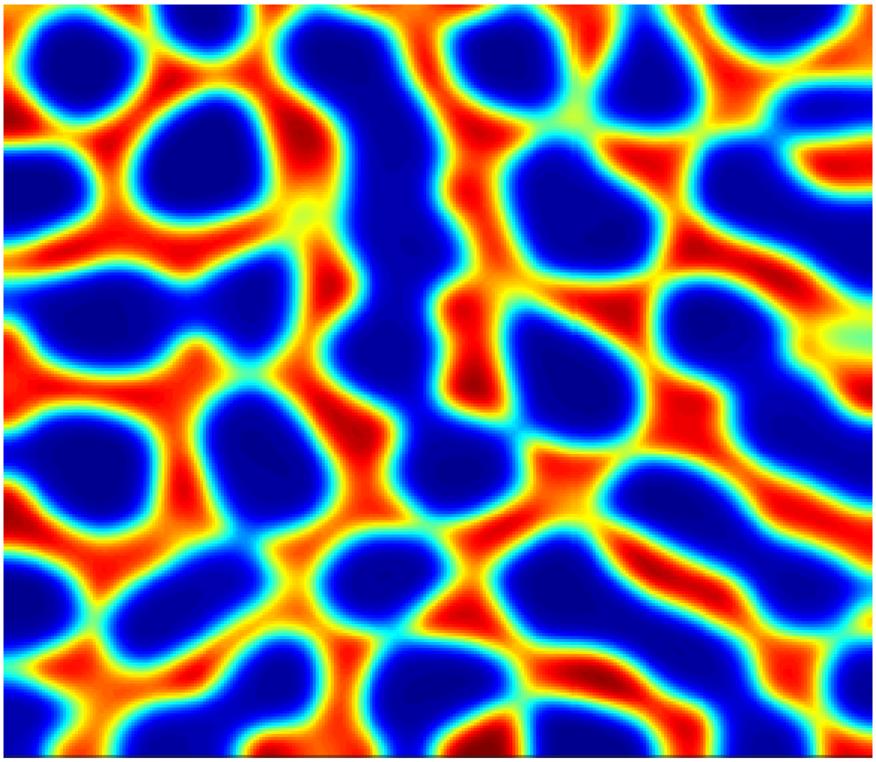
Vorlesungsverzeichnis

Mathematik



Mainz

Sommersemester 2022

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Sommersemester 2022 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Januar 2022

Die Graphik auf der Vorderseite zeigt eine numerische Simulation der Entmischung einer Polymerlösung. Die zugrundeliegenden Berechnungen wurden von Aron Brunk mit der Finiten Elementenmethode durchgeführt.

Übersichtsplan

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10	Modulräume von G-Bündeln auf Kurven (Lehn) 04-432	Algebra II (Lehn) 04-432 Computeralgebra (de Jong) C03		Modulräume von G-Bündeln auf Kurven (Lehn) 04-432 Computeralgebra (de Jong) 3N2	Algebra II (Lehn) 04-432
10-12	Differentialgeometrie u. Mannig-faltigkeiten (Schneider) 04-422	Dynamische Systeme (Rendall) 04-522 Stochastik I (Klenke) 05-136 Algebraische Geometrie II (Tamme) 04-422 Stochastik III (Birkner) 04-432	Modellierungspraktikum (Lukacova) 05-426	Stochastik I (Klenke) 05-136 Stochastik III (Birkner) 05-522	Selected Topics in Scientific Computing (Werth) 05-426 Algebraische Geometrie II (Tamme) 04-422
12-14		(Semi-Riemannsche) Differentialgeometrie I (Kraus) 04-432 Chaostheorie II (Kostrykin) 04-522	(Semi-Riemannsche) Differentialgeometrie I (Kraus) 04-432 Differentialgeometrie u. Mannigfaltigkeiten (Schneider) 04-422 Modellierungspraktikum (Lukacova) 05-426	Stochastische Algorithmen (Klenke) 05-136 oder online Chaostheorie II (Kostrykin) 04-522	
14-16	Num. Meth. in der Uncertainty Quantitfication (Bachmayr) 05-426 Funktionalanalysis I (Kraus) 04-224	Kohomologie von Gruppen (Rahn) 04-432 Algebraische Kurven u. Riemannsche Flächen (van Straten) 04-426 Funktionalanalysis III (Kostrykin) 04-522 Praktikum zu Grundlagen der Numerik (Bachmayr) MI II	Num. Meth. in der Uncertainty Quantitfication (Bachmayr) 05-426 Praktikum zu Grundlagen der Numerik (Bachmayr) MI II	Kohomologie von Gruppen (Rahn) 04-432 Funktionalanalysis I (Kraus) 04-224 Funktionalanalysis III (Kostrykin) 04-522 Zufällige Bäume u. ihre spannenden Eigenschaften (Hartung) 05-522	Algebraische Kurven u. Riemannsche Flächen (van Straten) 04-426
16-18					

Abzählende Kombinatgorik – Prof. Dr. Stephan Klaus – ONLINE abrufbar über https://www.mfo.de/scientific-program/online-offerings

Numerische Methoden in der Uncertainty Quantification

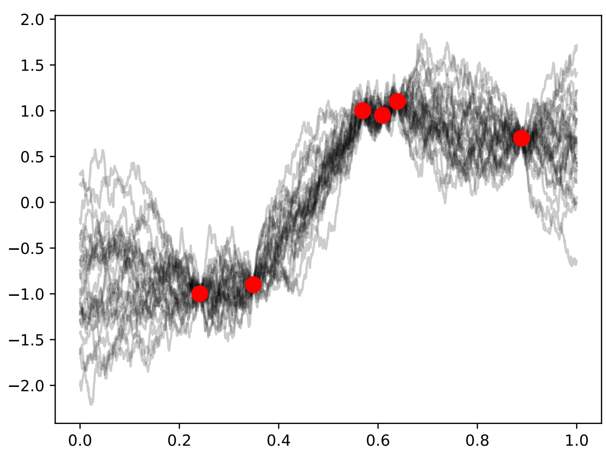
Dozent: Prof. Dr. Markus Bachmayr

Termine: Mo, Mi 14-16

Die Eingangsdaten für mathematische Modelle sind in Anwendungsproblemen in der Regel nicht exakt bekannt, sondern mit verschiedenen Unsicherheiten behaftet, etwa durch Messfehler oder nur eingeschränkt verfügbare Informationen. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit numerischen Methoden zur quantitativen Erfassung der sich daraus ergebenden Unsicherheiten in Ergebnissen.

Betrachtet werden insbesondere stochastische Multilevel Monte Carlo-Methoden sowie deterministische polynomiale Approximationen für Differentialgleichungen mit zufälligen Daten, stochastische Galerkin-Verfahren, die Bayessche Formulierung inverser Probleme und Markov Chain Monte Carlo-Methoden. Neben den mathematischen Grundlagen wird auch die numerische Umsetzung der Verfahren in der Programmiersprache Julia behandelt. Ein Skriptum wird zur Verfügung gestellt.

Die Ergänzungsvorlesung richtet sich an Studierende in M.Sc. Mathematik und M.Sc. Computational Sciences, die *Numerik partieller Differentialgleichungen* gehört haben oder parallel hören. Die erforderlichen Begriffe aus der Stochastik werden in der Vorlesung wiederholt bzw. eingeführt.



Literatur:

G. J. Lord, C. E. Powell, and T. Shardlow. *An Introduction to Computational Stochastic PDEs.* Cambridge University Press, 2014.

T. J. Sullivan. *Introduction to Uncertainty Quantification.* Springer (2015).

M. B. Giles. *Multilevel Monte Carlo methods.* Acta Numer., 24:259–328 (2015).

A. Cohen and R. DeVore, *Approximation of high-dimensional parametric PDEs*, Acta Numerica 24, pp 1-59 (2015).

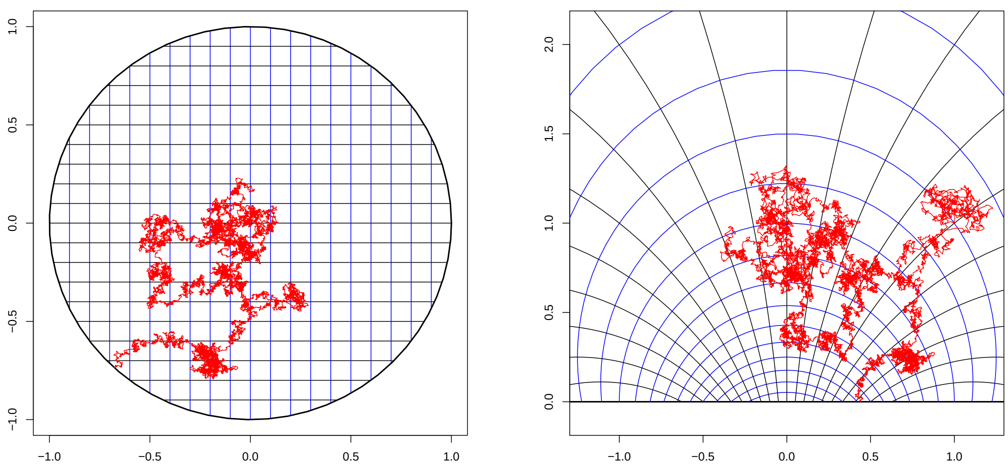
A. Stuart, *Inverse Problems: A Bayesian Perspective*, Acta Numerica 19, pp 451–559 (2010).

Stochastik III

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

Termine: Di, Do 10-12

Diese Vorlesung wendet sich an Mathematik-Studenten mit soliden Kenntnissen in Wahrscheinlichkeitstheorie, sie schließt an die Vorlesung Stochastik II aus dem Wintersemester 2021/22 an.



Themenstichpunkte: Brownsche Bewegung, Martingaltheorie in stetiger Zeit, Itō-Kalkül, stochastische Differentialgleichungen, Markovprozesse und Martingalprobleme, beispielhafte Anwendungen aus der Populationsbiologie und aus der Finanzmathematik.

Literatur (Auswahl)**:**

L.C.G. Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov processes and martingales*, Band I und II, Wiley (1994).

D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3rd ed., Springer (1999).

J.-F. Le Gall, *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*, Springer (2016).

P. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, 2nd ed., Springer (2004).

I. Karatzas, S.E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 2nd ed., Springer (2009).

Computeralgebra

Dozent: Prof. Dr. Theo de Jong

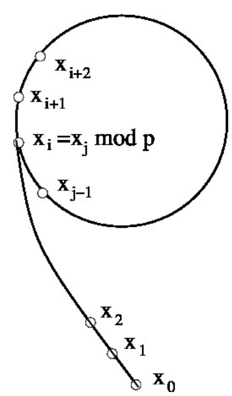
Termine: Di, Do 8-10

In der Vorlesung werden wir einige Probleme aus der algorithmischen Mathematik behandeln, wie zum Beispiel:

(1) Primzahlbestimmung und Faktorisierung von natürlichen Zahlen (z.B. Miller-Rabin, Pollard rho und die $p-1$ Methode).
(2) Das Lösen von polynomialen Gleichungssystemen. In der linearen Algebra haben Sie gelernt lineare Gleichungssysteme zu lösen. Wir werden Gleichungen höheren Grades betrachten und sehen, wie man feststellen kann, ob das Gleichungssystem eine Lösung hat und gegebenfalls die Lösungen numerisch berechnen.
(3) Faktorisierung von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Wie schafft ein Computerprogramm es zum Beispiel das Polynom
$$f = x^7 - 9x^6 + 9x^5 + 22x^4 - 65x^3 + 52x^2 + 20x - 62$$
zu faktorisieren? (Lösung: $f = (x^3 - 2x^2 + 2) \cdot (x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 10x - 31)$)

Die benutzten Methoden liefern eine gute Vorbereitung auf abstraktere algebraische Vorlesungen.

Zur Vorlesung gehört ein integrierter Übungs- und Praktikumsbetrieb. Programmierkenntnisse werden NICHT vorausgesetzt, es ist jedoch ratsam, sich schon etwas von der Sprache Python anzueignen. Pythonkurse werden in den Semesterferien angeboten, aber auch auf youtube sind elementare Einführungen zu finden. Wir werden das Computeralgebrasystem `SAGE` einsetzen, welches kostenlos unter `http://www.sagemath.org/` verfügbar ist.



Literatur:

D. Bressoud: *Factorization and Primality Testing*, Springer Verlag (1989).

G. Von zur Gathen, *Modern Computer Algebra*, Cambridge University Press (2013).

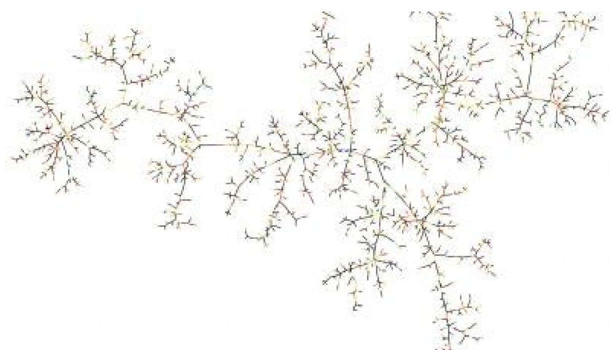
D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Verlag (2015).

Zufällige Bäume und ihre spannenden Eigenschaften

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Do 14-16

In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit verschiedenen Arten zufälliger Bäume und ihren Eigenschaften. Diese tauchen oft in der Stochastik auf, spielen aber auch z.B. in vielen Anwendungen in der theoretischen Informatik oder auch in der Modellierung von Populationen eine wichtige Rolle.
Wir beginnen mit sogenannten kombinatorischen Bäumen und untersuchen ihre lokale Struktur. Anschließend beschäftigen wir uns näher mit Galton Watson Bäumen. Es folgt ein Kapitel über allgemeine Zufallsgraphen. Abschließend interessieren wir uns für (zufällige) minimale Spannbäume und ihre lokalen Eigenschaften.



Eine Realisierung eines minimalen Spannbaums des vollständigen Graphen.
Graphik von Louigi Addario-Berry.

Die Vorlesung orientiert sich an einem Kurs von Louigi Addario-Berry, welcher 2021 im Rahmen der CRM-PIMS Summer School in Probability gehalten wurde. Zu diesem gibt es reichhaltige Materialien (siehe Literaturangabe). Teilweise werden wir daher dem Prinzip des 'inverted Classrooms' folgen und die Sitzungen dadurch interaktiver gestalten.

Voraussetzungen: Stochastik 1

Literatur:

CRM-PIMS Summer School in Probability 2021, *Kurswebsite*,
https://problab.ca/louigi/courses/2021/ssprob/

Louigi Addario-Berry, *Course Schedule (mit Links zu Videoaufzeichnungen)*,
https://secure.math.ubc.ca/Links/ssprob21/schedule.html

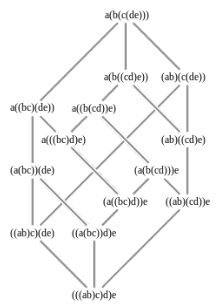
Louigi Addario-Berry, *Lecture Notes on Optimization in random discrete systems*,
http://problab.ca/louigi/notes/ssprob2021.pdf

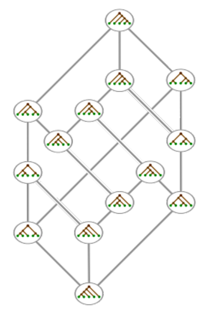
Abzählende Kombinatorik

Dozent: Prof. Dr. Stephan Klaus

Online-Vorlesung April-Juli 2022

1. Das Assoziativgesetz besagt $(xy)z = x(yz)$, daraus folgt die Unabhängigkeit von der Klammersetzung auch für mehr als 3 Faktoren. Für 4 Faktoren gibt es 5 erlaubte Arten der Klammersetzung, für 5 Faktoren bereits 14. Auf wieviele Weisen kann man Klammern in einem Produkt von n Faktoren setzen?
2. Bäume sind zusammenhängende Graphen ohne Zykel. Betrachte binäre Bäume mit n Knoten, wobei ein Knoten als "Wurzel" ausgezeichnet ist. Wieviele solcher Bäume gibt es?





(Public domain graphics by T. Piesk)

Die Antwort wird in beiden Fällen durch die Catalan-Zahlen gegeben, die auch in einigen anderen Zusammenhängen auftauchen. Der Beweis kann mit der erzeugenden Funktion dieser Fragestellung hergeleitet werden. Erzeugende Funktionen sind formale Potenzreihen, die mit den Anzahlen von kombinatorischen Strukturen gebildet werden. Dadurch kann man kombinatorische Eigenschaften in Funktional- oder Differentialgleichungen für erzeugende Funktionen verwandeln, die oft explizit gelöst werden können. Die Vorlesung soll anhand vieler berühmter Beispiele einen Überblick dieser Theorie geben. Weitere Stichworte dazu sind z.B. Partitionen, Fibonacci- und Stirling-Zahlen, das Abzähltheorem von Polya, das Theorem von Witt und kombinatorische Spezies. Erzeugende Funktionen spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine große Rolle und gehören daher zur "mathematischen Allgemeinbildung".
Die Vorlesung (ohne Übungen) wird im Zeitraum April-Juli 2022 stückweise aufgezeichnet und kann über https://www.mfo.de/scientific-program/online-offerings online angesehen werden.

Zielgruppe/Voraussetzungen:
Alle Studentinnen und Studenten der Mathematik, die sich dafür interessieren, insbesondere auch Lehramtsstudierende! Es werden nur Grundkenntnisse der Mathematik vorausgesetzt (Analysis 1-2, Lineare Algebra 1-2).

Literatur:
Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Cambridge Univ. Press (1997).
Carl G. Wagner, *A First Course in Enumerative Combinatorics*, AMS (2020).
Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press (1994).

Stochastische Algorithmen

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Do 12-14 (online oder Raum 05-136)

Die Vorlesung wendet sich an Studierende der Fachrichtung Mathematik, die mindestens eine Vorlesung über Stochastik gehört haben.

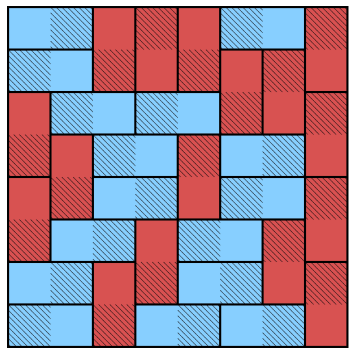


FIGURE 1. Zufällige Pflasterung eines Schachbretts mit Dominosteinen

In der Vorlesung *Stochastische Algorithmen* wird die Wirkungsweise von Algorithmen, die mit Hilfe eines Zufallsmechanismus arbeiten, erläutert und mathematisch fundiert. Dabei geht es um Probleme wie das Mischen bzw. Sortieren von Spielkarten, das Heraussuchen eines optimalen Wertes aus einer sehr großen Menge (z. B. das Problem des Handlungsreisenden), die Konstruktion zufälliger Objekte mit einer gegebenen Verteilung (Zufallszahlen, Propp-Wilson-Algorithmus) und so weiter.
Eines der stochastischen Konzepte, die behandelt werden sollen, sind Markovketten und die Geschwindigkeit ihrer Konvergenz in ihr Gleichgewicht, die man mit Hilfe von Frobenius-Eigenwerten und Spektrallücken abschätzen kann.
Voraussetzung für den Besuch dieser Vorlesung sind Kenntnisse in der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie, wie sie etwa im Modul Grundlagen der Stochastik vermittelt werden.

Literatur:

David Aldous, Persi Diaconis, Joel Spencer, and J. Michael Steele (editors),
Discrete probability and algorithms, Springer-Verlag, New York, (1995).

David Aldous and James Propp (editors), *Microsurveys in discrete probability*,
American Mathematical Society, Providence, RI (1998).

Rajeev Motwani and Prabhakar Raghavan, *Randomized algorithms*,
Cambridge University Press, Cambridge (1995).

Stochastik 1

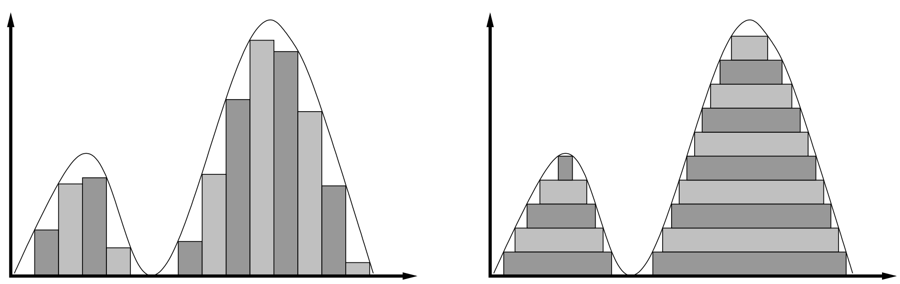
Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Di, Do 10-12 (05-136)

Die Vorlesung wendet sich an Studierende der Fachrichtung Mathematik, die bereits die Anfängervorlesungen, insbesondere die Grundlagen der Stochastik, gehört haben.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glücksspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in der Vordergrund gerückt.

Wir entwickeln den Apparat der Maß- und Integrationstheorie soweit, wie er für die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie notwendig ist. Parallel dazu werden die Anwendungen behandelt. Dazu gehören unter anderem die klassischen Grenzwertsätze (Gesetze der Großen Zahl, Zentraler Grenzwertsatz), bedingte Wahrscheinlichkeiten, schwache Konvergenz und charakteristische Funktionen.



Riemann-Integral (links) versus Lebesgue-Integral (rechts). Abb. aus [Klenke 2020].

Literatur:

L. Breiman, *Probability*, Wiley Verlag (1968).

R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge Univ. Press, 5. Aufl. (2019).

J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, 8. Auflage, (2018).

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*,Wiley Verlag, Bd. 1 u. 2 (1968 u. 1971).

H.-O. Georgii, *Stochastik*, de Gruyter, 5. Auflage (2015).

A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 4. Auflage (2020).

Funktionalanalysis III

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Di 14 -16, Do 16-18

Die Vorlesung ist die Fortsetzung der gleichnamigen Lehrveranstaltung aus dem Wintersemester 2021/22. Unter anderen Themen werden in diesem Teil nicht stetige lineare Abbildungen in normierten Räumen studiert. Eine der wichtigsten Klassen solcher Operatoren sind selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum. Das Hauptresultat der Theorie selbst-adjungierter Operatoren ist der sogenannte Spektralsatz. Dieser Satz liefert eine Darstellung der Funktion eines selbstajungierten Operators als Integral bezüglich des Spektralmaßes.

Kenntnisse aus der Maßtheorie sind von Vorteil, aber keine Voraussetzung.

A. Fomenko, Theory of oscillations and wave processes (1970)

Literatur:

J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart (2000).

T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, verschiedene Auflagen.

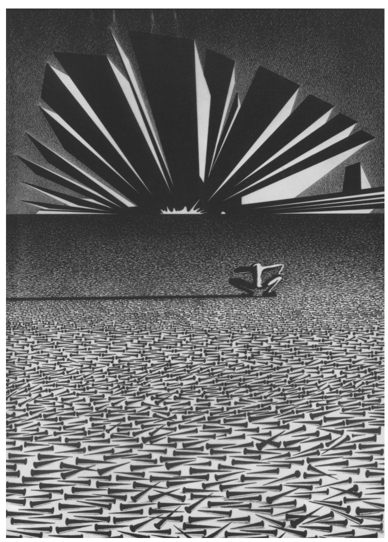
Chaostheorie II

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Di 12-14, Do 12-14

Die Vorlesung ist die Fortsetzung der gleichnamigen Lehrveranstaltung aus dem Wintersemester 2021/22. Unter anderen Themen werden in diesem Teil der Vorlesung Grundlagen der Ergodentheorie studiert. Die Ergodentheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung des Verhaltens typischer Trajektorien mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden. In der Vorlesung werden die fundamentalen Sätze der Ergodentheorie (Poincarés Wiederkehrsatz, Birkhoffs Ergodensatz, ...) bewiesen und eine Vielzahl von Beispielen behandelt, auch der zahlentheoretischen Natur.

Voraussetzungen:
Analysis I und II, lineare Algebra, etwas Maßtheorie ist von Vorteil, aber keine Voraussetzung. Zum ersten Teil des Kurses ist ein Vorlesungsskript vorhanden. Daher ist ein Quereinstieg in die Vorlesung prinzipiell möglich.



“From Chaos to Order” A.T. Fomenko (1976)

Literatur:

A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995).

R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer, Berlin (1987).

P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, Berlin (1982).

Funktionalanalysis

Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus

Termine: Mo, Do 14-16

Die Funktionalanalysis handelt von unendlichdimensionalen topologischen Vektorräumen und Eigenschaften linearer Abbildungen darauf. Beispiele solcher Räume sind gewisse Klassen von Funktionen und Folgen. Insbesondere beschäftigen wir uns mit Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren in Hilbert-Räumen.
Vorkenntnisse: Analysis 1-3, Lineare Algebra 1-2

Otto Nikodym und Stefan Banach, Memorial Bench in Krakau, Polen (Skulptur von Stefan Dousa)

Literatur:
W. Kaballo. Grundkurs Funktionalanalysis. Springer-Verlag (2011).
W. Rudin. Functional analysis. Second Edition. McGraw-Hill, Inc., New York, (1991).
D. Werner. Funktionalanalysis. Springer-Verlag, (2011).

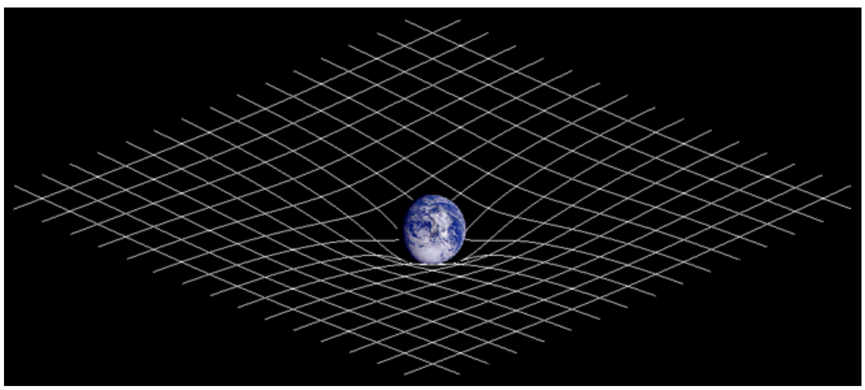
Differentialgeometrie I

Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus

Termine: Di, Mi 12-14

In der Differentialgeometrie werden geometrische Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten mit riemannschen und semi-riemannschen Metriken behandelt. Eine zentrale Rolle spielen verschiedene Krümmungsbegriffe und lokal kürzeste Kurven, sogenannte geodätische Kurven. Auch Zusammenhänge zwischen Geometrie und Topologie und spezielle Aspekte der Lorentzgeometrie werden untersucht, die eine breite Anwendung in Mathematik und Physik haben.

Vorkenntnisse: Analysis 1-3
Elementare Differentialgeometrie ist hilfreich, aber nicht notwendig.



Bildquelle:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Spacetime_curvature.png&oldid=485034886

Literatur:

Barret O'Neil, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, (1983).
J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Springer, GTM 218, (2003).
J. M. Lee, Riemannian manifolds, an introduction to curvature, Springer.
Cheeger, Eben, Comparison theorems in Riemannian Geometry, Ams Chelsea Publishing, (2008).

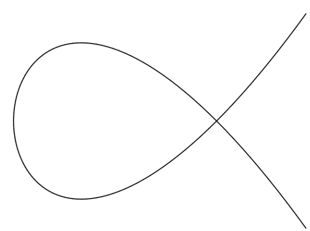
Algebra II

Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Di, Fr 8-10

Die Vorlesung richtet sich an alle Studentinnen und Studenten der Mathematik ab dem vierten Fachsemester. Inhaltliche Voraussetzung für die Teilnahme sind gute Kenntnisse der linearen Algebra und der Algebra I. Die Vorlesung Algebra II ist die Grundlage für die weitere Beschäftigung mit algebraischer Zahlentheorie oder algebraischer Geometrie und sollte deshalb möglichst schon im Anschluß an die Algebra I gehört werden, zumindest wenn man eine Vertiefung in den genannten Richtungen anstrebt.

Gegenstand der Vorlesung ist die kommutative Algebra, also die Theorie der Moduln über den kommutativen Ring, die Dimensionstheorie noetherscher Ringe und erste Grundlagen der Theorie affiner Schemata.



Das Bild zeigt die reellen Nullstellen der einfachsten singulären irreduziblen Kurve, einer nodalen Kubik mit der Gleichung $y^2 - x^2 - x^3 = 0$.

Literatur:

M. Atiyah, I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley.

H. Matsumura, *Commutative Algebra*, The Benjamin/Cummings Publishing Company.

D. Eisenbud, *Commutative Algebra*, Springer GTM 150.

O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra I, II* Springer GTM 29.

Modulräume von G-Bündeln auf Kurven

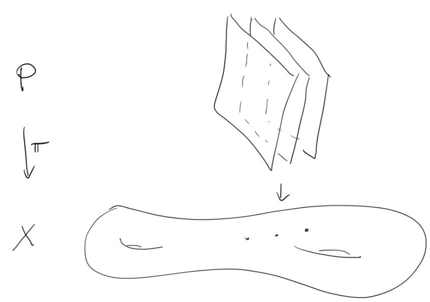
Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Mo, Do 8-10

Die Vorlesung richtet sich an alle Studentinnen und Studenten mit guten Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie.

Wir betrachten eine glatte projektive Kurve X und eine algebraische Gruppe, etwa $G = \mathrm{GL}_n$. Ein G-Hauptfaserbündel ist, grob gesprochen, eine Abbildung $\pi : P \to X$ von Schemata, die lokal in X isomorph zu einem Produkt $X \times G$ ist. Dieses Konzept verallgemeinert den Begriff des Vektorbündels über X. Selbst wenn man die topologischen Daten fixiert, kann der Isomorphietyp eines Hauptfaserbündels variieren, und die Menge der Isomorphietypen werden durch sogenannte Modulräume parametrisiert.

Nach einer Einführung in die Theorie der algebraischen Gruppen sollen zunächst die geometrischen Eigenschaften von Hauptfaserbündeln selbst studiert werden, danach der Modulstack der Hauptfaserbündel. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei sind sogenannte Schleifengruppen, und das erste Ziel ist der Beweis des Uniformisierungssatzes. Wenn dann noch Zeit verbleibt, wollen wir die geometrische Eigenschaft des Modulstacks besprechen, insbesondere die Zusammenhangskomponenten und die Picardgruppe.



Zu den algebraischen Gruppen gibt es eine Reihe von Lehrbüchern, zur Theorie der Hauptfaserbündel müssen wir auf die über zahlreiche Zeitschriftenartikel verteilte Originalliteratur zurückgreifen. Exemplarisch nenne ich die folgenden:

Literatur:

Borel, A: *Linear Algebraic Groups*, Springer GTM 126, (1991).
Le Potier, J: *Lectures on Vector bundles*, Cambridge Studies in Adv. Math. 54, (1997).
Kumar, S: *Conformal Blocks, Generalized Theta Functions and the Verlinde Formula*, Cambridge UP, New Mathematical Monographs, Series Number 42.
Sorger, Ch: *Lectures on moduli of principal G-bundles over algebraic curves*, erschienen in Moduli Spaces in Algebraic Geometry, ICTP Lecture Notes Series, Vol 1 (2000).
Beauville, A; Laszlo, Y: *Conformal Blocks and Generalized Theta Functions*, Communications in Mathematical Physics 164 (1994), p. 385 - 419.
Faltings, G: *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*, J. Eur. Math. Soc. 5 (2003), p. 41- 68.

Modellierungspraktikum: Mehrphasenströmungen

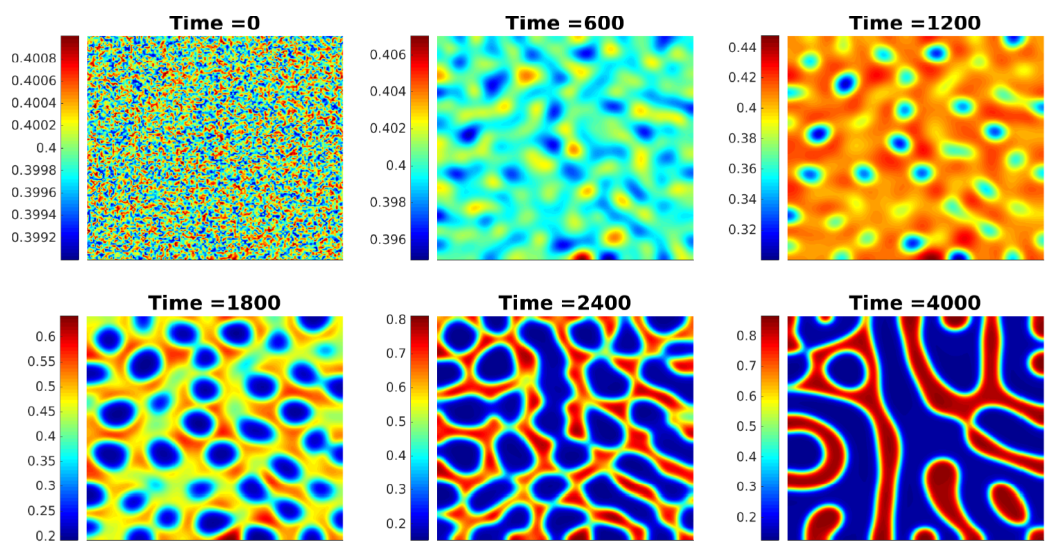
Dozentin: Prof. Dr. Mária Lukáčová

Termine (Praktikum): Mi 10-12 und 12-14

Viele natürliche oder technische Prozesse führen zu Strömungen von unterschiedlichen Phasen, wie z.B. Mischung von Wasser und Öl. Das Ziel des Modellierungspraktikums ist, viskose Phasenseparationsprozesse zu modelieren, analysieren und numerisch zu berechnen. Dabei werden wir uns auf diffusive Phasenseparationprozesse konzentrieren und lernen die Herleitung mathematischer Modelle mittels Variationsrechnung kennen.

Im Rahmen der Projekte, die in kleinen Gruppen bearbeitet werden, möchten wir Phasenseparationsprozesse aus der Biologie, Fluiddynamik oder aus den Materialwissenschaften untersuchen und konkrete numerische Lösungen erarbeiten. Es handelt sich hier um den zweiten Teil des Vertiefungsmoduls "Wissenschaftliches Rechnen" in den mathematischen Masterstudiengängen. Das Praktikum baut auf Grundlagen der Numerik von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen auf.

Vorrausetzung: Grundlagen der Numerik, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Numerik partieller Differentialgleichungen



Numerische Simulation von Entmischung der Polymerlösung (berechnet von A. Brunk)

Literatur:

A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer (1994).*
D. Braess, Finite Elemente, Springer (2003).
H. Kielhöfer, *Variationsrechnung (2010).*
J. E. Hilliard, J. W. Cahn, Free energy of a non uniform system I. Interfacial Free Energy, J. Chem. Phys. 28, 258–267 (1958).

Kohomologie von Gruppen

Dozent: Dr. Moritz Rahn

Termine: Di, Do 14-16

Eine Wirkung einer Gruppe G auf einer abelschen Gruppe M ist einfach ein Homomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(M)$ von G in die Automorphismengruppe von M – mit anderen Worten wirkt G durch Automorphismen auf M. Durch diesen Begriff werden zahlreiche interessante Symmetrien erfasst. Eine zentrale Invariante hierbei ist durch die *Fixpunktgruppen* $M^G = \{x \in M \mid g \cdot x = x \; \forall g \in G\}$ gegeben. Der Übergang $M \mapsto M^G$ verträgt sich gut mit Unterobjekten, aber nicht mit dem Bilden von Quotienten, und diese harmlos wirkende Beobachtung liefert bereits einen direkten Einstieg in die Kohomologietheorie von Gruppen und allgemeiner in die homologische Algebra.
Mögliche Themen für diese Vorlesung sind beispielsweise (und bei der finalen Auswahl richte ich mich gerne nach Ihren Vorkenntnissen und Interessen):

1. Gruppenwirkungen und Gruppenringe
2. Tensorprodukte und Homomorphismengruppen
3. Homologische Algebra im Fall von Moduln über einem Ring
4. algebraische Definition der Kohomologie $H^*(G;M)$ und Homologie $H_*(G;M)$ von Gruppen und Gruppenwirkungen
5. grundlegender Kalkül (wie Induktion, Koinduktion, Transfer)
6. exemplarische Berechnungen von Gruppen(ko)homologie
7. Zusammenhang zur Topologie
8. Anwendungen in Algebra, Zahlentheorie und Topologie

Voraussetzungen: Grundveranstaltungen sowie die Algebra 1 werden vorausgesetzt, und mit diesen Techniken ist ein vernünftiger Einstieg in das Thema bereits gut möglich.

Unter-objekt

Quotient

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

$$\rightsquigarrow \; 0 \to (M')^G \to M^G \to (M'')^G \to ???$$

Zwar nur ein abstraktes Bild, aber immerhin ein Bild zum Thema!

Literatur:

Brown, *Cohomology of groups*, Springer (1982).

Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer (2009).

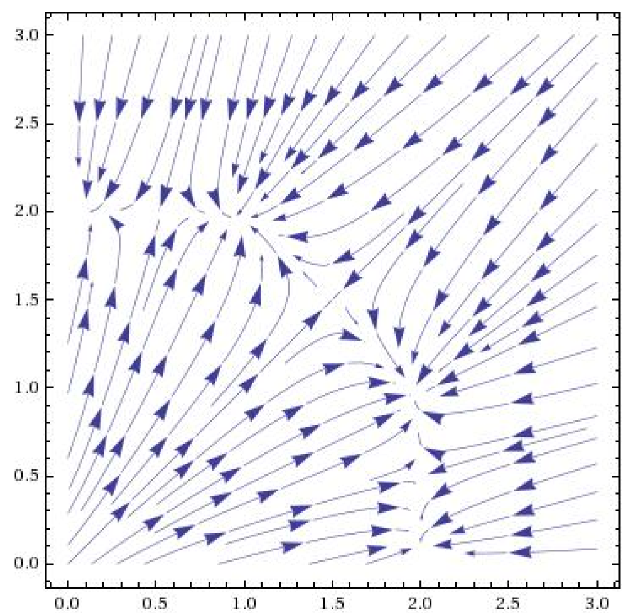
Weibel, *An introduction to homological algebra*, CUP (1994).

Dynamische Systeme

Dozent: Prof. Dr. Alan Rendall

Termine: Di, 10-12

In dieser Vorlesung werden Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachtet. Insbesondere geht es um die qualitativen Eigenschaften von Lösungen solcher Gleichungen. Die Bezeichnung 'Dynamische Systeme' ist ein Hinweis auf eine Betrachtungsweise dieser Systeme, die auf Poincaré zurückgeht. Dabei stehen geometrische Aspekte und die Beziehungen zwischen verschiedenen Lösungen im Mittelpunkt. Man möchte für konkrete Beispiele Fragen beantworten wie: sind alle Lösungen beschränkt, wie viele Gleichgewichtszustände (zeitunabhängige Lösungen) gibt es, sind diese stabil, gibt es Oszillationen (periodische Lösungen)? Die Beziehungen zwischen der mathematischen Theorie und Anwendungen in den Naturwissenschaften, z.B. Chemie und Biologie, werden eingehend behandelt. Ein einfaches Beispiel, das als Leitfaden dient, ist das fundamentale System der Virusdynamik. Diese drei Gleichungen beschreiben die zeitliche Entwicklung einer Virusinfektion in einem Wirt. Das Bild zeigt Lösungen eines anderen Systems, das die Dynamik von Populationen von Immunzellen (weißen Blutkörperchen) zeigt. Es gibt sieben Gleichgewichtszustände. Voraussetzung für diese Vorlesung sind die Grundvorlesungen der Mathematik.



Literatur:

L. Perko *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer (2001).

A. D. Rendall *Dynamische Systeme*. Vorlesungsskript, JGU, (SoSe 2017).

Geschichte der Mathematik II

Dozent: Prof. Dr. Tilman Sauer

Termine: Mo 16-18, Do 14-16

Die Vorlesung schließt sich inhaltlich an die "Kulturgeschichte der Mathematik" vom Wintersemester an und gibt einen Überblick über Entwicklungen in der Mathematik vom 17. Jahrhundert bis in das 20. Jahrhundert. Ausgehend von der analytischen Geometrie von Descartes wird die Entstehung und Entfaltung der Analysis behandelt und die Entwicklung und Ausdifferenzierung der Geometrie bis hin zur Herausbildung einer mehrdimensionalen Differentialgeometrie als mathematische Voraussetzung für die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie.
Behandelte Themen u.a.: die Vielfalt der geometrischen Probleme und Methoden im 17. Jahrhundert und die Herausbildung der Analysis; weitere Entwicklung der Analysis in Richtung einer Algebraisierung; Anfänge der Variationsrechnung; Ursprünge der nicht-euklidischen Geometrie; der Begriff der Krümmung und das Theorema egregium; Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs und Axiomatisierung der Geometrie; Invariantentheorie und Tensorkalkül; klassische Mechanik und Relativitätstheorie.

Leonhard Euler (Wikimedia Commons)

Literatur:

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, Wiley (1989).

Edwards, Charles, *The Historical Developments of Calculus*, Springer (1994).

Jahnke, Niels (Hg.) *Geschichte der Analysis*, Heidelberg (1999).

Mainzer, Klaus, *Geschichte der Geometrie*, B.I. (1980).

Stillwell, John. *Matheamtics and Its History*, Springer (2010^3)

eigene Folien und Skripte

Differenzialgeometrie und Mannigfaltigkeiten

Dozent: PD Dr. Matthias Schneider

Termine: Mo 10-12, Mi 12-14

Warum ist die Banane krumm?

Aus mathematischer Sicht ist die Antwort recht einfach: Nach dem Satz von *Gauß-Bonnet* ist das Integral der Gauß-Krümmung über die Oberfläche bei jeder Banane 4π - also muss jede Banane krumm sein.

Der Satz von *Gauß-Bonnet* ist sicherlich eines der schönsten mathematischen Ergebnisse, welches man in diesem Semester lernen kann, und gilt nicht nur für Bananen, sondern für jede kompakte orientierte zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Theorie der Krümmung von Kurven, Flächen und Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Für die Teilnahme an der Vorlesung sind solide Kenntnisse der Vorlesungen Analysis 1-2 sowie Lineare Algebra 1-2 hilfreich.

Literatur:

J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer (2010).

C. Bär, *Elementare Differenzialgeometrie*, de Gruyter (2000).

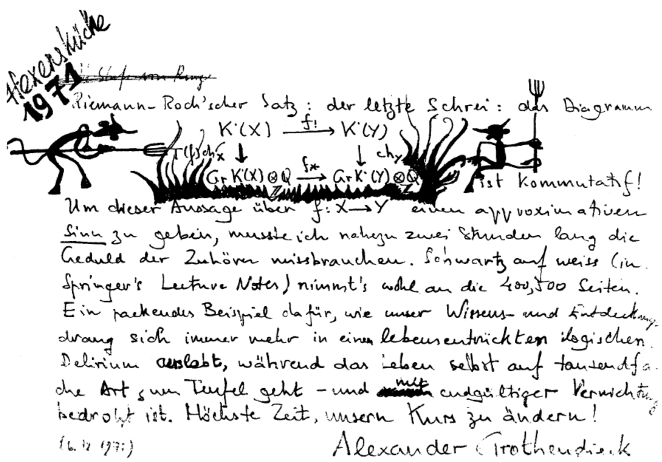
M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications (2016).

Algebraische Geometrie II

Dozent: Prof. Dr. Georg Tamme

Termine: Di 10-12, Fr 10-12

Diese Vorlesung setzt die Algebraische Geometrie I aus dem Wintersemester 2021/22 fort. Neben einer Vertiefung der Theorie der Schemata liegt das Hauptaugenmerk auf dem Studium der Kohomologie quasi-kohärenter Garben. Stichworte zum geplanten Inhalt: Abgeleitete Funktoren, Garbenkohomologie, Čech-Kohomologie, Serre-Dualität und Riemann–Roch, Anwendungen auf algebraische Kurven. Im Wintersemester wird es eine weiterführende Vorlesung aus dem Bereich der algebraischen Geometrie geben. Es ist also möglich, die Algebraische Geometrie II als ersten Teil eines Vertiefungszyklus zu belegen.



Grothendiecks Version des Satzes von Riemann–Roch
(von http://math.stanford.edu/˜vakil/11-245/)

Literatur:

R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press (2002)

Y. Manin, *Introduction to the theory of schemes*, Springer (2018).

Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten

Termine: Di, Fr 14-16

Die Theorie der Riemannschen Flächen ist eine nätürliche Erweiterung der Funktionentheorie. Ein Besuch jener ist dann auch Voraussetzung für die Teilnahme an dieser Vorlesung. Vorkenntnisse aus der Topologie über Flächen sind nützlich aber nicht unbedingt notwendig, da dies in der Vorlesung thematisiert wird. Behandelt werden weiter die Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion, die Überlagerungstheorie und der Riemannsche Existenzsatz. Weiter entwicklen wir die Theorie der holomorphen Differentialformen auf Riemannsche Flächen und beweisen den Satz von Riemann-Roch und die Serre Dualität. Die Vorlesung schließt ab mit der Konstruktion von meromorphen Funktionen zu vorgegebenen Divisoren und Anwendungen.

Literatur:

S. K. Donaldson, *Riemann Surfaces*, Lecture notes (2004).

O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher 184, Springer (1977).

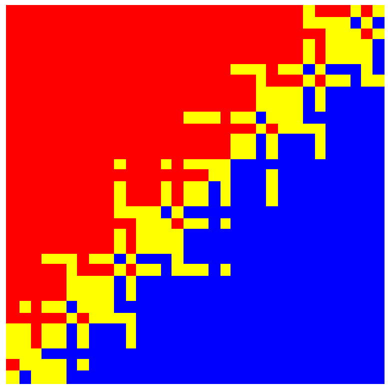
D. van Straten, *Riemannsche Fächen und algebraische Kurven*, Vorlesungsskript, Mainz (2012).

H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Flächen*, Springer Fachmedien (1997).

Selected Topics in Scientific Computing

Dozent: Dr. Kai Werth

Termine: Fr 10-12



Berechnung der Orientierung *positiv*, *negativ* oder *kollinear* einer $128 \cdot 2^{-53}$-Umgebung um den Ursprung mit zwei weiteren Punkten auf einer Ursprungsgeraden in `double`-precision.

Früher oder später kommst du als Mathematiker*in an den Punkt, deine theoretischen Erkenntnisse in praktischen Programmiercode zu gießen. Dies kann unerwartet schnell zu einem Abenteuer mit ungewissem Ausgang werden, und jeder Schritt wirft neue Fragen auf:

- Wie beginne ich, und was ist ein guter Programmierstil?
- Ist das ein Rundungsfehler oder ein Programmierfehler?
- Kann mein Algorithmus mir sagen, ob er korrekt arbeitet?
- Wie kann ich mein Programm mit einfachen Mitteln schneller und effizienter machen? Und kann mir meine Grafikkarte dabei helfen?

In dieser Vorlesung betrachten wir anhand ausgesuchter praktischer Problemstellungen einige Fallstricke, die uns beim wissenschaftlichen Programmieren begegnen können und wie wir damit umgehen.

Wir arbeiten vornehmlich in `python`, eine Jupyterhub steht allen Teilnehmer*innen zur Verfügung und es muß nichts selbst installiert werden. Programmierkenntnisse können hilfreich sein, sind aber keine Voraussetzung.

Literatur:

Harris, C.R. et al., *Array programming with NumPy.* Nature, 585, pp.357–362 (2020).
William H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press (2007).
Thomas H. Cormen et al., *Introduction to Algorithms.* The MIT Press (2001).
Kurt Mehlhorn and Stefan Näher *LEDA – A platform for combinatorial and geometric computing.* In: CACM (1995).