Vorlesungsverzeichnis

Mathematik

Grafik: Karsten Müller und Manuel Blickle

Mainz

Sommersemester 2021

Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks.

Schon in der Mittelschule lernt man mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges **Dreieck, Viereck und Sechseck** zu konstruieren. Spätestens in der Vorlesung **Algebra 1** erfährt man, dass das regelmäßige **Siebeneck** allerdings nicht konstruierbar ist, und man hört von der berühmten Konstruktion des **regelmäßigen 17-Ecks** des 18-jährigen Carl Friedrich Gauß. Aber wie führt man eine solche Konstruktion durch? Um gemächlich einzusteigen ist auf der umseitigen Grafik schon mal die Konstruktion des regelmäßigen **Fünfecks** abgebildet:

Um ein dem Einheitskreis (gelegen natürlich in der Gaußschen komplexen Zahlenebene) einbeschriebenes Fünfeck zu konstruieren, zeichnet man zunächst um den Punkt -1 einen Kreis mit Radius 1 um den Punkt $-\frac{1}{2}$ zu konstruieren (Stichwort: Mittelsenkrechte). Der Kreis mit Mittelpunkt $-\frac{1}{2}$ durch den Punkt i wird der Cayley Kreis zum quadratischen Polynom $x^2 + x - 1$ genannt. Die Nullstellen dieses Polynoms sind gerade die Schnittpunkte des Cayley Kreises mit der reellen Achse. Zeichnet man nun um den positiven Schnittpunkt $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ einen Kreis mit Radius 1, so schneidet dieser den Einheitskreis in der ersten Ecke des zu konstruierenden regelmäßigen Fünfecks.

Eigentlich einfach genug um es nie wieder zu vergessen!

P.S: Für die überzeugendste Erklärung dafür, dass diese Konstruktion tatsächlich ein regelmäßiges Fünfeck liefert (einzureichen postalisch bei Prof. Dr. Duco van Straten bis zum 1. Juni 2021) wird ein Buchpreis (van Straten) und eine Portion Schokolade 5-Eckig (Blickle) ausgelobt.

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Sommersemester 2021 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Februar 2021

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10		Modulformen und abelsche Varietäten II (Lehn) Algebra 2 – Kommutative und homologische Algebra (van Straten)		Computeralgebra (Hog-Angeloni) Numerik von Erhaltungsgleichungen (Öffner)	Modulformen und abelsche Varietäten II (Lehn) Algebra 2 – Kommutative und homologische Algebra (van Straten) Kryptographie (Malevich) - DIGITAL
10-12	Grundlagen der Numerik (Hanke-Bourgeois) Stochastik III – Markov-Prozesse (Hartung) – voraus. Digital auf MS Teams Analytische Zahlentheorie (Javanpeykar) – DIGITAL Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten (Kraus) Algebraische Topologie I (Rahn)	Stochastik I (Birkner) – DIGITAL Introduction to Algebraic *K*-Theory (Tamme)	Grundlagen der Numerik (Hanke-Bourgeois) Stochastik III – Markov-Prozesse (Hartung) – voraus. Digital auf MS Teams	Stochastik I (Birkner) – DIGITAL Ausgewählte Themen aus der algebraischen Geometire (Blickle) Analytische Zahlentheorie (Javanpeykar) – DIGITAL Algebraische Topologie I (Rahn)	Selected Topics in Scientific Computing (Werth) Introduction to Algebraic *K*-Theory (Tamme)
12-14	Elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation (Zuo)	Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten (Kraus)	Eichtheorie 2 (Kraus)	Eichtheorie 2 (Kraus) Mathematik der Finanzmärkte (Klenke)	
14-16	Funktionalanalysis I (Kostrykin) Modellierungspraktikum: Strömungsmechanik (Öffner)	Computeralgebra (Hog-Angeloni) Funktionalanalysis III (Kostrykin) Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen (Zuo)	Kryptographie (Malevich) - DIGITAL	Funktionalanalysis I (Kostrykin) Modellierungspraktikum: Strömungsmechanik (Öffner) Geschichte der Mathematik II (Sauer)	Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen (Zuo)
16-18	Geschichte der Mathematik II (Sauer)			Mathematical Biology of Cells and Viruses (Gürbüz) – DIGITAL Funktionalanalysis III (Kostrykin)	

<u>DIGITAL ohne Zeitfenster:</u>

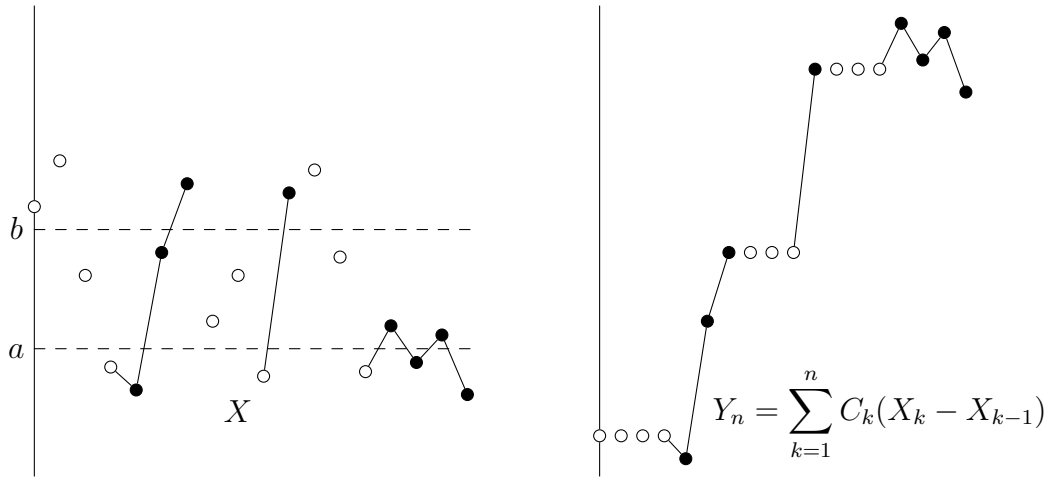
Ergänzungen zur Analysis II (Fröhlich), Variationsrechnung I (Fröhlich), Stabile Homotopietheory (Klaus) - https://www.mfo.de/scienti_c-program/online-o_erings/online-o_erings

Stochastik I

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

Termine: Di 10–12 und Do 10–12 (online)

Stochastik, d.h. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, als mathematische Disziplin beschäftigt sich mit der Modellierung und Untersuchung von zufälligen Phänomenen. Sie besitzt beeindruckende und erfolgreiche außermathematische Anwendungen (beispielsweise in der Physik, der Biologie, der Ökonomie) und hat zugleich interessante und tiefliegende Beziehungen zu anderen mathematischen Fachgebieten.



$$C_1 := \mathbf{1}_{\{X_0<a\}},\ C_k := \mathbf{1}_{\{C_{k-1}=1,\ X_{k-1}\le b\}} + \mathbf{1}_{\{C_{k-1}=0,\ X_{k-1}<a\}},\ k>1$$

Die Vorlesung *Stochastik I* richtet sich an Studenten der Mathematik, die bereits die *Einführung in die Stochastik* gehört haben. Hauptthema sind klassische Probleme und Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Vorlesung knüpft an den mehr intuitiven Zugang der Einführung an und setzt ihn in einen rigorosen mathematischen Kontext. Dazu werden zunächst die maßtheoretischen Grundlagen soweit entwickelt, wie sie für eine mathematische Behandlung der Stochastik erforderlich sind. Die Vorlesung bildet eine abgeschlossene Einheit; sie ist gleichwohl die Grundlage für die weiterführende Vorlesung *Stochastik II*, in der dann u.a. stochastische Prozesse in stetiger Zeit behandelt werden.

Themenstichpunkte: Maßräume, σ-Algebren, Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Lebesgue-Integration; klassische Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie (Gesetze der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz), charakteristische Funktionen, schwache Konvergenz, bedingter Erwartungswert, Martingale (in diskreter Zeit)

Literatur:

A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl., Springer, 2020.
D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge Univ. Press, 1995.
O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 2. ed, Springer, 2002.
W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Band 1 und 2, Wiley 1968 und 1971.
L. Breiman, *Probability*, Wiley, 1968.

Vorlesung: Ausgewählte Themen aus der algebraischen Geometrie

Dozent: Prof. Dr. Blickle

Termine: Donnerstags 10–12, 04-426

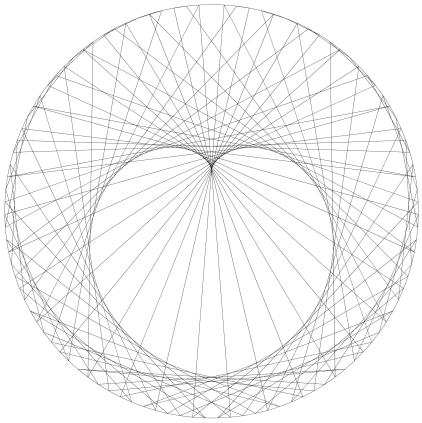


Bild: Multiplikation mit 35 im endlichem Körper $\mathbb{F}_{101}$.

Algebraische Geometrie über Körpern endlicher Charakteristik hat als wichtigstes Werkzeug den Frobeniusendomorphismus. Ich werde in diesem Kurs einige Anwendungen des Frobenius zur Singularitätentheorie, zur kommutativen Algebra und birationalen Geometrie besprechen. Auch werde ich auf die wichtige Technik der Reduktion auf endliche Charakteristik eingehen mithilfe derer Resultate über endlichen Körpern auch nach Charakteristik Null geliftet werden können.
Dieser Kurs ist für alle geeignet, die über eine Masterarbeit im Bereich algebraische Geometrie nachdenken, oder schon dabei sind eine solche zu schreiben. Oder eben für diejenigen, die Interesse am Thema haben und Grundkenntniss in algebraischer Geometrie und kommutativer Algebra (z.B. Algebraische Geometrie 1 und Algebra 2) vorweisen können. Die genauen Themen des Kurses können an das Niveau und Interesse der Teilnehmer angepasst werden.
Die genauen Modalitäten der Veranstaltung werden zu Begin des Semesters, wenn absehbar ist ob Präsenzlehre möglich sein wird, abgesprochen.

ERGÄNZUNGEN ZUR ANALYSIS II

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: digital

Situationsbedingt konnten in der Analysis II im WS 2020/21 nicht alle vorgesehenen Themen behandelt werden. In den "Ergänzungen zur Analysis II" soll deshalb das Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen nachgeholt und gleichzeitig ausgebaut werden.

Die Vorlesung umfasst folgende Themen:

- Beispielklassen gewöhnlicher Differentialgleichungen;
- lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten;
- Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertprobleme;
- Stabilität von Lösungen von Anfangswertproblemen;
- das Sturm-Liouville-Problem;
- Randwertprobleme.

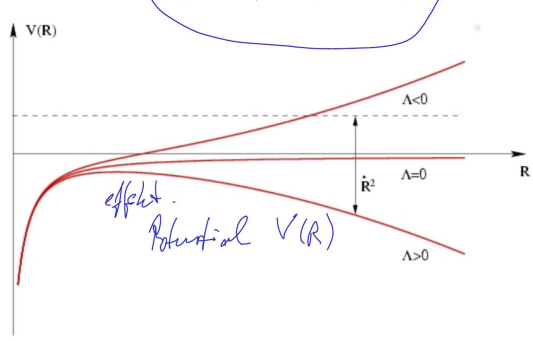
Voraussetzung zur Teilnahme sind die Analysis 1, 2.

Metrik: kontinuierlich, ideale Flüssigkeit

$$\dot{R}^2 - \frac{K_s}{R^2} - \frac{K_m}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2 = -k$$

mit $K_m \sim \rho_{mat} R^3 = \text{const}$, $K_s \sim \rho_{rad} R^4 = \text{const}$

$$\dot{R}^2 + V(R) = -k$$



Literatur:

R. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (2000)
F. Sauvigny: *Analysis* (2014)

VARIATIONSRECHNUNG I

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: digital

In dieser Vorlesung erlernen wir die Grundlagen der klassischen Variationsrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen. Genauer geht es um die Frage, unter welchen Bedingungen ein von gewissen Funktionen $y(x)$ abhängiges Funktional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

einen extremalen Wert annimmt. Beispiele sind das Problem der kürzesten Verbindung zweier Punkte, das Problem der Dido oder das Problem der Brachistochrone.

Die Vorlesung umfasst folgende Themen:

- Theorie der ersten Variation, insbesondere Variationsprobleme unter verschiedenen Randbedingungen, isoperimetrische Probleme, gebrochene Extremalen;
- Theorie der zweiten Variation, insbesondere Legendres Bedingung, Jacobis Theorie der konjugierten Punkte, Eigenwertprobleme;
- Theorie der Felder nach Weierstraß und Hilbert.

Voraussetzung zur Teilnahme sind die Analysis 1, 2, 3, insbesondere Grundlagen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, sowie die Lineare Algebra 1, 2.

Die Vorlesung soll in einem zweiten Teil im Wintersemester 2021 fortgesetzt werden mit ausführlichen Untersuchungen zu konkreten Beispielproblemen, u.a. (i) Coulombframes im Normalenbündel von Flächen höherer Kodimension, (ii) Minimalflächen, (iii) das Helfrichproblem zur Bestimmung der Form bioelastischer Membranen.

Didio Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Landkauf der Dido (M. Merian, 1630) aus Wikipedia: Dido (Mythologie)

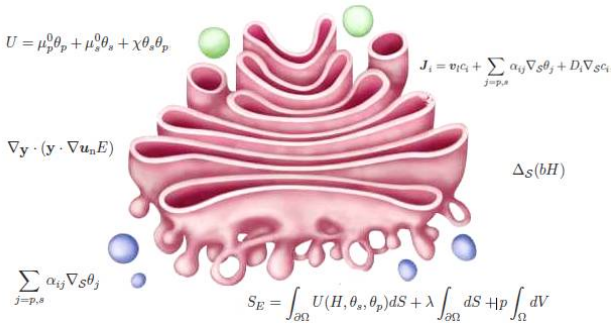
Literatur:

S.V. Fomin, I.M. Gelfand: *Calculus of Variations* (1963)
P. Funk: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik* (1970)
H. Kiehlhöfer: *Variationsrechnung* (2010)

Mathematical Biology of Cells and Viruses

Dozentin: Dr. Burcu Gürbüz

Termine: Do, 16-18 Uhr (Digital)



Die mathematische Modellierung und quantitative Analyse biologischer Phänomene hat ein zunehmendes Interesse an den Bereichen Biologie, Medizin, Chemie und Ingenieurwesen. Mathematische Biologen untersuchen die Identifizierung einheitlicher Rahmenbedingungen, die biologische Phänomene auf verschiedenen Komplexitätsstufen einführen. Einige der wesentlichen Beispiele für diese Anwendungen existieren in der Epidemiologie (z.B. SIR-Modelle). Es wurde in der gegenwärtigen COVID-19-Situation häufig verwendet, um die möglichen Szenarien in Bezug auf die grundlegende Reproduktionszahl zu erklären. Diese Anwendungen variieren von kleinen Populationen wie Viren und Bakterien bis zur Beschreibung von Zellen in Geweben in der Pflanzen- und Tierphysiologie. In dieser Ergänzungsvorlesung werden grundlegende Konzepte biologisch basierter dynamischer Systemmodelle vorgestellt. Populationsdynamik, interagierende Populationen, Mass Action Kinetik und Michaelis-Menten, biochemische Reaktionen einschließlich der zwischen Photosynthesis-Irradiance Relation und Modelle des Calvin-Zyklus werden berücksichtigt. Wir verwenden dynamische Systemwerkzeuge, um die Existenz und Eindeutigkeit, den stationären Zustand, die Stabilität und die Linearisierung zu diskutieren und eine qualitative Analyse der Evolutionsgleichungen zu erhalten.

Vorkenntnis: Analysis 1-2, Lineare Algebra und Differentialgleichungen.

Literatur:

L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer Science & Business Media, (2013).

L. J. S. Allen, *An introduction to mathematical biology*, Pearson, (2007).

N. Britton, *Essential mathematical biology*, Springer Science & Business Media, (2005).

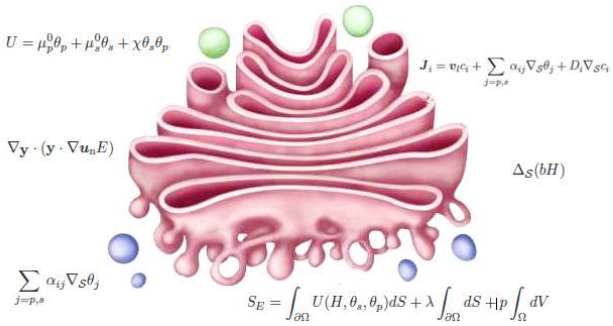
J.A. Walker, *Dynamical systems and evolution equations*, Plenum (1980).

P.C. Fife, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, Springer Science & Business Media, (2013).

Mathematical Biology of Cells and Viruses

Dozentin: Dr. Burcu Gürbüz

Termine: Do, 16-18 Uhr (Digital)



Mathematical modelling and quantitative analysis of biological phenomena are of an increasing interest in biology, medicine, chemistry and engineering fields. Mathematical biologists study identification of unified frameworks which introduce biological phenomena at different level of complexity. Some of the essential examples of these applications exist in epidemiology (such as SIR models). It has been frequently in use at the present COVID-19 situation in order to explain the potential scenarios with regard to the basic reproductive number. These applications varies from small populations such as viruses and bacteria to describing cells in tissues in plant and animal physiology. In this course, basic concepts of biological based dynamical system models are introduced. Population dynamics, interacting populations, mass action kinetics and Michaelis-Menten, biochemical reactions including the photosynthesis-irradiance relationship and models of the Calvin cycle are considered. We use dynamical systems tools to discuss the existence and uniqueness, steady states, stability, linearisation to obtain a qualitative analysis of evolution equations.

Vorkenntnis: Analysis 1-2, Linear Algebra and Differential Equations.

Literatur:

L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer Science & Business Media, (2013).

L. J. S. Allen, *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson, (2007).

N. Britton, *Essential mathematical biology*, Springer Science & Business Media, (2005).

J.A. Walker, *Dynamical systems and evolution equations*, Plenum (1980).

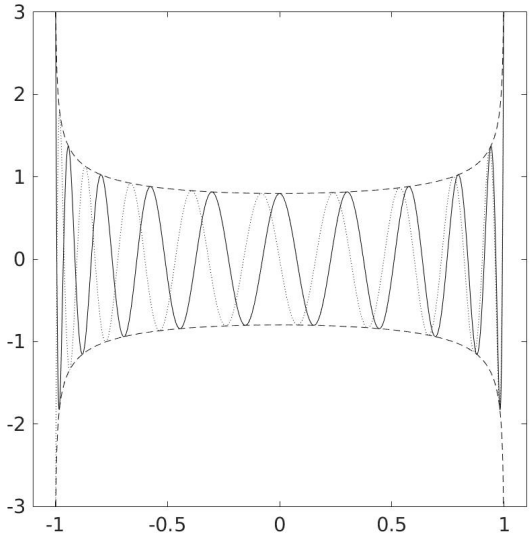
P.C. Fife, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, Springer Science & Business Media, (2013).

Grundlagen der Numerik

Dozent: Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois

Termine: Mo und Mi 10-12 Uhr

Das Gebiet der Numerik beschäftigt sich mit der Entwicklung effizienter Algorithmen zur quantitativen Berechnung "mathematischer Objekte", diskutiert deren Stabilität gegenüber Fehlerquellen (Rundefehler, Datenfehler, Approximationsfehler, etc.), und bestimmt Fehlerschranken für die berechneten Werte. Die betreffenden "mathematischen Objekte", die in der Vorlesung behandelt werden, beinhalten bestimmte (auch uneigentliche) Integrale, Funktionen (bzw. Funktionswerte) sowie die Lösungen linearer und auch nichtlinearer algebraischer Gleichungssysteme.
In darauf aufbauenden Vorlesungen werden später noch Algorithmen zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen behandelt.



"Legendre-Polynome"

Für aktuelle Informationen vor dem Hintergrund der Corona-Pandemie wird auf die Vorlesungs-Website

`www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/grundlagen-der-numerik-ss-2021`

verwiesen.

Literatur:

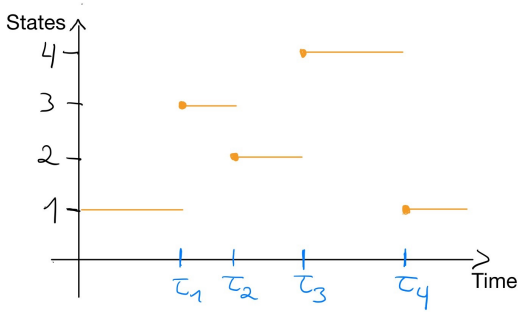
M. Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2006.
A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerische Mathematik*, Springer, Berlin, 2002.

Stochastik III - Markov-Prozesse

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Mo, Mi 10-12, voraussichtlich digital auf MS Teams

In dieser Vorlesung liegt der Schwerpunkt auf Markov-Prozessen in stetiger Zeit. Zunächst beschäftigen wir uns mit zeitstetigen Martingalen und Stoppzeiten. Anschließend definieren wie Markov-Prozesse in stetiger Zeit mit allgemeinem Zustandsraum. Dabei lernen wir die Zusammenhänge zwischen Halbgruppen, Generatoren und Resolventen kennen und beweisen den wichtigen Satz von Hille-Yosida. Anschließend lernen wir, wie Markov-Prozesse durch Martingale charakterisiert werden können und beschäftigen uns mit der Dualität von Markov-Prozessen. Nach einem Abstecher in die Theorie der stochastischen Integration wenden wir zum Abschluss die im ersten Teil der Vorlesung erlernte Theorie der Markov-Prozesse auf stochastische Differenzialgleichungen an.



Trajektorie eines Markov-Sprungprozesses (in stetiger Zeit)

Anmeldung: Erfolgt über Jogustine.

Näheres zur Durchführung: Es wird ein Skript geben. Voraussichtlich findet die Vorlesung über MS Teams (inklusive Aufzeichnung) statt. Es ist geplant, einmal die Woche eine Fragestunde über MS Teams anzubieten.

Voraussetzungen: Stochastik 1, Grundkenntnisse über stochastische Prozesse (z.B. Stochastik 2)

Literatur:

A. Bovier, *Markov Processes*, Vorlesungsskript, `https://www.dropbox.com/s/hzo4sre56qopanw/markov.pdf?dl=0`.

A. Bovier, *Introduction to Stochastic Analysis*, Vorlesungsskript, `https://www.dropbox.com/s/vyoa2qqyw4zsa8o/stochana.pdf?dl=0`

T. M. Liggett, Continuous time Markov processes: an introduction (Vol. 113)., American Mathematical Soc., 2010, `https://www.math.ucla.edu/~tml/liggett_first24.pdf`

L.C.D. Rogers and D. Williamson, *Diffusions, Markov processes and martingales. Vol. 2*, Cambridge University Press

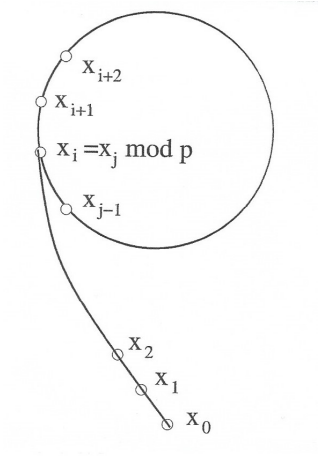
Computeralgebra

Dozentin: Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Termine: Di 14-16 und Do 8-10 Uhr

In der Vorlesung werden wir einige Probleme aus der algorithmischen Mathematik behandeln, zum Beispiel:

1. Primzahlbestimmung und Faktorisierung von natürlichen Zahlen (z.B. Methoden von Miller-Rabin, die Pollardsche rho-Methode und die $(p-1)$-Methode).
2. Das Lösen von polynomiellen Gleichungssystemen. In der linearen Algebra haben Sie gelernt, lineare Gleichungssysteme zu lösen. Wir werden Gleichungen höheren Grades betrachten und feststellen, ob das Gleichungssystem Lösungen hat und diese gegebenenfalls numerisch berechnen.
3. Faktorisierung von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Wie schafft es ein Computerprogramm, zum Beispiel das Polynom
$$f(x) = x^7 - 9x^6 + 9x^5 + 22x^4 - 65x^3 + 52x^2 + 20x - 62$$
zu faktorisieren? (Lösung: $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 2)(x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 10x - 31)$)

Die benutzten Methoden liefern eine gute Vorbereitung auf abstraktere algebraische Vorlesungen.
Zur Vorlesung gehört ein integrierter Übungs- und Praktikumsbetrieb. Programmierkenntnisse werden NICHT vorausgesetzt, es ist jedoch ratsam, sich schon vorab Grundzüge der Sprache Python anzueignen. Pythonkurse werden in den Semesterferien angeboten, aber auch auf youtube sind elementare Einführungen zu finden. Wir werden das Computeralgebrasystem sage einsetzen, welches Sie kostenlos unter `http://www.sagemath.org/` herunterladen können. Sie können auch online damit arbeiten: `https://sagecell.sagemath.org/`



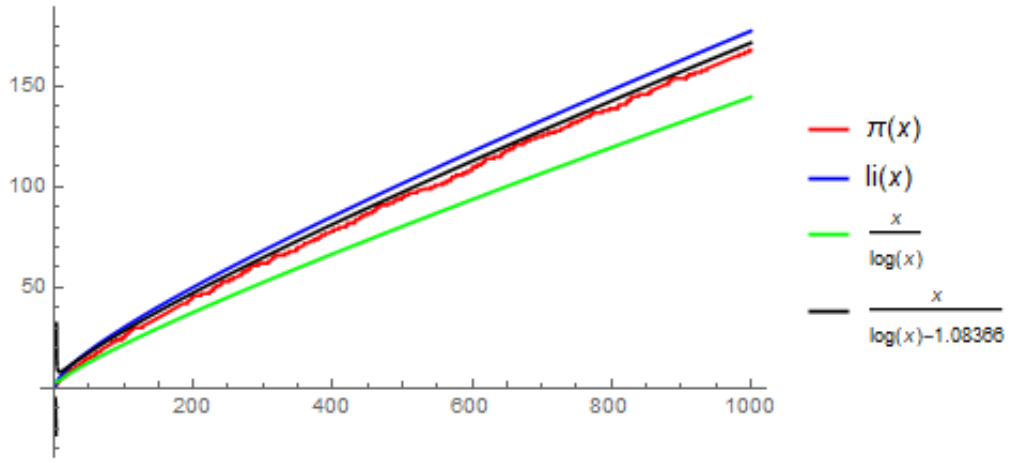
Literatur:

T. de Jong: *Lineare Algebra*, 2. Auflage, Kapitel 9 und 10, Pearson 2020.
D. Bressoud: *Factorization and Primality Testing*, Springer Verlag 1989.
G. von zur Gathen: *Modern Computer Algebra*, Cambridge University Press 2013.
D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Verlag 2015.

Analytische Zahlentheorie

Dozent: Ariyan Javanpeykar

Termine: Montag 10h-12h und Donnerstag 10h-12h (Digital)



Die analytische Zahlentheorie befasst sich vorwiegend mit der Bestimmung der Anzahl aller Zahlen unterhalb einer gegebenen Schranke, die eine bestimmte Eigenschaft haben, sowie mit der Abschätzung von Summen zahlentheoretischer Funktionen. Man kann sich zum Beispiel fragen ob es möglich ist, die Anzahl aller Primzahlen kleiner als x (mit $x \in \mathbb{R}$) auf eine intelligente Weise zu anzunähern.

In der Vorlesung besprechen und beweisen wir genaue Ergebnisse wie den Primzahlsatz. Man lernt auch multiplikative Funktionen (wie der berümte Möbius Funktion) und die Theorie der Charaktere kennen.

Mit ein bisschen Kenntnis von der Zahlentheorie sollte die Vorlesung zugänglich sein.

Literatur:
Apostol, Tom. *Introduction to Analytic Number Theory.* (1976)

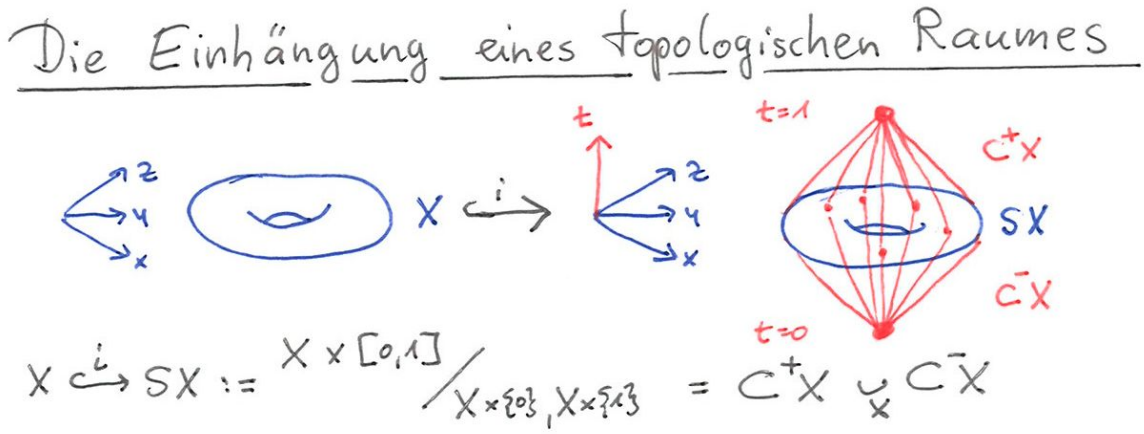
Hier ein interessantes YouTube Video um sich aufzuwärmen:
https://www.youtube.com/watch?v=uvMGZb0Suyc
A Prime Surprise (Mertens Conjecture) - Numberphile

Stabile Homotopietheorie
Stable Homotopy Theory

Dozent: Apl. Prof. Dr. Stephan Klaus

Die Vorlesung (ohne Übungen) wird im Zeitraum April-Juli 2021 stückweise online aufgezeichnet und kann über folgenden Link angesehen werden:
https://www.mfo.de/scientific-program/online-offerings/online-offerings

In der algebraische Topologie besagt der Freudenthalsche Einhängungssatz, dass der Einhängungshomomorphismus unter bestimmten Bedingungen ein Isomorphismus ist. Insbesondere trifft dies auf genügend häufige Einhängungen von endlichen Komplexen zu. Dieses Phänomen der Stabilität wird durch die Einführung der "stabilen Kategorie" verallgemeinert, deren Objekte also "stabile Räume" darstellen und Spektren genannt werden. Während die fehlende Linearität das Arbeiten mit Räumen und Homotopieklassen von Abbildungen sehr erschwert, verhält sich die stabile Kategorie viel besser. Zudem kann man jede verallgemeinerte Homologietheorie durch ein Spektrum darstellen. Wir werden in der Vorlesung eine Einführung in diese Theorie geben und anhand vieler Beispiele (wie z.B. K-Theorie und Bordismus) die Vorteile gegenüber der "instabilen Homotopietheorie" sehen.



Zielgruppe/Voraussetzungen: Hörer mit soliden Topologie-Grundkenntnissen aus "Topologie I", insb. zu CW-Komplexen, Homotopie, Homologie und Mannigfaltigkeiten. Dazu können auch die Teile 1.1-3.3 der Online-Vorlesung "Anwendungen der Spektralsequenz von Serre (Teil I)" angesehen werden, die auf der oben angegeben URL abrufbar ist.

Literatur:

F. Adams, *Stable Homotopy and Generalised Homology*, Chicago Lectures in Mathematics (1974).
A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002). Auf der Webseite des Autors frei verfügbar: http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf
R. M. Switzer, *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*, Springer (2002).

Mathematik der Finanzmärkte

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Do 12-14, online oder Raum 05-136

Die Vorlesung wendet sich an Studierende der Fachrichtung Mathematik, die mindestens eine Vorlesung über Stochastik gehört haben.

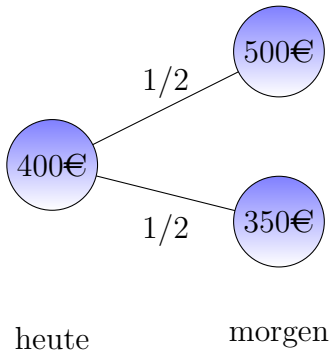


FIGURE 1. Fairer Preis π (heute) einer Call-Option mit Ausübungspreis $K = 440$€ morgen?

Auf den Finanzmärkten spielt die Mathematik eine große Rolle, beispielsweise bei der Preisberechnung von Finanzderivaten (z.B. Call-Optionen). Zunächst werden wichtige Modelle vollständiger Märkte mit diskreter Zeit behandelt, bei denen Preise für Optionen, Futures etc. ausgerechnet werden können. Darüber hinaus werden die Handelsstrategien hergeleitet, mit denen ein Finanzderivat risikofrei hergestellt werden kann (sogenanntes Hedging). Soweit die Zeit bleibt (und adaptiert an die Vorkenntnisse der Hörer/innen) können später Modelle in stetiger Zeit betrachtet werden. Die hierzu nötige stochastische Analysis (Ito-Integral, Girsanov Transformation und ähnliches) wird in elementarem Umfang zur Verfügung gestellt. In diesem Zusammenhang wird die prominente Black-Scholes-Formel hergeleitet.

Literatur:

- M. Baxter, A. Rennie: Financial Calculus : An Introduction to Derivative Pricing, Cambridge University Press 1996.
- R.J. Elliott, P.E. Kopp: Mathematics of Financial Markets, Springer 1999.
- A. Irle: Finanzmathematik. Die Bewertung von Derivaten, Teubner 1998.
- M. Musiela, M. Rutkowski: Martingale Methods in Financial Modelling, Springer 1997.

Funktionalanalysis I

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Montag 14-16, Raum 05-426 und Donnerstag 14-16, Raum 05-426

Die Funtktionalanalysis ist nichts anderes als Analysis in unendlich vielen unabhängigen Veränderlichen. Funktionen und Folgen werden als Punkte in einem unendlichdimensionalen Vektorraum erfasst. Hauptsächlich widmet sich die Vorlesung den normierten Vektorräumen und den zwischen ihnen wirkenden linearen stetigen Abbildungen. Oft werden wir Parallelen zu den aus Analysis I und II und Linearer Algebra bekannten Eigenschaften feststellen. Uns begegnen aber auch Eigenschaften, die sich jeder endlichdimensionalen Intuition entziehen, wie z.B. dass eine lineare Abbildung nicht unbedingt stetig sein muss. Willkommen im Wunderland!

Literatur:

D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 2011.

H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Berlin, 2006.

N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Wiley-Interscience, 1988.

J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart, 2000.

Funktionalanalysis III

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Dienstag 14 -16, Raum 04-522 und Donnerstag 16-18, Raum 04-522

Die Vorlesung ist die Fortsetzung der gleichnamigen Lehrveranstaltung aus dem Wintersemester 2020/21. Unter anderen Themen werden in diesem Teil nicht stetige lineare Abbildungen in normierten Räumen studiert. Eine der wichtigsten Klasse solcher Operatoren sind selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum. Der Hauptresultat der Theorie selbst-adjungierter Operatoren ist der sogenannte Spektralsatz. Dieser Satz liefert eine Darstellung der Funktion eines selbstajungierten Operators als Integral bezüglich des Spektralmaßes.

Kenntnisse aus der Maßtheorie sind von Vorteil, sind aber keine Voraussetzung.

A. Fomenko, Theory of oscillations and wave processes (1970)

Literatur:

J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart, 2000.

T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, verschiedene Auflagen.

Vorlesung

Eichtheorie 2

Sommersemester 2021

Dozent: PD Dr. Margarita Kraus

Zeit und Ort: Mi, 12-14 Uhr und Do, 12-14 Uhr, Raum 04-426

Inhalt:

Die Eichtheorie 2 ist die Fortsetzung der Eichtheorie 1. Dort haben wir uns mit Faserbündeln und Zusammenhängen beschäftigt. In der Eichtheorie 2 werden wir Anwendungen davon kennenlernen. Themen werden unter anderem sein: Eichinvariante Lagrangeformen, Yang-Mills-Theorie, der Satz von Emmy Noether, Maxwell-Dirac-Theorie und Dirac-Operatoren.

Bildquelle: Joergsam, Wikimedia Commons

Literatur:

1) C. Nash, S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Dover, 2011

2) D. Bleecker, *Gaugetheory and Variational Principles*, Dover, 1981

3) T. Frankel, *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press, 2004

4) M. Hamliton, *Mathematical Gauge Theories*, Springer, 2017

Vorlesung

Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten

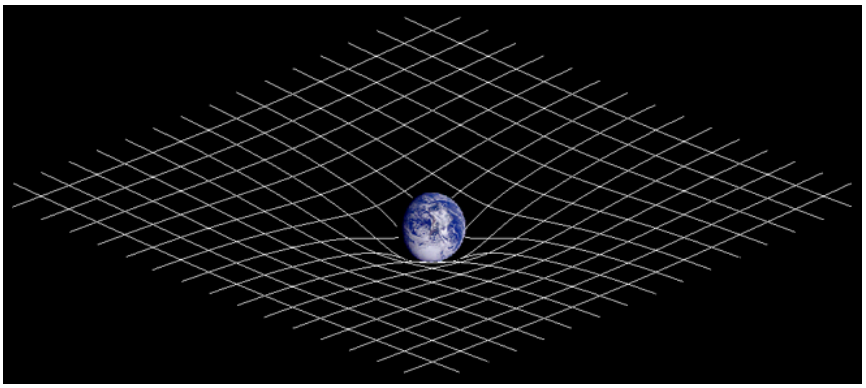
Sommersemester 2021

Dozent: PD Dr. Margarita Kraus

Zeit und Ort: Mo, 10-12 Uhr und Di, 12-14 Uhr, Raum 04-422

Inhalt:

In der Vorlesung werden zunächst die einfachsten Objekte der klassischen Differenzialgeometrie, nämlich Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$ untersucht. Besonders wichtig hierbei sind verschiedene Krümmungsbegriffe. Eine natürliche Verallgemeinerung der Flächen im $\mathbb{R}^3$ sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten, mit denen wir uns wir uns im weiteren Verlauf der Vorlesung beschäftigen werden. Wichtige Anwendungen der Differentialgeometrie finden sich auch in der Physik.



Bildquelle:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Spacetime_curvature.png&oldid=485034886

Literatur:

1) C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter, 2010

2) M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications, 1976

3) K. Jänich, *Vektoranalysis*, Springer, 2005

4) I. Agricola, T. Friedrich, *Vektoranalysis*, Vieweg, 2010

Modulformen und abelsche Varietäten II

Dozent/in: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Di, Fr 8-10 (via Microsoft-Teams)

Die Vorlesung setzt die gleichnamige Veranstaltung aus dem vergangenen Wintersemester fort. Gegenstand sind Modulformen, abelsche Varietäten und deren Modulräume, also Varietäten, die Isomorphieklassen von abelschen Varietäten parametrisieren. Während es im ersten Teil der Vorlesung um die klassische Theorie der elliptischen Kurven und der elliptischen Modulformen ging, geht es in diesem zweiten Teil um die höherdimensionale Situation. Abelsche Varietäten treten auch bei der Untersuchung ganz anderer projektiver Varietäten in ganz natürlicher Weise auf, etwa als Picard- und Albanesevarietäten oder mittlere Jacobische.

Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse aus der Topologie, der Algebra, der Funktionentheorie, der algebraischen Geometrie und natürlich dem ersten Teil der Vorlesung. Wie im vergangenen Semester möchte ich ein ausführliches Skript zur Vorlesung erstellen, das aber unter Umständen erst während des Semesters kapitelweise parallel zur Vorlesung fertig wird.

Das Bild zeigt einen Fundamentalbereich für die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(7)$.

Literatur:

Ph. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley.
C. Birkenhake, H. Lange: *Complex Abelian Varieties*, Springer Grundlehren 302 (2003).
C.L. Siegel: *Symplectic Geometry.*
E. Freitag: *Siegelsche Modulformen.* Springer Grundlehren 254 (1983).

Kryptographie

Dozent: Dr. Anton Malevich

Termine: Mi 14-16, Fr 8-10 (Digital)

4-stündige Ergänzungsvorlesung für B.Sc. und M.Ed.

Sie wollen wissen, wie man im Internet trotz ständiger Hackerangriffe und Data-Leaks immer noch sicher kommunizieren kann? Oder Sie mögen Benedict Cumberbatch? Dann ist die Vorlesung Kryptographie genau richtig für Sie!

Was ist Kryptographie? Die beiden Hauptaufgaben der Kryptographie sind die Verschlüsselung und die digitale Signatur. Bei der Verschlüsselung geht es darum, Daten so zu manipulieren, dass man den ursprünglichen Sinn nur mit Hilfe eines geheimen Schlüssels wieder rekonstruieren kann. Bei der digitalen Signatur geht es darum, die Eigenschaften der herkömmlichen handschriftlichen Unterschrift (plus einige weitere Eigenschaften) in die digitale Welt zu übertragen. Zur Lösung dieser beiden Hauptaufgaben werden mathematische Verfahren, insbesondere aus Algebra und Zahlentheorie, eingesetzt. Kryptanalyse ist eine Art Gegenstück zur Kryptographie und beinhaltet die Analyse von kryptographischen Verfahren mit dem Ziel, diese entweder zu brechen, oder ihre Sicherheit nachzuweisen und zu quantifizieren.
Die Vorlesung gibt einen breiten Überblick über die Kryptographie sowie einige Einblicke in die Kryptanalyse: von klassischen Kryptosystemen (Caesar-Verschlüsselung, Vigenère-Chiffre, Hill-Chiffre) bis zu den wichtigsten Verfahren der symmetrischen (Blockchiffren, Stromchiffren, Hashfunktionen, Message Authentication Codes) und der asymmetrischen Kryptographie (RSA, der diskrete Logarithmus, elliptische Kurven, Digitale Signaturen).

Literatur:
Douglas R. Stinson, *Cryptography: Theory and Practivce*, Chapman & Hall/CRC.
Johannes Buchmann, *Einführung in die Kryptographie*, Springer.
Menezes, van Oorschot, Vanstone, *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press.
WikiProjekt *Kryptologie*, online.

Numerik von Erhaltungsgleichungen

Dozent: Dr. Philipp Öffner

Termine: Donnerstag 8-10 Uhr

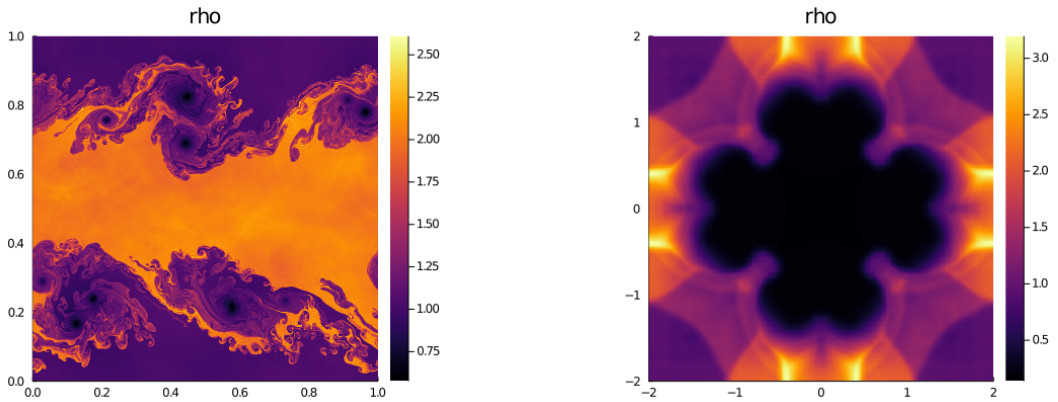


Abbildung 1: Turbulence und Explosion

Hyperbolische Erhaltungsgleichungen spielen eine fundamentale Rolle bei der mathematischen Beschreibung verschiedenster physikalischer Prozesse, wie etwa in der numerischen Strömungsmechanik, im Elektromagnetismus und bei Wellenphänomenen. In der Vorlesung beschäftigen wir uns daher mit der Analyse und den Eigenschaften numerischer Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgleichungen. Im Vordergrund stehen dabei heute verwendete Verfahren höherer Ordnung wie ENO/WENO, Discontinuous Galerkin und Residual Distribution Methoden.
Die Vorlesung baut auf Grundlagen der Numerik von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen auf und bittet sich als ideale Ergänzung zum Modellierungspraktikum. Funktionalanalytische Grundlagen sind vorteilhaft, können aber auch kursbegleitend erworben werden.
Literatur:

- R. Abgrall: *A review of residual distribution schemes for hyperbolic and parabolic problems: the July 2010 state of the art*, (Comm. in Comp. Physics 11.4, 2012).
- E. Godlewski, P. Raviart: *Hyperbolic systems of conservation laws.*
- J.S. Hesthaven, T. Warburton: *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications.*
- D. Kopriva: *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations.*
- D. Kröner: *Numerical Schemes for Conservation Laws.*
- Edited by Remi Abgrall and Chi-Wang Shu: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems, Basic and Fundamental Issues*, (Elsevier, 2016).

Modellierungspraktikum: Strömungsmechanik

Dozent: Dr. Philipp Öffner

Termine: Montag 14-16 Uhr & Donnerstag 14-16 Uhr

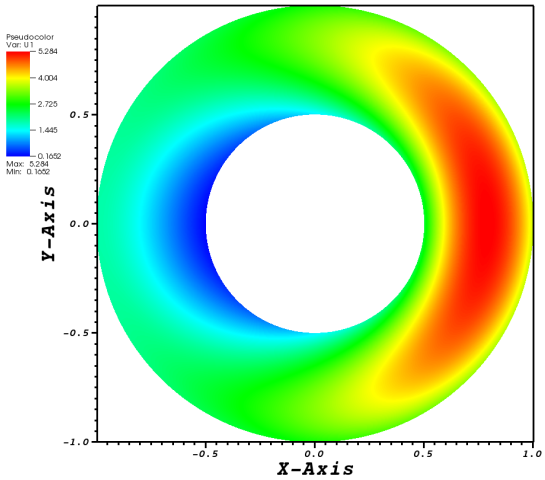


Abbildung 1: Wärmeströmung

In dieser Veranstaltung beschäftigen wir uns mit der Anwendung numerischer Methoden für partielle Differentialgleichungen in der Modellierung von Strömungsvorgängen (genaueres entnehmen Sie später auf meiner Homepage). Das Praktikum beginnt mit einer Einführung zu den Modellen und den relevanten numerischen Verfahren. Im Fokus stehen dabei kontinuierliche oder diskontinuierliche Galerkin-Verfahren. Es werden anschließend weiterführende Fragestellungen als Projekte in Kleingruppen bearbeitet.
Das Praktikum baut auf Grundlagen der Numerik von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen auf und bittet sich als ideale Ergänzung zur Numerik von Erhaltungsgleichungen.
Literatur:

- Edited by Remi Abgrall and Chi-Wang Shu: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems, Basic and Fundamental Issues*, (Elsevier, 2016).
- Edited by Remi Abgrall and Chi-Wang Shu: *Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems, Applied and Modern Issues*, (Elsevier, 2017).

Algebraische Topologie I

Dozent: Dr. Moritz Rahn

Termine: Mo 10-12 und Do 10-12 Vorlesung (digital)

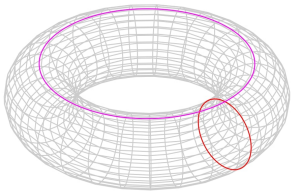
In der algebraischen Topologie studieren wir Räume durch ihnen zugeordnete algebraische Invarianten. Die Fundamentalgruppe und die singulären Homologiegruppen sind uns als prototypische Beispiele bereits aus der Einführung in die Topologie bekannt. Hierauf aufbauend beschäftigen wir uns in diesem Kurs mit wichtigen Varianten der singulären Homologietheorie.

(1) Zum einen studieren wir mit den CW-Komplexen eine wichtige Klasse kombinatorisch gut kontrollierbarer Räume. Für diese gibt es eine angepasste Homologietheorie (*zelluläre Homologie*), welche mit der singulären Homologietheorie übereinstimmt, aber deutlich einfacher zu berechnen ist, was wir an einigen Beispielen illustrieren werden.

(2) Homologiegruppen von vielen in der Natur auftretenden Räumen sind typischerweise *endlich-erzeugte* abelsche Gruppen, und als solche direkte Summen von freien abelschen Gruppen und Torsionsgruppen. Eng hiermit zusammenhängend ist die *singuläre Homologie mit Koeffizienten*, welche uns etwas weiter in die homologische Algebra lockt.

(3) Durch den Übergang zur *singulären Kohomologie* verfeinern wir unsere algebraischen Invarianten zu (graduiert) kommutativen Ringen. Diese zusätzliche Produktstruktur ist in Berechnungen von zentraler Bedeutung. Möglicherweise beschäftigen wir uns auch mit zugehörigen Dualitätsphänomenen.

Diese Themen gehören zu dem Standardwerkzeugkoffer der Topologie. Je nach zeitlichem Verlauf würde ich zum Abschluss eine sehr kurze Einführung in die Homotopietheorie sowie in die Interaktion von Homotopietheorie und Kohomologietheorie anbieten.



In Zeiten von nicht zu wenig Corona-induziertem Stress danken wir hier den UrheberInnen von legal frei verfügbaren Bildern der WikiMedia!

Literatur:

G. Bredon, “Topology and Geometry”, Springer (1997).
J. F. Davis, P. Kirk, “Lecture Notes in Algebraic Topology”, AMS (2001).
A. Hatcher, “Algebraic Topology”, Cambridge University Press, (2002).
R. Stöcker, H. Zieschang, “Algebraische Topologie”, Teubner (2013).

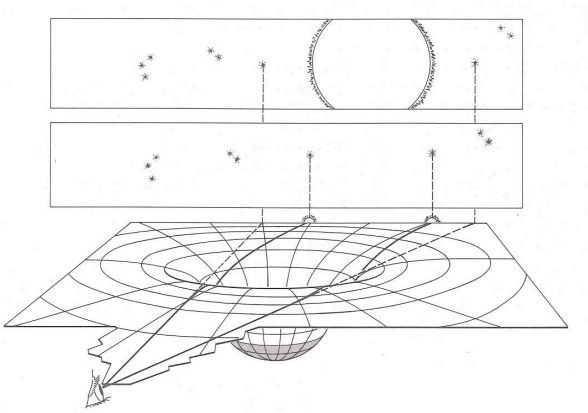
Geschichte der Mathematik II

Dozent: Prof. Dr. Tilman Sauer
Zeit: Mo: 16-18, Do: 14-16

Inhalt:

Die Vorlesung schliesst sich inhaltlich an die "Kulturgeschichte der Mathematik" vom Wintersemester an gibt einen Überblick über Entwicklungen in der Mathematik vom 17. Jahrhundert bis in das 20. Jahrhundert. Ausgehend von der analytischen Geometrie von Descartes wird die Entstehung und Entfaltung der Analysis behandelt und die Entwicklung und Ausdifferenzierung der Geometrie bis hin zur Herausbildung einer mehrdimensionalen Differentialgeometrie als mathematische Voraussetzung für die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie.

Behandelte Themen u.a.: die Vielfalt der geometrischen Probleme und Methoden im 17 Jahrhundert und die Herausbildung der Analysis; weitere Entwicklung der Analysis in Richtung einer Algebraisierung; Anfänge der Variationsrechnung; Ursprünge der nicht-euklidischen Geometrie; der Begriff der Krümmung und das Theorema egregium; Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs und Axiomatisierung der Geometrie; Invariantentheorie und Tensorkalkül; klassische Mechanik und Relativitätstheorie.



Literatur:

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, Wiley, 1989.
Edwards, Charles, *The Historical Developments of Calculus*, Springer, 1994.
Jahnke, Niels (Hg.) *Geschichte der Analysis*, Heidelberg, 1999.
Mainzer, Klaus, *Geschichte der Geometrie*, B.I., 1980.
eigene Folien und Skripte

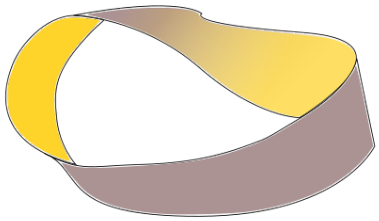
Introduction to algebraic K-theory

Dozent: Prof. Dr. Georg Tamme

Termine: Di und Fr 10-12

(Wenn alle einverstanden sind, kann die Vorlesung auch auf Deutsch gehalten werden.)

Algebraic K-theory was invented by Alexander Grothendieck in the 1950s in order to formulate and prove the Riemann–Roch theorem in its natural generality. Since then, algebraic K-theory developed to become an important branch of mathematics with applications in algebraic geometry, number theory and topology. Roughly, algebraic K-theory is about linear algebra over rings. For example, any finitely generated projective module over a ring R determines a class in the abelian group $K_0(R)$, generalizing the notion of dimension of a vector space. An automorphism of such a module has a "determinant" in the group $K_1(R)$.



A non-trivial class in $K_0(\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1))$[1]

The course will start with defining the "lower" K-groups K_0 and K_1 of a ring, which can be done by relatively elementary means, and prove some fundamental theorems of algebraic K-theory in this setting. Depending on time, background and interests of the audience, we will then proceed to the construction of higher K-groups and the fundamental theorems in this setting.

Expected audience: You should have a good knowledge of commutative algebra, but important notions will also be recalled. The precise contents of the course are flexible and can be adapted to the background of the audience. So if you think about or if you are already specializing in an algebraic direction, then this course is for you.

Literatur:

- John Milnor. *Introduction to algebraic K-theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971. Annals of Mathematics Studies, No. 72.
- Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994.
- Charles A. Weibel. *The K-book*, volume 145 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. An introduction to algebraic K-theory.
- Further literature will be announced in the course.

[1] Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mo..bius-strip001.svg

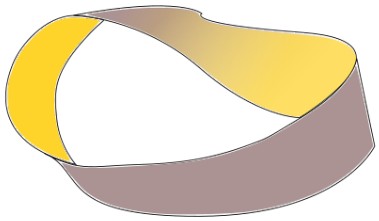
Einführung in die algebraische K-Theory

Dozent: Prof. Dr. Georg Tamme

Termine: Di und Fr 10-12

Algebraische K-Theorie wurde in den 1950er Jahren von Alexander Grothendieck eingeführt um den klassischen Satz von Riemann–Roch in seiner natürlichen Allgemeinheit zu formulieren und zu beweisen. Seitdem hat sich die algebraische K-Theorie zu einem wichtigen Forschungsgebiet der Mathematik mit Anwendungen in der algebraischen Geometrie, der Zahlentheorie und der Topologie entwickelt.
Ganz grob gesagt behandelt algebraische K-Theorie lineare Algebra über Ringen (anstelle von Körpern). So definiert z.B. jeder endlich erzeugte projektive Modul über einem Ring R eine Klasse in der abelschen Gruppe $K_0(R)$. Diese verallgemeinert die Dimension eines Vektorraums. Ein Automorphismus eines solchen Moduls hat eine wohldefinierte "Determinante" in $K_1(R)$.

In diesem Kurs werden wir zunächst die niedrigen K-Gruppen K_0 und K_1 einführen und die Hauptsätze der algebraischen K-Theorie für diese beweisen. Dies ist mit recht elementaren Mitteln möglich. Je nach Zeit, Kenntnissen und Interessen werden wir dann die höheren K-Gruppen K_i, $i > 1$, einführen und die Hauptsätze in dieser Allgemeinheit beweisen.
Vorkenntnisse: Sie sollten über gute Kenntnisse in der kommutativen Algebra verfügen. Wichtige Begriffe und Konstruktionen werden aber bei Bedarf wiederholt. Der genaue Inhalt der Vorlesung ist flexibel und kann an die Kenntnisse und Interessen des Publikums angepasst werden. Wenn Sie darüber nachdenken, sich in einem Bereich der Algebra zu spezialisieren oder bereits damit begonnen haben, dann ist dieser Kurs bestens für Sie geeignet.



A non-trivial class in $K_0(\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1))$[2]

Literatur:

- John Milnor. *Introduction to algebraic K-theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971. Annals of Mathematics Studies, No. 72.
- Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994.
- Charles A. Weibel. *The K-book*, volume 145 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. An introduction to algebraic K-theory.
- Further literature will be announced in the course.

[2]Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mo..bius-strip001.svg

Algebra 2: Kommutative und homologische Algebra

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten

Vorlesung: Di, Fr 8-10, Übung: nach Vereinbarung

Emmy Noether 1882—1935, Mother of modern Algebra

Ziel der Veranstaltung ist es, grundlegende Begriffe aus der Algebra einzuführen und zu vertiefen. Dabei stehen zwei miteinander verwobene Themen im Mittelpunkt. Zunächst widmen wir uns klassischen Konstruktionen und Resultaten der *kommutativen Algebra*. Das heißt, wir untersuchen Noethersche kommutative Ringe mit Augenmerk auf die Kategorie der Moduln über diese Ringe.
Als zweites werden wir die in vielen Bereichen der Mathematik unverzichtbare Maschine der *homologischen Algebra* anhand der sich aus der kommutativen Algebra ergebenden Beispiele kennenlernen.

Stichworte: ganze Ringerweiterungen, Lokalisierung, Assoziierte Primideale, Noether Normalisierung, Hilberts Nullstellensatz, Dimensionstheorie, injektive und projektive Moduln, Kategorien und Funktoren, die derivierte Kategorie.

Das Handwerkszeug, welches man in dieser Vorlesung lernen kann, ist unverzichtbar für alle, die über eine Vertiefung in einem der Bereiche Algebra, algebraische Geometrie, komplexe Geometrie oder Arithmetik nachdenken. Ein Zyklus in algebraischer/komplexer Geometrie bietet sich als natürliche Weiterführung der Veranstaltung an. Voraussetzung für die Teilnahme ist ein solides Verständnis der Grundbegriffe der Algebra aus den Vorlesungen Algebra 1: Körper, Ringe, Moduln oder Computeralgebra.

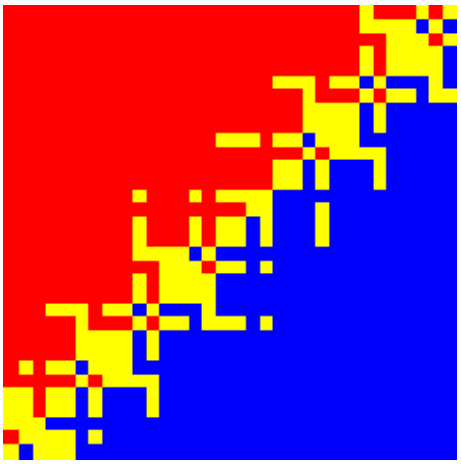
Literatur:

M. Atiyah und I. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co.
D. Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995. xvi+785 pp.

Selected Topics in Scientific Computing

Dozent: Dr. Kai Werth

Termine: Fr 10-12



Berechnung der Orientierung *positiv*, *negativ* oder *kollinear* einer $128 \cdot 2^{-53}$-Umgebung um den Ursprung mit zwei weiteren Punkten auf einer Ursprungsgeraden in `double`-precision.

Früher oder später kommst du als Mathematiker*in an den Punkt, deine theoretischen Erkenntnisse in praktischen Programmiercode zu gießen. Dies kann unerwartet schnell zu einem Abenteuer mit ungewissem Ausgang werden, und jeder Schritt wirft neue Fragen auf:

- Wie beginne ich, und was ist ein guter Programmierstil?
- Ist das ein Rundungsfehler oder ein Programmierfehler?
- Kann mein Algorithmus mir sagen, ob er korrekt arbeitet?
- Wie kann ich mein Programm mit einfachen Mitteln schneller und effizienter machen? Und kann mir der Zufall dabei helfen?

In dieser Vorlesung betrachten wir anhand ausgesuchter praktischer Problemstellungen einige Fallstricke, die uns beim wissenschaftlichen Programmieren begegnen können und wie wir damit umgehen. Wir arbeiten vornehmlich in `python`, Programmierkenntnisse können hilfreich sein, sind aber keine Voraussetzung.

Literatur:

William H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, 2007.

Thomas H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms.* The MIT Press, 2001.

Kurt Mehlhorn and Stefan Näher *LEDA – A platform for combinatorial and geometric computing.* In: CACM (1995).

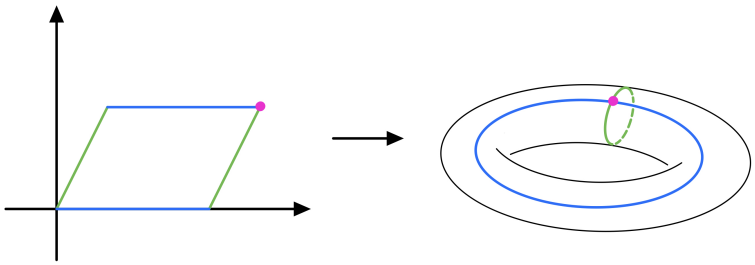
Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen

Dozent: Prof. Dr. Kang Zuo

Termine: Di, Fr 14-16

.

Die Theorie der Riemannsche Flächen ist ein nätürliche Erweiterung der Funktionentheorie. Ein Besuch dieser ist dann auch Voraussetzung für die Tielnahme an dieser Vorlesung. Vorkenntnisse aus der Topologie über Flächen nützlich aber nicht unbedingt notwendig, da dies in der Vorlesung thematisiert wird. Behandelt werden weiter die riemannsche Fläche einer algebraische Funktion, die Überlagerungstheorie und der riemannsche Existenzsatz. Weiter entwicklen wir die Theorie der holomorphe Differentialformen auf riemannsche Flächen und beweisen den Satz von Riemann-Roch und Serre Dualität. Die Vorlesung schliesst ab mit der Konstruktion von meromorphe Funktionen zu vorgegebenen Divisor und Anwendungen.



.

Vorkenntnisse: Analysis, Lineare Algebra, Funktiontheorie.

Literatur:

S. K. Donaldson, *Riemann, Surfaces*, Lecture notes, 2004.

O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher 184, Springer, 1977.

D. van Straten, *Riemannsche Fächen und algebraische Kurven*, Vorlesungsskript, Mainz, 2012.

H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Flächen*, Springer Fachmedien, 1997.

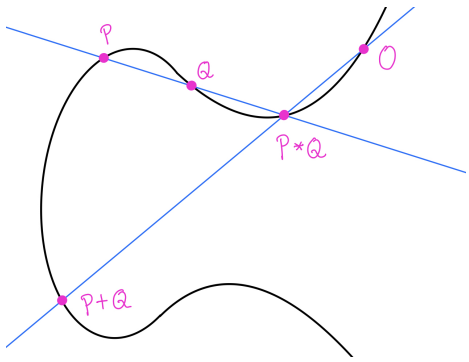
Elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation

Dozent: Prof. Dr. Kang Zuo

Termine: Mo 12-14

.

In der Vorlesung "Elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation" werden wir auf einer speziellen Klasse algebraischer Kurven, die so-genannte elliptische Kurven, oder glatte kubische ebene Kurven konzentrieren. Wir möchten einige besondere Eigenschaften elliptischer Kurven studieren, z.B. Gruppengesetz, Torsionspunkten, Endomorphismen und J-Invariant,... Als eine wichtige Anwendung der Theorie elliptischer Kurven konstruieren wir die Theorie der Klassenköper über imaginären-quadratischen Körpern.



.

Vorkenntnisse: Analysis, Lineare Algebra, Algebra I.

Literatur:

G. Shimura, Introduction to arithmetic theory of automorphic functions, Princeton Univ. Press, 1971.

J.H. Silverman, The arithmetic of elliptic mcurves, Springer-Verlag 1992.

https://download.uni-mainz.de/mathematik/Studienbuero/LV/KommVZ-SS21.pdf