Vorlesungsverzeichnis

Mathematik

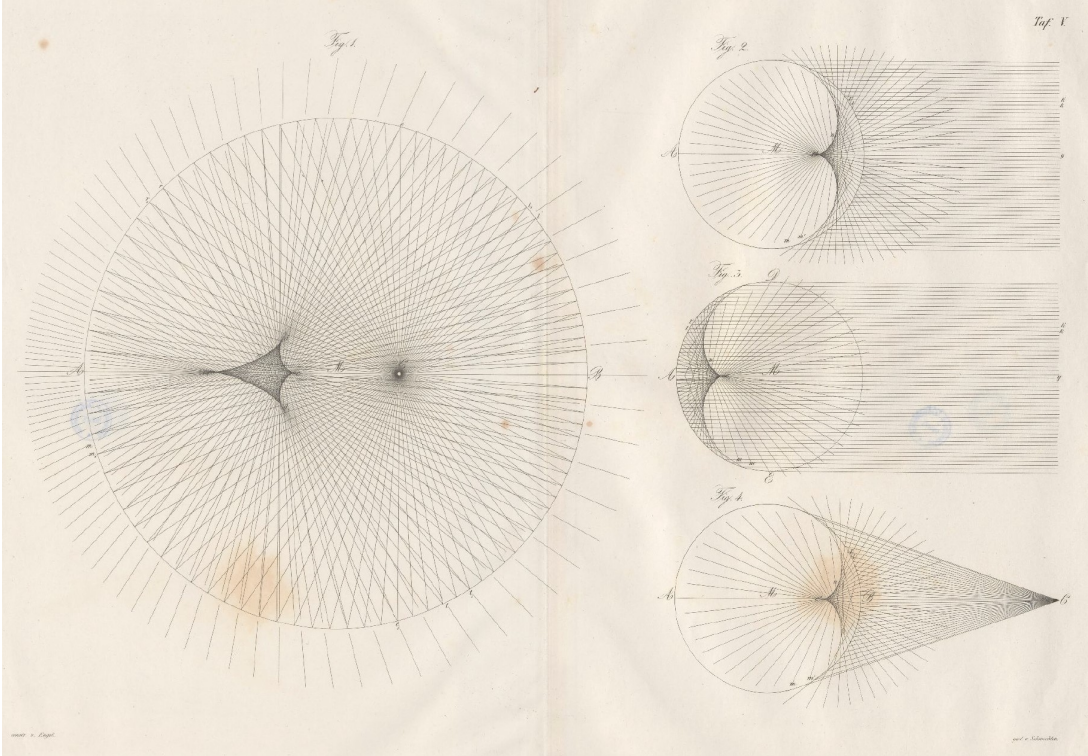


Bild aus: Engel, Schellbach: *Darstellende Optik, nebst 14 Kupfertafeln*, Springer, Berlin (1849).
Scan: ULB Sachsen-Anhalt.

Mainz

Sommersemester 2023

Zum Bild:

Kaustiken durch Spiegelung am Kreis

Das Bild zeigt eine der Kupfertafeln zum Thema Optik, die Ferdinand Engel und Karl Heinrich Schellbach wohl 1849 gemeinsam mit kurzen, allgemein verständlichen Erklärungen herausgebracht haben. Eine recht bekannte Situation ist jene in Figur 3. Sie zeigt einen 2d-Schnitt eines halbzylinderförmigen Spiegels, in den Strahlen (im Bild von rechts) parallel einfallen (ähnlich Sonnenstrahlen in einer Tasse).

Durch die Präzision der Zeichnung ist recht gut erkennbar, dass sich entlang einer Kurve viele der reflektierten Strahlen nahezu überlagern. Diese Kurve, eine sogenannte *Kaustik*, berührt alle einmal reflektierten Strahlen und ist daher eine sogenannte *Einhüllende* der Familie dieser Strahlen.

Die Möglichkeit, Gleichungen und andere Eigenschaften solcher Einhüllenden zu berechnen, ist eine der Errungenschaften der Differential- und Integralrechnung des späten 17. Jahrhunderts, durch Leibniz, Newton und andere. Für die heutige Differential- und algebraische Geometrie sind solche Kurven interessante erste konkrete Studienobjekte. Als besondere Punkte fallen bei allen vier Kurven beispielsweise die spitzen Stellen auf, sogenannte *gewöhnliche Spitzen* oder *Kuspensingularitäten*.

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Sommersemester 2023 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Januar 2023

Übersichtsplan

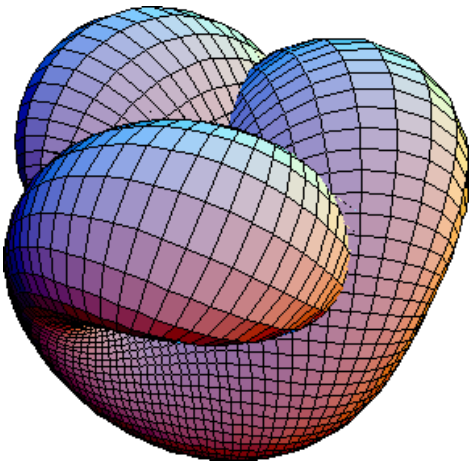
Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10		Computeralgebra (de Jong) N3 Algebra II (Blickle) 04-432		Computeralgebra (de Jong) N1	
10-12		Stochastik I (Hartung) 04-422 Algebraische Geometrie II (van Straten) 04-230 Stochastik III (Klenke) 05-136 Algebraische Topologie I (Bachmann) 04-522	Modellierungspraktikum (Hanke-Bourgeois) 05-136 Geometrie und Optik ab der Mitte der frühen Neuzeit (Labs) 05-522 Algebraische Topologie I (Bachmann) 04-522	Stochastik I (Hartung) 04-422 Algebraische Geometrie II (van Straten) 04-230 Stochastik III (Klenke) 05-136 Geometrie und Logik (Fröhlich) 05-514	Modellierungspraktikum (Hanke-Bourgeois) 05-136
12-14		Geometrie und Logik (Fröhlich) 05-514 Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten (Kraus) 04-422 Fourier-Analysis (Kostrykin) 04-522		Algebra II (Blickle) 04-432 Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten (Kraus) 04-422 Seminar Fourier-Analysis (Kostrykin) 04-522	
14-16	Funktionalanalysis (Kostrykin) 04-512 Partielle Differentialgleichungen II (Rendall) 04-522	Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen (van Straten) 04-422 Partielle Differentialgleichungen II (Rendall) 04-522		Funktionalanalysis (Kostrykin) 04-512 Geschichte der Mathematik II (Sauer) 05-514 Einführung in das Atiyah-Singer-Index-Theorem Teil II (Klaus) 04-426 ca. alle 2 Wochen, Termine siehe Jogustine	Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen (van Straten) 04-422 Optimalsteuerungen (Spindler) 04-426 c.t.
16-18	Geschichte der Mathematik II (Sauer) 05-514 Approximationstheorie (Öffner) 04-426				Optimalsteuerungen (Spindler) 04-426 s.t.

Algebraische Topololgie 1

Dozent: Prof. Dr. Tom Bachmann

Termine: Di, Mi 10-12

Algebraische Topologie studiert Räume durch Zuweisung algebraischer Invarianten.
Aus der Einführung Topologie sind die Fundamentalgruppe und singuläre Homologie bereits als Beispiele bekannt.
In diesem Kurs studieren wir zunächst singuläre Homologie genauer, und führen dann den dualen Begriff der singulären Kohomologie ein. Wir verwenden homologische Algebra um Zusammenhänge zwischen Homologie, Kohomlogie und ihren Varianten mit Koeffizienten herzustellen.



Die reelle projektive Ebene, eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit.

Danach beschäftigen wir uns mit der Theorie von Poincaré-Dualität, die eine auszeichnende Eigenschaft der Kohomologie von *Mannigfaltigkeiten* ist. Als letztes führen wir den Begriff eines Vektorbündels ein und studieren sogenannte charakteristische Klassen.

Literatur:

A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).

H. Miller, *Lectures on Algebraic Topology*, World Scientific (2021).

G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer (1997).

Algebra 2: Kommutative Algebra

Dozent: Prof. Dr. Manuel Blickle

Vorlesung: Di 8-10, Do 12-14 – Übung: n.V.

Emmy Noether 1882—1935, Mother of modern Algebra

In dieser Vorlesung werden folgende Themen aus der kommutativen Algebra behandelt:
Polynomgleichungen in mehreren Variablen: Verschwindungsmenge, Zariski-topologie, Hilberts Basissatz, noethersche Ringe, Hilberrts Nullstellensatz, Spektrum eines Rings
Moduln über kommutativen Ringen: Kettenbedingungen, Nakayama Lemma, Lokalisierung, Träger, Primärzerlegung, Exakte Sequenzen, Funktoren, Restriktion und Tensorprodukt, Flachheit, Limiten und Kolimiten
Dimensionstheorie: Krulldimension, Transzendenzgrad, endliche Ringerweiterungen, Noether Normalisierung, Krulls Hauptidealsatz, Dimension des Polynomrings, reguläre lokale Ringe
Das Handwerkszeug, welches man in dieser Vorlesung lernen kann, ist unverzichtbar für alle, die über eine Vertiefung in einem der Bereiche Algebra, algebraische Geometrie, komplexe Geometrie, Arithmetik oder auch Topologie nachdenken. Im kommenden Semester schließt sich ein Vertiefungszyklus in algebraischer Geometrie an. Eine optimale Ergänzung zur Vorlesung Algebra ist das Hauptseminar **Homologische Algebra** welches in diesem Semester angeboten wird.
Voraussetzung für die Teilnahme ist ein solides Verständnis der Grundbegriffe der Algebra aus den Vorlesungen Algebra 1: Körper, Ringe, Moduln oder Computeralgebra.

Literatur:
Reid, Miles, *Undergraduate Commutative Algebra*, Cambridge Univ. Press.
Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co.
Eisenbud, David *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York (1995) xvi+785 pp.

Computeralgebra

Dozent: Prof. Dr. Theo de Jong

Termine: Di, Do 8–10

In der Vorlesung werden wir einige Probleme aus der algorithmischen Mathematik behandeln, wie zum Beispiel:

(1) Primzahlbestimmung und Faktorisierung von natürlichen Zahlen (z.B. Miller-Rabin, Pollard rho und die $p-1$ Methode).

(2) Das Lösen von polynomialen Gleichungssystemen. In der linearen Algebra haben Sie gelernt lineare Gleichungssysteme zu lösen. Wir werden Gleichungen höheren Grades betrachten und sehen, wie man feststellen kann, ob das Gleichungssystem eine Lösung hat und gegebenfalls die (reellen) Lösungen numerisch berechnen.

(3) Faktorisierung von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Wie schafft ein Computerprogramm es zum Beispiel das folgende Polynom zu faktorisieren?

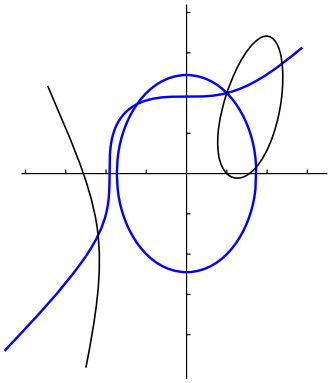
$$-15x^{18} + 2x^{17} + 44x^{16} + 82x^{15} - 2x^{14} - 82x^{13} - 213x^{12} - 32x^{11} + 77x^{10}$$
$$+125x^9 + 89x^8 + 6x^7 - 194x^6 - 14x^5 + 23x^4 + 2x^3 + 97x^2 - 21x - 42$$

Lösung des Problems:

$$\left(5x^{10} + x^9 - x^8 - 10x^7 - 9x^6 + 8x^4 + x^3 + 8x^2 - 7\right) \cdot$$
$$\left(-3x^8 + x^7 + 8x^6 + 9x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3x + 6\right)$$

Die benutzten Methoden liefern eine gute Vorbereitung auf abstraktere algebraische Vorlesungen.

Zur Vorlesung gehört ein integrierter Übungs- und Praktikumsbetrieb. Programmierkenntnisse werden NICHT vorausgesetzt, es ist jedoch ratsam, sich schon etwas von der Sprache Python anzueignen. Pythonkurse werden in den Semesterferien angeboten, aber auch auf youtube sind elementare Einführungen zu finden. Wir werden das Computeralgebrasystem `SAGE` einsetzen, welches kostenlos unter `http://www.sagemath.org/` verfügbar ist.



Literatur:

D. Bressoud: *Factorization and Primality Testing*, Springer Verlag (1989).

G. Von zur Gathen, *Modern Computer Algebra*, Cambridge University Press (2013).

D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Verlag (2015).

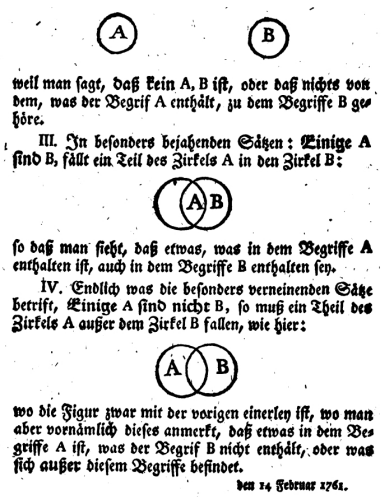
Grundlagen der Geometrie und Logik

für M.Ed. 2.Std./Exit-Option nach der Hälfte des Semsesters

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: Di 12-14, Do 10-12

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in klassische und moderne Begriffe der mathematischen Logik, deren Entwicklung eng mit der Geschichte der Euklidischen Geometrie und des uns heute vertrauten Zahlenbegriffs verlief. Wir diskutieren solche historischen Stationen, beginnend mit der Geometrie des griechischen Alterums bis zu den berühmten Gödelschen Sätzen und der für maschinengestützte Beweise beispielgebenden Formulierung einer Elementargeometrie nach Alfred Tarski.



A B

weil man ſagt, daß kein A, B iſt, oder daß nichts von dem, was der Begrif A enthält, zu dem Begriffe B gehöre.

III. In beſonders bejahenden Sätzen: Einige A ſind B, fällt ein Teil des Zirkels A in den Zirkel B:

A B

ſo daß man ſieht, daß etwas, was in dem Begriffe A enthalten iſt, auch in dem Begriffe B enthalten ſey.

IV. Endlich was die beſonders verneinenden Sätze betrift, Einige A ſind nicht B, ſo muß ein Theil des Zirkels A außer dem Zirkel B fallen, wie hier:

A B

wo die Figur zwar mit der vorigen einerley iſt, wo man aber vornämlich dieſes anmerkt, daß etwas in dem Begriffe A iſt, was der Begrif B nicht enthält, oder was ſich außer dieſem Begriffe befindet.

den 14 Februar 1761.

Aus L. Euler: *Briefe an eine deutsche Prinzessin*

Literatur:

R.E. Hodel, *An introduction to mathematical logic*, Dover (2013).

D.W. Hoffmann, *Grenzen der Mathematik*, Springer Spektrum (2018).

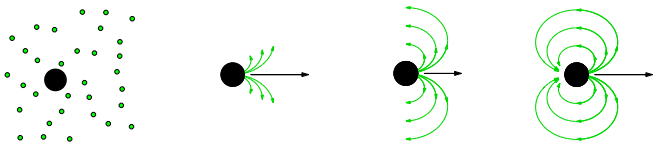
D.W. Hoffmann, *Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze*, Springer Spektrum (2017).

Modellierungspraktikum Langevin-Dynamik: Direkte und inverse Probleme

Dozent: Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois

Vorlesung: Mi 10–12, Übung: Fr 10–12

Das diesjährige Modellierungspraktikum behandelt das dynamische Verhalten eines Kolloids der Masse m in einem Fluid im thermodynamischen Gleichgewicht:



Wie die obige Skizze illustrieren soll, verdrängt das Kolloid bei seiner Bewegung die Fluidpartikel, was aus Sicht des Kolloids den Effekt einer bremsenden Reibungskraft hat. Hinter dem Kolloid entsteht jedoch ein Sog, in den die verdrängten Partikel hineingezogen werden, so dass sie von hinten an das Kolloid stoßen und es dabei beschleunigen. Da es sich größtenteils um dieselben Teilchen handelt, die kurz vorher weggestoßen wurden, steht dieser beschleunigende Effekt mit der Geschwindigkeit v des Kolloids aus der Vergangenheit in Zusammenhang; die Bewegungsgleichung des Kolloids enthält also einen Gedächtnisterm:

$$m\dot{v}(t) \;=\; -\int_0^t \gamma(t-\tau)v(\tau)d\tau + F(t).$$

Dabei ist γ der sogenannte Gedächtniskern und F eine effektive Kraft, die aus der Interaktion der Fluidpartikel untereinander resultiert.
In der statistischen Physik ist man an einer Modellierung der Bewegung des Kolloids interessiert, die ohne die Bewegungsgleichungen der Mikroteilchen auskommt, da diese ansonsten auch simuliert werden müssen. Daher ersetzt man die effektive Kraft F durch einen stochastischen Prozess. Allerdings ist es in der Regel nicht realistisch, den Gedächtniskern und die effektive Kraft analytisch hinschreiben zu können; diese Größen müssen vielmehr aus numerischen Molekulardynamik-Rechnungen extrahiert werden.

Das Praktikum behandelt sowohl dieses inverse Problem als auch die resultierende Simulation der Bewegung des Kolloid-Teilchens (das Vorwärtsproblem).
Die Ergebnisse atomistischer Molekulardynamik-Simulationen, also Daten für das inverse Problem, werden zur Verfügung gestellt.
Für eine Teilnahme am diesjährigen Praktikum ist keine vorherige Teilnahme an der Vorlesung „Numerik partieller Differentialgleichungen“ erforderlich; die stochastischen Grundlagen werden im Vorlesungsteil des Praktikums erarbeitet.

Literatur:

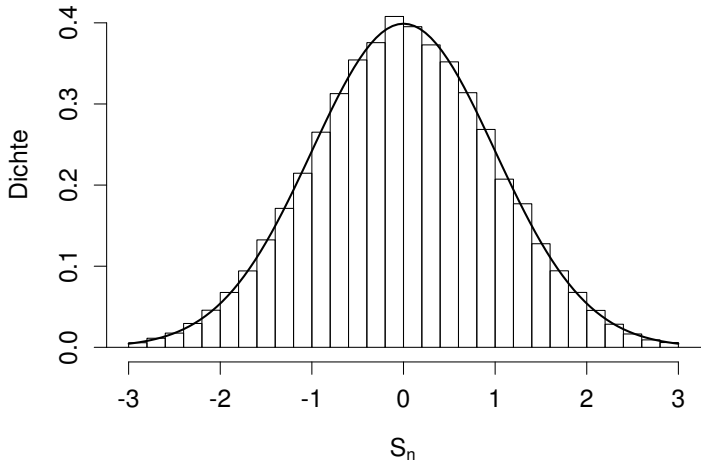
G. Jung, M. Hanke und F. Schmid, *Iterative reconstruction of memory kernels*, J. Chem. Theory Comput. 13 (2017), S. 2481-2488.

Stochastik I

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Di, Do 10-12

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glücksspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in den Vordergrund gerückt.



Normalapproximation der Binomialverteilung

In der Vorlesung lernen wir zunächst die maßtheoretischen Grundlagen kennen, welche wir in der Vorlesung *Grundlagen der Stochastik* nicht besprochen hatten, und danach allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße. Wir beweisen dann das starke Gesetz der großen Zahlen unter weniger Annahmen. Zudem beschäftigen wir uns im Detail mit dem zentralen Grenzwertsatz, welchen wir in der Grundlagenvorlesung nicht bewiesen hatten. Hierzu verwenden wir charakteristische Funktionen. Wir schließen das Semester mit einer netten Anwendung der Theorie ab. Wir beschäftigen uns entweder mit Ver-allgemeinerungen des zentralen Grenzwertsatzes bzw. Abweichungen davon oder mit Martingalen. Dies hängt zum einen von der Zeit ab, die wir hierfür noch haben, aber auch vom Interesse der Studierenden.

Literatur:

Lisa Hartung, Vorlesungsskript Stochastik 1 SS 2020, `https://www.dropbox.com/s/2oy1egi90voi6m3/wt-new.pdf?dl=0`.
Hans-Otto Georgii , *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, de Gruyter Verlag, 2015
Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Spektrum, 2013
William Feller, *An introduction to probability and its applications*, Vol. 1. 3rd Ed., John Wiley, 1991

Einführung in das Atiyah-Singer-Index-Theorem (Teil 2)

Dozent: apl. Prof. Dr. Stephan Klaus

Termine: Do 14-16, ca. alle 2 Wochen, Termine siehe Jogustine

$$dim(ker(D)) - dim(ker(D^*)) = \int_M ch(D)Td(M)$$

Das Atiyah-Singer-Index-Theorem stellt einen Zusammenhang her zwischen den Lösungsräumen elliptischer partieller Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten und gewissen topologischen Invarianten. Vereinfacht gesprochen gibt der analytische Index der Differentialgleichung die Dimension des Lösungsraumes an, während der topologische Index durch sogenannte charakteristische Klassen beschrieben wird. Das Theorem besagt, dass beide Indizes übereinstimmen. Es handelt sich dabei um eines der berühmtesten Ergebnisse in der Differentialtopologie, das in zahlreichen anderen Gebieten angewendet werden kann und dort wichtige Sätze und Theoreme verallgemeinert, z.B. das Gauß-Bonnet-Chern-Theorem, das Riemann-Roch-Theorem und den Signatursatz von Hirzebruch.

Die Vorlesung wird eine übersichtsartige Einführung in diese Theorie geben, wobei auch die genannten Anwendungen auf Topologie, Differentialgeometrie und algebraische Geometrie besprochen werden sollen.

Voraussetzungen: Solide Grundkenntnisse in Differentialtopologie (insbesondere Mannigfaltigkeiten, Differentialformen, deRham-Kohomologie, Vektorbündel)

Zielgruppe: Fortgeschrittene Lehrveranstaltung mit Überblickscharakter, ohne Übungen

Zuordnung Gebiete: Differentialtopologie mit Verbindungen zur Differentialgeometrie und Algebraischen Geometrie

Literatur:

Nicole Berline, Ezra Getzler, Michele Vergne
Heat Kernels and Dirac Operators
Grundlehren der Mathematik, Springer Heidelberg (2004).

Peter B. Gilkey
Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Theorem
Publish or Perish (1995).
Das Buch ist online frei verfügbar unter http://www.emis.de/monographs/gilkey/

Richard S. Palais
Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem
Annals of Mathematics Studies 57, Princeton Univ. Press (1965).

Stochastik III

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Di, Do 10-12

Die Vorlesung wendet sich an Studierende der Fachrichtung Mathematik.
Sie ist inhaltlich die Fortsetzung des dreisemestrigen Kurses der Stochastik (Einführung in die Stochastik, Stochastik I, Stochastik II).
Formal ist sie der zweite Teil des Vertiefungsmoduls STO-002, der im vorangehenden Semester mit der Vorlesung Stochastik II begonnen wurde.
Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glückspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in der Vordergrund gerückt.
In der Stochastik III beschäftigen wir uns mit Ergodentheorie, der Theorie großer Abweichungen und Poisson'schen Punktprozessen. Je nach Zeit lernen wir die Brown'sche Bewegung und die zugehörigen Grenzwertsätze kennen oder eine fortgeschrittene Theorie Markov'scher Ketten.

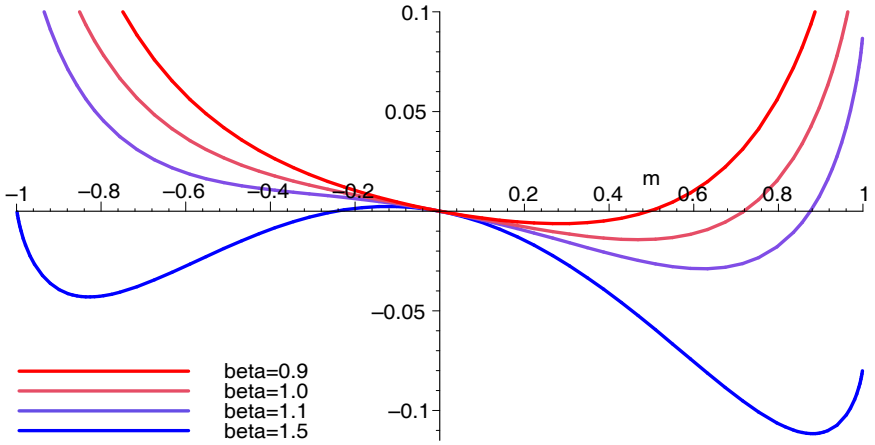


Abbildung 1. Die verschobene freie Energie $F^\beta(m) - F^\beta(0)$ des Weiss'schen Ferromagneten mit äußerem Feld $h = 0.04$.

Literatur:

P. Billingsley, *Probability.*
L. Breiman, *Probability.*
R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*
W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Band 1 und Band 2.
I. Karatzas und S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus.*
G. Keller, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Vorlesungsskript Erlangen.
A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 4. Auflage (2020).
A. N. Shiryaev, *Probability.*

Einführung in die Funktionalanalysis

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Mo, Do 14-16

Die Funktionalanalysis ist nichts anderes als Analysis in unendlich vielen unabhängigen Veränderlichen. Funktionen und Folgen werden als Punkte in einem unendlich dimensionalen Vektorraum erfasst. Hauptsächlich widmet sich die Vorlesung den normierten Vektorräumen und den zwischen ihnen wirkenden linearen stetigen Abbildungen.
Oft werden wir Parallelen zu den aus Analysis I und II sowie Linearer Algebra bekannten Eigenschaften feststellen. Uns begegnen aber auch Eigenschaften, die sich jeder endlich dimensionalen Intuition entziehen, wie z.B. dass eine lineare Abbildung nicht unbedingt stetig sein muss. Willkommen im Wunderland!

Literatur:

D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin (2011).

H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Berlin (2006).

N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Wiley-Interscience (1988).

J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart (2000).

Fourieranalysis

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Di 12-14

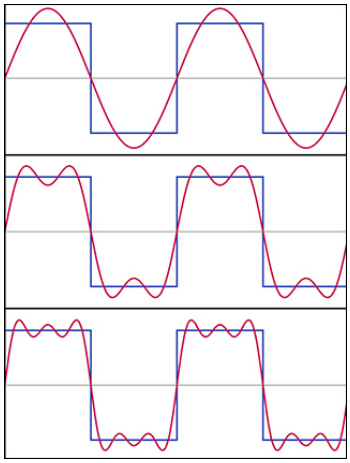
Die Fourieranalysis beschäftigt sich mit der Darstellung von Funktionen durch Fourier-Reihen

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

oder durch Fourier-Integrale

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ts} g(s) ds.$$

Sie besitzt unzählige Anwendungen in fast allen Gebieten der Mathematik sowie in der Physik und den Ingenieurwissenschaften. In der Vorlesung wird die Theorie der Fourier-Reihen entwickelt. Auch werden einige Anwendungen dieser Theorie besprochen, unter Anderem in einem parallel zur Vorlesung angebotenen gleichnamigen Seminar.
Das Seminar findet donnerstags um 12-14 Uhr ebenfalls im Raum 04-522 statt.
Im darauffolgenden Wintersemester ist eine Vorlesung über Fourierintegrale geplant.
Voraussetzungen: Analysis I und II, Lineare Algebra, etwas Lebesgue-Integrationstheorie ist von Vorteil, aber keine Voraussetzung.



Literatur:

E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis, Vol. 1)*, Princeton Univ. Press (2003).

L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer, verschiedene Auflagen.

A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, verschiedene Auflagen.

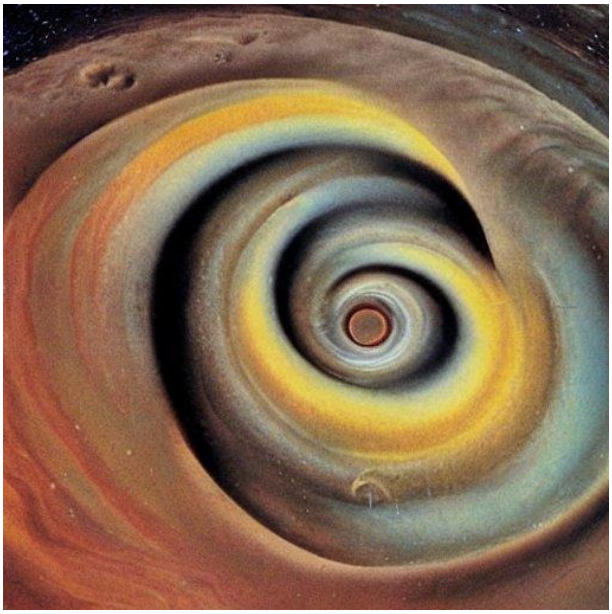
Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publications, verschiedene Auflagen.

Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten

Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus

Termine: Di, Do 12-14

In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit geometrischen Eigenschaften von Kurven, Flächen im Raum und deren Verallgemeinerung, den Mannigfaltigkeiten.
Ein besonders wichtiger Begriff dabei ist der der Krümmung, den wir ausführlich behandeln werden. So werden wir z.B. verstehen, dass es als Folge der Krümmung der Erdoberfläche keine längenerhaltenden Landkarten geben kann.
Wichtige Anwendungen der Differentialgeometrie finden sich auch in der Physik.



Bildquelle: https://stablediffusionweb.com/

Literatur:

C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter (2010).

M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications (1976).

J. M. Lee, *Riemannian manifolds*, Springer (2010).

I. Agricola, T. Friedrich, *Vektoranalysis*, Vieweg (2010).

Geometrie und Optik von der frühen Neuzeit bis ins 20. Jahrhundert

Dozent: Dr. Oliver Labs

Termine: Mi 10-12

In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts entwickeln sich sowohl höhere Geometrie als auch Optik rasant. Ein prominentes Beispiel ist die Differential-Rechnung (siehe z.B. de l'Hôpitals Buch (1696) zum Thema). Kurven aus der Optik, sogenannte Kaustiken, zählen zu den ersten damit untersuchten interessanten Anwendungsfällen; z.B. helle Lichtkurven, die bei nahezu parallel von der Sonne in eine zylinderförmige Tasse einfallende Lichtstrahlen auf dem Boden der Tasse sichtbar werden. Zentrale Personen dieser Zeit sind u.a. Christiaan Huygens, Isaac Newton, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, Gottfried Wilhelm Leibniz sowie Jakob und Johann Bernoulli.

Mit ihrem Fokus auf die Schnittmenge von Geometrie und Optik beginnt die Vorlesung, nach einer knappen Vorstellung der Grundlagen aus der Zeit davor, mit den spannenden Entwicklungen dieser so prägenden Jahrzehnte. Einen zweiten Schwerpunkt bildet das 19. Jahrhundert, in dem wieder beide inhaltliche Aspekte des Vorlesungsthemas ganz massive Weiterentwicklungen durchlaufen. Prominente Beispiele sind hier etwa Fresnel und seine sogenannte Wellenfläche oder später Kummers Fläche mit ihren 16 Singularitäten, die bei der Untersuchung von Strahlensystemen auftritt. Überall zeigen sich interessante Wechselwirkungen mit anderen wissenschaftlichen Gebieten.

Die Vorlesung schließt mit einem Blick auf das 20. Jahrhundert, wo einerseits die Geometrie, etwa von Kaustiken, mit neuen mathematischen Methoden verstanden werden kann, und wo andererseits so weitreichende Entwicklungen wie die allgemeine Relativitätstheorie oder später die Computertechnik ganz neue Themengebiete und Möglichkeiten auf den Überschneidungsfeldern von Geometrie und Optik eröffnen.

Fresnel'sche Wellenfläche (W. Dyck: Katalog math. u. math.-phys. Modelle, App. u. Instr. (1892))

Für die Hörerinnen und Hörer ist neben einer Offenheit für damalige Denkweisen ein Grundwissen insbesondere in der Mathematikgeschichte, der elementaren und algebraischen Geometrie, der Analysis und der Optik zwar hilfreich; die Inhalte werden aber jeweils in der Vorlesung erläutert, bevor sie verwendet werden. Die Veranstaltung basiert nicht nur auf einigen wenigen Veröffentlichungen, so dass die hier angegebene Literatur nur einen kleinen Teil des Stoffes abdeckt.

Literatur:

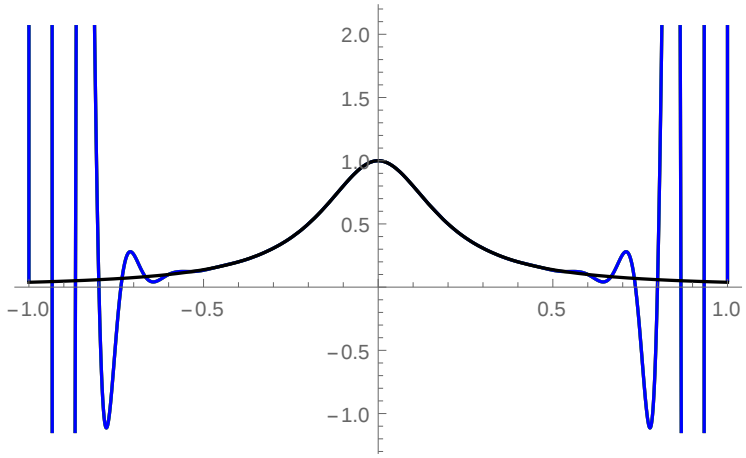
G. Salmon / W. Fiedler, *Analyt. Geometrie d. höheren eben. Kurven*, Teubner (1882).
O. Darrigol, *A History of Optics. From Greek Antiquity to the Nineteenth Century*, Oxford Univ. Press (2012).

Approximationstheorie

Dozent: PD. Dr. Philipp Öffner

Termine: Mo, 16-18

Approximationstheorie bildet eine wichtige Brücke zwischen angewandter und reiner Mathematik. Obwohl ihr Ursprung auf die grundlegenden Arbeiten von Bernstein, Chebyshev, Weierstraß und andere zurückgeht, wurde dieser Bereich erst in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts vollständig etabliert. Durch den schnellen Fortschritt von Computern ist die Approximationstheorie zu einem sehr wichtigen Zweig der Mathematik geworden und liefert fundamentale Grundlagen, insbesondere bei der Annäherung von Funktionen. Approximationstheorie spielt daher eine zentrale Rolle bei der Analyse numerischer Methoden, insbesondere der Approximation von partiellen Differentialgleichungen, aber auch beim wissenschaftlichen maschinellen Lernen.



Runge Phänomen: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ mit equi. Stützstellen interpoliert.

In der Vorlesung werden wir uns mit fundamentalen Fragestellungen in der Approximationstheorie beschäftigen, wie etwa:

- Gibt es eine beste Approximation?
- Ist die beste Approximation eindeutig?
- Wie groß ist der Fehler der besten Approximation und lässt er sich a priori, d.h. ohne Bestimmung der besten Approximation, abschätzen?
- Gibt es eventuell eine einfacher berechenbare gute Approximation, die den gleichen asymptotischen Fehler hat wie die beste Approximation?

Die Ergänzungsvorlesung richtet sich an Student*innen der Mathematik im späten Bachelor- und frühen Mastersemester, die Interesse an angewandter Mathematik und ihren theoretischen Grundlagen haben.

Literatur:

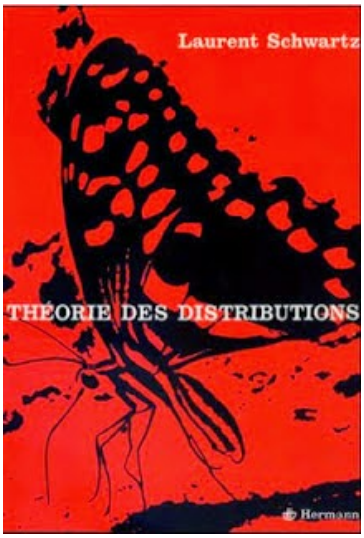
E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, AMS Chelsea Publishing (1999).
M. Müller, *Approximationstheorie*, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, (1978).
T. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover Books (1981).
L. N. Trefethen, *Approximation theory and approximation practice*, SIAM (2013).

Partielle Differentialgleichungen II

Dozent: Prof. Dr. Alan Rendall

Termine: Mo, Di 14–16

In dieser Vorlesung geht es darum, wesentliche Techniken kennenzulernen, die im Umgang mit partiellen Differentialgleichungen wichtig sind. Es werden Distributionen im Sinne von Laurent Schwartz eingeführt. Diese Objekte sind Verallgemeinerungen von Funktionen, die in gewissem Sinne weniger regulär sind. Das berühmteste Beispiel ist die Diracsche δ-Funktion, die keine Funktion im üblichen Sinne ist. Distributionen sind vor allem für lineare partielle Differentialgleichungen nützlich. Es werden verschiedene Funktionenräume behandelt, vor allem die Hölder- und Sobolev-Räume, die die artgerechte Lebensräume sind für Lösungen partieller Differentialgleichungen. Es wird erklärt, welche Nebenbedingungen (Anfangs- und Randbedingungen) vernünftigerweise für verschiedene partielle Differentialgleichungen gestellt werden können. Es werden Begriffe von schwachen Lösungen beschrieben, bei denen die Gleichungen nicht punkt weise erfüllt sind. Dieses Thema ist eng mit der Theorie der Distributionen verwandt. Es wird erklärt, wie diese allgemeinen Techniken auf konkrete Gleichungen angewendet werden und wie diese konkreten Gleichungen wiederum eingesetzt werden können, um Phänomene in den Naturwissenschaften zu modellieren.



'Theorie des Distributions' von Laurent Schwartz, Hermann, 2 Bände, 1950/1951, Neuauflage 1966.

Literatur:

L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (2010).

M. E. Taylor: *Partial Differential Equations I-III*, Springer (1996).

Geschichte der Mathematik II

Dozent: Prof. Dr. Tilman Sauer

Termine: Mo 16-18, Do 14-16

Die Vorlesung schliesst sich inhaltlich an die "Kulturgeschichte der Mathematik" vom Wintersemester an und gibt einen Überblick über Entwicklungen in der Mathematik vom 17. Jahrhundert bis in das 20. Jahrhundert.
Ausgehend von der analytischen Geometrie von Descartes wird die Entstehung und Entfaltung der Analysis behandelt und die Entwicklung und Ausdifferenzierung der Geometrie bis hin zur Herausbildung einer mehrdimensionalen Differentialgeometrie als mathematische Voraussetzung für die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie.
Behandelte Themen u.a.: die Vielfalt der geometrischen Probleme und Methoden im 17. Jahrhundert und die Herausbildung der Analysis; weitere Entwicklung der Analysis in Richtung einer Algebraisierung; Anfänge der Variationsrechnung; Ursprünge der nicht-euklidischen Geometrie; der Begriff der Krümmung und das Theorema egregium; Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs und Axiomatisierung der Geometrie; Invariantentheorie und Tensorkalkül; klassische Mechanik und Relativitätstheorie.

Leonhard Euler (Wikimedia Commons)

Literatur:

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, Wiley (1989).

Edwards, Charles, *The Historical Developments of Calculus*, Springer (1994).

Jahnke, Niels (Hg.) *Geschichte der Analysis*, Heidelberg (1999).

Mainzer, Klaus, *Geschichte der Geometrie*, B.I. (1980).

Stillwell, John. *Mathematics and Its History*, Springer (2010^3).

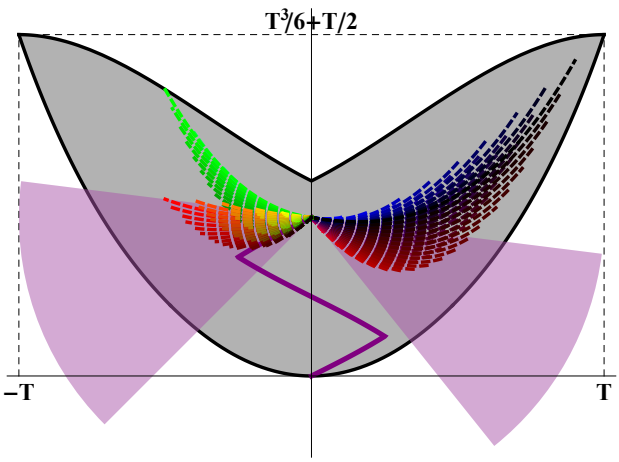
Eigene Folien und Skripte.

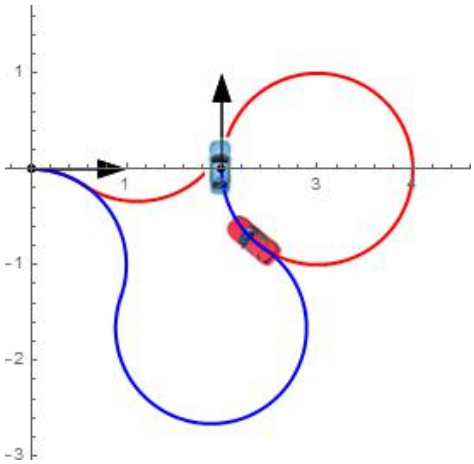
Optimalsteuerungen

Dozent: Prof. Dr. Karlheinz Spindler (Hochschule RheinMain)

Termine: Fr 14:15-15:45 und 16:00-17:30

Viele dynamische Systeme (etwa in der Physik, der Biologie oder den Wirtschaftswissenschaften) werden durch ein Differentialgleichungssystem $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$ beschrieben. Können wir das System durch Eingriffe von außen beeinflussen, so erhalten wir ein gesteuertes dynamisches System $\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$, das durch geeignete Wahl einer Kontrollfunktion u in gewünschter Weise gesteuert werden soll.
Von besonderem Interesse sind dabei Steuerungen, die in bestimmter Hinsicht optimal sind (etwa zeitoptimal, energieoptimal oder möglichst umwelt- oder ressourcenschonend).
Die Vorlesung bietet eine Einführung in die mathematische Theorie der Optimalsteuerungen und deren Anwendungen. Herzstück ist dabei eine Herleitung und geometrische Deutung des Pontrjaginschen Maximumprinzips als eines Grundpfeilers der Theorie. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.





Links: Bildung von Boltjanskij-Kegeln zur Bestimmung von Erreichbarkeitsmengen gesteuerter dynamischer Systeme. Rechts: Optimales Einparken eines Fahrzeugs.

Literatur:

A. Agrachev, Yu. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Springer (2004).
W. G. Boltjanski, *Mathematische Methoden der optimalen Steuerung*, Hanser (1972).
G. Feichtinger, R. F. Hartl, *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*, de Gruyter (1986).
D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Princeton University Press (2012).
J. Macki, A. Strauss, *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer (1982).
L. S. Pontrjagin, V. G. Boltjanskij, R. V. Gamkrelidze, E. F. Misčenko, *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*, Oldenbourg (1967).

Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten

Termine: Di, Fr 14-16

Die Theorie der Riemannschen Flächen ist eine natürliche Erweiterung der Funktionentheorie. Ein Besuch jener ist dann auch Voraussetzung für die Teilnahme an dieser Vorlesung. Vorkenntnisse aus der Topologie über Flächen sind nützlich aber nicht unbedingt notwendig, da dies in der Vorlesung thematisiert wird.
Behandelt werden weiter die Riemannsche Flächen der algebraischen Funktion, die Überlagerungstheorie und der Riemannsche Existenzsatz. Weiter entwickeln wir die Theorie der holomorphen Differentialformen auf Riemannsche Flächen und beweisen den Satz von Riemann-Roch und die Serre Dualität. Die Vorlesung schließt ab mit der Konstruktion von meromorphen Funktionen zu vorgegebenen Divisoren und Anwendungen.

Literatur:

S. K. Donaldson, *Riemann Surfaces*, Lecture notes (2004).

O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher 184, Springer (1977).

D. van Straten, *Riemannsche Fächen und algebraische Kurven*, Vorlesungsskript, Mainz (2012).

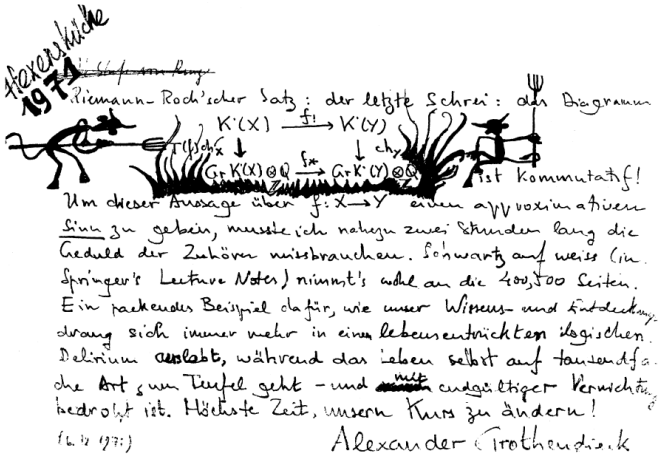
H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Flächen*, Springer Fachmedien (1997).

Algebraische Geometrie II

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten

Termine: Di, Do 10-12

Diese Vorlesung setzt die Algebraische Geometrie I aus dem Wintersemester 2022/23 fort. Neben einer Vertiefung der Theorie der Schemata liegt das Hauptaugenmerk auf dem Studium der Kohomologie quasi-kohärenter Garben. Stichworte zum geplanten Inhalt: Abgeleitete Funktoren, Garbenkohomologie, Čech-Kohomologie, Serre-Dualität und Riemann–Roch, Anwendungen auf algebraische Kurven.



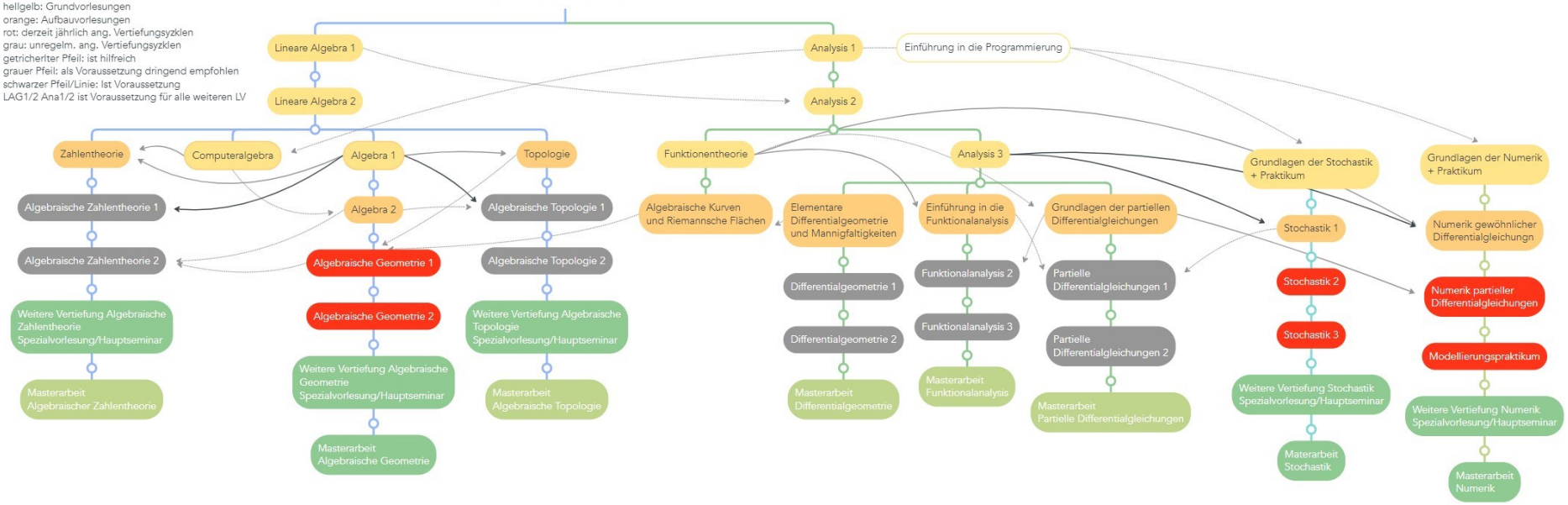
Grothendiecks Version des Satzes von Riemann–Roch
(von http://math.stanford.edu/~vakil/11-245/)

Literatur:

R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

D. Mumford, *Red Book of Varieties and Schemes*, Springer (1988).

I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1 & 2*, Springer (2013).

BSc/MSc Mathematik Mainz

LEGENDE
hellgelb: Grundvorlesungen
orange: Aufbauvorlesungen
rot: derzeit jährlich ang. Vertiefungsyzklen
grau: unregelm. ang. Vertiefungsyzklen
getrichelter Pfeil: ist hilfreich
grauer Pfeil: als Voraussetzung dringend empfohlen
schwarzer Pfeil/Linie: Ist Voraussetzung
LAG1/2 Ana1/2 ist Voraussetzung für alle weiteren LV