

AUS DEM SEMINAR
AUSGEWÄHLTE HÖHERE KURVEN
– WS 2016/17

BEI PROF.DR. DUCO VAN STRATEN

**Die Cassinischen Kurven und
insbesondere die Lemniskate von
Bernoulli**

von Marwin Wirtz

1 Cassinische Kurven

Betrachten wir zunächst einmal eine der vielleicht bekanntesten Kurven, die Ellipse.

Sind zwei Brennpunkte F_1 und F_2 gegeben, so gleicht die Summe der Abstände eines Punktes auf der Kurve zu diesen einem frei wählbaren Parameter. Aber egal wie man diesen wählt, es entstehen immer Ovale.

Nun kann man allerdings auch anstatt der Summe die Differenz betrachten, es entsteht eine Hyperbel. Auch sie ändert ihre Form nur geringfügig.

Im Gegensatz dazu steht eine den Meisten wahrscheinlich unbekannte Kurve, die Cassinische Kurve. Oder besser gesagt: die Cassinischen Kurven, denn es entstehen je nach Wahl des Parameters 4 deutlich voneinander zu unterscheidene Kurven.

Sie ergeben sich nicht als Summe oder Differenz, sondern als Produkt der beiden Abstände.

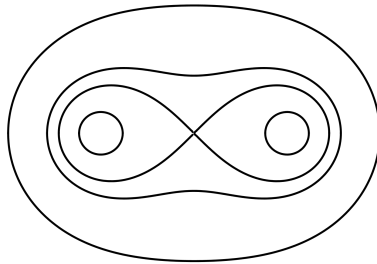


Figure 1: 4 Formen der Cassinischen Kurven

Die Cassinischen Kurven sind benannt nach dem Astronom und Mathematiker Giovanni Cassini(*1625, †1712). Zu jener Zeit gab es unterschiedliche Theorien, um die Bewegung der Erde um die Sonne(oder auch anders herum) zu beschreiben. Während die meisten von Kreis- oder Ellipsenbahnen(siehe Keplersche Gesetze) ausgingen, versuchte Cassini diese mit den Cassinischen Ovalen zu erklären.

Beobachtungen, wie dass die Sonne zu verschiedenen Jahreszeiten unterschiedlich groß wirkte, konnten mit damaligen Messtechniken jedoch nicht exakt genug beschrieben werden um in dieser Frage eine eindeutige Lösung zu bestimmen. So zweifelte Cassini nicht nur Keplers Theorie an, sondern auch die erst einige Jahre später veröffentlichte Gravitationstheorie Newtons.

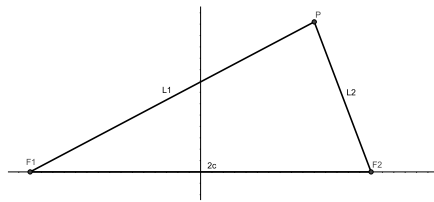


Figure 2: Punkt

Zur einfachen mathematischen Betrachtung legt man F_1 und F_2 in gleichem Abstand c zum Ursprung auf die x -Achse, aus der Definition ergibt sich dann, dass die Cassinischen Kurven x -/und y -achsensymmetrisch sind. Wir leiten 2 Koordinatengleichungen ab:

$$\overline{F_1P} \overline{F_2P} = \sqrt{y^2 + (x+c)^2} \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = a^2$$

Durch quadrieren und umstellen:

$$(I) (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$

Mit der PQ-Formel folgt (das negative Vorzeichen kann vernachlässigt werden):

$$(II) y^2 = \sqrt{4c^2x^2 + a^4} - (x^2 + c^2)$$

1.1 4 Formen der Cassinischen Kurven

Wir bestimmen nun den Definitionsbereich sowie die Achsenschnittpunkte. Aus (II) folgt, dass gelten muss:

$$(x^2 + c^2)^2 \leq 4c^2x^2 + a^4$$

$$x^4 - 2c^2x^2 + c^4 \leq a^4$$

$$\pm(x^2 - c^2) \leq a^2$$

Es folgt $\sqrt{c^2 - a^2} \leq |x| \leq \sqrt{c^2 + a^2}$. Setzt man in (II) $y = 0$ erhält man analog für die x -Achsenschnittpunkte: $x_{1,2} = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{c^2 + a^2}$

Die y -Achsenschnittpunkte: $y_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$. Damit können wir die Kurven erst einmal in 3 Formen unterteilen, der Unterschied zwischen Fall 3 und 4 wird anschließend erläutert

1. für $c > a$ entstehen 2 voneinander getrennte Formen, die tropfen- oder kreisförmig aussehen

2. für $c = a$ entsteht die sogenannte Lemniskate von Bernoulli auf die wir später genauer eingehen

3. für $\frac{a}{\sqrt{2}} < c < a$ entsteht eine geschlossene Kurve mit einer Einbuchtung

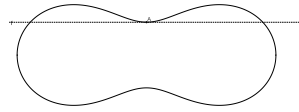


Figure 3: Cassinische Kurve mit Sattel

4. für $c \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ entstehen Ovale Formen, die

Wann nun entstehen Cassinische Kurven mit und wann ohne Sattel? Dazu betrachten wir die Lage der Extrema, bzw. schlicht deren Anzahl. Durch implizites Differenzieren von (I) folgt :

$$0 = 4x(x^2 + y^2 - c^2) + y'4y(x^2 + y^2 + c^2)$$

bzw. für $y' = 0$

$$x(x^2 + y^2 - c^2) = 0$$

Abgesehen von $x = 0$ führt dies zu einer einfachen Konstruktion der Extrema: Sie sind der Schnitt zwischen Kurve und Ursprungskreis mit Radius c .

Da die Kurven "breiter als hoch" sind, existiert dieser nicht mehr wenn der y-Achsenabschnitt höher als c liegt.

Für die ovale Form gilt also: $c \leq \sqrt{a^2 - c^2}$ bzw. $c \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$

($x^2 + y^2 = c^2$ in (I) ergibt $E \left\{ \pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \frac{a^2}{2c} \right\}$)

Die Wendestellen befinden sich übrigens alle auf einer um 90 Grad gedrehten Lemniskate mit der breite c .

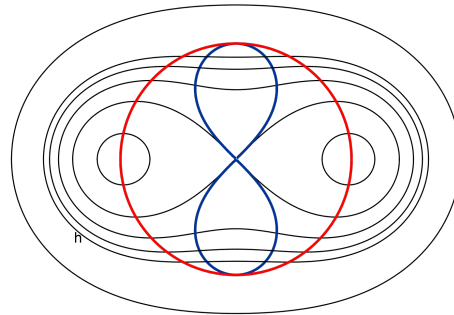


Figure 4: Extrema auf Kreis(rot), Wendestellen auf Lemniskate(blau)

1.2 Die Cassinischen Kurven als Torusschnitt

Die verschiedenen Formen können interessanterweise alle auch als spezieller Torusschnitt erzeugt werden.

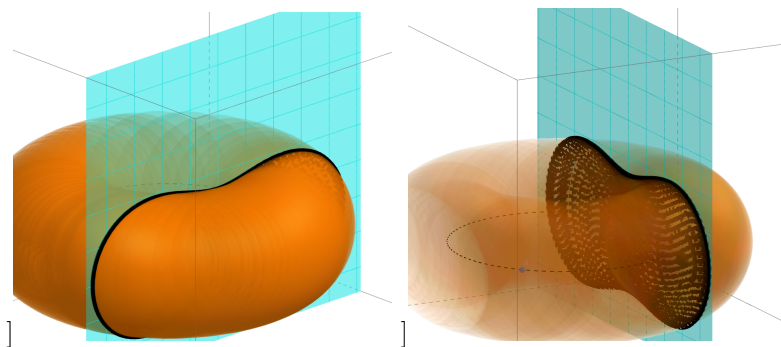


Figure 5: Torusschnitt

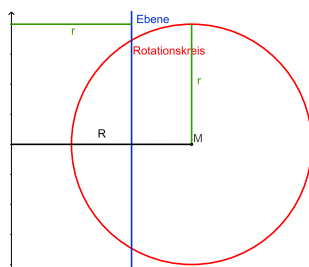


Figure 6: Torusschnitt

Wir betrachten den Torus, der durch die Rotation des Kreises mit Abstand R von der Rotation-Achse und Radius r entsteht. Für die Menge der Punkte auf seiner Oberfläche ergibt sich nach Pythagoras:

$$r^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2$$

Die Cassinischen Kurven entstehen nun als Schnitt mit einer Ebene die parallel zu y -Achse liegt und den Abstand r zu dieser hat, zur einfacheren Betrachtung nehmen wir die Ebene $y = r$. Wählen wir zudem $R = c$ und $r = \frac{a^2}{2c}$. Es ergibt sich als Schnittmenge:

$$\left(\frac{a^2}{2c}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + \left(\frac{a^2}{2c}\right)^2} - c\right)^2 + z^2$$

$$0 = x^2 - 2c\sqrt{x^2 + \frac{a^4}{4c^2}} + c^2 + z^2$$

$$z^2 = \sqrt{4c^2x^2 + a^4} - x^2 - c^2$$

Was der Gleichung einer Cassinischen Kurve in der x - z Ebene entspricht.

2 Die Lemniskate von Bernoulli

Wir wollen zunächst die Lemniskate von Bernoulli genauer betrachten, welche sich für den Fall $a = c$ aus den Cassinischen Kurven ergibt, weshalb schon einige Eigenschaften bekannt sind.

Bernoulli betrachtete diese Kurve ohne das Wissen, dass es sich um den Spezialfall der Cassinischen Kurven handelt genauer und benannte sie aufgrund ihrer Form Lemniskate (aus dem lateinischen lemniscus, das Band oder die Schleife). Der Name Lemniskate wird heute auch allgemein für 8-Förmige Kurven verwendet.

Über 100 Jahre später betrachtete Carl Friedrich Gauß die Lemniskate erneut im Hinblick auf ihre Bogenlänge. Der lemniskatische Sinus und Cosinus waren die ersten betrachteten heute elliptische Kurven genannte Kurven. Da er jedoch nichts zu dem Thema publizierte, wurden sie erst über 30 Jahre später nach den Ellipsen benannt.

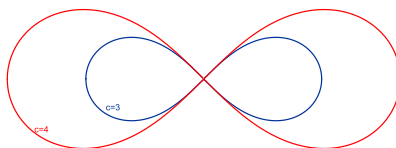


Figure 7: 2 Lemniskaten von Bernoulli

Als Koordinatengleichung der Lemniskate von Bernoulli folgt

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$$

in Polarkoordinaten:

$$r^2 = 2c^2 \cos(2\phi)$$

2.1 Erzeugung durch ein Gelenkviereck

Viele Lemniskaten lassen sich durch mechanische Konstruktionen erstellen. Wählt man bspw. die Seitenlängen eines Gelenkvierecks richtig, entsteht die Lemniskate von Bernoulli.

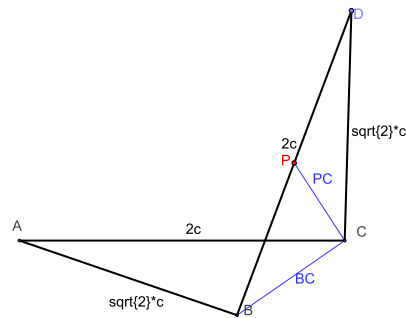


Figure 8: Gelenkviereck

Beschreibung:

Es liegen A und C auf den Brennpunkten, also mit Abstand $2c$. B mit Abstand $\sqrt{2}c$ zu A genauso wie D zu C. Auf dem Mittelpunkt der Verbindungsstrecke BD mit Länge $2c$ liegt der Punkt P, welcher einen Punkt auf der Lemniskate beschreibt.

Beweis Schritt 1

Betrachte zunächst $\triangle BCD$

Für die Seitenhalbierende eines Dreiecks gilt:

$$2PC^2 = CD^2 + BC^2 - \frac{BD^2}{2}$$

$$2PC^2 = 2c^2 + BC^2 - \frac{4c^2}{2}$$

$$(I) \quad 2PC^2 = BC^2$$

Analog ergibt sich für $\triangle ABD$: (II) $2AP^2 = AD^2$

Aus (I) und (II) : (III) $2PC \cdot AP = BC \cdot AD$

Schritt 2: Betrachte nun das Viereck ABCD: aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ folgt, dass es sich um ein symmetrisches Trapez handelt. (Bei ABDC handelt es sich übrigens um ein sogenanntes Antiparallelogramm.)

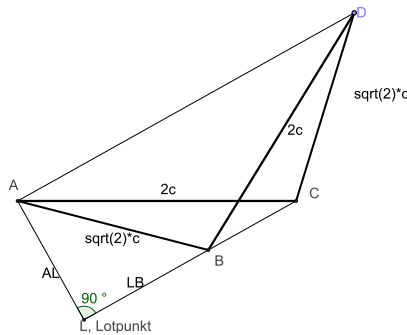


Figure 9: Gelenkviereck

Nach Pythagoras gilt für $\triangle ALB$:

$$AL^2 = AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2 = 2c^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2$$

sowie für $\triangle ALB$:

$$AL^2 = AC^2 - \left(\frac{AD}{2} + \frac{BC}{2}\right)^2 = 4c^2 - \left(\frac{AD + BC}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen ergibt $AD \cdot BD = 2c^2$ und in (III) :
 $PC \cdot AP = c^2$, also beschreibt P eine Lemniskate.

2.1.1 Erzeugung der Normalen durch den Momentanpol

Durch die vorige Konstruktion lässt sich mithilfe der Theorie des Momentanpols, auch Augenblicklicher Drehpunkt genannt, die Tangente ohne größeren Aufwand konstruieren.

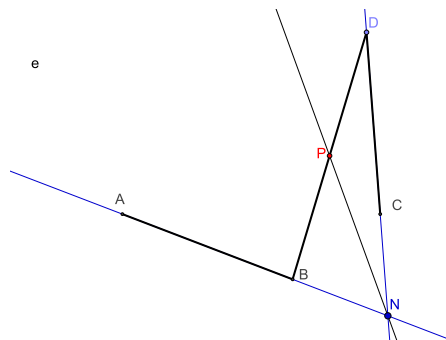


Figure 10: Gelenkviereck

Betrachtet man ein starres System wie die Stange BD, so kann man aus der Bewegungsrichtung von 2 Punkten, in diesem Fall B und D, auf die Bewegungsrichtung aller Punkte des Systems schließen. Dort wo sich die Normalen der beiden Bewegungsrichtungen schneiden, entsteht der Momentanpol N. Die

Normalen zur Bewegungsrichtung aller anderen Punkte des Systems ergeben sich nun als Gerade durch den jeweiligen Punkt und N, also ist PN die Normale.

2.1.2 Als Spezialfall des Wattgestänges

Von mechanischer Bedeutung sind hingegen leicht variierende Formen des Gelenkvierecks, genannt Wattgestänge oder Lemniskatenlenker.

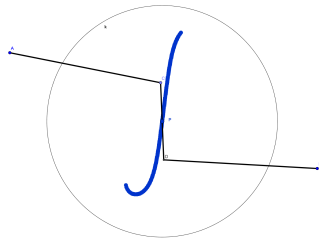


Figure 11: Gelenkviereck

Diese werden häufig dazu genutzt, um eine Kreisbewegung in eine annähernde geradlinige Bewegung zu transformieren. Bspw. können ähnlich wie im Bild Radachsen an solchen Konstruktionen (im Zusammenspiel mit einer Federung) befestigt werden, um Bewegungsfreiheit in der vertikalen aber nicht in der horizontalen zu ermöglichen.

2.2 Als Inversion der gleichseitigen Hyperbel

Ein Punkt P wird folgendermaßen am Kreis mit Mittelpunkt M und Radius R invertiert:

(I) P' liegt auf der Halbgeraden MP

(II) $MP \cdot MP' = R^2$

Speziell am Einheitskreis wird also ein Punkt $P(x, y)$ mit dem Abstand r zum Ursprung den Abstand $1/r$ projiziert. Es ergibt sich folgende Abbildungsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ \phi \end{pmatrix}$$

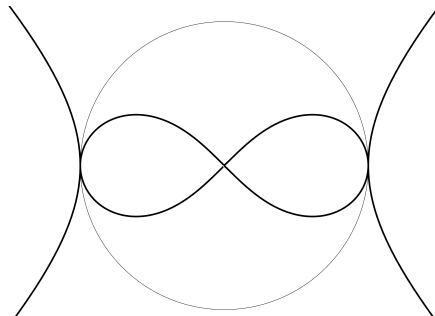


Figure 12: Inversion der gleichseitigen Hyperbel am Einheitskreis

Eine Hyperbel der Form $x^2 - y^2 = a^2$ bzw. in Polarkoordinaten

$$r^2(\sin(\phi)^2 - \cos(\phi)^2) = r^2 \cos(2\phi) = a^2$$

Wird demnach abgebildet auf

$$\cos(2\phi) = a^2 r^2$$

für $a = \frac{1}{\sqrt{2}c}$ also eine Lemniskate.

2.3 Fläche der Lemniskate

Nach der Sektorformel von Leibniz berechnen wir die Fläche im 1. Quadranten:

$$F = \frac{\int_0^{\pi/4} r^2 d\phi}{2} = \frac{\int_0^{\pi/4} 2c^2 \cos(2\phi) d\phi}{2} = \frac{c^2}{2}$$

Da die breite der großen Achse der Lemniskate $2\sqrt{2}c$ beträgt (siehe dazu x-Achsenschnittpunkte der Cassinischen Kurven) ergibt sich eine schöne Darstellung der gesamten Fläche:

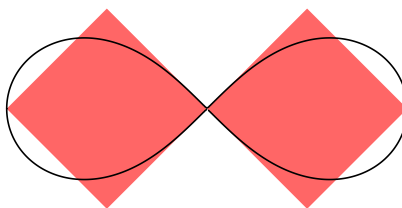


Figure 13: Fläche der Lemniskate gleicht der Fläche der roten Quadrate

3 Quellen

Als wichtigster Bezugspunkt galt das Buch "Ausgewählte höhere Kurven" von Hermann Schmidt

Weitere wichtige Inspiration oder detailliertere Berechnungen :

Zum astronomischen Hintergrund <http://cseligman.com/text/history/cassini.htm>

Genauere Kurvendiskussion: http://mathe-cd.de/DEMO-CD/5_Besonderes/54_Algebraische%20Kurven/54120%20Cassini%20Lemniskate.pdf.

<http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=1693&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.d>

Zum Torusschnittes <http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/cassini3.htm>