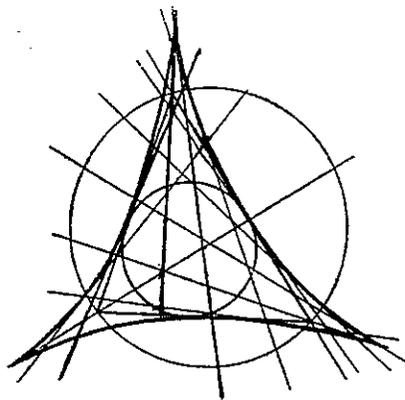


Abb. 162

Die Simpsonschen oder Wallaceschen Geraden eines Dreiecks umhüllen eine Steinersche Kurve, deren Scheitelkreis der (durch die Höhenfußpunkte gehende) Feuerbachsche Kreis des Dreiecks ist (Abb. 162). Den Beweis dieses Satzes findet der Leser z. B. in H. Dörrie, Triumph der Mathematik, Hirt, Breslau 1933.

E. Anwendungen der Integralrechnung

1. Rektifikation. Aus den Kurvengleichungen folgt:

$$\begin{aligned} dy &= b(2 \cos t - 2 \cos 2t) dt = 4b \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}, \\ dx &= b(-2 \sin t - 2 \sin 2t) dt = -4b \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2}, \\ \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{tg} \frac{t}{2} \end{aligned}$$

(entspr. Abb. 156 oder 157), also:

$$\begin{aligned} s &= \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int 4b \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= 4b \int \sin \frac{3t}{2} dt = \frac{4b \cdot 2}{3} \int \sin \frac{3t}{2} d\left(\frac{3t}{2}\right) = -\frac{8b}{3} \left[\cos \frac{3t}{2}\right]. \end{aligned}$$

Für den 3. Teil des gesamten Umfanges nehmen wir t zwischen 0 und $\frac{2\pi}{2}$ und erhalten:

$$s = -\frac{8b}{3} [\cos 180^\circ - \cos 0^\circ],$$

also der Gesamtumfang $U = 16b$.

2. Quadratur.

$$\begin{aligned} x dy &= b(2 \cos t + \cos 2t) 4b \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4b^2 \left(2 \cos t \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2} + \cos 2t \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}\right) dt \\ y dx &= b(2 \sin t - \sin 2t) (-4b) \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} dt, \\ &= -4b^2 \left(2 \sin t \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} - \sin 2t \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2}\right) dt, \\ x dy - y dx &= 4b^2 \left(2 \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{3t}{2}\right) dt \\ &= 4b^2 \sin^2 \frac{3t}{2} dt, \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx) = 2b^2 \int \sin^2 \frac{3t}{2} dt = \frac{2b^2 \cdot 2}{3} \int \sin^2 \frac{3t}{2} d\left(\frac{3t}{2}\right)$$

$$= \frac{4b^2}{3} \left[-\frac{1}{2} \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{3t}{2} + \frac{3t}{4} \right].$$

Für $\frac{1}{3}$ der Gesamtfläche nehmen wir t zwischen 0 und $\frac{2\pi}{3}$ und erhalten

$$S = \frac{4b^2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2b^2\pi}{3}.$$

Also ist die Gesamtfläche

$$F = 2b^2\pi,$$

also doppelt so groß wie der Scheitelkreis.

20. Die Doppelteilinie

A. Erzeugungsweisen

1. In einem Kreis mit dem Mittelpunkt O (Abb. 163) und dem Radius a sei ein Durchmesser OX gezogen und ein Radius OA . Man fälle von A auf OX das Lot AB und von B auf OA das Lot BP . Dreht sich OA um O , so beschreibt P die Kurve.

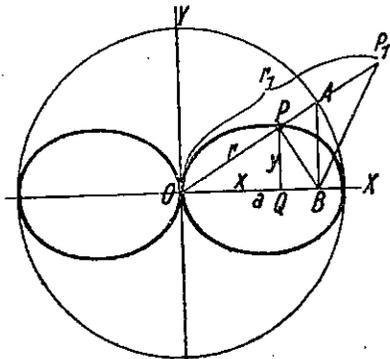


Abb. 163

Kurvengleichungen

Zieht man noch $PQ \perp OX$, dann ist als mittlere Proportionale

$$OP^2 = OQ \cdot OB,$$

$$x^2 + y^2 = x \cdot OB.$$

Andererseits ist

$$OB^2 = OP \cdot OA = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot a$$

oder

$$OB = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot a},$$

so daß man durch Einsetzen erhält

$$x^2 + y^2 = x \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot a},$$

$$(x^2 + y^2)^4 = x^4 (x^2 + y^2) a^2,$$

$$\boxed{(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4}.$$

Führt man $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ein, so gelangt man zur Polargleichung:

$$(r^2)^3 = a^2 r^4 \cos^4 \varphi,$$

$$r^2 = a^2 \cos^4 \varphi,$$

$$\boxed{r = a \cos^2 \varphi}.$$

2. An die vorige Erzeugungsweise schließt sich die folgende unmittelbar an. Man fällt in den Kreis O, a (Abb. 163) wieder das Lot AB auf die x -Achse, zieht dann aber nicht die Senkrechte BP , sondern schlägt um B mit OB einen Kreis, der die Verlängerung von OA in P_1 schneidet. Dann beschreibt P_1 bei Drehung des Strahles eine Doppelteilinie. Man sieht sofort, daß $OP_1 = 2 \cdot OP$, also $r_1 = 2a \cos^2 \varphi$. P_1 beschreibt also eine Doppelteilinie von doppeltem Ausmaß im Vergleich zu P .

3. Als Konchoide der Rosette. Da $1 + \cos 2\varphi = 2 \cdot \cos^2 \varphi$, kann ich unsere Kurvengleichung schreiben in der Form

$$r = \frac{a}{2} (1 + \cos 2\varphi),$$

$$r = \frac{a}{2} \cos 2\varphi + \frac{a}{2}.$$

Drehe ich nun das Koordinatensystem in negativer Richtung um 45° , setze also $\varphi = \varphi' - 45^\circ$, so wird

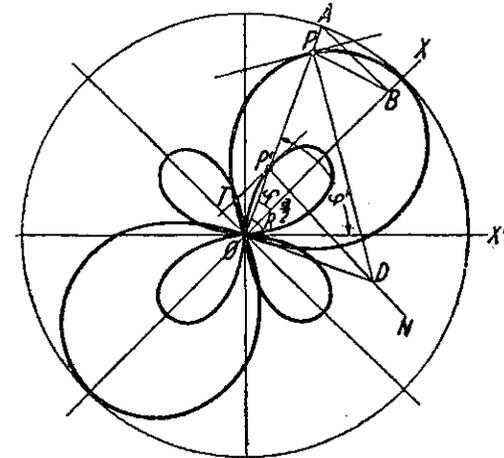


Abb. 164

$$\cos 2\varphi = \cos(2\varphi' - 90^\circ) = \sin 2\varphi'$$

und

$$r = \frac{a}{2} \sin 2\varphi' + \frac{a}{2}. \text{ (s. Abb. 164)}$$

Das ist aber der Fahrstrahl einer Rosette, vermehrt um ihren Kreisradius. Bei der Zeichnung ist darauf zu achten, daß die zu den Winkeln des 2. und 4. Quadranten gehörigen r negativ zu rechnen sind.

B. Auswertung der Kurvengleichungen

1. Beide Gleichungsformen zeigen, daß die Kurve sowohl zur x - als auch zur y -Achse symmetrisch ist.

2. Löst man nach y auf:

$$y^2 = y^{2/3} x^{4/3} - x^2,$$

so erkennt man, daß $y = 0$ für $x = 0$ und $x = \pm a$.

Daß O ein Knotenpunkt der Kurve ist, zeigt die Polargleichung $r = a \cos \varphi$, die $r = 0$ ergibt für die doppelt zu zählenden Werte $\varphi = R$ und $\varphi = 3R$.

3. Zur Untersuchung der breitesten Stelle der Schleife bestimmen wir den Hochwert von $y^2 = a^{2/3} x^{4/3} - x^2$.

Wir differenzieren:

$$(y^2)' = \frac{4}{3} a^{2/3} x^{1/3} - 2x = 0,$$

$$\frac{4}{3} a^{2/3} x^{1/3} = x,$$

$$\frac{4}{3} a^2 x = x^3,$$

$$x = \frac{2a}{9} \sqrt{6} \approx \pm 0,54 \dots a,$$

also nicht genau in der Mitte der halben großen Achse, sondern um $0,04a$ nach außen verschoben.

C. Tangentenkonstruktionen

1. Wir bestimmen den Winkel, den Fahrstrahl und Tangente miteinander bilden, gemäß der Gleichung

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r \, d\varphi}{dr}.$$

Die Differentiierung der Polargleichung ergibt:

$$dr = -2a \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{-1}{2a \cos \varphi \sin \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{-a \cos^2 \varphi}{2a \cos \varphi \sin \varphi} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\operatorname{tg}(2R - \mu) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(R - \varphi).$$

Dieser Gleichung entsprechend konstruieren wir folgendermaßen.

Es ist (Abb. 165) $\frac{PB}{PA} = \operatorname{tg}(R - \varphi)$; halbiert man also PB in M , so ist $\frac{PM}{PA} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(R - \varphi) = \operatorname{tg}(2R - \mu)$, also $\sphericalangle OAM = 2R - \mu$.

Errichte ich demnach auf OA das Mittellot, das AM in N schneidet, so ist auch $\sphericalangle AON = 2R - \mu$. Ziehe ich also durch P die Parallele zu ON , so bildet diese mit dem Fahrstrahl OP den Winkel μ , d. h. es ist die gesuchte Tangente.

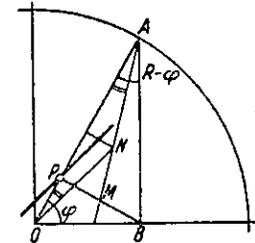


Abb. 165

2. Die Entstehungsweise der Kurve als Konchoide der Rosette führt zu folgender Tangentenkonstruktion (s. Abb. 164). Bezeichnet man den entsprechenden Rosettepunkt mit P' und zeichnet die Rosettetangente $P'T$ gemäß § 17 ein, so stellt NP' die Rosettenormale dar; deren Schnittpunkt D mit dem auf OP in O errichteten Lot liefert (s. § 13) das augenblickliche Drehzentrum für die Konchoide (Doppelleinie). DP ist also Kurvennormale.

D. Anwendung der Integralrechnung

1. Quadratur

Bei Verwendung der Polargleichung wird der Quadrant (φ von 0 bis $\pi/2$)

$$S = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\left(\frac{1}{4} \cos^3 \varphi + \frac{3}{8} \cos \varphi \right) \sin \varphi + \frac{3}{8} \varphi \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

Mithin ist der Inhalt der ganzen Schleife $\frac{3a^2\pi}{8}$, also nahezu zu die Hälfte des erzeugenden Kreises.

2. Kubatur

Lassen wir einen Quadranten um die x -Achse rotieren (x von 0 bis a), so ist nach der Formel $V = \pi \int_0^a y^2 dx$ der Rauminhalt des entstehenden eiförmigen Körpers

$$V = \pi \int_0^a (a^{2/3} x^{1/3} - x^2) dx = \pi \left[\frac{3 a^{2/3} x^{4/3}}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= \pi \left(\frac{3 a^3}{4} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{5 a^3 \pi}{12},$$

also der Rauminhalt des Doppelkeils $\frac{4 a^3 \pi}{21}$. Da der Inhalt der durch den Kreis erzeugten Kugel $\frac{4 a^3 \pi}{3}$ ist, so stellt also das Doppelkeil den siebten Teil der Umkugel dar.

E. Verwendung zur Würfelverdoppelung(-vervielfachung u.-teilung).

Bezeichnet man OQ mit b und OB mit z , so ist, da $PQ = y$ und $x = b$ (s. Abb. 166):

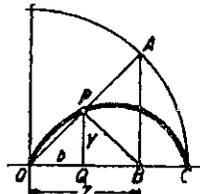


Abb. 166

$$PQ^2 = OQ \cdot QB,$$

$$a^{2/3} \cdot x^{4/3} - x^2 = b(z - b),$$

$$a^{2/3} \cdot b^{4/3} - b^2 = bz - b^2,$$

$$z^3 = a^2 b.$$

Mache ich $b = \frac{a}{n}$, so gibt mir die letzte Gleichung

$z^3 = \frac{a^3}{n}$, d. h. $OB = z$ stellt mir dann die Kante des Würfels dar, der gleich dem n -ten Teil des Würfels mit dem Kreisradius a als Kante ist.

Ich zeichne also auf der großen Halbachse der Kurve $OQ = \frac{a}{n}$, bringe das Lot Q mit der Kurve in P zum Schnitt, ziehe OP bis zum Schnitt mit dem Kreis in A und fälle $AB \perp OC$, dann ist OB die Kante des gesuchten Würfels.

Da die Punkte Q und B innerhalb des Kreises liegen, ist nach dieser Konstruktion unmittelbar nur eine Würfelteilung möglich. Doch ist hieraus eine Würfelvervielfältigung ohne weiteres durch Konstruktion einer vierten Proportionale ableitbar. Soll z. B. die Kante x des Würfels gefunden werden, der doppelt so groß ist wie ein Würfel mit der Kante c , so konstruiert man zunächst mittels einer beliebigen Doppelkeilinie die Kante z des Würfels, der halb so groß ist wie der Würfel mit dem Kreisradius a als Kante und zeichnet dann x nach der Proportion $z : a = c : x$.

SECHSTE GRUPPE

21. Die Zykloide

Die Kurve, deren Name vom griech. κύκλος, Kreis — Radlinie — abzuleiten ist, soll nach ziemlich zweifelhaften Meldungen zu ihren Entdeckern den Kardinal Nicolaus Cusanus zählen. Als einer der ersten, die sich mit ihr beschäftigt haben, ist jedenfalls Galilei zu nennen, der 1599 der Kurve den heute gebräuchlichen Namen gab; er bemühte sich vergebens, ihren Flächeninhalt zu berechnen. Dies gelang erst 1634 Roberval. Descartes und Fermat bestätigten dessen Ergebnisse, und Pascal entdeckte dann an der Kurve — er nannte sie Roulette — so viele schöne Eigenschaften, daß er die Beweise für diese als Thema eines Wettbewerbs 1658 aussetzte. Schließlich lieferte die Erfindung der Infinitesimalrechnung neue Methoden zur Untersuchung der Kurve; Huygens im besonderen fand ihren Tautochronismus.

A. Erzeugungsweise und Zeichnung der Kurve

Die Kurve entsteht, wenn ein Kreis auf einer Geraden rollt; ein Punkt des Umfangs beschreibt dann die Linie. Ihre Gleichungen folgen aus der Abb. 167.

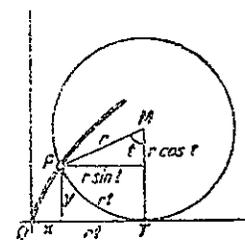


Abb. 167

$t =$ Wälzungswinkel $x = rt - r \sin t,$

$$\widehat{PT} = \widehat{OT} \quad y = r - r \cos t,$$

$$x = r(t - \sin t),$$

$$y = r(1 - \cos t)$$

Die Gleichungen zeigen, daß x beständig wächst, daß sein Sinus mit zunehmendem Wert immer mehr übertrifft, sowie, daß y eine periodische Funktion von t ist und durch Vermehrung von t um ein Vielfaches von 2π nicht geändert wird und in jedem einzelnen Intervall jeden Wert zweimal annimmt [für $t = 2k\pi + \vartheta$ und $t = 2k\pi + (2\pi - \vartheta)$]. Nur der größte Wert für $t = 2k\pi + \pi$ ist seinem korrespondierenden gleich, nämlich $2r$.

Zeichnung der Kurve. Um den halben Kurvenbogen zu erhalten, trage man den halben Kreisumfang von A bis B ab und teile diese Strecke sowie den halben Umfang des rollenden Kreises in dieselbe Anzahl (z. B. vier) gleicher Teile (s. Abb. 168).

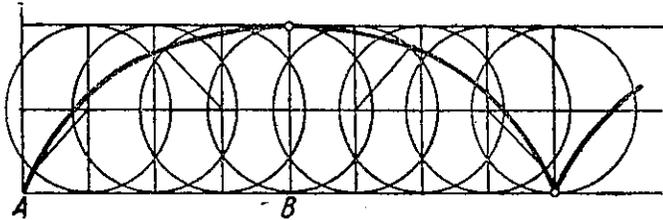


Abb. 168

Sonderkonstruktion zur Abwicklung des Kreisumfangs (Abb. 169). $AH \perp DG$. Tangente in H . $DE = DM$, ziehe MC und trage $CB = 3r$ ab. AB ist dann in großer Annäherung gleich dem halben Kreisumfang. Die Rechnung ergibt nämlich

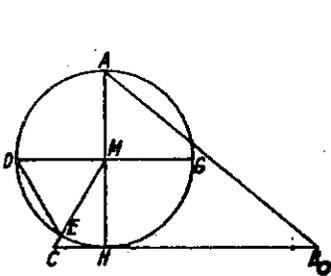


Abb. 169

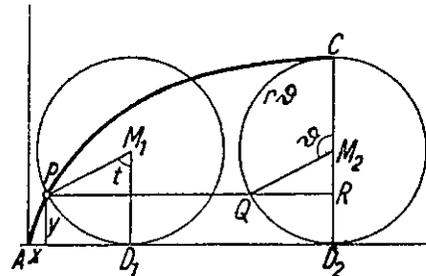


Abb. 170

$$AB = \sqrt{4r^2 + 9r^2 + \frac{r^2}{3} - 2r^2\sqrt{3}} = r\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = r\sqrt{9,869} = r \cdot 3,14.$$

Abb. 170 führt zu folgender hübschen Eigenschaft der Kurve. Der Kreis rechts, der den höchsten Zykloidenpunkt C' erzeuge, heiße der Grundkreis. Ist P ein beliebiger Kurvenpunkt bei der Stellung M_1 des rollenden Kreises, so ist

$$\begin{aligned} QR + QP &= AD_2 - x = r\pi - (rt - \sin t) = r\pi - rt + r\sin t, \\ \text{demnach} \\ QP &= r\pi - rt + r\sin t - QR = r\pi - rt + r\sin t - r\sin t \\ &= r\pi - rt = r(\pi - t) = r\vartheta, \\ \overline{QP} &= \overline{QC}. \end{aligned}$$

B. Tangentenkonstruktion

Da D_1 der augenblickliche Drehpunkt ist, stellt PD_1 die Normale und PC_1 die Kurventangente dar (Abb. 171). Liegt der erzeugende Kreis in der Lage M_1 nicht gezeichnet vor, wohl aber der Grundkreis M_2 , so denke man sich $\triangle PC_1D_1$ in den Grundkreis nach QD_2C_2 geschoben. Um die Tangente in P zu erhalten, ziehe man durch P eine Parallele zur Achse, die den Grundkreis in Q trifft, ziehe QC_2 und durch P hierzu die Parallele. Dann ist diese die gesuchte Tangente.

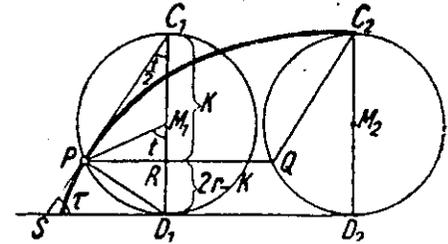


Abb. 171

Bestätigung mittels Differentialrechnung:

$$\frac{dx}{dt} = r - r \cos t,$$

$$\frac{dy}{dt} = r \sin t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \sin t}{r - r \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \tau.$$

τ und $t/2$ sind also Komplementwinkel.

Diese Steigerung läßt sich auch noch anders ausdrücken:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{C_1D_1}{SD_1} = \frac{C_1R}{PR} = \frac{K}{PR}.$$

Nun ist als mittlere Proportionale

$$PR = \sqrt{K(2r - K)}, \text{ also } \operatorname{tg} \tau = \frac{K}{\sqrt{K(2r - K)}} = \sqrt{\frac{K}{2r - K}}.$$

C. Die Evolute der Zykloide

1. Für den Krümmungsradius und die Koordinate des Krümmungsmittelpunktes bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{(\sqrt{1 + y'^2})^3}{y''}, \\ \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ \eta &= y + \frac{(1 + y'^2)}{y''}. \end{aligned}$$

Wir bilden zunächst

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{r(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4r \sin^4 \frac{t}{2}}$$

Dann ist

$$R = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2})^{3/2}}{4r \sin^4 \frac{t}{2}} = -4r \sin^4 \frac{t}{2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2})^{3/2}$$

$$= -\frac{4r \sin^4 \frac{t}{2}}{(\sin^2 \frac{t}{2})^{3/2}} = -\frac{4r \sin^4 \frac{t}{2}}{\sin^3 \frac{t}{2}} = -4r \sin \frac{t}{2}$$

(d. h. doppelt so groß wie die Normale PD),

$$\xi = x + 4r \sin^4 \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}) = x + 4r \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

$$= x + 2r \sin t = r t + r \sin t,$$

$$\eta = -r + r \cos t.$$

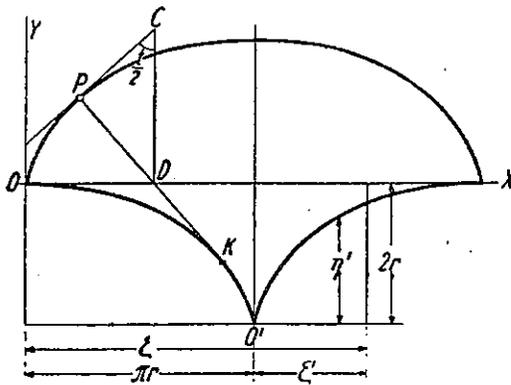


Abb. 172

Diese Ausdrücke sind ähnlich den Parameterdarstellungen eines Cycloidpunktes. Wir erhalten in der Tat ein normales Cycloidengleichungspaar, wenn wir eine Verschiebung des Koordinatensystems (von O nach O' , Abb. 172) in der Weise vornehmen, daß wir setzen

$$\xi = \pi r + \xi',$$

$$\eta = -2r + \eta'.$$

Die Gleichungen der Evolute lauten dann

$$\xi' = r(t - \pi) + r \sin t = r(t - \pi) - r \sin(t - \pi) = r t' - r \sin t',$$

$$\eta' = r + r \cos t = r - r \cos(t - \pi) = r - r \cos t'.$$

Die Evolute ist also eine der gegebenen kongruente Cycloide; sie hat aber den Wälzungswinkel $t' = t - \pi$, d. h. ihre Punkte sind in ihrer Phase t' um π hinter den zugehörigen Punkten der gegebenen Cycloide zurück.

2. Wir schließen hier noch einen sich leicht ergebenden Satz an: Wenn eine Cycloide auf einer Geraden rollt, so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die aufeinander folgenden Berührungspunkte ein Kreis, dessen Radius viermal so groß ist wie der des erzeugenden Kreises. Beweis: Beim Abrollen wird die Bogenlänge zur Abszisse und der Krümmungsradius zur Ordinate eines Punktes der gesuchten Kurve. Es ist also (siehe unter D_1 und C_1):

$$x = -4r \cos \frac{t}{2}$$

$$y = -4r \sin \frac{t}{2}$$

$$x^2 + y^2 = (4r)^2$$

D. Anwendungen der Integralrechnung

1. Rektifikation der Cycloide

Es ist $dx = (r - r \cos t) dt = r \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} dt$ und weiter

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}},$$

mithin

$$s = r \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} dt = r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \cdot 4 d\left(\frac{t}{2}\right) = \left[-4r \cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -4r[\cos \pi - \cos 0] = -4r[-1 - 1] = 8r.$$

Ein ganzer Cycloidbogen ist das Vierfache vom Durchmesser des erzeugenden Kreises.

2. Quadratur. Es ist

$$F = \int y dx = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt.$$

Setzt man hierin

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
 F &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt \\
 &= r^2 \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t\right) dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 2t d(2t) \right] = r^2 \left[\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} \\
 &= r^2 [3\pi - 0] = \underline{3\pi^2 r^2}.
 \end{aligned}$$

Die Fläche zwischen einem vollständigen Zykloidenbogen und der Achse ist das Dreifache des erzeugenden Kreises.

3. Komplanation (bei Rotation um die x -Achse):

$$\begin{aligned}
 O &= 2\pi \int y ds = 2\pi \int y dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 (1 - \cos t)^2 dt}{\sin \frac{t}{2}} \\
 &= 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} 8 \sin^3 \left(\frac{t}{2}\right) d\left(\frac{t}{2}\right) = 16\pi r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) \\
 &= -16\pi r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = -16\pi r^2 \left[\cos \frac{t}{2} - \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} \right]_0^{2\pi} \\
 &= -16\pi r^2 \left[-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right] = 16\pi r^2 \cdot 1 \frac{1}{3} = \underline{\frac{64}{3}\pi r^2}.
 \end{aligned}$$

4. Unter Verwendung der Guldinschen Regel ergibt sich hieraus und aus der Länge des Kurvenbogens der Abstand des Schwerpunktes des Bogens von der x -Achse zu $\frac{4}{3}r$.

5. Kubatur.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 r (1 - \cos t) dt \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} r^3 (1 - \cos t)^3 dt = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\
 &= \pi r^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3 \cos t + 3 \frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{3 \cos t + \cos 3t}{4}\right) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi r^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3 \cos t + \frac{3}{2} + \frac{3 \cos 2t}{2} - \frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t\right) dt \\
 &= \pi r^3 \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} \cos t\right) dt + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t \cos(2t) dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 3t d(3t) \right] \\
 &= \pi r^3 \left[\frac{5}{2} t - \frac{1}{4} \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t - \frac{1}{12} \sin 3t \right]_0^{2\pi} \\
 &= \pi r^3 [5\pi - 0] = \underline{5\pi^2 r^3}.
 \end{aligned}$$

6. Der Schwerpunktsabstand der zwischen Bogen und Achse liegenden Zykloidenfläche bzw. der x -Achse ergibt sich hieraus zu $\frac{5}{8}r$.

E. 1. Die Zykloide als Tautochrone

(vom griech. αὐτός, derselbe, und χρόνος, die Zeit, also eine Kurve, für deren Durchlaufen immer dieselbe Zeit nötig ist)

Vorbemerkungen: 1. Es war $\operatorname{tg} \tau = \sqrt{\frac{K}{2r - K}}$, woraus

$$\sin \tau = \frac{\operatorname{tg} \tau}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau}} = \frac{\sqrt{\frac{K}{2r - K}}}{\sqrt{1 + \frac{K}{2r - K}}} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2r}}.$$

2. (Abb. 173) $\xi = \sigma \cos \varphi$,

$$\begin{aligned}
 z &= \rho \cos \varphi, \\
 \xi : z &= \sigma : \rho.
 \end{aligned}$$

ADB (Abb. 174) sei eine Rinne von Zykloidenform, und AB liege waagrecht. Eine Kugel beginne in N hinabzurollen. Wir fragen nach

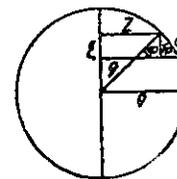


Abb. 173

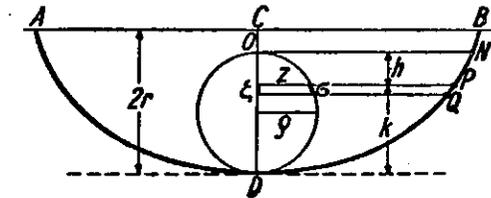


Abb. 174

der Zeit t , die sie gebraucht, um bis zum tiefsten Punkt D zu kommen. Ist sie in P , h cm unterhalb NO angekommen, so hat sie die Bahngeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$. Bedeutet τ den Winkel, unter dem

die Kugelbahn die Horizontale in P durchsetzt, so ist $\sin \tau = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2r}}$.

Da die Kugel zur Zurücklegung des unendlich kurzen Weges PQ nur einer unendlich kleinen Zeit ξ bedarf, so ist, da für dieses Zeiteilchen die Geschwindigkeit als konstant gelten kann, $\xi v = PQ$. Nun ist

$$\xi = PQ \cdot \sin \tau = \frac{PQ\sqrt{K}}{\sqrt{2r}}, \text{ also}$$

$$\xi = \frac{\xi \cdot v \cdot \sqrt{K}}{\sqrt{2r}}, \quad \xi = \frac{\xi \cdot \sqrt{2r}}{v \cdot \sqrt{K}} = \frac{\xi \sqrt{2r}}{\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{K}} = \xi \sqrt{\frac{r}{g} \frac{1}{\sqrt{hK}}}$$

Es ist aber nach dem Satz von der mittleren Proportionalen $\sqrt{hK} = z$, also

$$\xi = \xi \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\sigma}{\rho}$$

Diese Gleichung gilt für den Lauf PQ mit dem entsprechenden Bogen σ auf dem Hilfskreis. Zu \widehat{ND} gehört der Halbkreisbogen $\widehat{OD} = \rho \pi$, mithin ist die dafür nötige Zeit $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, also konstant und unabhängig von der Fallhöhe.

Statt die Kugel in der Rinne rollen zu lassen, kann ich sie am Ende eines $4r$ cm (halber Zyklidenbogen!) langen Fadens befestigen, der sich von einer Zyklode vom Grundkreisradius r abwickelt, da die Kugel hierbei (s. Evolute der Zyklode!) eine Zyklode beschreibt (Abb. 175).

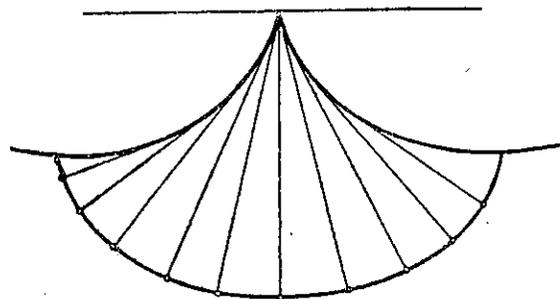


Abb. 175

Das ist der Leitgedanke des Zyklidenpendels von Huygens: Seine Schwingungsdauer ist von der Schwingungsweite unabhängig, nämlich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

2. Die Zyklode als Brachistochrone (vom griech. βράχιστος, der Kürzeste, und χρόνος, die Zeit, also eine Kurve, die in kürzester Zeit durchlaufen wird).

Im Jahre 1696 stellte Johann Bernoulli die Aufgabe, die Kurve zu bestimmen, längs deren ein Körper unter dem Einfluß der Schwere sich (reibungslos) von einem Punkte A nach einem in derselben lotrechten Ebene befindlichen Punkte B bewegen muß, wenn er in der kürzesten Zeit diesen Weg zurücklegen soll. Die Lösung dieser Aufgabe kann auf die Weise erfolgen, daß man das bekannte optische Brechungsgesetz sinngemäß auf diesen Bewegungsvorgang überträgt. Das Brechungsgesetz besagt bekanntlich Folgendes. Wenn ein Lichtstrahl von einem Punkte A des Mediums I , in dem die Lichtgeschwindigkeit v_1 beträgt, sich so nach dem Punkte B im Medium II , dem die Lichtgeschwindigkeit v_2 zugeordnet ist, bewegen soll, daß die für den Weg AOB (s. Abb. 176) benötigte Zeit ein Minimum wird, so muß der Punkt O so liegen, daß

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}, \text{ oder}$$

$$\frac{v_1}{\cos \tau_1} = \frac{v_2}{\cos \tau_2} \text{ ist.}$$

Dieser Quotient $\frac{v}{\cos \tau}$ muß also beim Übergang von einem zum anderen Medium konstant bleiben. Setzt man nun statt des Lichtstrahls einen Körper, der sich mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 in den beiden Medien von A nach B derart bewegen soll, daß die hierfür benötigte Zeit ein Minimum ist, so gilt für ihn dieselbe Gleichung. An jeder Stelle der Bewegung muß der

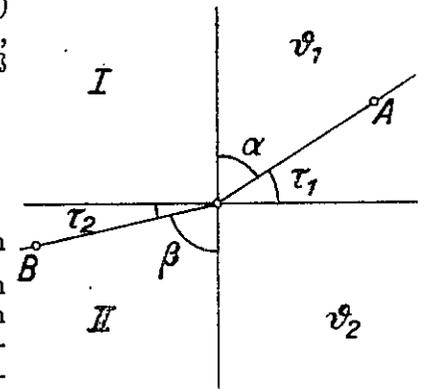


Abb. 177

Quotient $\frac{v}{\cos \tau}$ konstant bleiben. Diese Beziehung bleibt auch bestehen, wenn es sich um beliebig viele unendlich dünne Schichten von Medien handelt, bei denen die Geschwindigkeit ständig wechselt. Führen wir nun ein Koordinatensystem mit A als Anfangspunkt

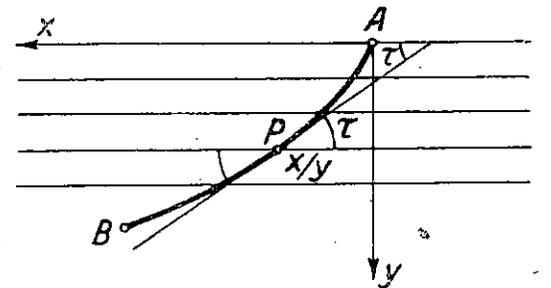


Abb. 177

(Abb. 177) und einer senkrecht nach unten gerichteten y -Achse ein und bezeichnen den konstanten Wert, den der Quotient $\frac{v}{\cos \tau}$ hat, mit c , so gilt also für die zu findende Kurve die Bestimmungsgleichung

$$\frac{v}{\cos \tau} = c \text{ oder } \frac{1}{\cos \tau} = \frac{c}{v}.$$

Für einen Punkt $P(x/y)$ dieser Kurve ist nun $v = \sqrt{2gy}$, so daß unsere Gleichung also lautet

$$\frac{1}{\cos \tau} = \frac{c}{\sqrt{2gy}}.$$

Nun war aber für einen Zyklidenpunkt

$$\operatorname{tg} \tau = \sqrt{\frac{K}{2r-K}} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\cos \tau} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau} = \sqrt{\frac{2r}{y}}.$$

Vergleichen wir diesen Wert $\frac{1}{\cos \tau}$ für einen Zyklidenpunkt mit dem eben für den Bewegungsvorgang als gültig abgeleiteten, so erkennen wir die Übereinstimmung. Der Vorschrift $\frac{c}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{2r}{y}}$ wird Genüge geleistet durch eine Zyklode, für die $\frac{c}{\sqrt{2g}} = \sqrt{2r}$, $r = \frac{c^2}{4g}$ ist. Die gesuchte Brachistochrone ist also eine nach unten gewölbte Zyklode mit waagerechter Achse, deren Grundkreisradius $r = \frac{c^2}{4g}$ ist und die durch die Punkte A als Spitze und B geht.

F. Erweiterung des Begriffs der Zyklode

Nimmt man den erzeugenden Punkt nicht auf dem Umfang des Kreises an (A , Abb. 178), sondern innerhalb (C) oder außerhalb (B),

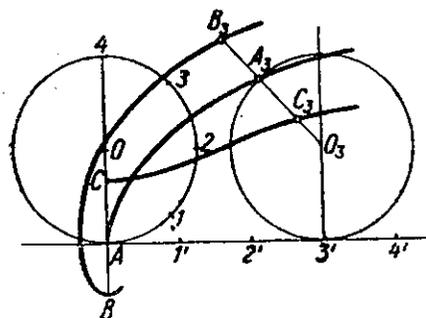


Abb. 178

so erhält man sogenannte Trochoiden, im ersten Falle eine verkürzte Zyklode, im zweiten eine verlängerte Zyklode. Die Konstruktion ergibt sich für beide Fälle aus der der eigentlichen Zyklode, Punkt A_3 der eigentlichen Zyklode z. B. wird erhalten, indem man um $3'$ mit $3A$ einen Kreisbogen beschreibt, der den erzeugenden Kreis in A_3 trifft. Auf dessen Radius O_3A_3

liegen dann auch die Punkte B_3 bzw. C_3 der verlängerten bzw. verkürzten Zyklode, derart, daß $O_3B_3 = OB$ und $O_3C_3 = OC$ ist.

Die Gleichungen der Trochoide leiten sich (Abb. 179), da $\widehat{QT} = \widehat{OT} = rt$ ist, sehr einfach ab:

$$\begin{cases} x = rt - d \sin t, \\ y = r - d \cos t, \end{cases}$$

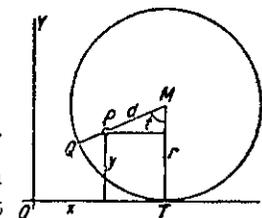


Abb. 179

$d=r$ führt zur eigentlichen Zyklode zurück.

Wir können in den beiden Gleichungen t in $2k\pi + t$ verwandeln, ohne daß sich y ändert und nur x um $2k\pi r$ zunimmt. y ist eine periodische Funktion von t und nimmt in jedem Intervall jeden Wert zweimal an [für $t = 2k\pi + \vartheta$ und $t = 2k\pi + (2\pi - \vartheta)$]. Nur der Höchstwert für $t = 2k\pi + \pi$ ist seinem korrespondierenden gleich, nämlich gleich $r + d$. Um die Gestalt eines einzelnen Kurvenintervalls zu erkennen, genügt es z. B., t zwischen $-\pi$ und $+\pi$ variieren zu lassen.

Um die Doppelpunkte, falls solche vorkommen, aufzufinden, muß man solche Wertepaare t, t_1 aufsuchen, denen gleiche Werte von x sowohl als auch von y entsprechen; es müssen dann also die Beziehungen bestehen

$$rt - d \sin t = rt_1 - d \sin t_1, \quad \cos t = \cos t_1.$$

Schließen wir, weil nichtssagend, die Lösung $t = t_1$ aus, so ergibt sich wegen der zweiten Gleichung nur noch $t = -t_1$, welche die erste Beziehung verwandelt in

$$rt - d \sin t = -rt + d \sin t,$$

$$2(rt - d \sin t) = 0.$$

$t = 0$ als Anfangslage der Bewegung ausgeschlossen, bleibt die Gleichung

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{r}{d}.$$

Da nun immer $\frac{\sin t}{t} \leq 1$ sein muß, so muß $r \leq d$ sein; folglich haben die verkürzten Zykliden keine Doppelpunkte.

Im Falle $\frac{r}{d} < 1$ läßt die Gleichung $\sin t = mt$ (worin m ein echter Bruch) nach Abb 180 zwei entgegengesetzt gleiche Lösungen zu. Bilden wir den Differentialquotienten

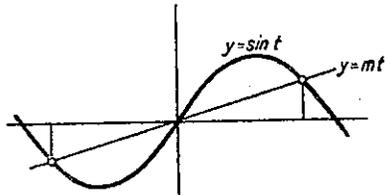


Abb. 180

$$\begin{aligned} dy &= d \sin t \, dt, \\ dx &= (r - d \cos t) \, dt, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d \sin t}{r - d \cos t} \end{aligned}$$

so zeigt sich, daß die entsprechenden Tangenten gleiche Winkel mit der y -Achse bilden. Da das Kurvenbild die Periode $2k\pi r$ hat, so hat die

verlängerte Zyklode demnach unendlich viele Doppelpunkte, deren Abszissen Vielfache vom Umfang des rollenden Kreises sind. Im Grenzfalle $r = d$ fallen jene Tangenten zusammen: die eigentliche Zyklode hat unendlich viele Spitzen.

Ich kann die Entstehung der Trochoiden einschließlich der Zyklode noch etwas anders auffassen. Statt den Kreis rollen zu lassen, denken wir uns seinen Mittelpunkt O auf einer Geraden fortbewegt, während sich zugleich der Kreis um seinen Mittelpunkt dreht. Ist die Strecke,

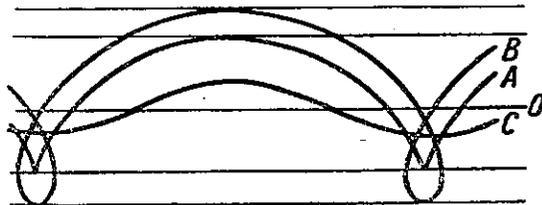


Abb. 181

um die sich O während einer vollen Umdrehung des Kreises auf der Geraden verschiebt, so groß wie der Umfang des Kreises, so haben wir das Bild der eigentlichen Zyklode (A in Abb. 181). Im Falle der verkürzten Zyklode (C) ist der Weg des Kreismittelpunktes während einer Umdrehung länger als der Umfang des Kreises, den C beschreibt, im Falle der verlängerten Zyklode B kürzer.

G. Diese abgeänderte Auffassung von der Entstehung der Zyklidenarten verwenden wir zum Beweis eines Satzes und zur Lösung einer Aufgabe.

1. Satz von Guillery: Jede Parallelprojektion einer Zylinderschraubenlinie auf die Basisebene ist eine Zyklode, und zwar eine gemeine, verkürzte oder verlängerte, je nachdem die Neigung der Projektionsstrahlen gegen die Erzeugenden des Zylinders gleich, größer oder kleiner als die Neigung der Schraubenlinie ist. Eine Zylinderschraubenlinie kann auf die

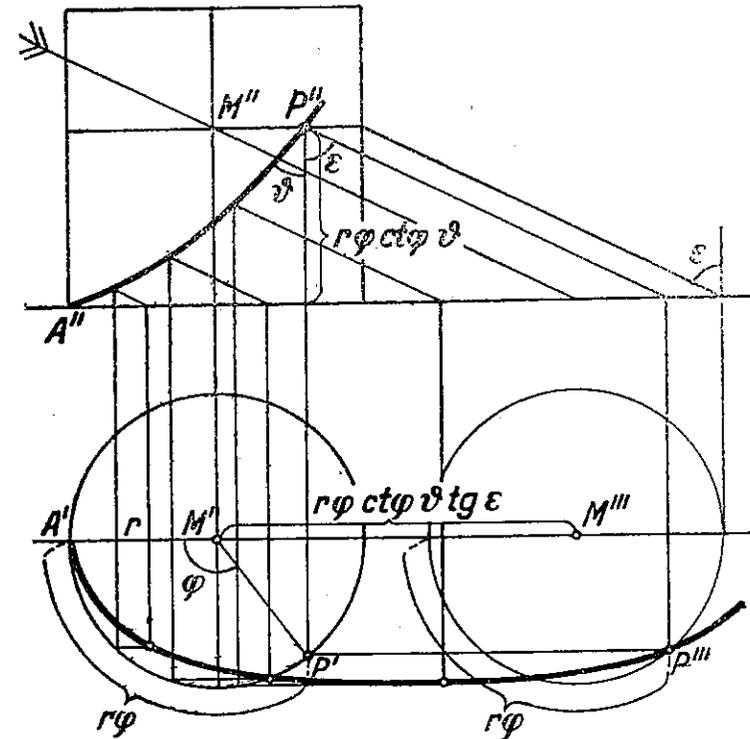


Abb. 182

Weise erzeugt werden, daß ein Kreis sich mit seinem Mittelpunkt auf einer zur Kreisebene senkrechten Geraden mit gleichmäßiger Geschwindigkeit verschiebt, während der Kreis selber sich in seiner Ebene um den Mittelpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht. Ein markierter Umfangspunkt beschreibt dann eine Schraubenlinie. In einer gewissen Zeit hat z. B. (Abb. 182) ein Punkt P , von der Anfangslage A ausgehend, in der waagerechten Ebene den Bogen $r\varphi$ zurückgelegt und sich zugleich mit dem Kreismittelpunkt M um die Strecke $r\varphi \operatorname{ctg} \vartheta$ über die Grundrißebene erhoben (ϑ Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Erzeugenden des Zylinders). Fallen nun von links

von einer verlängerten Epi- bzw. Hypozykloide, liegt er innerhalb (C), von einer verkürzten Epi- bzw. Hypozykloide. Die Konstruktion der betr. Kurven entspricht derjenigen der Trochoiden (§ 21). Die entstehenden Kurven schließen sich (kehren wieder zum Ausgangspunkt zurück), wenn der Umfang (oder Radius) des rollenden Kreises ein ganzzahliger Teil vom Umfang (Radius) des festen Kreises ist.

B. Ableitung der Gleichungen

Nehmen wir diejenige Lage OB des gemeinsamen Durchmessers beider Kreise (Abb. 186 und 187), welche den erzeugenden Punkt Q enthält, als x -Achse, und sei OO_1 eine andere Lage des gemeinsamen Durchmessers, so ist wegen der Gleichheit der Bogen BN und NP

$$at = b\psi.$$

Weiter ist $\sphericalangle O_1QM = 180^\circ - (t + \psi)$, und die Koordinaten von Q ergeben sich zu

$$\begin{aligned} y &= (a + b) \sin t - d \sin (t + \psi), \\ x &= (a + b) \cos t - d \cos (t + \psi). \end{aligned}$$

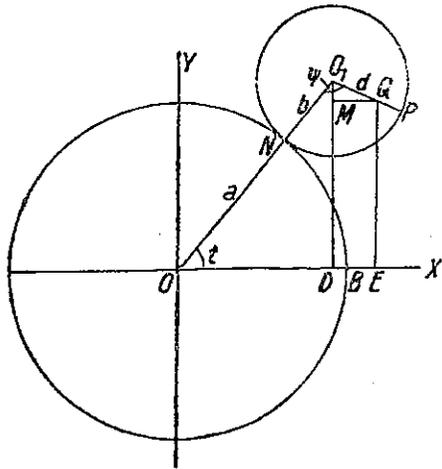


Abb. 186

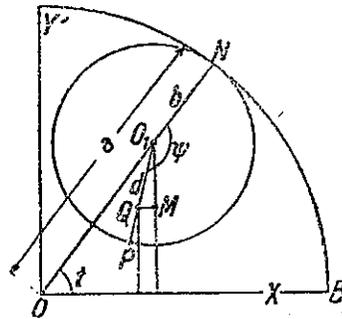


Abb. 187

Setzt man $a + b = mb$, so folgt, da

$$t + \psi = t + \frac{at}{b} = \frac{a+b}{b} t = mt,$$

Epitrochoide:

$$\begin{aligned} y &= mb \sin t - d \sin mt, \\ x &= mb \cos t - d \cos mt. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der **eigentlichen Epizykloide** sind hierin als Sonderfall ($d = b$) enthalten:

$$\begin{aligned} y &= b(m \sin t - \sin mt), \\ x &= b(m \cos t - \cos mt). \end{aligned}$$

Hypotrochoide: $\sphericalangle QO_1M = \psi - R - t,$
 $\sphericalangle O_1QM = R - (\psi - R - t),$
 $= 2R - (\psi - t),$

$$\psi - t = \frac{at}{b} \quad -t = \frac{a-b}{b} t,$$

$$\begin{aligned} y &= (a-b) \sin t - d \sin (\psi - t), \\ x &= (a-b) \cos t + d \cos (\psi - t). \end{aligned}$$

Setze $a - b = mb$:

$$\begin{aligned} y &= mb \sin t - d \sin mt, \\ x &= mb \cos t + d \cos mt, \end{aligned} \quad \text{Hypotrochoide.}$$

$d = b$:

$$\begin{aligned} y &= b(m \sin t - \sin mt), \\ x &= b(m \cos t + \cos mt), \end{aligned} \quad \text{Hypozykloide.}$$

C. Die Tangentenkonstruktion

ist die gleiche wie bei der Zykloide, indem man durch Verbindung des erzeugenden Punktes mit dem augenblicklichen Drehpunkt die Normale (QN) erhält. Epi- und Hypozykloiden bestehen aus kongruenten Bogen mit Spitzen. Jeder Bogen wird bei einem einmaligen Abrollen des erzeugenden Kreises beschrieben. Infolgedessen ist der zugehörige Winkel des festen Kreises $w = \frac{360^\circ}{a} b$ oder in Bogenmaß $w = \frac{2b\pi}{a}$. Man erkennt auch hieraus, daß die Kurve sich schließt, wenn b ein ganzzahliger Teil von a ist.

D. Sonderfälle der Epitrochoide

Setzt man in der Gleichung der Epitrochoide $a = b$ (zwei gleiche Kreise!), also $m = 2$, so folgt

$$\begin{aligned} y &= 2b \sin t - d \sin 2t, \\ x &= 2b \cos t - d \cos 2t. \end{aligned}$$

Das sind aber die Gleichungen einer Pascalschen Schnecke (§ 15). Daß unsere Gleichungen mit den dort (§ 15, A 3) gegebenen Parametergleichungen der Pascalschen Schnecke nicht im Vorzeichen übereinstimmen, erklärt sich aus der zugrunde gelegten Anfangslage und dem Bewegungssinn des rollenden Kreises. Nimmt man als Anfangslage (Abb. 118) die negative x -Achse, als Bewegungssinn den des Uhrzeigers, ersetzt also in den Gleichungen der Pascalschen Schnecke (§ 15, A) $3x$ durch $-x$ und t durch $2R - t$, so ist die Unstimmigkeit des Vorzeichens behoben.

Geht man in der Spezialisierung noch weiter und setzt $a = b = d$, so ergibt sich als *Sonderfall der eigentlichen Epizykloide* die *Kardioide* (§ 14) mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= b(2 \sin t - \sin 2t), \\ x &= b(2 \cos t - \cos 2t). \end{aligned}$$

E. Sonderfälle der Hypotrochoide

1. $a = 2b$, der feste Kreis sei also doppelt so groß wie der rollende. Es ist dann $m = 1$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} y &= b \sin t - d \sin t = B \sin t, \\ x &= b \cos t + d \cos t = A \cos t, \end{aligned}$$

woraus

$$\sin t = \frac{y}{B}, \quad \cos t = \frac{x}{A}.$$

Die Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ liefert dann

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

also eine Ellipse.

Nimmt man für den vorliegenden Fall im besonderen $b = d$, also die eigentliche Hypozykloide, so ergibt sich $y = 0$, d. h. die x -Achse.

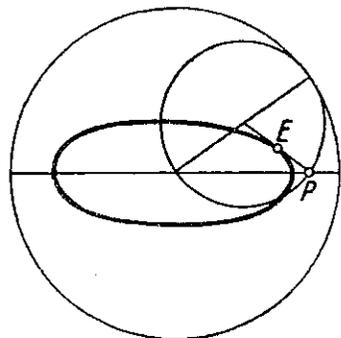


Abb. 188

Ist der große Kreis ein Zahnrad mit Innenzahnkranz, der kleine ein Zahnrad mit Außenzahnkranz, so nennt man die Anordnung ein Planetengetriebe. Man kann diese Vorrichtung benutzen, um kreisförmige Bewegungen in ellipsenförmige (E. Abb. 188) oder geradlinige (P) überzuführen.

2. $a = 4b$, also $m = 3$, und $d = 3b$. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= 3b \sin t - 3b \sin 3t = -6b \cos 2t \sin t, \\ x &= 3b \cos t + 3b \cos 3t = 6b \cos 2t \cos t \end{aligned}$$

stellen die Rosette (§ 17) dar.

F. Gehen wir zur *eigentlichen Hypozykloide* ($d = b$), so treten folgende *Sonderfälle* auf:

1. $a = 4b$, $m = 3$:

$$\begin{aligned} y &= b(3 \sin t - \sin 3t) = b(3 \sin t - 3 \sin t + 4 \sin^3 t), \\ x &= b(3 \cos t + \cos 3t) = b(3 \cos t + 4 \cos^3 t - 3 \cos t), \\ y &= 4b \sin^3 t, \\ x &= 4b \cos^3 t. \end{aligned}$$

Das ist eine vierspitzige Hypozykloide mit dem besonderen Namen *Astroide* (§ 18).

2. $a = 3b$, $m = 2$:

$$\begin{aligned} y &= b(2 \sin t - \sin 2t), \\ x &= b(2 \cos t + \cos 2t). \end{aligned}$$

Diese dreispitzige Hypozykloide trägt den besonderen Namen *Steinersche Kurve* (§ 19).

Nach der grundlegenden Definition der Epi- und Hypozykloiden als Rollkurven geben wir im folgenden zwei bemerkenswerte, nicht minder umfassende Erzeugungsweisen unserer Kurven.

G. 1. Die Epi- und Hypozykloiden als Hüllkurven

Es besteht das *Theorem von Eckhardt*: Wenn zwei Punkte sich mit konstanten Geschwindigkeiten auf einem Kreis bewegen, umhüllt die Gerade, die ihre Stellungen verbindet, eine Epi- oder Hypozykloide, je nachdem die Geschwindigkeiten gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben. Wenn m das Verhältnis der Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung darstellt, so ist die Zahl der Spitzen $m - 1$. Ist r der Radius des gegebenen Kreises, so sind die Radien der beiden Kreise, von denen der erste durch Rollen auf dem zweiten die Kurve erzeugt:

$$b = \frac{r}{2(m+1)}, \quad a = \frac{r(m-1)}{2(m+1)}.$$

Beweis: Wir führen den Beweis in der Art, daß wir zeigen, daß die Gleichung der veränderlichen Geraden der Gleichung einer Epi-(Hypo-)zykloidentangente entspricht.

Durch Differenzieren der Epizykloidengleichung erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m \cos t + m \cos mt}{-m \sin t + m \sin mt} = \frac{\sin \frac{(m+1)t}{2}}{\cos \frac{(m+1)t}{2}}.$$

Demnach lautet die Gleichung der Tangente:

$$\frac{y - b(m \sin t - \sin mt)}{x - b(m \cos t - \cos mt)} = \frac{\sin \frac{(m+1)t}{2}}{\cos \frac{(m+1)t}{2}},$$

$$y \cos \frac{(m+1)t}{2} - x \sin \frac{(m+1)t}{2}$$

$$= b \left[(m \sin t - \sin mt) \cos \frac{(m+1)t}{2} - (m \cos t - \cos mt) \sin \frac{(m+1)t}{2} \right]$$

$$= b \left[m \sin t \cos \frac{(m+1)t}{2} - \sin mt \cos \frac{(m+1)t}{2} - m \cos t \sin \frac{(m+1)t}{2} + \cos mt \sin \frac{(m+1)t}{2} \right]$$

$$= b \left[m \sin \frac{t-mt}{2} + \sin \frac{t-mt}{2} \right]$$

$$= -b(m+1) \sin \frac{(m-1)t}{2},$$

$$\underline{x \sin \frac{(m+1)t}{2} - y \cos \frac{(m+1)t}{2} = b(m+1) \sin \frac{(m-1)t}{2}}.$$

Dies ist also die Gleichung der Epizykloidentangente.

Unsere Gleichungen der Epi- und Hypozykloiden sind nun aufgestellt für die Lage einer Kurvenspitze auf der x -Achse. Sind nun in Abb. 189 A und B die beiden bewegten Punkte, so erkennt man, daß bei der Grenzlage, von der sie ausgehen, im Falle I, wo sie gleichzeitig die positive x -Achse verlassen, dort ein *Kurvenscheitel*, im

Falle II dagegen, wo B von der negativen x -Achse ausgeht, auf der positiven x -Achse eine *Spitze* liegt. Die beiden Winkel sind in diesem Falle a und $ma + \pi$, und die Koordinaten von A und B sind

$$A \equiv r \cos a; r \sin a; \quad B \equiv r \cos(ma + \pi); r \sin(ma + \pi).$$

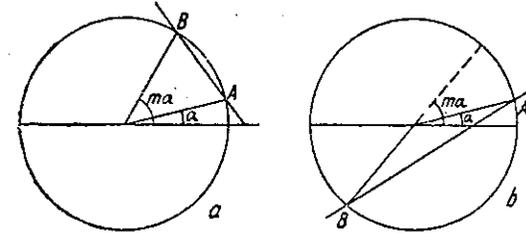


Abb. 189

Die Gleichung der Geraden AB ist dann

$$\frac{y - r \sin(ma + \pi)}{x - r \cos(ma + \pi)} = \frac{\sin(ma + \pi) - \sin a}{\cos(ma + \pi) - \cos a},$$

$$\frac{y + r \sin ma}{x + r \cos ma} = \frac{-\sin ma - \sin a}{-\cos ma - \cos a}.$$

$$-y(\cos ma + \cos a) + x(\sin ma + \sin a)$$

$$= r[-\cos ma \sin ma - \sin a \cos ma + \cos ma \sin ma + \cos a \sin ma]$$

$$= r \sin(m-1)a,$$

$$-2y \cos \frac{(m+1)a}{2} \cos \frac{(m-1)a}{2} + 2x \sin \frac{(m+1)a}{2} \cos \frac{(m-1)a}{2}$$

$$= 2r \sin \frac{(m-1)a}{2} \cos \frac{(m-1)a}{2}$$

$$x \sin \frac{(m+1)a}{2} - y \cos \frac{(m+1)a}{2} = r \sin \frac{(m-1)a}{2}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorhin abgeleiteten Tangentengleichung, so erkennt man die Übereinstimmung. Man braucht nur

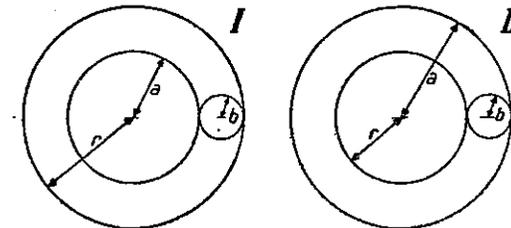


Abb. 190

zu setzen $a = t$, $m = m$, $r = b(m + 1)$. Da aber $m = \frac{a+b}{b}$ (s. Gleichungen der Epizykloide), so ist

$$r = b \left(\frac{a+b}{b} + 1 \right) = a + 2b.$$

Der erzeugende Kreis schließt bei der Epizykloide den festen Kreis a und den rollenden b ein (Abb. 190 I), während bei der Hypozykloide Kreis a die Kreise r und b einschließt (II).

Aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r &= a + 2b, \\ a + b &= mb \end{aligned}$$

ergeben sich endlich die Radien

$$b = \frac{r}{2(m+1)}, \quad a = \frac{r(m-1)}{2(m+1)}.$$

Sonderfälle: $m = 2$, die Kardioiden ($a = b$):

$$\begin{aligned} y &= b(2 \sin t - \sin 2t), \\ x &= b(2 \cos t - \cos 2t). \end{aligned}$$

$m = -2$, die Steinersche Kurve ($a = 3b$):

$$\begin{aligned} y &= b(2 \sin t - \sin 2t), \\ x &= b(2 \cos t + \cos 2t). \end{aligned}$$

$m = -3$, die Astroide ($a = 4b$):

$$\begin{aligned} y &= b(3 \sin t - \sin 3t), \\ x &= b(3 \cos t - \cos 3t). \end{aligned}$$

H. 2. Während die letzte Erzeugungsweise nur die eigentlichen Epi- und Hypozykloiden in sich faßte, ist das **Gelenkparallelogramm** in der Lage, alle Epi- und Hypotrochoiden entstehen zu lassen:

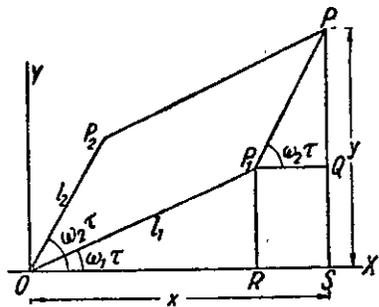


Abb. 191

Wenn zwei aufeinanderfolgende Seiten OP_1 und OP_2 eines Gelenkparallelogramms (Abb. 191) sich gleichförmig (aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2) um den Eckpunkt O drehen, so beschreibt die vierte Ecke eine Epi- oder Hypotrochoide.

Beweis: Nehmen wir an, daß OP_1 und OP_2 zu Beginn der Bewegung auf der x -Achse zusammengefallen wären, und sei τ eine

Veränderliche (die Zeit), so wäre nach der Zeit τ OP_1 um $\omega_1 \tau$ und OP_2 um $\omega_2 \tau$ gegen die Anfangslage gedreht. Wir lesen die

Koordinaten des Eckpunktes P dann unmittelbar aus der Zeichnung ab:

$$\begin{aligned} y &= l_1 \sin \omega_1 \tau + l_2 \sin \omega_2 \tau, \\ x &= l_1 \cos \omega_1 \tau + l_2 \cos \omega_2 \tau. \end{aligned}$$

Setzen wir hierin $\omega_2 = n \omega_1$, $\omega_1 \tau = t$, so wird

$$\begin{aligned} y &= n \cdot \frac{l_1}{n} \sin t + l_2 \sin nt, \\ x &= n \cdot \frac{l_1}{n} \cos t + l_2 \cos nt. \end{aligned}$$

Dies sind aber die Gleichungen einer Epitrochoide für $m = n$, $b = \frac{l_1}{n}$, $d = l_2$. Die Verschiedenheit des Vorzeichens gegenüber den Epitrochoidengleichungen ist lediglich durch die Wahl der Anfangslage des rollenden Kreises, also durch die Zählung des Wälzungswinkels t bedingt. — Setzt man z. B. $m = n = 2$, so ergibt sich eine Pascalsche Schnecke, und im besonderen für

$$m = n = 2, \quad l_1 = 2l_2, \quad t = t' + \pi$$

erhält man

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot \left(\frac{l_1}{2} \right) \sin t' + \frac{l_1}{2} \sin 2t' \\ &= - \left(\frac{l_1}{2} \right) (2 \sin t' - \sin 2t'), \\ x &= -2 \left(\frac{l_1}{2} \right) \left(\cos t' + \frac{l_1}{2} \cos 2t' \right) \\ &= - \left(\frac{l_1}{2} \right) (2 \cos t' - \cos 2t'). \end{aligned}$$

d. h. eine Kardioiden.

Ersetzt man weiter n durch $(-n)$, also ω_2 durch $(-n \omega_1)$, d. h. läßt man die beiden Seiten mit entgegengesetztem Richtungssinn umlaufen, so erhält man Hypotrochoiden:

$$\begin{aligned} y &= n \cdot \left(\frac{l_1}{n} \right) \sin t - l_2 \sin nt, \\ x &= n \cdot \left(\frac{l_1}{n} \right) \cos t + l_2 \cos nt, \end{aligned}$$

worin

$$m = n, \quad b = \frac{l_1}{n}, \quad d = l_2.$$

Sonderfälle: $m = n = 1$: Ellipse.

$$m = n = 3, l_2 = l_1:$$

$$y = 3 \cdot \left(\frac{l_1}{3}\right) \sin t - 3 \cdot \left(\frac{l_1}{3}\right) \sin 3t = 3 \cdot \frac{l_1}{3} (\sin t - \sin 3t),$$

$$x = 3 \cdot \frac{l_1}{3} (\cos t - \cos 3t), \text{ eine Rosette (§ 17).}$$

Im besonderen ergeben sich Hypozykloiden für $l_1 = n l_2$:

$$m = n = 3, l_1 = 3 l_2:$$

$$y = \frac{l_1}{3} (3 \sin t - \sin 3t),$$

$$x = \frac{l_1}{3} (3 \cos t + \cos 3t), \text{ eine Astroide (§ 18).}$$

$$m = n = 2, l_1 = 2 l_2:$$

$$y = \frac{l_1}{2} (2 \sin t - \sin 2t),$$

$$x = \frac{l_1}{2} (2 \cos t + \cos 2t), \text{ eine Steinersche Kurve (§ 19).}$$

Es ist leicht, die Erzeugung der Trochoiden durch ein Gelenkparallelogramm auf ihre Entstehung als Rollkurven zurückzuführen (Abb. 192). Aus der für die Epitrochoiden gültigen Beziehung (s. § 22 B) $a + b = m b = n b$ folgt zusammen mit $b = \frac{l_1}{n}$

1. $a + b = l_1,$
2. $\frac{a}{b} = n - 1 \left(n = \frac{\omega_2 \tau}{\omega_1 \tau} \right).$

Ist also n zahlenmäßig gegeben, so handelt es sich nur darum, OP_1 in D innen im Verhältnis $(n-1):1$ zu teilen. OD ist dann der Radius des festen, DP_1 der des rollenden Kreises, und da wegen

$\omega_1 \tau = t P_1$ die derzeitige Mittelpunktslage des rollenden Kreises darstellt, so ist D augenblicklicher Drehpunkt, also DP Kurvennormale.

Bei den Hypotrochoiden, wo der rollende Kreis innerhalb des festen sich bewegt, ist $a - b = l_1$ und $\frac{a}{b} = n + 1$. OP_1 muß äußerlich im Verhältnis $\frac{n+1}{1}$ geteilt werden.

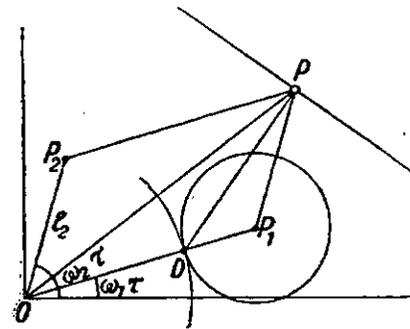


Abb. 192

J. Als besonders interessant seien zwei Konstruktionen der **zweispitzigen Epizykloide als Hüllkurve** behandelt.

1. Sie kann wie die Kardioide (§ 14, A 7) als katakaustische Linie erscheinen mit der Aufgabe: *Auf den Umfang eines Kreises treffen parallele Strahlen, die dort reflektiert werden. Die einhüllende Kurve der reflektierten Strahlen ist zu bestimmen.*

Sind die einfallenden Strahlen parallel der x -Achse (s. Abb. 193), so hat ein reflektierter Strahl die Gleichung

$$\frac{y - r \sin \alpha}{x - r \cos \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Bilden wir von dieser Gleichung $F(x, y, \alpha) = 0$ den Differentialquotienten $\frac{\delta F}{\delta \alpha} = 0$ und lösen beide Gleichungen auf, so erhalten wir die gesuchte Gleichung der einhüllenden Kurve:

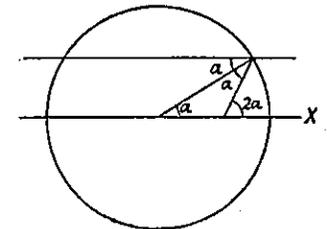


Abb. 193

$$\text{I } y \cos 2\alpha - x \sin 2\alpha + r \sin \alpha = 0,$$

$$\text{II } y \sin 2\alpha + x \cos 2\alpha - \frac{r}{2} \cos \alpha = 0.$$

Multipl. I mit $\sin 2\alpha$, II mit $\cos 2\alpha$ und subtrahiere:

$$x - \frac{r}{2} (\cos \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha \sin 2\alpha) = 0.$$

$$x - \frac{r}{2} (\cos \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha) = 0.$$

Nach der Formel

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

können wir diese Gleichung schreiben:

$$x = \frac{r}{2} \cos (2\alpha - \alpha) - \frac{r}{4} (\cos 3\alpha - \cos \alpha),$$

$$x = \frac{r}{4} (3 \cos \alpha - \cos 3\alpha).$$

Entsprechend:

$$y = \frac{r}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha).$$

Das sind aber die Gleichungen einer Epizykloide für $m = 3$.

2. Als Hüllkurve von Kreisen (Aufg. von Catalan): Zieht man in einem festen Kreis einen Durchmesser und beschreibt um einen Punkt auf dem Kreisumfang mit dem Abstand dieses Punktes vom gegebenen Durchmesser einen Kreis, so umhüllen alle Kreise, die bei der Bewegung des Punktes auf dem festen Kreis sich zeichnen lassen, eine zweispitzige Epizykloide.

Beweis: Man beschreibe um den veränderlichen Punkt Q (siehe Abb. 194) den Kreis mit dem Durchmesserabstand QC und zugleich um Punkt M , der auf der Verlängerung von OQ um $3r/2$ von O entfernt ist, einen Kreis mit $r/2$, der den Kreis um Q in P schneidet. Dann ist $QC = r \sin t$ und — wenn ich $\sphericalangle QMP$ mit $2x$ bezeichne —

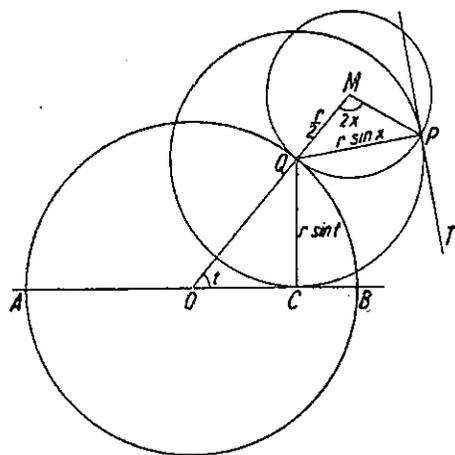


Abb. 194

$QP = 2 \cdot \frac{r}{2} \sin x = r \sin x$,
also, da $QC = QP$, $t = x$ und $\sphericalangle QMP = 2 \cdot \sphericalangle QOC$. Demnach ist Bogen QB und, wenn ich Kreis M auf dem gegebenen Kreis rollend denke, P Punkt einer zweispitzigen Epizykloide mit einer Spitze bei B . Nach dem Satze vom augenblicklichen Drehpunkt ist dann QP Normale der Epizykloide, das Lot auf

ihr (PT) also Epizykloidentangente, zugleich aber auch Tangente an Kreis Q . Epizykloiden- und Kreistangente fallen also zusammen.

K. Rektifikation und Quadratur der Epi- und Hypozykloiden

1. Rektifikation: a) Epizykloiden:

$$dx^2 = m^2 b^2 (\sin^2 t - 2 \sin t \sin mt + \sin^2 mt) dt^2,$$

$$dy^2 = m^2 b^2 (\cos^2 t - 2 \cos t \cos mt + \cos^2 mt) dt^2,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2m^2 b^2 (1 - \cos nt) dt^2,$$

wobei $m-1=n$ gesetzt wurde,

$$= 2m^2 b^2 \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{nt}{2} \right) dt^2,$$

$$ds = 2mb \sin \frac{nt}{2} dt = \frac{4mb}{n} \sin \frac{nt}{2} d\left(\frac{nt}{2}\right),$$

$$s = \int ds = \frac{4mb}{n} \int \sin \left(\frac{nt}{2} \right) d\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{4mb}{n} \left[-\cos \left(\frac{nt}{2} \right) \right]_0^t \\ = \frac{4mb}{n} \left[-\cos \frac{nt}{2} + \cos 0 \right] = \frac{4mb}{n} \left[1 - \cos \frac{nt}{2} \right] = \frac{8mb}{n} \sin^2 \left(\frac{nt}{4} \right).$$

Wird der Wälzungswinkel nt des rollenden Kreises 2π , so erhält man für einen Bogen von Spitze zu Spitze ($n=2\pi/t$)

$$s = \frac{8mb}{n} = \frac{8(n+1)b}{n}$$

und für den ganzen Kurvenzug das n -fache $U = 8(n+1)b$.

Sonderfall: Die Kardiode ($n=1$): $U = 16b$.

b) Die Rektifikation der Hypozykloide ergibt sich ganz entsprechend:

$$s = \frac{8mb}{n} = \frac{8(n-1)b}{n} b,$$

wobei $m+1=n$ gesetzt wird,

$$U = 8(n-1)b.$$

Sonderfälle: Astroide ($n=4$): $U = 24b$

Steinersche Kurve ($n=3$) $U = 16b$.

2. Quadratur: Ist eine Kurve durch die Gleichungen $x=f(t)$, $y=g(t)$ gegeben, so führt man zur Quadratur mit Vorteil Polarkoordinaten ein. Aus den Gleichungen $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$ folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Differenziert:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{x dy - y dx}{x^2}$$

und, wenn man mit $r^2 \cos^2 \varphi = x^2$ multipliziert: $r^2 d\varphi = x dy - y dx$.

Demnach geht die Formel zur Quadratur in Polarkoordinaten $S = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi$ jetzt über in $S = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$.

a) Epizykloide: Aus

$$y = b(m \sin t - \sin mt),$$

$$x = b(m \cos t - \cos mt)$$

folgt

$$dy = mb(\cos t - \cos mb) dt,$$

$$dx = mb(-\sin t + \sin mt) dt,$$

$$x dy = mb^2(m \cos^2 t - \cos t \cos mt - m \cos t \cos mt + \cos^2 mt) dt$$

$$= mb^2(m \cos^2 t - (m+1) \cos t \cos mt + \cos^2 mt) dt,$$

$$y dx = mb^2(-m \sin^2 t + \sin t \sin mt + m \sin t \sin mt - \sin^2 mt) dt$$

$$= mb^2(-m \sin^2 t + (m+1) \sin t \sin mt - \sin^2 mt) dt,$$

$$x dy - y dx = mb^2[m - (m+1) \cos(m-1)t + 1] dt$$

$$= m(m+1)b^2[1 - \cos nt] dt \quad (m-1 = n \text{ gesetzt})$$

$$S = \frac{m(m+1)b^2}{2} \int (1 - \cos nt) dt = \frac{m(m+1)b^2}{2} \left(t - \frac{1}{n} \sin(nt) \right).$$

Nun ist aber für den Fall, daß der Radius des festen Kreises ein ganzzahliges Vielfaches von dem des rollenden Kreises ist, gemäß den Gleichungen $\frac{a-b}{b} = m$ und $a = m+1$ n zugleich die Zahl, die angibt, wieviel mal so klein der Radius des rollenden Kreises ist als der des festen. Für den durch eine einmalige Abrollung entstehenden Sektor ist danach $nt = 2\pi$ oder $t = \frac{2\pi}{n}$. Dann wird

$$S = \frac{m(m+1)b^2}{n} \pi = \frac{(n+1)(n+2)b^2\pi}{n}$$

und der Gesamthalt das n -fache:

$$F = (n+1)(n+2)b^2\pi.$$

Sonderfall der Kardioiden ($n=1$): $F = 6b^2\pi$.

b) Die Quadratur der Hypozykloide wird ganz entsprechend ausgeführt. Man erhält

$$F = (n-1)(n-2)b^2\pi \quad \text{für } m+1 = n.$$

Sonderfälle: Astroide ($m=3, n=4$): $F = 6b^2\pi$,

Steinersche Kurve ($m=2, n=3$): $F = 2b^2\pi$.

SIEBENTE GRUPPE

23. Die Kreisevolvente

A. Erzeugungsarten

1. Als Rollkurve. Dem Rollen eines Kreises auf einer Geraden steht das Rollen einer Geraden auf einem Kreis gegenüber — der Zykloide die Kreisevolvente. Sie entsteht also durch Abrollen einer

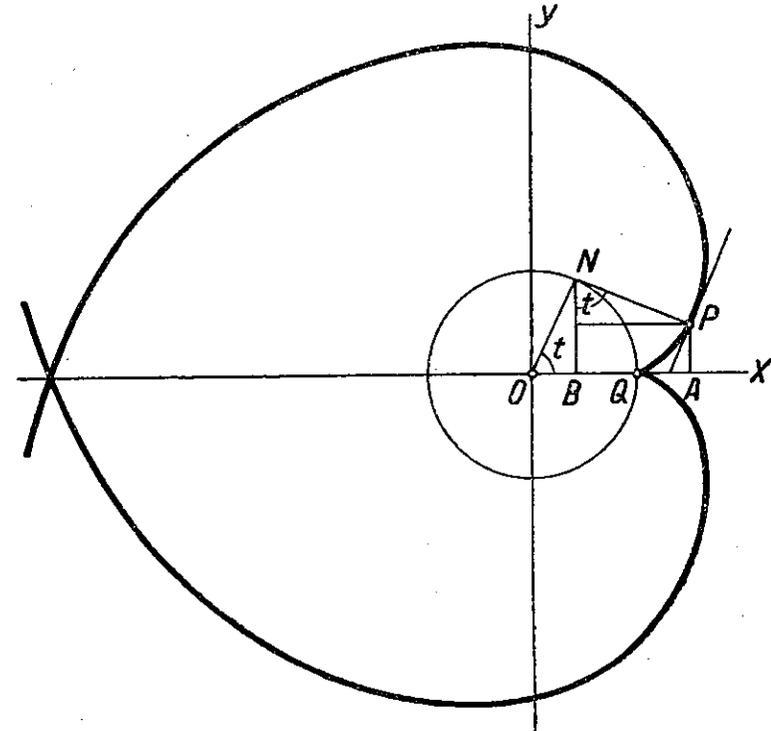


Abb. 195

Geraden von einem Kreis, wobei ein markierter Punkt auf der Geraden die Kurve beschreibt — oder, wie ich mich auch ausdrücken kann, durch Abwicklung eines Fadens von einem Kreise. Ein Punkt des gespannten Fadens, etwa der Endpunkt, beschreibt dabei die Kurve. Da (Abb. 195) $\overline{NP} = at$ und $\sphericalangle BNP = t$ ist, ergibt sich $OA = OB + BA$

$$x = a \cos t + NP \sin t$$

$$x = a(\cos t + t \sin t)$$

und entsprechend

$$y = a(\sin t - t \cos t)$$

Es liegt nahe, die Kreisevolvente aufzufassen als eine Epizykloide, bei der der Radius des rollenden Kreises b unendlich ist. Unsere Gleichungen der Epizykloide

$$x = b(m \cos t - \cos mt)$$

$y = b(m \sin t - \sin mt)$, worin $mb = a + b$ gesetzt war, müssen also durch Spezialisierung in die Evolventengleichung übergeführt werden können. Zu diesem Zweck ist es nötig, sowohl b als auch m anders auszudrücken. Aus $mb = a + b$ folgt zunächst $b = \frac{a}{m-1}$. Setzen wir diesen Wert in die x -Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{m-1} \cos t - \frac{\cos mt}{m-1}$$

Wir setzen weiter $\frac{1}{m-1} = n$, demnach $m = \frac{n+1}{n}$, $\frac{m}{m-1} = n+1$ und erhalten

$$\frac{x}{a} = (n+1) \cos t - n \cos \frac{n+1}{n} t$$

$$\frac{x}{a} = (n+1) \cos t - n \cos \left(t + \frac{t}{n} \right)$$

$$= n \cos t + \cos t - n \left(\cos t \cos \frac{t}{n} - \sin t \sin \frac{t}{n} \right)$$

$$= n \cos t + \cos t - n \cos t \cos \frac{t}{n} + \frac{t}{n} \sin t \sin \frac{t}{n}$$

$$= \cos t \left(n+1 - n \cos \frac{t}{n} \right) + t \sin t \frac{\sin \frac{t}{n}}{n}$$

$$= \cos t \left[1 + n \left(1 - \cos \frac{t}{n} \right) \right] + t \sin t \frac{\sin \frac{t}{n}}{n}$$

$$= \cos t \left[1 + 2n \sin \frac{2t}{2n} \right] + t \sin t \frac{\sin \frac{t}{n}}{n}$$

Wird nun b , der Radius des rollenden Kreises, unendlich groß, so gilt wegen $b = \frac{a}{m-1} = a$ an das Gleiche für n . Dann nimmt der Bruch

$\frac{\sin \frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}$ den Grenzwert 1 an. Den Ausdruck $2n \sin^2 \frac{t}{2n}$ können wir fol-

gendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} 2n \sin^2 \frac{t}{2n} &= 2n \sin \frac{t}{2n} \cdot \sin \frac{t}{2n} \\ &= 2n \sin \frac{t}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{t}{2n}}{\frac{t}{2n}} \cdot \frac{t}{2n} \\ &= t \sin \frac{t}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{t}{2n}}{\frac{t}{2n}} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird für $n = \infty$ zu Null, und es folgt

$$x = a(\cos t + t \sin t)$$

Ganz entsprechend erhält man

$$\frac{y}{a} = \sin t \left(1 + 2n \sin^2 \frac{t}{2n} \right) - t \cos t \frac{\sin \frac{t}{n}}{n}$$

$$y = a(\sin t - t \cos t)$$

2. Als Schnitt einer Schraubenfläche.

Die Schraubenlinie ist definiert als diejenige Kurve auf dem Kreiszyylinder, die alle Mantellinien unter demselben Winkel δ schneidet. Daraus folgt, daß nach der Aufschneidung des Zylinders in einer Mantellinie und Ausbreitung in eine Ebene die Schraubenlinie zu einer Geraden wird. Wickelt man (Abb. 196) das gewölbte Dreieck PP_1Q in eine Ebene ab, so wird aus ihm das ebene Dreieck PP_1Q_1 .

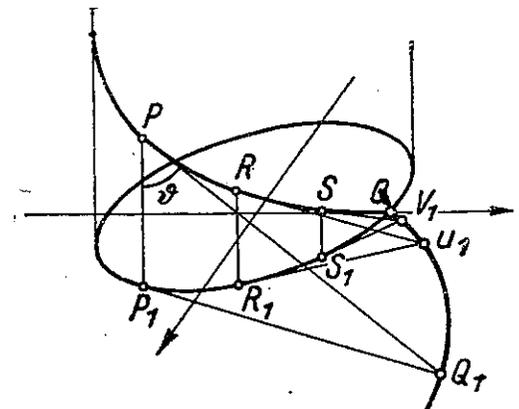


Abb. 196

Q_1 beschreibt bei dieser Abwicklung die Kreisevolvente QQ_1 . $\sphericalangle P_1PQ_1$ ist der Winkel, den die Schraubenlinie mit der Mantellinie PP_1 bildet und daher konstant, d. h. gleich ϑ . Es ist also $\sphericalangle P_1PQ_1 = \sphericalangle R_1RU_1 = \sphericalangle S_1SV_1$ und $\widehat{P_1Q} = \widehat{P_1Q_1}$, $\widehat{R_1Q} = \widehat{R_1U_1}$, $\widehat{S_1Q} = \widehat{S_1V_1}$. Nun erfüllen die Tangenten PQ_1 , RU_1 , SV_1 einer Schraubenlinie eine sogenannte abwickelbare Schraubenfläche. Ich kann mithin sagen: Die Schnittlinie einer abwickelbaren Schraubenfläche mit einer zu ihrer Achse senkrechten Ebene ist eine Kreisevolvente, deren Grundkreis der Grundkreis der zylindrischen Schraubenfläche ist.

B. Auswertung der Kurvengleichungen

Setze ich für t negative Werte, so bedeutet das, daß ich den Faden von Q aus in umgekehrter Richtung abwickele. Wir erhalten dann (Abb. 195) einen bezüglich der x -Achse zum ursprünglichen symmetrisch verlaufenden Kurvenzweig. In ihrer Gesamtheit wird die Kurve also dargestellt durch zwei getrennte, in einer Spitze Q auf der x -Achse zusammenstoßende Kurvenzweige, deren jeder mit wachsendem t ins Unendliche sich erstreckt. Die Kurve windet sich unzählige Male um den Kreismittelpunkt O herum. Seien P und P_1 zwei Punkte, die auf

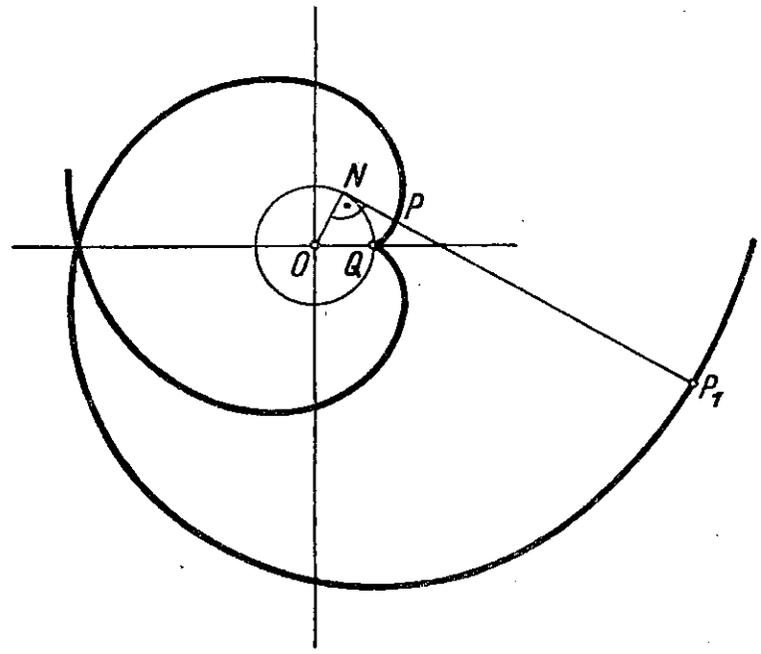


Abb. 197

derselben Kreistangente liegen (Abb. 197), so gehört, wenn P den Rollwinkel t hat, zu P_1 der Rollwinkel $t + 2\pi$. Da aber $NP = at$ und $NP_1 = a(t + 2\pi)$, so ist der Abstand zweier aufeinander folgender Windungen gleich $2a\pi$, also eine konstante Größe, nämlich der Umfang des Grundkreises.

N ist der augenblickliche Drehpunkt (Krümmungsmittelpunkt) zu P sowohl wie P_1 . Unter der Evolute einer Kurve versteht man nun den Ort der Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Kurve. Somit ist der Grundkreis die Evolute der Kreisevolvente. Während es nur eine Evolute zu einer Kurve in ihrer Ebene gibt, sind unzählige viele Evolventen zu demselben Grundkreis möglich, je nachdem, in welchem Punkte Q ich die Abwicklung der Kurve beginnen lasse.

C. Tangentenkonstruktion

Da N augenblicklicher Drehpunkt bei der Abwicklung ist, ist PN Kurvennormale. Man erhält also die Tangente in einem Kurvenpunkt P , indem man von P die Tangente an den Grundkreis zieht und auf dieser in P die Senkrechte errichtet.

D. Anwendung der Integralrechnung

1. Rektifikation

Aus $dx = at \cos t dt$

$dy = at \sin t dt$ folgt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt^2 = a^2 t^2 dt^2$$

$$ds = at dt$$

$$s = a \int_0^t t dt = \frac{a}{2} t^2.$$

2. Quadratur. Die Größe des Sektors POQ_1 ist, da

$$x dy - y dx = a^2 t^2 dt,$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^t (x dy - y dx) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^t t^2 dt = \frac{a^2 t^3}{6}.$$

Es läßt sich hier folgender Satz von Mannheim anschließen (Abb. 198): Die zwischen dem Kreisbogen, dem entsprechenden Evolventenbogen und der zugehörigen Tangente des Kreisbogens liegende Fläche ist gleich einem Drittel des Produktes aus der Länge jener beiden Bögen.

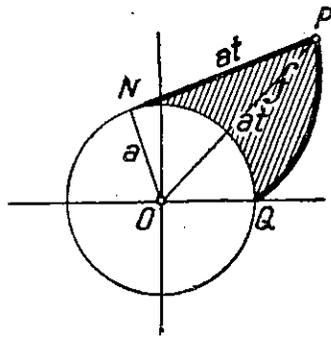


Abb. 198

3. Komplanation. Aus $ds = at dt$ folgt

$$y = ds = a^2 (t \sin t - t^2 \cos t) dt, \text{ demnach}$$

$$O = 2\pi \int_0^t y ds = 2a^2 \pi \int_0^t (t \sin t - t^2 \cos t) dt.$$

Setzt man $u = t^2$, $dv = \cos t dt$, also $du = 2t dt$, $v = \sin t$ in die Formel

$$\int u dv = uv - \int v du \text{ ein, so folgt}$$

$$\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt. \quad (1)$$

Setzt man dagegen

$u = t$, $dv = \sin t dt$, also $du = dt$, $v = -\cos t$ in die Gleichung

$\int u dv = uv - \int v du$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int t \sin t dt &= -t \cos t + \int \cos t dt \\ &= -t \cos t + \sin t \quad (2) \end{aligned}$$

Multipliziert man Gleichung (1) mit -1 und Gleichung (2) mit $+3$ und addiert, so folgt

$$\int t \sin t dt - \int t^2 \cos t dt = -t^2 \sin t - 3t \cos t + 3 \sin t;$$

demnach ist $O = 2a^2 \pi (3 \sin t - 3t \cos t - t^2 \sin t)$.

E. Lehrsätze

1. Die Berührungspunkte der von einem Punkte an die Kreisevolvente gezogenen Tangenten liegen auf einer Pascalschen Schnecke.

Es ist (Abb. 199) $QP \perp QR$. Ziehe $OS \parallel RQ$. Dann ist $QS = a = \text{const.}$, und da $\angle OSP = 90^\circ$, liegt S auf dem Kreis über OP als Durchmesser. Ziehen wir nun die Erzeugung der Pascalschen Schnecke als

Kreiskonchoide (S. 125) heran, so erkennen wir, daß Q auf einer Pascalschen Schnecke mit dem Grundkreis über OP und der konstanten Strecke a liegt. Die Abbildung zeigt noch einige andere Berührungspunkte auf der Schnecke.

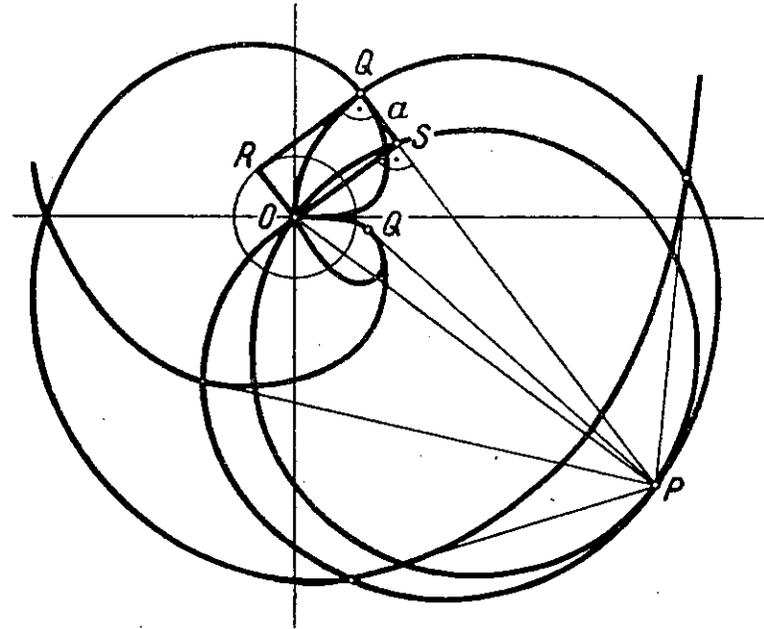


Abb. 199

2. Rolllt eine Kreisevolvente auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungszentren für die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte mit der Geraden eine Parabel.

Beweis: Wenn die Evolvente von Q aus auf der x -Achse abrollt (Abb. 200), so daß P nach P' fällt, so nimmt der zugehörige Krümmungsmittelpunkt N die Stellung N' ein, in der ersich senkrecht über P' bezüglich

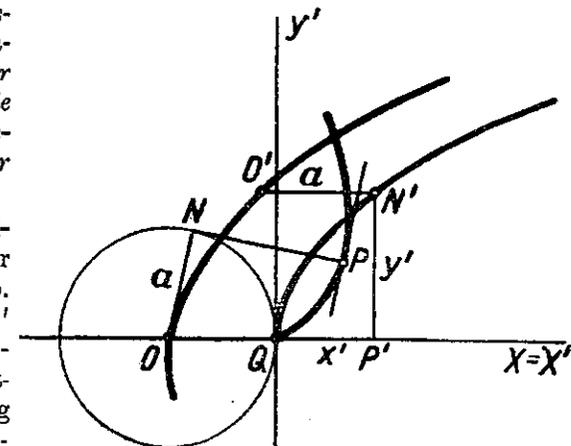


Abb. 200

QP' befindet. Nun ist (s. Rektifikation) $QP' = \frac{at^2}{2}$ und $\overline{PN} = \widehat{OQ} = at$.
 Lege ich also eine y' -Achse durch Q senkrecht zur x -Achse, so ist für dieses Koordinatensystem und Punkt N' :

$$\begin{aligned} y' &= at \\ x' &= \frac{at^2}{2} \\ \hline y'^2 &= 2ax'. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Gleichung einer Parabel mit der betreffenden Geraden (der x -Achse) als Achse, Q als Scheitel und dem Halbparameter $p = a$.

3. Weiter ergibt sich: Bei dieser Abrollung der Evolvente auf der x -Achse fällt, wenn der Grundkreis O fest mit der Evolvente verbunden bleibt, O nach O' , derart, daß $O'N' = a \perp N'P'$. O' beschreibt mithin eine zu der eben abgeleiteten kongruenten Parabel, die gegen

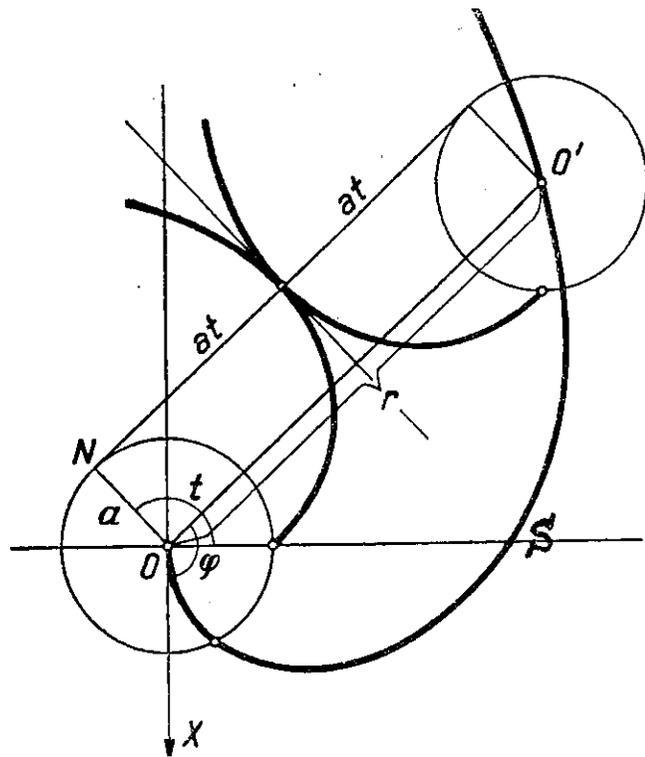


Abb. 201

die erstere um a nach links verschoben ist: *Rollt die Kreisevolvente auf einer Geraden, so beschreibt ihr Mittelpunkt O eine Parabel mit O als Scheitelpunkt, der betreffenden Geraden als Achse und dem Halbparameter $p = a$.*

4. *Rollt eine Kreisevolvente auf einer ihr kongruenten derart, daß sie in den entsprechenden Punkten einander berühren, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises eine Archimedische Spirale.*

Beweis: Es ist (Abb. 201)

$$r = 2at.$$

Nehme ich nun als neue x -Achse die von O aus senkrecht zur ursprünglichen x -Achse gehende Gerade, so ist $t = \varphi$, und ich kann schreiben:

$$r = 2a\varphi.$$

Wir erhalten also eine Archimedische Spirale (siehe § 24) mit der Konstanten $\frac{c}{2\pi} = 2a$, $c = 4a\pi$. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird z. B. $OS = a\pi$, also gleich dem halben Umfang des Grundkreises.

24. Die Archimedische Spirale

A. Erzeugungsweisen

1. *Die Kurve wird beschrieben von einem Punkt P , der sich vom Pol O aus auf seinem Strahl gleichförmig vorwärts bewegt, während der Strahl selbst sich gleichförmig um den Pol dreht.* Nennt man die Strecke OC_1 , die P während einer vollen Umdrehung des Strahles OP auf dem Strahl durchläuft, den Hauptvektor c , so ist wegen der gleichförmigen Bewegung des Punktes auf dem Strahl und des Strahles selber (Abb. 202)

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{c}{2\pi}, \quad r = \frac{c}{2\pi} \varphi.$$

Setzt man $\frac{c}{2\pi} = a$, also $c = 2a\pi$, so lautet die Kurvengleichung

$$\boxed{r = a\varphi}.$$

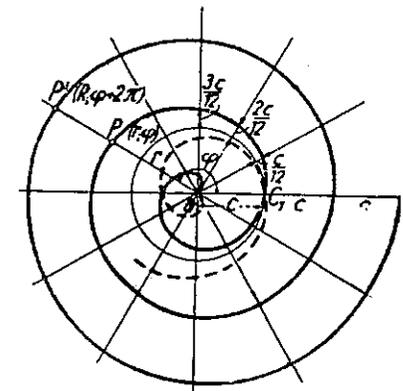


Abb. 202

Läßt man auch negative Drehungen, also negative Werte von φ , zu, so wird r negativ, muß also in entgegengesetzter Richtung angetragen werden. Die Kurve besteht demnach aus zwei symmetrischen Zweigen (s. die punktierte Kurve in Abb. 202).

P und P' seien zwei Punkte auf demselben Strahl in zwei Nachbarwindungen. Dann ist $r = a\varphi$ für P ,

$$R = a(\varphi + 2\pi) = a\varphi + 2a\pi \text{ für } P',$$

$$R - r = 2a\pi = c,$$

d. h.: Die Breite der Intervalle zwischen je zwei Nachbarwindungen ist konstant, nämlich gleich dem Hauptvektor. Oder anders ausgedrückt: Die auf einem gemeinsamen Strahl liegenden Fahrstrahlen bilden eine arithmetische Reihe.

Die Konstruktion der Kurve gemäß dieser Eigenschaft ist aus der Abbildung erkenntlich: Ist der Kreis mit dem Hauptvektor c gegeben, so kommt auf $1/n$ (z. B. $1/12$) der ganzen Umdrehung je c/n ($c/12$) Zunahme des Fahrstrahles.

2. Ein rechter Winkel C rolle mit dem einen, beliebig langen Schenkel von dem Umfang eines Kreises O mit dem Radius a ab; dann beschreibt der Endpunkt P des anderen Schenkels CP von der festen Länge a eine Archimedische Spirale. (Abb. 203)

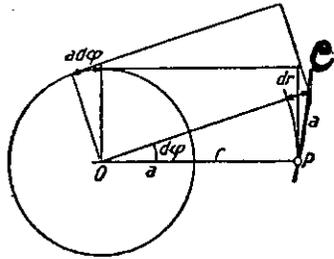


Abb. 203

Denn bei Abrollung um einen Winkel $d\varphi$ ist die Zunahme des variablen Schenkels $dr = a d\varphi$, d. h. Fahrstrahl und Drehungswinkel wachsen im selben Verhältnis.

Da C hierbei die Evolvente des Kreises a beschreibt, können wir

3. die Kurve auch auffassen als Fußpunktcurve der Kreisevolvente bezüglich des Kreiscentrums.

Hier sei noch ein Satz angeführt, zu dem man durch die Tatsache geführt wird, daß die Abstände je zweier Nachbarwindungen konstant sind. Eine Konchoide der Archimedischen Spirale (zum allgemeinen Begriff der Konchoide s. § 13) würde die Gleichung haben $r = a\varphi + b$. Führt man nun aber die Substitution $\varphi = \varphi_1 - \frac{b}{a}$ ein, so erhält man $r = a\left(\varphi_1 - \frac{b}{a}\right) + b$, $r = a\varphi_1$, d. h.:

Die Konchoiden der Archimedischen Spirale sind der ursprünglichen gleiche Spiralen, deren Polarachsen gegen die der ursprünglichen Spirale um $\varphi_1 - \varphi = \frac{b}{a}$ gedreht sind.

Setzt man im besonderen $b = c$, so wird, da $a = \frac{c}{2\pi}$ ist, $\varphi_1 - \varphi = 2\pi$, die Spirale geht in sich selber über.

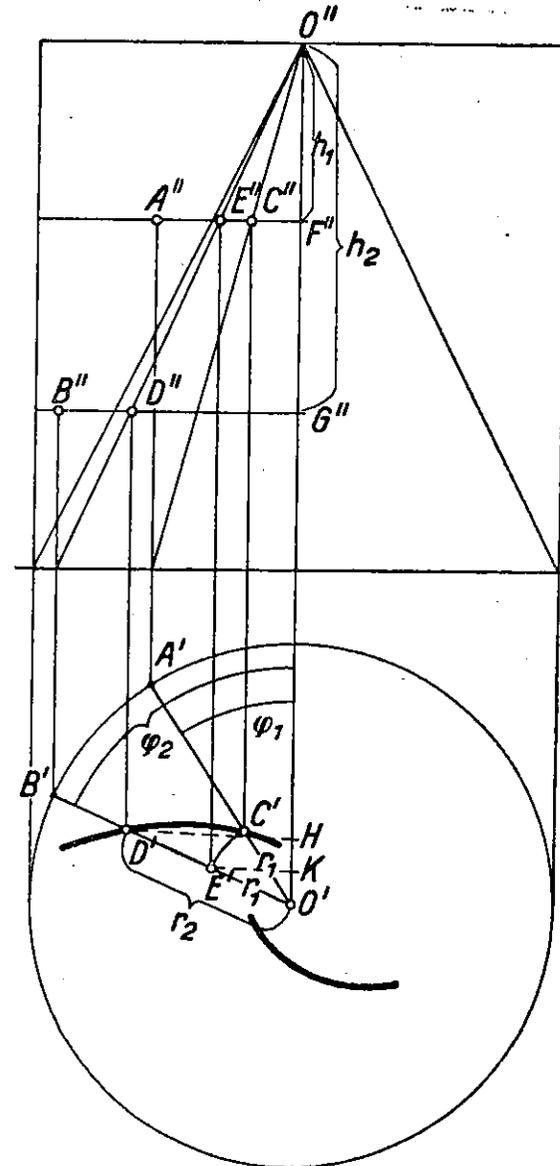


Abb. 204

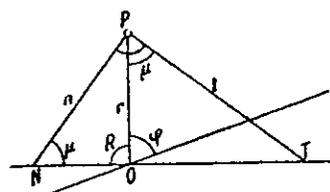
4. Eine räumliche Erzeugung der Kurve (Pappus):

Die Orthogonalprojektion des Schnittes einer flachgängigen Schraube mit einem Rotationskegel von derselben Achse auf die Grundfläche des Kegels selbst besteht aus zwei gleichen archimedischen Spiralen.

Wenn man von den Punkten einer zylindrischen Schraubenlinie die Lote auf die Achse fällt, so erfüllen diese Lote eine flachgängige Schraubenfläche. In Abb. 204 seien FA und GB zwei derartige Erzeugende der Schraubenfläche mit den Winkeln φ_1 und φ_2 . Nach dem Begriff der Schraubenlinie ist dann (s. Abb.) $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Wir bringen nun jede dieser beiden Erzeugenden mit dem Kegelmantel zum Schnitt, indem wir uns durch jede einen Achsenschnitt gelegt denken. Es ergeben sich so die Schnittpunkte C und D . Drehe ich nun die Mantellinie OC in die Lage der Mantellinie OD , so fällt C auf E , und es ist $E'O' = C'O' = r_1$. $O'D'$ bezeichne ich mit r_2 . Da nun $\frac{h_1}{h_2} = \frac{E''F''}{D''G''} = \frac{E'K}{D'H} = \frac{r_1}{r_2}$ ist und $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ war, so folgt $r_1 = a\varphi_1$, $r_2 = a\varphi_2$, worin a eine Konstante ist. Die zweite Spirale ist zur ersten zentralsymmetrisch, d. h. um 180° gegen sie gedreht.

B. Tangentenkonstruktion

Es bestehen die Gleichungen (Abb. 205):



$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\varphi}{dr},$$

Polarsubnormale

$$ON = r \operatorname{ctg} \mu = \frac{dr}{d\varphi},$$

Polarsubtangente

$$OT = r \operatorname{tg} \mu = \frac{r^2 d\varphi}{dr}.$$

Abb. 205

In unserem Falle ist $dr = a d\varphi$, also $\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{a} = \varphi$. Je weiter also der Fahrstrahl sich dreht, um so mehr nähert sich der Winkel, unter dem die Kurve den Fahrstrahl schneidet, einem Rechten.

Weiter ist die Polarsubtangente $OT = \frac{r^2}{a}$, nimmt also ständig zu. Dagegen ist die Polarsubnormale $ON = a = \text{const.}$ Wenn also bei gegebenem $c a = \frac{c}{2\pi}$ konstruiert ist, was aber nur näherungsweise

geschehen kann, so ist die Tangente in jedem Kurvenpunkt leicht zu zeichnen (Abb. 206).

Aus $\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{a} = \varphi$ folgt, daß für $r = 0$ auch $\mu = \varphi = 0$, d. h. die Kurve hat im O -Punkt die x -Achse zur Tangente.

C. Quadratur

Der zwischen zwei Fahrstrahlen r_1 und r_2 liegende Sektor hat den Inhalt

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6} [\varphi^3]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{1}{6a} (a^3 \varphi_2^3 - a^3 \varphi_1^3),$$

$$S = \frac{r_2^3 - r_1^3}{6a}$$

D. Verwendung bei den Unlösbaren Problemen

1. Verwendung zur Drittelung des Winkels. Ist der Fahrstrahl von Stellung 1 (Abb. 207) in Stellung 2 um ein Stück s gewachsen, so gehören zu den dazwischenliegenden zwei Vektoren, die a dritteln, auch gleiche Zunahmen $s/3$. Die Kreisbogen durch das dreigeteilte Stück s ergeben also im Schnitt mit der Spirale die gesuchten Dreiteilungspunkte x_1 und x_2 . — Natürlich kann jede beliebige Winkelteilung (nicht nur die Dreiteilung) nach diesem Verfahren durchgeführt werden.

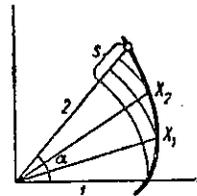


Abb. 207

2. Verwendung zur Rektifikation des Kreises (Archimedes). Gehören zu einem Punkte P der Spirale n Umdrehungen des Fahrstrahls, so ist $OP = 2n\pi a$, und da $\operatorname{tg} \mu = \varphi = 2n\pi$, so schneidet die Tangente in P auf dem in O auf OP errichteten Lot (Abb. 206) die Strecke $OS = OP \cdot \operatorname{tg} \mu = 4n^2 \pi^2 a$ ab. Ich beschreibe nun mit dem Einheitsvektor $c = 2\pi a$ um O einen Kreis, der OP in Q trifft und ziehe zu PS die Parallele QT . Dann ist

$$\frac{OT}{OS} = \frac{OQ}{OP},$$

$$OT = \frac{4n^2 \pi^2 a \cdot 2\pi a}{2n\pi a} = 4n\pi^2 a.$$

Das ist aber die Umfangslänge des Kreises mit dem Radius $OP = 2n\pi a$.

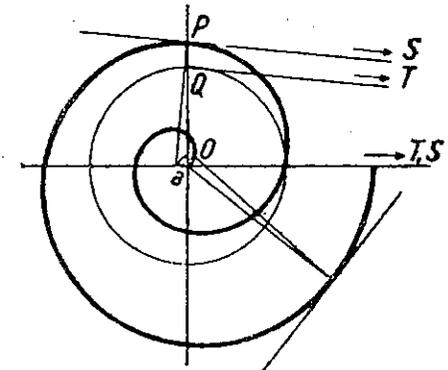


Abb. 206

25. Die logarithmische Spirale

A. Ihre Gleichung lautet

$$\varphi = \frac{\log \text{nat } r}{a} \quad \text{oder} \quad \boxed{r = e^{a\varphi}}$$

Für $\varphi = 0$ wird $r = 1$. Wächst φ von Null bis $+\infty$, so wächst r von 1 bis ∞ . Nimmt φ von Null bis $-\infty$ ab, so bleibt r positiv und nimmt von 1 bis 0 ab. Demnach hat die Kurve unendlich viele Windungen um den Pol, der daher auch ein asymptotischer Punkt heißt (Abb. 208).

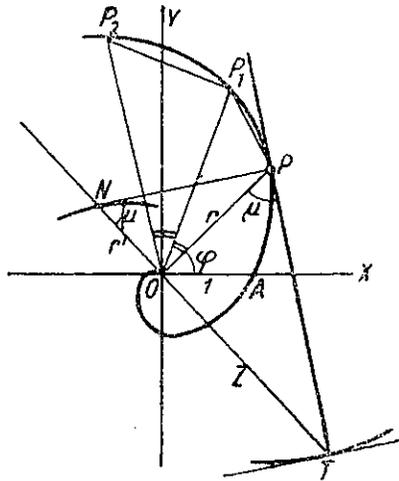


Abb. 208

Zur punktweisen Zeichnung der Kurve ist folgendes bemerkenswert. Sind P, P_1, P_2 drei aufeinander folgende Kurvenpunkte mit den Winkeln $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, derart, daß $\varphi_1 - \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, so ist

$$OP = e^{a\varphi}, \quad OP_1 = e^{a\varphi_1}$$

$$OP_2 = e^{a\varphi_2},$$

demnach

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{e^{a\varphi_1}}{e^{a\varphi}} = e^{a(\varphi_1 - \varphi)}$$

und

$$\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{e^{a\varphi_2}}{e^{a\varphi_1}} = e^{a(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

also

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{OP_2}{OP_1}.$$

Mithin ist $\triangle OPP_1 \sim \triangle OP_1P_2$. Liegen also zwei Punkte der Kurve P und P_1 fest, so läßt sich ein weiterer dritter, P_2 , auf Grund dieser Beziehung leicht konstruieren, usf.

Bilden wir den Quotienten zweier um 2π voneinander entfernter Fahrstrahlen, so erhalten wir

$$\frac{r_1}{r} = \frac{e^{a(\varphi+2\pi)}}{e^{a\varphi}} = e^{2a\pi} = \text{const.},$$

d. h.: Die auf einem gemeinsamen Strahl liegenden Fahrstrahlen der log. Spirale bilden eine geometrische Reihe (vgl. die Archimedische Spirale).

B. Tangentenkonstruktion

Es ist (μ der Winkel zwischen Fahrstrahl und Tangente):

$$\text{tg } \mu = \frac{r \, d\varphi}{dr} = r \cdot \frac{1}{ar} = \frac{1}{a},$$

d. h.: Der Winkel, den die Tangente mit dem Fahrstrahl bildet, ist konstant.

Zur Zeichnung der Kurventangente braucht also nur der konstante Winkel μ an dem Fahrstrahl angetragen zu werden. Ist von einem beliebigen, nicht auf der Kurve liegenden Punkt P an die Kurve die Tangente zu ziehen, so genügt es, über OP den Kreis zu beschreiben, der μ als Peripheriewinkel faßt; dieser schneidet die Kurve in dem Berührungspunkt.

Hieraus folgt der Satz: Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkt der Ebene an eine log. Spirale gezogenen Tangenten liegen auf einem Kreis, der durch den Punkt und den Pol geht.

C. Wir vermerken noch einige interessante Eigenschaften der Kurve.

1. Die Polarsubnormale ON ist gleich $r \text{ctg } \mu = ar$, d. h. dem Fahrstrahl proportional. Bezeichnen wir ihre Länge mit r' , so ist also $r' = ar$. Führen wir nun noch den zu ihrem Fahrstrahl r' gehörigen Winkel $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ein und setzen diese Werte $r = \frac{r'}{a}$, $\varphi = \varphi' - \frac{\pi}{2}$ in die Kurvengleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{r'}{a} = e^{a\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$r' = ae^{a\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Nun führen wir zwei Zwischengrößen ein:

$$a = \frac{\log \text{nat } a}{a}, \quad \log \text{nat } a = a \cdot a, \quad a = e^{aa},$$

$$\varphi' + a - \frac{\pi}{2} = \varphi'', \quad \varphi' - \frac{\pi}{2} = \varphi'' - a.$$

Dann geht die letzte Gleichung über in

$$r' = e^{aa} \cdot e^{a(\varphi'' - a)} = \frac{e^{aa} \cdot e^{a\varphi''}}{e^{aa}} = e^{a\varphi''}$$

Nun war $\varphi'' = \varphi' + \left(a - \frac{\pi}{2}\right)$. Demnach ist $r' = e^{a\varphi''}$ eine zur gegebenen Kurve kongruente Spirale, bei der nur die „ x' -Achse“ um $a - \frac{\pi}{2}$ gegen die ursprüngliche x -Achse gedreht ist. Wir sehen also:

Der Endpunkt N der Normalen beschreibt eine zur ursprünglichen kongruente Spirale, die gegen jene um $a - \frac{\pi}{2}$ gedreht ist.

2. Wir können dieser kongruenten Spirale aber noch eine andere Deutung geben.

In Abb. 209 sind, wie wir vorhin nachwiesen ($\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{a}$), die beiden

Winkel, die die Tangenten mit den Fahrstrahlen bilden, gleich. Demnach ist auch der Winkel, den zwei Nachbartangenten miteinander bilden, der sogenannte Kontingenzwinkel, $\omega = d\varphi$. Und da die Lote auf zwei Nachbartangenten den Krümmungsmittelpunkt N ergeben, so folgt weiter, daß auch $\sphericalangle N = d\varphi$. So ergibt sich für den Krümmungsradius R :

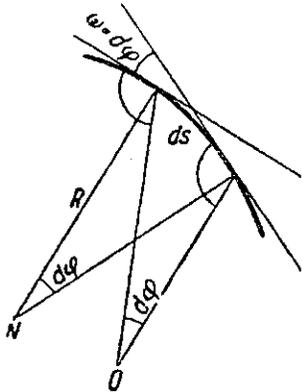


Abb. 209

$$R d\varphi = ds,$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Nun ist bekanntlich $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2},$$

und in unserem Falle

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + (ar)^2} = r\sqrt{a^2 + 1},$$

$$R = r\sqrt{a^2 + 1},$$

Abb. 208 zeigt weiter, daß die Normale $NP = \frac{r}{\sin \mu}$. Da aber

$$\sin \mu = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \mu}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

so folgt

$$NP = \frac{r}{\sin \mu} = r\sqrt{a^2 + 1} = R.$$

Wir sehen also, daß der Endpunkt der Normalen zugleich Krümmungsmittelpunkt ist, und können nun also auch sagen:

Die Evolute der log. Spirale ist eine kongruente log. Spirale mit dem nämlichen Pol.

3. Eine kongruente Spirale erhalten wir auch bei Verwendung der Inversion (vgl. die Konchoide der Archimedischen Spirale). Unterwirft man die Kurve einer inversen Abbildung, indem man $r = \frac{K^2}{r_1}$ setzt, so erhält man

$$\frac{K^2}{r_1} = e^{a\varphi}, \quad r_1 = \frac{K^2}{e^{a\varphi}}.$$

Setzt man hierin $\varphi = -\varphi_1$ und die Konstante $K^2 = e^c$, so lautet die Gleichung der neuen Kurve

$$r_1 = e^c e^{a\varphi_1} = e^{a\left(\varphi_1 + \frac{c}{a}\right)},$$

d. h.: Durch Inversion mit dem Nullpunkt als Pol geht eine log. Spirale in eine ihr kongruente über, die um den Winkel c/a um den Nullpunkt gegen sie gedreht ist.

Die Spirale geht im besonderen in sich selbst über (ist insofern eine anallagmatische Kurve), wenn $\frac{c}{a} = 2\pi$, $\frac{\log \operatorname{nat} K^2}{a} = 2\pi$, $K^2 = e^{2a\pi}$ gewählt ist.

4. Da (Abb. 208) $\sphericalangle OPT$ konstant ist, gilt dies auch von $\sphericalangle OTP$. Halten wir also PT fest und lassen auf dieser Geraden die Spirale abrollen, so wird O auf OT wandern: Wenn eine log. Spirale auf einer Geraden rollt, so beschreibt ihr Pol eine Gerade.

D. Anwendungen der Integralrechnung

1. Quadratur. Der Sektor zwischen zwei Fahrstrahlen ist

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi} \frac{d(2a\varphi)}{2a} = \frac{1}{4a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi} d(2a\varphi) \\ &= \frac{1}{4a} [e^{2a\varphi}]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{1}{4a} [e^{2a\varphi_2} - e^{2a\varphi_1}] = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}. \end{aligned}$$

2. Rektifikation. Es was $ds = (r\sqrt{a^2 + 1}) d\varphi$. Nun ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = ar, \quad d\varphi = \frac{dr}{ar}, \quad \text{also} \quad ds = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} dr.$$

Integrieren wir, so folgt

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \int_{r_1}^{r_2} dr = \frac{r_2 - r_1}{a} \sqrt{a^2 + 1}.$$

Setzt man in dieser Formel $r_1 = 0$ und $r_2 = r$, nimmt also die Länge des Kurvenzuges vom O -Punkt bis zu einem beliebigen Kurvenpunkt, so erhält man $s = \frac{r}{a} \sqrt{a^2 + 1}$. Berechnet man andererseits die Länge der Tangente in diesem Punkt, so erhält man (s. Abb. 208), da $r' = ar$ ist:

$$r^2 = ar \cdot z, \quad z = \frac{r}{a},$$

$$PT^2 = z(z + ar) = \frac{r}{a} \left(\frac{r}{a} + ar \right) = \frac{r^2}{a^2} (a^2 + 1),$$

$$PT = \frac{r}{a} \sqrt{a^2 + 1},$$

d. h.: Die Länge der Tangente in einem Kurvenpunkt ist gleich der Länge des Kurvenbogens vom O -Punkt bis zu diesem Kurvenpunkt.

ACHTE GRUPPE

26. Die Kettenlinie

Der Name der Kurve ist durch ihre Bedeutung für die Mechanik gegeben (s. darüber am Schluß). Sie ist die Gleichgewichtsform eines biegsamen Seiles (Kette), das zwischen zwei festen Punkten aufgehängt ist. Galilei hielt die Kurve noch für eine Parabel. Ein deutscher Gelehrter, Jungius, zeigte 1669 rechnerisch und experimentell, daß dies ein Irrtum war. Erst 1691 wurde die wahre Form der Kettenlinie durch Jak. Bernoulli (und fast gleichzeitig auch durch Huygens, Leibniz und Joh. Bernoulli) entdeckt.

A. Die Gleichung der Kurve lautet

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Die Kurve liegt (Abb. 210) symmetrisch zur y -Achse, da Vertauschung von $+x$ und $-x$ die Gleichung nicht ändert. Für $x = \infty$ wird auch $y = \infty$, d. h. die Kurve geht nach beiden Seiten ins Unendliche. Für $x = 0$ wird $y = a$: Scheitelpunkt S .

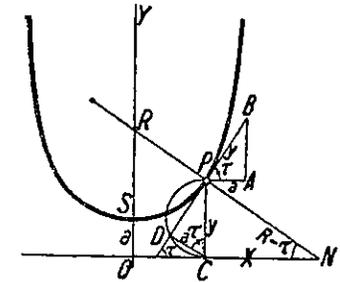


Abb. 210

B. Tangente und Normale

$$\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

demnach

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tg}^2 \tau &= 1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 e^{\frac{x}{a}} e^{-\frac{x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber $1 + \operatorname{tg}^2 \tau = \frac{1}{\cos^2 \tau}$, demnach

$$\cos \tau = \frac{2}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}} = \frac{a}{\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)} = \frac{a}{y}.$$

Daraus ergeben sich folgende einfachen Tangentenkonstruktionen.

1. Ziehe $PA = a$, errichte in A das Lot und schlage um P mit y einen Kreisbogen, der B ergibt. Dann ist PB Tangente.

2. Schlage über PC einen Halbkreis und um C einen Bogen mit a , der D ergibt. DP ist dann Tangente.

Die Länge der Normale ergibt sich zu

$$PN = \frac{y}{\cos \tau} = \frac{y^2}{a}.$$

C. Krümmungsradius

Es ist

$$1 + y'^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2,$$

$$y'' = \frac{1}{2a} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

Demnach ist der Krümmungsradius

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\frac{1}{8} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^3}{\frac{1}{2a} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)} = \frac{a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^3}{4 \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)} = \frac{y^2}{a}.$$

Die Länge des Krümmungsradius ist also gleich der Länge der Normalen.

D. Anwendungen der Integralrechnung

1. Rektifikation.

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^x e^{\frac{x}{a}} dx + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{x}{a}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x e^{\frac{x}{a}} d\left(\frac{x}{a}\right) \cdot a + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{x}{a}} d\left(-\frac{x}{a}\right) (-a) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

$$= y' a = a \operatorname{tg} \tau.$$

Nun war oben abgeleitet worden $\cos \tau = \frac{a}{y}$, also

$$\cos^2 \tau = \frac{a^2}{y^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \tau}} = \frac{a^2}{y^2}, \quad \operatorname{tg}^2 \tau = \frac{y^2 - a^2}{a^2}, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

demnach
$$s = a \operatorname{tg} \tau = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

Daraus folgt eine einfache Konstruktion der Bogenlänge: Schlage um S (Abb. 211) mit y einen Kreisbogen, der Q ergibt; dann ist $s = OQ$.

Die letzte Gleichung $s = a \operatorname{tg} \tau = ay'$ läßt sich auch in den Satz fassen:

Der Bogen ist der Steigung proportional.

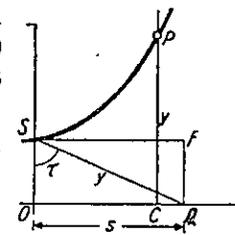


Abb. 211

2. Quadratur

$$F = \int_0^x y dx = \frac{a}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = a \cdot \frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = a \cdot s.$$

Danach läßt sich das Flächenstück $OCPS$ leicht in ein Rechteck $OQFS$ verwandeln.

3. Kubatur. Bei Rotation um die x -Achse entsteht das Katenoid:

$$V = \pi \int_0^x y^2 dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx = \frac{\pi a^2}{4} \left[e^{\frac{2x}{a}} \cdot \frac{a}{2} + 2x - e^{-\frac{2x}{a}} \cdot \frac{a}{2} \right]_0^x$$

$$= \frac{\pi a}{2} \left[\frac{a^2}{4} e^{\frac{2x}{a}} - \frac{a^2}{4} e^{-\frac{2x}{a}} + ax \right]_0^x = \frac{\pi a}{2} \left(\frac{a^2}{4} e^{\frac{2x}{a}} - \frac{a^2}{4} e^{-\frac{2x}{a}} + ax \right)$$

$$= \frac{a\pi}{2} \left[\frac{a^2}{4} \left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} \right) + ax \right] = \frac{a\pi}{2} \left[\frac{a^2}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + ax \right]$$

$$= \frac{a\pi}{2} \left[\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \cdot \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + ax \right]$$

und, da $\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{tg} \tau = \sqrt{y^2 - a^2}$:

$$V = \frac{a\pi}{2} \left(y \sqrt{y^2 - a^2} + ax \right).$$

E. Die Kettenlinie als Rollkurve des Parabelbrennpunktes

Voruntersuchung: Rektifikation der Parabel. Für die Parabel ist bekanntlich $\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{p}{y}$, so daß sie auch dargestellt werden kann durch

$$y = p \operatorname{ctg} \tau, \quad x = \frac{p}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 \tau.$$

Demnach ist

$$dy = \frac{-p}{\sin^2 \tau} d\tau \quad \text{und} \quad dx = \frac{-p \operatorname{ctg} \tau}{\sin^2 \tau} d\tau,$$

folglich $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

$$ds^2 = \left[\frac{p^2 \operatorname{ctg}^2 \tau}{\sin^4 \tau} + \frac{p^2}{\sin^4 \tau} \right] d\tau^2$$

$$= \frac{p^2}{\sin^4 \tau} d\tau^2,$$

$$ds = -\frac{p}{\sin^3 \tau} d\tau.$$

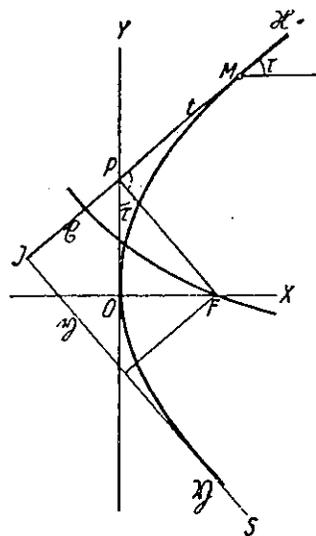


Abb. 212

Wir müssen das negative Vorzeichen nehmen, weil s abnimmt, wenn τ wächst.

Bezeichnen wir mit t die Länge PM der Tangente (Abb. 212) zwischen dem Berührungspunkt M , der zugleich Endpunkt des Bogens ist, und dem Schnittpunkt P mit der y -Achse, so ist

$$t = \frac{x}{\cos \tau} = \frac{p \cos \tau}{2 \sin^2 \tau},$$

demnach

$$dt = \frac{p}{2} \frac{1}{\sin \tau} d\tau - \frac{p}{\sin^3 \tau} d\tau.$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der Gleichung für ds , so erhalten wir

$$d(s-t) = -\frac{p}{2 \sin \tau} d\tau.$$

Nun ist

$$\frac{d(\log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2})}{d\tau} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\tau}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\tau}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\sin \tau},$$

$$\text{also} \quad \frac{d\tau}{\sin \tau} = d(\log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}).$$

Setzen wir ein, so erhalten wir:

$$d(s-t) = -\frac{p}{2} d(\log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}),$$

$$s-t = -\frac{p}{2} \int d(\log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}) = -\frac{p}{2} \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}.$$

$$s = t - \frac{p}{2} \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}.$$

Nun die Anwendung:

Da $PF \perp PM$, ist $PF = \frac{p}{2 \sin \tau}$. Wählen wir nun J so, daß $JM = s$ ist, so wird $JP = s - t = -\frac{p}{2} \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}$. Wenn wir jetzt $JS \perp JM$ ziehen und X, Y zu neuen Koordinatenachsen machen, so hat der Brennpunkt F in diesem System die Koordinaten

$$\xi = -\frac{p}{2} \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}, \quad \eta = \frac{p}{2 \sin \tau}.$$

Aus der Gleichung für ξ folgt:

$$-\frac{2\xi}{p} = \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2},$$

$$e^{-\frac{2\xi}{p}} = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \quad \text{und demnach} \quad e^{\frac{2\xi}{p}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\tau}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2}$$

oder

$$e^{\frac{2\xi}{p}} + e^{-\frac{2\xi}{p}} = \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} + \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} = \frac{\cos \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin \frac{\tau}{2}}{\cos \frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\sin \tau},$$

d. h.

$$\frac{1}{\sin \tau} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\xi}{p}} + e^{-\frac{2\xi}{p}} \right).$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung $\eta = \frac{p}{2 \sin \tau}$ ein, so ergibt sich

$$\eta = \frac{p}{4} \left(e^{\frac{2\xi}{p}} + e^{-\frac{2\xi}{p}} \right).$$

Das ist aber die Gleichung einer Kettenlinie mit $a = \frac{L}{2}$. Diese Gleichung gilt nun bezüglich jeder beliebigen Tangente der Parabel, also bezüglich eines X, Y -Systems, bei dem die X -Achse als Tangente von der Parabel abrollt — oder umgekehrt: wenn die Parabel von der festen X -Achse abrollt. Wir haben demnach das Ergebnis:

Die Kettenlinie ist die Rollkurve des Brennpunktes einer Parabel, die auf einer Geraden rollt.

F. Die Kettenlinie als Form einer zwischen zwei Punkten hängenden Kette

Habe ein hängendes Seil (Kette) von der Länge L das Gewicht G , so hat die Bogeneinheit das Gewicht $\frac{G}{L} = \varepsilon$, demnach das Bogenelement

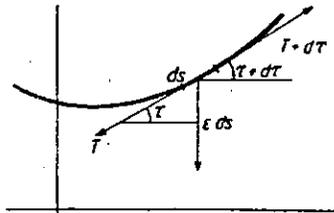


Abb. 213

das Gewicht εds . Unter dem Einfluß der Erdanziehung ist natürlich die Seilspannung nach oben hin stärker. Ist das Bogenelement ds nun im Gleichgewicht, so müssen die beiden an seinen Enden wirkenden Spannungen T und $T + dT$ sowie sein Gewicht εds (Abb. 213) sich gegenseitig aufheben. Es muß also die geometrische Summe sowohl ihrer Horizontal-

projektionen als auch ihrer Vertikalprojektionen gleich Null sein. Auf der Horizontalen hat εds als lotrecht wirkend keine Komponente. Es bleiben also nur die Komponenten der beiden anderen Kräfte übrig:

$$T \cos \tau = (T + dT) \cos (\tau + d\tau)$$

oder

$$(T + d\tau) \cos (\tau + d\tau) - T \cos \tau = 0,$$

$$d(T \cos \tau) = 0.$$

$$(I) \quad T \cos \tau = \text{const} = H.$$

Für $\tau = 0$ ist $H = T$, also stellt H die Kettenspannung im tiefsten Punkt dar.

Vertikalkomponenten:

$$T \sin \tau + \varepsilon ds = (T + dT) \sin (\tau + d\tau),$$

$$(T + d\tau) \sin (\tau + d\tau) - T \sin \tau = \varepsilon ds,$$

$$d(T \sin \tau) = \varepsilon ds.$$

Integriert:

$$(II) \quad T \sin \tau = \varepsilon \cdot s.$$

Aus (I) $T = \frac{H}{\cos \tau}$ in (II) eingesetzt:

$$H \operatorname{tg} \tau = \varepsilon \cdot s,$$

$$s = \frac{H}{\varepsilon} \cdot \operatorname{tg} \tau,$$

$$s = \frac{HL}{G} \cdot y' = \text{const.} \cdot y'.$$

Vergleicht man diese, durch Betrachtungen der Mechanik gefundene Gleichung der Kurve der hängenden Kette mit der oben erhaltenen Beziehung für den Bogen s der mathematisch definierten Kurve $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, so erkennt man die Übereinstimmung.

27. Die Quadratrix

Die Quadratrix wurde von Dinostratus (4. Jahrh. v. Chr.) zur Quadratur des Kreises verwandt.

A. Erzeugungsweisen

1. Man zeichne einen Kreis mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmesser COA und BOD und lasse nun gleichzeitig von O und von A ausgehend zwei bewegliche Punkte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten, den einen auf der Geraden OB , den anderen auf dem Kreisbogen AB , so sich bewegen, daß sie zu gleicher Zeit in B ankommen (Abb. 214). Sind dann L und M zwei Lagen, in denen sich die beiden Punkte zu derselben Zeit befinden, so ist der Ort der Schnittpunkte von OM mit der durch L zu OA gezogenen Parallelen die Quadratrix.

Daraus ergibt sich die Kurvengleichung in doppelter Form (Kreisradius = 1)

$$\widehat{AM} : \widehat{AB} = \overline{OL} : \overline{OB},$$

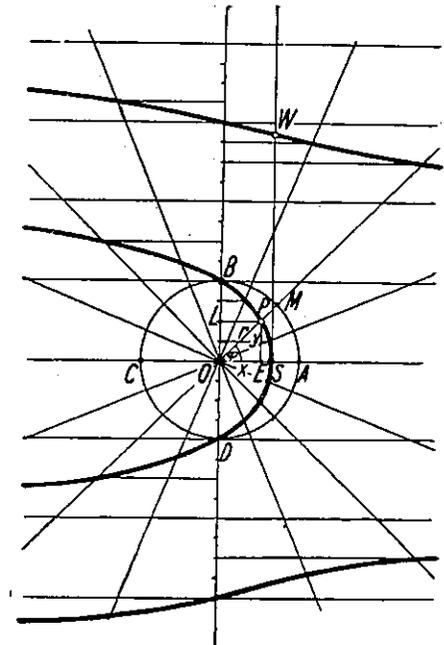


Abb. 214

$$\frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{y}{1},$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot y,$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot y \right),$$

$$\boxed{y = x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot y \right)}$$

$$\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{r \sin \varphi}{1},$$

$$\boxed{r = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}}$$

Schon aus der Erzeugungweise folgt, daß die Geraden $y = \pm 2$ Asymptoten der Kurve sind — für ein einmaliges Durchlaufen des Kreises. Läßt man ein unbegrenztes Umkreisen zu, so setzen sich an den inneren Kurvenzweig nach oben und unten noch beliebig viele Zweige der gezeichneten Art an, für die die Geraden $y = \pm 2n$ Asymptoten sind. Das bestätigen auch die beiden Kurvengleichungen, die in der Form $x = \frac{y}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot y \right)}$ für $y = \pm 2n$ $x = \infty$ und polar für

$\varphi = n\pi$ $r = \infty$ ergeben. Für $\varphi = 0$ ist $r = \frac{2}{\pi}$, da $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1$ ist.

Damit ist der Scheitel S festgelegt. Es ist also $OS = \frac{2}{\pi}$.

Die jenseits $y = \pm 2$ liegenden Äste der Kurve besitzen offenbar je einen *Wendepunkt*. Um diese Frage zu klären, bilden wir die 1. und 2. Ableitung von y . Differentiierung der Gleichung

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} y \text{ ergibt}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{\pi}{2} y'$$

$$y' = \frac{y}{x - \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)}$$

$$y'' = \frac{\left[x - \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2) \right] y' - y \left[1 - \frac{\pi}{2}(2x + 2yy') \right]}{\left[x - \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2) \right]^2}$$

Setze ich $y' = \frac{y}{x - \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)}$ ein, so folgt, indem man den Zähler des Bruches gleich 0 setzt:

$$y - y \left[1 - \frac{\pi x}{x - \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)} \right] = 0.$$

Scheiden wir $y = 0$ aus, so führt die Auflösung dieser Gleichung schließlich zu der Form

$$(\pi x - 2) \left[\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} y \right) + 1 \right] = 0 \text{ (nachdem man noch } x = \frac{y}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} y \right)} \text{ gesetzt hat).}$$

Deise Gleichung kann nur durch die reelle Lösung $\pi x - 2 = 0$, $x = \frac{2}{\pi}$ befriedigt werden.

Demnach sind alle senkrecht zur x -Achse über dem Scheitel des inneren Kurvenzweiges liegenden Punkte der anderen Äste Wendepunkte. Um die zugehörigen Ordinaten zu erhalten, setzen wir $x = \frac{y}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} y \right)}$

ein und finden die Bestimmungsgleichung $\frac{\pi}{2} y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot y \right)$. Wir lösen diese Gleichung graphisch durch den Schnitt der Linien $u = \frac{\pi}{2} y$ und $u = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot y \right)$.

$u = \frac{\pi}{2} \cdot y$		$u = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot y \right)$	
y	u	y	u
0	0	0	0
1	$\frac{\pi}{2} = 1,6$	$\frac{1}{2}$	1
6	$3\pi = 9,4$	1	∞
		$\frac{3}{2}$	-1
		2	0
		\vdots	\vdots

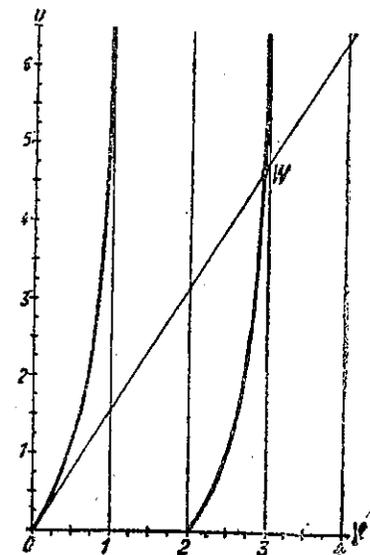


Abb. 215 zeigt das Kurvenbild für den 1. Quadranten. Man liest als ersten Wert $y \approx 2,8$ ab (für Punkt W).

Abb. 215

2. Nach Pappus kann unsere Kurve räumlich folgendermaßen erzeugt werden:

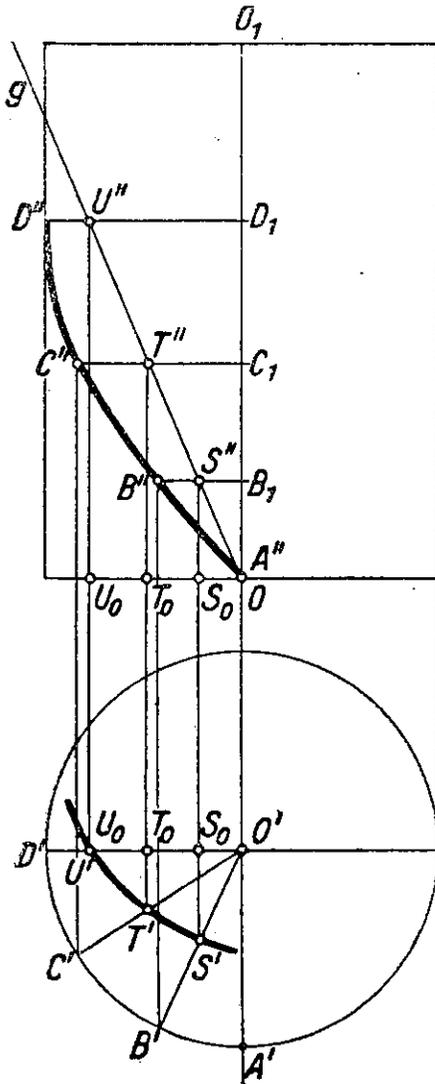


Abb. 216

Schneidet man eine flachgängige Schraube mit einer durch eine Erzeugende gelegten Ebene und projiziert die Schnittkurve auf die Basisebene, so erhält man eine Quadratrix.

Zum Begriff der flachgängigen Schraube s. S. 228. In Abb. 216 sei OO_1 der Aufriß der Schraubenschnittkurve, A, B, C, D seien Punkte der Schraubenschnittkurve. Die zugehörigen haben dann die Grundrisse $O'A', O'B', O'C'$ und $O'D'$ und die Aufrisse $OA'', B_1B'', C_1C'', D_1D''$. Die Strecken OB_1, OC_1, OD_1 sind nach dem Begriff der Schraubenschnittkurve zu den Winkeln $A'O'B', A'O'C', A'O'D'$ proportional. Die schneidende Ebene denken wir uns, durch OA gehend, senkrecht zur Aufrißebene, so daß sie im Aufriß durch eine Gerade g dargestellt wird.

Wir konstruieren den Schnitt der Ebene mit der Schraubenschnittkurve, indem wir ihre Schnittpunkte mit den einzelnen Erzeugenden bestimmen: S, T, U .

Nun ist

$$OS_0 : OT_0 : OU_0 = OB_1 : OC_1 : OD_1 \\ = \sphericalangle A'O'B' : \sphericalangle A'O'C' : \sphericalangle A'O'D', \\ \text{d. h. nach der 1. Erzeugungsweise liegen die Punkte } S', T', U' \\ \text{auf einer Quadratrix, deren Achse } O'A' \text{ ist.}$$

B. Tangentenkonstruktion

Die Tatsache, daß $OS = \frac{2}{\pi}$ ist, findet hierbei folgendermaßen Verwendung.

Wie wir wissen, ist

$$y' = \frac{y}{x - \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)}.$$

Demnach lautet die Tangentengleichung für einen Kurvenpunkt $x_1; y_1$:

$$y - y_1 = (x - x_1) \frac{y_1}{x_1 - \frac{\pi}{2}(x_1^2 + y_1^2)}.$$

Setzt man hierin, um den Schnittpunkt mit der x -Achse zu erhalten, $y = 0$, so ergibt sich:

$$x_T = \frac{\pi}{2}(x_1^2 + y_1^2),$$

$$OT = \frac{\pi}{2} \cdot OP^2 \text{ oder, da } OS = \frac{2}{\pi}:$$

$$OP^2 = OS \cdot OT.$$

Hiernach läßt sich OT leicht konstruieren: Schlage um O (Abb. 217) mit OP den Kreis, der das Lot, das man auf der x -Achse in S errichtet, in R schneidet, zeichne auf OR in R das Lot, das die x -Achse in T schneidet, und ziehe PT als Tangente.

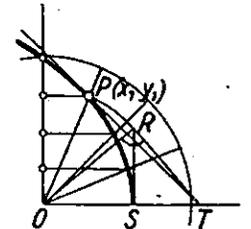


Abb. 217

C. Verwendung zur Kreisquadratur und Winkelteilung

Auf dieser eben benutzten Beziehung $OS = \frac{2}{\pi}$ beruht auch die Verwendung der Kurve zur Rektifikation und Quadratur des Kreises.

Errichtet man in S das Lot bis zum Schnitt Q mit dem Einheitskreis und zieht darnach OP , so ist (Abb. 218)

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OS}, \quad OP = \frac{1 \cdot 1}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem Strahlensatz könnte dann zu einem beliebigen Kreisradius ρ der halbe Umfang $OQ_1 = \rho \cdot \frac{\pi}{2}$ konstruiert werden. Daß mit dieser Rektifikation $\rho \cdot \frac{\pi}{2}$ auch das Rechteck $\rho^2\pi = \left(\rho \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2\rho$ gefunden ist (Quadratur), ist selbstverständlich.

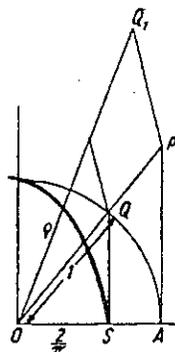


Abb. 218

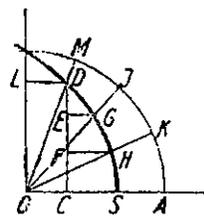


Abb. 219

Verwendung zur Dreiteilung des Winkels (Abb. 219). Da infolge der gleichförmigen Bewegung der Bogen AM in seinen Teilpunkten proportional ist zu OL bzw. CD , ergibt sich die beliebige Teilung eines Winkels MOA einfach in der Weise, daß man z. B. DC in E und F drittelt und dann durch $EG \parallel FH \parallel OA$ die entsprechenden Punkte der Quadratrix sucht. Zieht man dann durch diese Punkte die Radien OJ und OK , so ist Bogen $AK = \text{Bogen } KJ = \text{Bogen } JM$.

ANHANG I

1. *Tangentenkonstruktionen nach der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes.* Die Theorie des augenblicklichen Drehpunktes, wie sie vor allem von Roberval und Torricelli zur Bestimmung der Kurventangenten ausgebildet wurde, ist in der einfachen Form, in der wir sie gebrauchen, anwendbar bei allen Kurven, die durch Bewegung eines starren Systems erzeugt werden können. Man geht bei dieser kinematischen Betrachtung der Kurve von dem Gedanken aus, daß die Richtung der Tangente in einem bestimmten Kurvenpunkt übereinstimmt mit der Bewegungsrichtung, die der betr. Punkt als Punkt des bewegten Systems in dem betr. Augenblick hat. Diese Momentanbewegung des Systems ist aber eine Drehbewegung um einen bestimmten Punkt, den augenblicklichen Drehpunkt. Hat man diesen gefunden, so stellt seine Verbindung mit dem Kurvenpunkt den Radius des Kreises dar, auf dem sich der Kurvenpunkt gerade bewegt, sie ist also Kurvennormale und die Senkrechte zu ihr durch den Kurvenpunkt die gesuchte Tangente. Kennt man von zwei anderen Punkten des Systems die Bewegungsrichtungen in dem betr. Augenblick, so ergeben die beiden Lote, die man auf diesen bekannten Bewegungsrichtungen errichtet, den Drehpunkt.

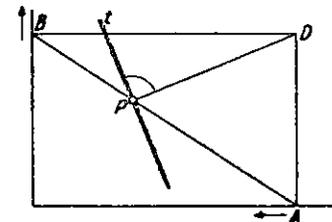


Abb. 220

Das Beispiel der *Ellipse* wird die Methode am besten erläutern. Denke ich mir die Ellipse erzeugt durch einen Punkt P eines Stabes AB , der mit seinen Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleitet, so haben die beiden Endpunkte im dargestellten Augenblick (Abb. 220) die durch die beiden Pfeile markierten Bewegungsrichtungen. A sowohl wie B und damit die ganze Strecke AB drehen sich in diesem Augenblick um einen Punkt D , den man erhält, wenn man auf den augenblicklichen Bewegungsrichtungen von A und B , d. h. auf den Schenkeln des rechten Winkels, die Lote errichtet. Demnach ist DP Kurvennormale und das Lot auf DP in P die gesuchte Kurventangente t .

2. *Definition der Hüllkurven.* Sei $F(x, y, a)$ eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, a , so daß $F(x, y, a) = 0$ für jeden bestimmten Wert des Parameters a die Gleichung einer Kurve bedeutet. $F(x, y, a) = 0$ stellt mir dann für ein veränderliches a eine Kurvenschar dar. Wird

nun, nachdem a einen bestimmten Wert erhalten hat, dem Parameter der neue Wert $a + \Delta a$ erteilt, so erhält man eine zweite Kurve mit der Gleichung $F(x, y, a + \Delta a) = 0$. Die Koordinaten derjenigen Punkte, die beiden Kurven angehören, befriedigen auch die Gleichung

$$\frac{F(x, y, a + \Delta a) - F(x, y, a)}{\Delta a} = 0.$$

Für $\lim \Delta a = 0$ geht diese Gleichung über in den partiellen Differentialquotienten nach a :

$$\frac{\delta F(x, y, a)}{\delta a} = 0.$$

Man sagt nun, die durch $F(x, y, a) = 0$ dargestellte Kurvenschar besitze eine Hüllkurve, wenn die Elimination von a aus den Gleichungen $F(x, y, a) = 0$ und $\frac{\delta F(x, y, a)}{\delta a} = 0$ wieder die Gleichung einer Kurve

$$f(x, y) = 0$$

liefert, die mir dann also die Gleichung der Hüllkurve zu jener Kurvenschar darstellt. Die Hüllkurve ist demnach der geometrische Ort derjenigen Punkte, die je zwei benachbarte Kurven der Schar gemein haben, wenn sie unendlich nah zusammenrücken.

ANHANG II

Übungsstoff: Aufgaben. Lehrsätze. Neue Kurven.

1. Gegeben ist ein Kreis mit einem festen Umfangspunkt O . Die Tangente in einem beweglichen Kreispunkt P schneidet die in O auf OP errichtete Senkrechte in Q . Welches ist der Ort für Q ? (*Zissoide*)

2. Welche Kurve beschreibt der Umkreismittelpunkt des Seitendreiecks einer geraden Pyramide von gegebener quadratischer Grundfläche, wenn die Höhe der Pyramide verändert wird? (*Zissoide*)

3. Den Ort des Höhenschnittpunktes aller gleichschenkligen Dreiecke mit zwei festen Ecken zu ermitteln. (*Strophoide*)

4. Ein gerader Kreiszyylinder wird von einem Ebenenbüschel geschnitten, dessen Träger den Zylindermantel berührt und senkrecht zur Achse des Zylinders verläuft. Bestimme den Ort der Brennpunkte der entstehenden Ellipsen. (*Strophoide*)

5. In die Schleife der *Strophoide* seien gleichschenklige Dreiecke mit der Spitze im Doppelpunkt der Kurve gezeichnet. Welches unter diesen beschreibt bei der Drehung um die Achse den größten Kegel?

6. Lehrsatz: Die Scheitel aller Hyperbeln mit gemeinsamer Asymptote und gemeinsamem Brennpunkt F_1 liegen auf einer *Strophoide*, deren Asymptote der Ort des zweiten Brennpunktes ist.

7. Legt man durch den Scheitel O eines *Kartesischen Blattes* einen beliebigen Strahl, so schneidet dieser die Kurve außer in O noch in zwei Punkten P_1 und P_2 . Welches ist bei veränderlichem Strahl der geometrische Ort des vierten zu O konjugierten harmonischen Punktes O' ? (*Ellipse*)

8. Der auf der positiven Seite der x -Achse liegenden *Lemniskate* $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ sind Rechtecke eingezeichnet, deren Seiten die Richtungen der Achsen haben. Welches unter diesen Rechtecken beschreibt bei Umdrehung der Figur um die y -Achse den größten Hohlzylinder?

9. In welchen Punkten wird eine *Lemniskate* von einer Hyperbel geschnitten, deren Brennpunkte mit den Scheiteln der Lemniskate und deren Scheitel mit den Brennpunkten der Lemniskate zusammenfallen?

10. Lehrsatz: Die Halbierungslinie des Winkels, den die Brennstrahlen eines *Lemniskatenpunktes* miteinander bilden, trifft die Kurvenachse in einem Punkt, dessen Abstand vom Kurvenmittelpunkt gleich dem von dem betreffenden Kurvenpunkt ist.

11. Wo liegen die Spitzen aller Dreiecke, die eine feste Strecke als Grundlinie besitzen und die Eigenschaft haben, daß die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze gleich der halben Differenz der von ihr auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte ist? (*Lemniskate*)

12. Lehrsatz: Das von einem Brennpunkt der *Lemniskate* auf einen beliebigen, vom Doppelpunkt ausgehenden Fahrstrahl gefällte Lot halbiert die zwischen Achse, Fahrstrahl und Kurve liegende Fläche.

13. Auf der Normalen einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittelpunkt O sind von einem Kurvenpunkt P aus die Strecken OP abgetragen. Wie heißt die Gleichung der Kurve, die von den Endpunkten der abgetragenen Strecken beschrieben wird? (*Cass. Kurve*)

14. Für alle *Konchoidenarten* gilt folgende Tangentenkonstruktion: Ist O der Pol der Konchoide, P ein Konchoidenpunkt, in dem die Tangente zu zeichnen ist, Q der entsprechende Punkt der erzeugenden Kurve C , so ziehe man OQP und die Kurventangente in Q . Darauf zeichne man parallel zu dieser Tangente $PP_0 = OQ$ und $P_0R = QP$, ziehe weiter durch R eine Parallele zu OP und falle auf diese Parallele das Lot von P_0 , das die Parallele in T trifft. Dann ist TP die gesuchte Konchoidentangente (s. *Timerding, Zeichnerische Geometrie, 19. Kap. Konchoiden*).

15. Eine Reihe von Extremaufgaben zur *Kardioide* enthält die bekannte Aufgabensammlung von *Martus*:

- Welches ist der äußerste linke Punkt der Kurve?
- Welches ist der höchste Punkt der Kurve?
- Welches ist das größte gleichschenklige Dreieck, das sich der Kurve einbeschreiben läßt, wenn seine Spitze mit der Kurvenspitze zusammenfällt?
- Welches ist das ebenso gelegene gleichschenklige Dreieck von größtem Umfang?
- Welcher der bei Drehung der Figur um die x -Achse entstehenden Kegel hat den größten Mantel?
- Welcher dieser Kegel hat den größten Rauminhalt?

16. Durch die Spitze einer *Kardioide* lege man einen beliebigen Strahl, der die Kurve in P_1 und P_2 trifft. Der vierte harmonische Punkt zu O bezüglich P_1 und P_2 sei O' . Welches ist der geometrische Ort für O' ? (*Zissoide*)

17. Man bestimme die Hüllkurve der Kreise, die über den einzelnen Fahrstrahlen einer *Kardioide* als Durchmesser beschrieben werden können.

18. Zur *Rosette*: Die Rosette gehört zu der großen Klasse der Rosettenkurven, die durch die Polargleichung $r = a \sin \mu \varphi$ oder auch $r = a \cos \mu \varphi$ dargestellt werden, worin μ eine positive Zahl bedeutet. Es sei im besonderen hingewiesen auf das *gleichseitige Dreiblatt*, (dreischleifige Hypozykloide), das sich nach seiner Polargleichung $r = 4b \cos 3\varphi$ leicht zeichnen läßt. Wie die Rosette kann auch diese Kurve als Hypotrochoide erzeugt werden, wenn man $m = 2$ und $d = 2b$ setzt. Ihre Gleichungen lauten dann

$$y = 2b(\sin t - \sin 2t)$$

$$x = 2b(\cos t + \cos 2t).$$

Mit $r^2 = x^2 + y^2$ läßt sich hieraus die weitere Gleichungsform $r = 4b \cos \frac{3t}{2}$ leicht gewinnen, die sich andererseits vermöge der Beziehung $t + \varphi = \frac{3t}{2}$ ohne weiteres in die erstgenannte Polargleichung überführen läßt. Endlich sei erwähnt, daß sich das gleichseitige Dreiblatt als Fußpunktkurve der Steinerschen Kurve ergibt, wenn man vom Mittelpunkt des Inkreises auf die Tangenten der Steinerschen Kurve die Lote fällt.

19. Zur *Steinerschen Kurve*: Aus der Steinerschen Kurve lassen sich mehrere eigenartige Kurven als Fußpunktkurven ableiten, wenn man von einem beliebigen Punkt einer Spitzentangente die Lote auf die Tangenten der Steinerschen Kurve fällt. Nimmt man als diesen Punkt die Mitte eines Kurvenzweiges (A), so erhält man als Fußpunktkurve das *gerade Zweiblatt*. Der auf der Spitzentangente liegende Mittelpunkt des Inkreises liefert das unter Nr. 18 erwähnte *gleichseitige Dreiblatt*, und der Schnittpunkt der Spitzentangente mit dem Inkreis (B) das *gerade Dreiblatt*. Die Gleichung des geraden Zweiblattes für A als Pol und die Spitzentangente als Achse lautet $r = 2b \sin \varphi \sin 2\varphi$, die des geraden Dreiblattes für B als Pol $r = -2b \cos \varphi \cos 2\varphi$.

20. In welchen Punkten einer *Epi- oder Hypozykloide* stehen die Verbindungen mit den Mittelpunkten des festen und des Rollkreises aufeinander senkrecht?

21. Lehrsatz: Eine Schar paralleler Tangenten berührt eine *Archimedische Spirale* in Punkten einer *Kappa-Kurve*.

SCHLAGWÖRTER-VERZEICHNIS

Anallagmatische Kurven:

Cassinische Kurven 100
Kartesische Ovale 145
Logarithmische Spirale 233
Pascalsche Schnecke 135
Strophoide 28
Trisektrix 37

Fußpunktkurven:

Archimedische Spirale 226
Kardioide 108
Lemniskate 80
Pascalsche Schnecke 126
Rosette 164
Strophoide 24
Trisektrix 35
Zissoide 11

Gegenkurven:

Begriff der Gegenkurve 26
Lemniskate 82
Strophoide 26

Hüllkurven:

Definition der Hüllkurven: 247
Astroide 162, 166, 169
Epi- und Hypozykloiden 207
Zweispitzige Epizykloide 213, 214
Kardioide 110, 112, 114, 115
Kartesische Ovale 153
Lemniskate 81
Pascalsche Schnecke 132, 137
Steinersche Kurve 180, 181, 183
Strophoide 29
Trisektrix 38
Zissoide 11

Integralrechnung in Anwendung:

a) Komplanation:

Astroide 174
Kreisevolvente 222
Zykloide 194

b) Kubatur:

Astroide 173
Doppeleilinie 188
Kettenlinie 237
Versiera 67
Zykloide 194

c) Quadratur:

Archimedische Spirale 229
Astroide 173
Doppeleilinie 187
Epi- und Hypozykloiden 215
Kappakurve 74
Kardioide 123
Kartesisches Blatt 48
Kettenlinie 237
Kreisevolvente 221
Lemniskate 88
Logarithmische Spirale 233
Pascalsche Schnecke 140
Rosette 160
Steinersche Kurve 183
Strophoide 30
Trisektrix 42
Versiera 67
Zissoide 16
Zykloide 193

d) Rektifikation:

Astroide 173
Epi- und Hypozykloiden 214
Kardioide 124
Kettenlinie 236
Kreisevolvente 221
Logarithmische Spirale 233
Steinersche Kurve 183
Zykloide 193

e) Schwerpunktsbestimmung:

Astroide 175
Versiera 68
Zykloide 194, 195

Inverse Kurven:

Kardioide 109
Lemniskate 80
Logarithmische Spirale 233
Pascalsche Schnecke 129, 135
Strophoide 25
Trisektrix 37
Zissoide 12

Kinematisch erzeugte Kurven:

a) Rollkurven

Archimedische Spirale 226
Astroide 161
Epi- und Hypozykloiden 203
Kardioide 108

Kettenlinie 238
Kreisevolvente 217
Logarithmische Spirale 233
Pascalsche Schnecke 126
Rosette 156
Steinersche Kurve 175
Zissoide 11
Zykloide 189

b) Durch Drehung zweier Strahlen:

Pascalsche Schnecke 132
Rosette 158
Strophoide 19
Trisektrix 32

c) Durch Bewegung eines starren Winkels (Dreiecks):

Archimedische Spirale 226
Kappakurve 71, 72
Kartesische Ovale 146
Pascalsche Schnecke 131, 134
Strophoide 23, 24
Trisektrix 34, 35
Zissoide 10

d) Durch ein Gelenkparallelogramm:

Astroide 162
Epi- und Hypozykloiden 210
Kardioide 110
Pascalsche Schnecke 127
Rosette 158
Steinersche Kurve 182

e) Durch zirkelartige Mechanismen:

Konchoide 105
Lemniskate 79
Pascalsche Schnecke 139
Zissoide 9

Körperschnitte:

Cassinische Kurven 92
Kartesische Ovale 143
Kreisevolvente 219, 228
Lemniskate 82, 84
Quadratrix 244
Zykloide 201

Konchoiden:

Begriff der Konchoiden 102
Archimedische Spirale 226
Doppelleilinie 185
Kardioide 107
Konchoide des Nikomedes 102
Pascalsche Schnecke 125

Tangentenkonstruktionen nach der Methode des augenblicklichen Drehpunktes:

Begriff 247
Astroide 169
Doppelleilinie 187
Epi- und Hypozykloiden 205
Kappakurve 72
Kardioide 117
allgemeine Konchoide 102
Konchoide des Nikomedes 105
Kreisevolvente 221
Lemniskate 87
Pascalsche Schnecke 139
Rosette 159
Steinersche Kurve 176
Strophoide 27
Trisektrix 40
Zissoide 13
Zykloide 191

Verwendung bei den Unlösbaeren Problemen:

a) Dreiteilung des Winkels:

Archimedische Spirale 229
Konchoide des Nikomedes 107
Pascalsche Schnecke 139
Quadratrix 246
Trisektrix 44

b) Quadratur des Kreises:

Quadratrix 245

c) Rektifikation des Kreises:

Archimedische Spirale 229
Quadratrix 245

d) Verdoppelung des Würfels:

Doppelleilinie 188
Konchoide des Nikomedes 106
Zissoide 17

Verzeichnis der behandelten Kurven:

Archimedische Spirale 225
Astroide 160
Cassinische Kurven 89
Doppelleilinie 184
Dreispitzige Hypozykloide 175
Epizykloiden 203
Hypozykloiden 203
Kappakurve 70
Kardioide 107

Kartesisches Blatt 44
Kartesische Ovale 140
Kettenlinie 235
Konchoide 102
Kreisevolvente 217
Lemniskate 77
Logarithmische Spirale 230
Pascalsche Schnecke 125
Quadratrix 241

Rosette 155
Serpentine 60
Steinersche Kurve 175
Strophoide 18
Trisektrix 31
Versiera 64
Zissoide 7
Zweispitzige Epizykloide 213
Zykloide 189