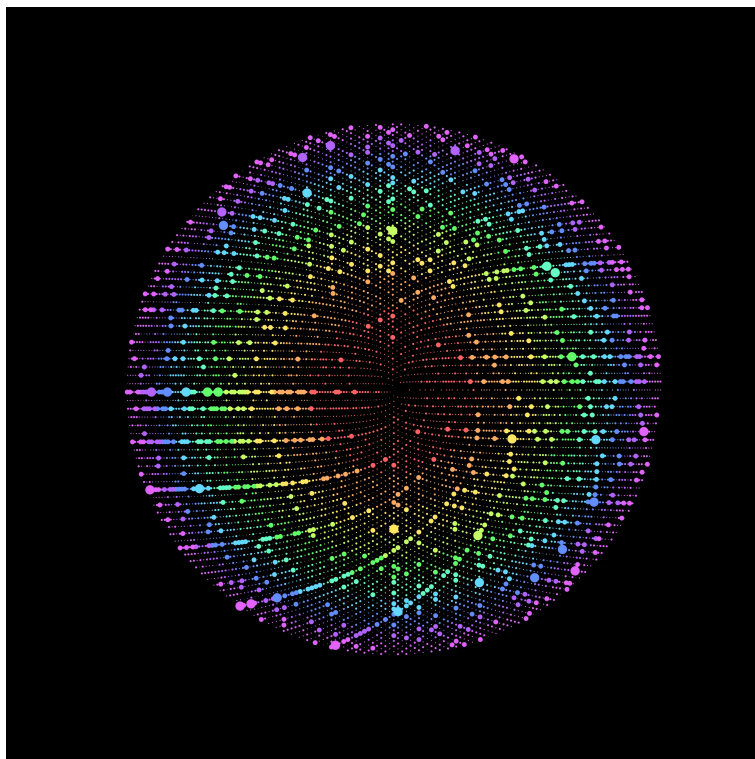


# *Vorlesungsverzeichnis*

## *Mathematik*



*Mainz*

*Sommersemester 2024*

## *Zum Bild:*

Dieses Bild zeigt die natürlichen Zahlen angeordnet in einer Archimedischen Spirale um den Ursprung. Anders als bei vielleicht bekannteren Primzahlspiralen wie der Ulamspirale werden in diesem Bild die zusammengesetzten Zahlen proportional zur Anzahl ihrer Teiler betont.

Das entstehende Bild zeigt viele Muster deren Erklärung interessante mathematische Fragestellungen aufwerfen.

Das Bild wurde im Seminar ZAHL UND BILD von Antonia Pankner, Luisa Nusselt und Hannah Rosenbaum erstellt.

# *Vorwort*

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Sommersemester 2024 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Januar 2024

# Übersichtsplan

| Zeit  | Montag                                                                                                                                                      | Dienstag                                                                                                                                                                                                       | Mittwoch                                                                                                                      | Donnerstag                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Freitag                                                               |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 08-10 |                                                                                                                                                             | Computeralgebra (de Jong) N2<br>Algebra II (Blickle) 04-422                                                                                                                                                    | Stochastische<br>Populationsmodelle<br>(Birkner) 05-136                                                                       | Computeralgebra (de Jong) N6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                       |
| 10-12 | Algebraische Topologie<br>(Rahn) 04-224<br>Verzweigungstheorie<br>(Rendall) 04-522<br>Numerik stochastischer<br>Differentialgleichungen<br>(Ranocha) 05-426 | Komplexe Algebraische Geometrie II (van Straten) 04-422<br>Modellierungspraktikum (Brunk) 05-426<br>Differentialgeometrie II (Kraus) 04-516<br>Stochastik I (Birkner) 04-432<br>Stochastik III (Klenke) 05-136 | Algebraische Topologie<br>(Rahn) 04-224<br>Quasikategorien<br>(Bachmann) 04-422<br>Differentialgeometrie II<br>(Kraus) 04-516 | Modellierungspraktikum (Brunk) 05-426<br>Quasikategorien (Bachmann) 04-422<br>Stochastik I (Birkner) 04-432<br>Stochastik III (Klenke) 05-136                                                                                                                                                                                                   | Komplexe Algebraische<br>Geometrie II<br>(van Straten) 04-422         |
| 12-14 |                                                                                                                                                             | Differentialgeometrie u. Mannigfaltigkeiten (Kraus) 04-432<br>Chaostheorie II (Kostykin) 04-522                                                                                                                |                                                                                                                               | Algebra II (Blickle) 04-422<br><br>Differentialgeometrie u. Mannigfaltigkeiten<br>(Kraus) 04-432<br><br>Chaostheorie II (Kostykin) 04-522                                                                                                                                                                                                       |                                                                       |
| 14-16 | Funktionalanalysis<br>(Schneider) 04-522<br><br>Galoiskohomologie u.<br>Brauergruppen (Mantovan) 04-522                                                     | Algebraische Kurven u. Riemannsche Flächen<br>(van Straten) 04-422<br><br>Mathematical Fluid Dynamics (Brunk) 05-426<br><br>Funktionalanalysis III (Kostykin) 04-522                                           | Galoiskohomologie u.<br>Brauergruppen (Mantovan)<br>04-522                                                                    | Funktionalanalysis (Schneider) 04-522<br><br>Mathematische Grndl. der<br>elektr. Impedanztopographie (Hanke-Bourgeois)<br>05-136<br><br>Stochastische Populationsmodelle (Birkner) 05-522<br><br>Geschichte der Mathematik II (Sauer) 05-426<br><br>Endliche Permutationsgruppen (Klaus) 04-422<br>ca. 14-tägig, genaue Termine siehe Jogustine | Algebraische Kurven u.<br>Riemannsche Flächen<br>(van Straten) 04-422 |
| 16-18 | Geschichte der Mathematik II<br>(Sauer) 05-426                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                               | Funktionalanalysis III (Kostykin) 04-522                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                       |

# Quasikategorien

**Dozent:** Prof. Dr. Tom Bachmann

**Termine:** Mi, Do 10–12

Das Studium mathematischer Strukturen “bis auf kohärente Homotopie” geht zurück auf Arbeiten von Boardman–Vogt aus den ’70er Jahren.

Ihre Überlegungen motivierten sie zur Definition von *schwachen Kan-Komplexen* als einem homotopietheoretischem Analogon zu Kategorien. Für einige Jahrzehnte hatte ihre Arbeit keinen großen Einfluss, und Homotopietheoretiker haben sich mit Modellkategorien sowie ähnlichen Krücken beholfen.

In den letzten zwanzig Jahren aber wurde das systematische Studium homotopie-kohärenter Kategorientheorie wieder aufgegriffen, insbesondere durch die Arbeiten von A. Joyal und J. Lurie. Schwache Kan-Komplexe wurden in Quasikategorien (oder  $\infty$ -Kategorien) umbenannt und bilden heutzutage einen Grundpfeiler der modernen Homotopietheorie.



Homotopietheoretiker bei der Arbeit

In der Vorlesung werden zunächst Quasikategorien definiert und ihre grundlegendsten Eigenschaften herausgearbeitet. Im weiteren Verlauf verschiebt sich der Schwerpunkt, weg von der internen Theorie von Quasikategorien hin zu ihrer Verwendung “in der Praxis”.

Es gibt keine formalen Voraussetzungen für den Besuch der Vorlesung.

Vorbildung in Kategorientheorie, algebraischer Topologie, und/oder simplizialen Mengen werden für das Verständnis aber stark empfohlen.

## Literatur:

J. Lurie, *Kerodon*, online: [kerodon.net](https://kerodon.net).

J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Princeton University Press (2009).

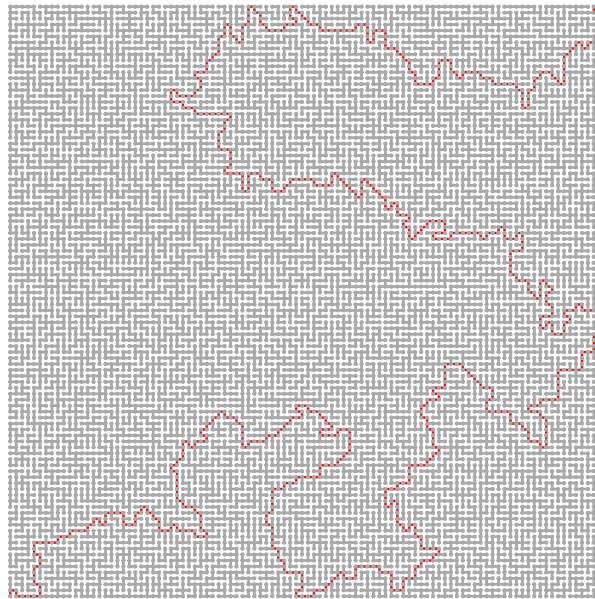
M. Land, *Introduction to Infinity-Categories*, Birkhäuser (2021).

# *Stochastik I*

**Dozent:** Prof. Dr. Matthias Birkner

**Termine:** Di, Do 10–12

Stochastik, d.h. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, als mathematische Disziplin beschäftigt sich mit der Modellierung und Untersuchung von zufälligen Phänomenen. Sie besitzt beeindruckende und erfolgreiche außermathematische Anwendungen (beispielsweise in der Physik, der Biologie, der Ökonomie) und hat zugleich interessante und tief liegende Beziehungen zu anderen mathematischen Fachgebieten.



Ein zufällig ausgewählter Spannbaum eines  $100 \times 100$ -Gitters und der eindeutige Pfad darin von links unten nach rechts oben (rot)

Die Vorlesung *Stochastik I* richtet sich an Studenten der Mathematik, die bereits die *Einführung in die Stochastik* gehört haben. Hauptthema sind klassische Probleme und Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Vorlesung knüpft an den mehr intuitiven Zugang der Einführung an und setzt ihn in einen rigorosen mathematischen Kontext.

Themenstichpunkte: Maßräume,  $\sigma$ -Algebren, Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Lebesgue-Integration; klassische Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie (Gesetze der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz), charakteristische Funktionen, schwache Konvergenz, bedingter Erwartungswert, Martingale (in diskreter Zeit)

## **Literatur:**

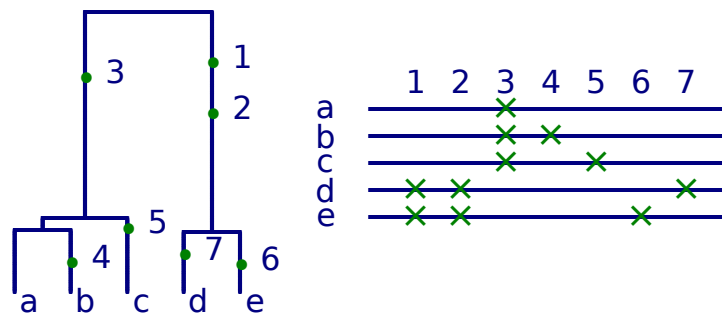
- A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl., Springer (2020).
- D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge Univ. Press (1995).
- O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 3. ed, Springer (2021).
- W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Band 1 und 2, Wiley (1968 und 1971).
- L. Breiman, *Probability*, Wiley (1968).

# Stochastische Populationsmodelle

**Dozent:** Prof. Dr. Matthias Birkner

**Termine:** Mi 8-10, Do 14-16

Typischerweise zeigen reale Populationen genetische (und phänotypische) Variabilität. Stochastische Modelle helfen, diese Variabilität zu verstehen und die zugrundeliegenden evolutionären Kräfte, wie genetische Drift, Selektion, Mutation, Rekombination und räumliche Strukturierung, zu quantifizieren. Sie bilden damit die Grundlage für Rückschlüsse auf – häufig nicht direkt beobachtbare – biologische Mechanismen anhand beobachteter genetischer Variabilität in einer Stichprobe. Ein zentrales Thema ist dabei das Zusammenspiel zwischen der Vorwärts-Zeitentwicklung der Population und der Rückwärts-Sicht auf die Genealogien von Stichproben.



Ein genealogischer Baum mit Mutationen und zugehöriges an den Blättern beobachtetes Mutationsmuster. Beispiel: Mutation 3 ist in den Stichproben a, b und c sichtbar

Exemplarisch einige technische<sup>1</sup> Themenstichworte: (Kingman-)Koaleszent, Wright-Fisher-Modell und -Diffusion, Ewens'sche Stichproben-Formel, ancestraler Selektionsgraph, Stepping-Stone-Modell, Verzweigungsprozesse, interagierende Teilchensysteme

## Literatur:

- R. Durrett, *Probability Models for DNA Sequence Evolution*, Springer (2008).  
W. Ewens, *Mathematical population genetics*, Springer (2004).  
J. Wakeley, *Coalescent Theory: An Introduction*, Roberts & Company (2008).  
M. Birkner, *Stochastische Modelle der Populationsbiologie*, Vorlesungsskript, JGU Mainz (2016) <https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/SMPB1516/smpb1516.pdf>  
S. Ethier, T. Kurtz, *Markov processes: characterization and convergence*, Wiley (1996).

<sup>1</sup>Die Phänomene lassen sich prinzipiell gut mit dem Begriffsapparat aus der Vorlesung Einführung in die Stochastik verstehen. Die Vorlesung wird gelegentlich avancierte stochastische Werkzeuge (etwa Diffusionsprozesse, stochastische Differentialgleichungen) verwenden, diese aber anhand diskreter Approximationen und biologischer Intuition heuristisch motivieren und ggfs. z.T. entwickeln; sie kann bei entsprechender Motivation auch als Einladung aufgefasst werden, sich mit solchen Begriffen zu befassen. William Feller schreibt im Vorwort zum 2. Band seines Klassikers *An introduction to probability theory and its applications* (in ähnlicher Sache): “[...] the level of difficulty cannot be measured objectively; it depends on the type of information one seeks and the details one is prepared to skip. The traveler often has the choice between climbing a peak or using a cable car.”

# *Algebra 2: Kommutative Algebra*

**Dozent:** Prof. Dr. Manuel Blickle

**Vorlesung:** Di 8–10 , Do 12–14 (Übung: tba)

In dieser Vorlesung, welche eine natürliche Weiterführung der Algebra 1 bzw. der Computeralgebra darstellt, werden die Grundlagen der Kommutativen Algebra gelegt, auf welche dann weiterführende Vorlesungen wie die algebraische Zahlentheorie, algebraische Topologie und insbesondere die Algebraische Geometrie aufbauen.



Emmy Noether 1882—1935, Mother of modern Algebra

Viele der hier behandelten Themen gehen auf die Begründerin der Modernen Algebra, Emmy Noether, zurück.

**Polynomgleichungen in mehreren Variablen:** Verschwindungsmenge, Zariskitopologie, Hilberts Basissatz, noethersche Ringe, Hilberts Nullstellensatz, Spektrum eines Rings

**Moduln über kommutativen Ringen:** Kettenbedingungen, Nakayama Lemma, Lokalisierung, Träger, Primärzerlegung, Exakte Sequenzen, Funktoren, Restriktion und Tensorprodukt, Flachheit, Limiten und Kolimiten

**Dimensionstheorie:** Krulldimension, Transzendenzgrad, endliche Ringerweiterungen, Noether Normalisierung, Krulls Hauptidealsatz, Dimension des Polynomrings, reguläre lokale Ringe

Das Handwerkszeug, welches man in dieser Vorlesung lernen kann, ist unverzichtbar für alle, die über eine Vertiefung in einem der Bereiche Algebra, algebraische Geometrie, komplexe Geometrie, Arithmetik oder auch Topologie nachdenken.

Voraussetzung für die erfolgreiche Teilnahme ist ein solides Verständnis der Grundbegriffe der Algebra aus den Vorlesungen Algebra 1 oder Computeralgebra.

## **Literatur:**

Reid, Miles, *Undergraduate Commutative Algebra*, Cambridge Univ. Press

Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co.

Eisenbud, David, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York (1995), xvi+785 pp.

# *Modellierungspraktikum: Strömungen und Phasenübergänge mit Parameterunsicherheit*

**Dozent:** Dr. Aaron Brunk

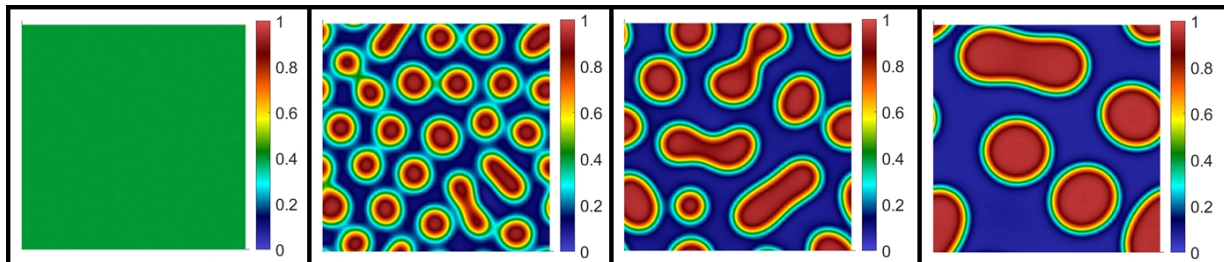
**Vorlesung:** Di, Do 10–12

Viele natürliche oder technische Prozesse führen zu Strömungen oder Phasenübergängen, wie z.B. Mischung von Wasser und Öl oder dem Schmelzen von Metallen.

Das Ziel des diesjährigen Modellierungspraktikums ist es, solche Prozesse zu modellieren, analysieren und numerisch zu berechnen. In diesem Kontext sind viele Modellparameter in der Anwendung messbar aber jedoch mit Unsicherheiten wie beispielsweise Messfehlern behaftet. Dabei werden wir uns auf diffusive Phasenseparationprozesse konzentrieren und lernen die Herleitung mathematischer Modelle mittels Variationsrechnung kennen und deren stabile numerische Approximation.

Im Rahmen der Projekte, die in kleinen Gruppen bearbeitet werden, möchten wir Phasenseparationsprozesse aus der Fluidodynamik oder aus den Materialwissenschaften untersuchen und konkrete numerische Lösungen erarbeiten.

Es handelt sich hier um den zweiten Teil des Vertiefungsmoduls “Wissenschaftliches Rechnen” in den mathematischen Masterstudiengängen.



Entmischung mittels der deterministischen Cahn-Hilliard Gleichung zu den Zeiten  $t \in \{0, 0.1, 0.5, 4\}$ ; mittels Finiten-Elementen berechnet.

## **Vorraussetzung:**

- Pflicht: Grundlagen der Numerik, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Numerik partieller Differentialgleichungen
- Hilfreich, aber nicht notwendig: Funktionalanalysis, Variationsrechnung

## **Literatur:**

H. Kielöfer, *Variationsrechnung*, Springer (2010).

J. Shen, X. Yang, *Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations, Discrete and continuous dynamical systems*, 28(4) (2010).

D. Xiu, *Stochastic Collocation Methods: A Survey*, In: Ghanem, R., Higdon, D., Owhadi, H.: *Handbook of Uncertainty Quantification*. Springer, Cham (2017).

# *Mathematical Fluid Dynamics: Analysis und Numerik*

**Dozent:** Dr. Aaron Brunk

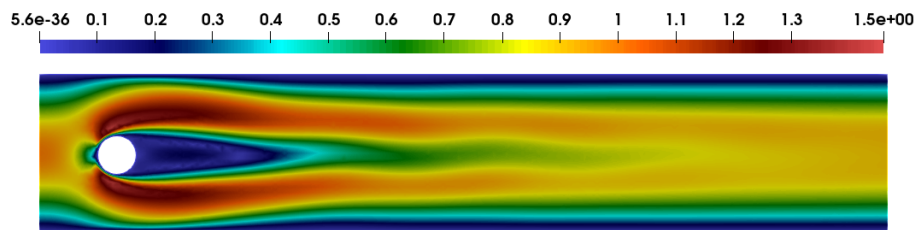
**Termine:** Di 14–16

Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns mit der mathematischen Modellierung der Strömungsmechanik und dessen analytischen Eigenschaften beschäftigen. Zunächst werden wir mit den Erhaltungssätzen der Thermodynamik, Erhaltung von Masse, Impuls und Energie, ein mathematisches Modell zur Beschreibung von kompressiblen und inkompressiblen Strömungen, hier die Navier-Stokes-Gleichungen, herleiten.

Für die mathematische Analyse betrachten wir die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen und werden für den stationären so wie den zeitabhängigen Fall Lösungskonzepte einführen und die Wohlgestelltheit, also Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität, der Gleichungen diskutieren und gegebenenfalls beweisen.

Für die numerische Approximation diskutieren wir konforme und nicht-konforme Diskretisierungen mittels Finiten-Elemente im Raum und Differenzenquotienten in der Zeit. Wir werden sehen, dass die mathematische Struktur der Gleichung bei der Konstruktion eines sinnvollen numerischen Verfahrens eine fundamentale Rollen spielt.

Falls am Ende der Vorlesung Zeit ist beschäftigen wir uns mit der Erweiterung auf Mehrphasenströmungen mittels der Cahn-Hilliard Gleichung.



Strömung um ein Hindernis; Inkompressible Navier-Stokes Gleichungen mittels Finiten Elementen

## **Vorkenntnisse:**

- Geeignet für B.Sc/ M.Sc Mathematik und M.Sc. Computational Science
- Pflicht: Analysis I-III und Grundlagen der Numerik
- Hilfreich aber nicht notwendig: Funktionalanalysis, partiellen Differentialgleichungen oder Numerik gewöhnlicher/partieller Differentialgleichungen

## **Literatur:**

F. Boyer, P. Fabrie, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models* Springer (2013).

M. Feistauer, *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific & Technical (1993).

R. Temam, *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis* North-Holland (1977).

# Computeralgebra

**Dozent:** Prof. Dr. Theo de Jong

**Termine:** Di, Do 8–10

In der Vorlesung werden wir einige Probleme aus der algorithmischen Mathematik behandeln, wie zum Beispiel:

- (1) Primzahlbestimmung und Faktorisierung von natürlichen Zahlen (z.B. Miller-Rabin, Pollard rho und die  $p - 1$  Methode).
- (2) Das Lösen von polynomialen Gleichungssystemen. In der linearen Algebra haben Sie gelernt lineare Gleichungssysteme zu lösen. Wir werden Gleichungen höheren Grades betrachten und sehen, wie man feststellen kann, ob das Gleichungssystem eine Lösung hat und gegebenenfalls die (reellen) Lösungen numerisch berechnen.
- (3) Faktorisierung von Polynomen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ . Wie schafft ein Computerprogramm es zum Beispiel das folgende Polynom zu faktorisieren?

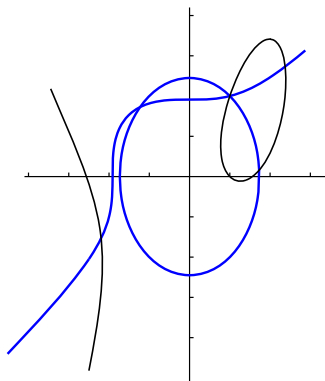
$$\begin{aligned} & -15x^{18} + 2x^{17} + 44x^{16} + 82x^{15} - 2x^{14} - 82x^{13} - 213x^{12} - 32x^{11} + 77x^{10} \\ & + 125x^9 + 89x^8 + 6x^7 - 194x^6 - 14x^5 + 23x^4 + 2x^3 + 97x^2 - 21x - 42 \end{aligned}$$

Lösung des Problems:

$$\begin{aligned} & (5x^{10} + x^9 - x^8 - 10x^7 - 9x^6 + 8x^4 + x^3 + 8x^2 - 7) \cdot \\ & (-3x^8 + x^7 + 8x^6 + 9x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 3x + 6) \end{aligned}$$

Die benutzten Methoden liefern eine gute Vorbereitung auf abstraktere algebraische Vorlesungen.

Zur Vorlesung gehört ein integrierter Übungs- und Praktikumsbetrieb. Programmierkenntnisse werden NICHT vorausgesetzt, es ist jedoch ratsam, sich schon etwas von der Sprache Python anzueignen. Pythonkurse werden in den Semesterferien angeboten, aber auch auf youtube sind elementare Einführungen zu finden. Wir werden das Computeralgebrasystem SAGE einsetzen, welches kostenlos unter <http://www.sagemath.org/> verfügbar ist.



## Literatur:

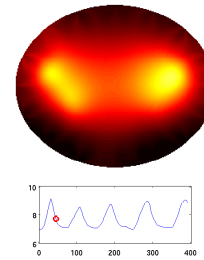
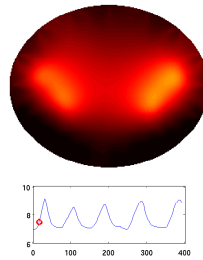
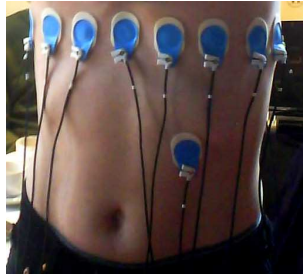
- D. Bressoud: *Factorization and Primality Testing*, Springer Verlag (1989).  
G. Von zur Gathen, *Modern Computer Algebra*, Cambridge University Press (2013).  
D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Verlag (2015).

# *Mathematische Grundlagen der Elektrischen Impedanztomographie*

**Dozent:** Martin Hanke-Bourgeois

**Termine:** Do, 14-16 (05-136)

Elektrische Impedanztomographie ist ein nicht-invasives Diagnoseverfahren aus der Medizin. Dabei werden (für den Menschen harmlose) elektrische Ströme durch auf die Haut geklebte Elektroden in den Körper appliziert und die resultierenden Spannungsdifferenzen zwischen diesen Elektroden aufgenommen. Aus diesen Messdaten wird dann die örtliche Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit im Innern des Körpers bestimmt.



In der Vorlesung werden die mathematischen Grundlagen behandelt, ob und wie die elektrische Leitfähigkeit durch die gemessenen Daten eindeutig festgelegt ist und wie sie numerisch berechnet werden kann. Dabei wird insbesondere das inhärente Stabilitätsproblem dieser tomographischen Methode thematisiert: Die Problemstellung ist nämlich im mathematischen Sinne *schlecht gestellt*, das heißt die zu berechnende Leitfähigkeitsverteilung hängt nicht stetig von den zur Verfügung stehenden Daten ab. Die eingesetzten numerischen Verfahren müssen diese Schwierigkeit in angemessener Weise berücksichtigen.

Die Vorlesung richtet sich an Studierende im Programm Master of Science Mathematik oder Master of Computational Science–Rechnergestützte Naturwissenschaften. Vorausgesetzt werden insbesondere Grundkenntnisse über die Lösungstheorie von Randwertaufgaben für elliptische Differentialgleichungen.

## **Literatur:**

- L. Borcea, *Electrical impedance tomography*, Inverse Problems **18** (2002), pp. R99–R136.  
J.L. Mueller und S. Siltanen, *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*, SIAM, Philadelphia (2012).  
M. Hanke, *A Taste of Inverse Problems. Basic Theory and Examples*, SIAM, Philadelphia (2017).  
A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, 2nd Edition, Springer (2011).

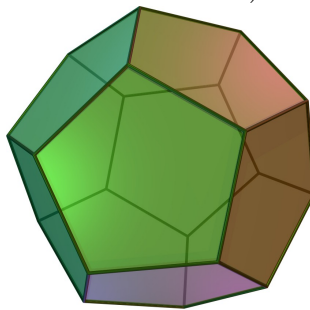
# *Endliche Permutationsgruppen*

**Dozent:** apl. Prof. Dr. Stephan Klaus

**Termine:** Do 14-16, ca. alle 2 Wochen im Sommersemester 2024

(die genauen Termine werden in Jogustine noch bekannt gegeben)

In der historischen Entwicklung der Gruppentheorie haben Permutationsgruppen eine große Rolle gespielt, da Gruppen immer zusammen mit ihrer Wirkung auf andere mathematische Objekte untersucht wurden (z.B. als Permutationen der Nullstellen eines Polynoms in der Galois-Theorie; oder der geometrischen Symmetrien eines regulären Polyeders mit ihrer Wirkung auf Ecken, Kanten und Flächen).



(Graphik: Dodekaeder; von User Cyp, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=38668>)

Die Vorlesung soll einen Überblick über die Theorie der endlichen Permutationsgruppen geben, wobei zusätzlich zu den Grundlagen folgende Themen geplant sind:

- (1) Ergebnisse zur Klassifikation mehrfach transitiver Permutationsgruppen, insbes.:
- (2) Einführung in die 5 Mathieu-Gruppen, diese wurden ab 1861 als erste sporadische einfache Gruppen entdeckt.
- (3) Beweis und Anwendungen des Abzähltheorems von Polya-Redfield, einem weitreichenden Ergebnis der abzählenden Kombinatorik.
- (4) Ergebnisse zum Burnside-Ring einer endlichen Gruppe, der aus allen Permutationsdarstellungen gebildet wird.

Wenn genügend Zeit bleibt, können auch kombinatorische Spezies, Permutationsinvarianten und höher-dimensionale reguläre Polyeder behandelt werden.

**Zielgruppe/Voraussetzungen:** Alle Studentinnen und Studenten der Mathematik, die sich dafür interessieren, insbesondere auch Lehramtsstudierende!

Es werden nur Grundkenntnisse der Mathematik vorausgesetzt.

**Zuordnung Gebiete:** Algebra/Gruppentheorie

## **Literatur:**

John D. Dixon, Brian Mortimer, *Permutation Groups*, Graduate Texts in Mathematics 163, Springer-Verlag (1996).

Peter J. Cameron, *Permutation Groups*, LMS Student Text 45, Cambridge University Press (1999).

# Stochastik III

**Dozent:** Prof. Dr. Achim Klenke

**Termine:** Di, Do 10-12

Die Vorlesung wendet sich an Studierende der Fachrichtung Mathematik. Sie ist inhaltlich die Fortsetzung des dreisemestrigen Kurses der Stochastik (Einführung in die Stochastik, Stochastik I, Stochastik II).

Formal ist sie der zweite Teil des Vertiefungsmoduls STO-002, der im vorangehenden Semester mit der Vorlesung Stochastik II begonnen wurde.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glücksspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in der Vordergrund gerückt.

In der Stochastik III beschäftigen wir uns mit Ergodentheorie, der Theorie großer Abweichungen und Poisson'schen Punktprozessen. Je nach Zeit lernen wir die Brown'sche Bewegung und die zugehörigen Grenzwertsätze kennen oder eine fortgeschrittene Theorie Markov'scher Ketten.

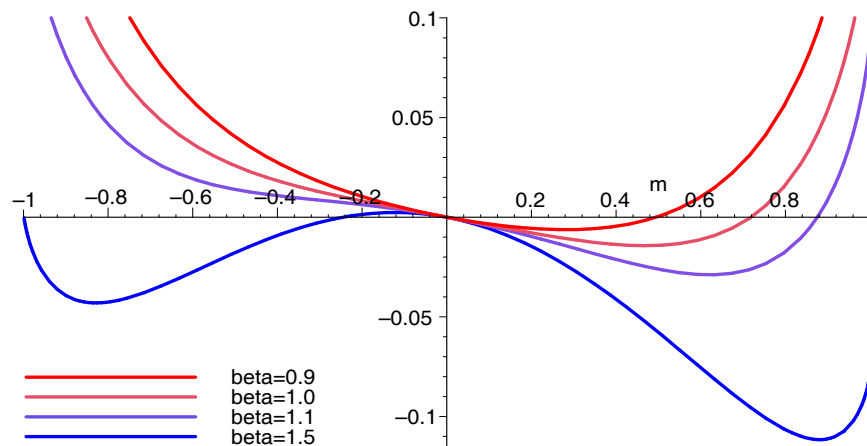


ABBILDUNG 1. Die verschobene freie Energie  $F^\beta(m) - F^\beta(0)$  des Weiss'schen Ferromagneten mit äußerem Feld  $h = 0.04$ .

## Literatur:

P. Billingsley, *Probability*

L. Breiman, *Probability*

R. Durrett: *Probability: Theory and Examples*

W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Band 1 und Band 2.

I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*

G. Keller, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Vorlesungsskript Erlangen.

A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 4. Auflage (2020).

A. N. Shiryaev, *Probability*

# *Chaostheorie II*

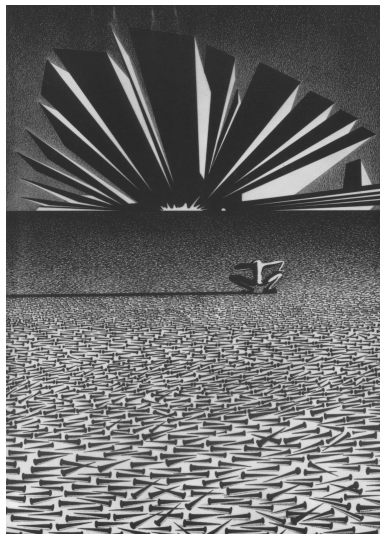
**Dozent:** Prof. Dr. Vadim Kostrykin

**Termine:** Di, Do 12-14

Die Vorlesung ist die Fortsetzung der gleichnamigen Lehrveranstaltung aus dem Wintersemester 2023/24. Unter anderen Themen werden in diesem Teil der Vorlesung Grundlagen der Ergodentheorie studiert. Die Ergodentheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung des Verhaltens typischer Trajektorien mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden. In der Vorlesung werden die fundamentalen Sätze der Ergodentheorie (Poincarés Wiederkehrsatz, Birkhoffs Ergodensatz, ...) bewiesen und eine Vielzahl von Beispielen behandelt, auch der zahlentheoretischen Natur.

Voraussetzungen: Analysis I und II, lineare Algebra, etwas Maßtheorie ist von Vorteil, aber keine Voraussetzung.

Zum ersten Teil des Kurses ist ein Vorlesungsskript vorhanden. Daher ist ein Quereinstieg in die Vorlesung prinzipiell möglich.



“From Chaos to Order” A.T. Fomenko (1976)

## **Literatur:**

A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.

R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer, Berlin, 1987.

P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, Berlin, 1982.

# *Funktionalanalysis III*

**Dozent:** Prof. Dr. Vadim Kostrykin

**Termine:** Di 14-16 , Do 16-18

Die Vorlesung ist die Fortsetzung der gleichnamigen Lehrveranstaltung aus dem Wintersemester 2023/24. Unter anderen Themen werden in diesem Teil nicht stetige lineare Abbildungen in normierten Räumen studiert. Eine der wichtigsten Klassen solcher Operatoren sind selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum.

Das Hauptresultat der Theorie selbst-adjungierter Operatoren ist der sogenannte Spektralsatz. Dieser Satz liefert eine Darstellung der Funktion eines selbstadjungierten Operators als Integral bezüglich des Spektralmaßes.

Kenntnisse aus der Maßtheorie sind von Vorteil, sind aber keine Voraussetzung.



A. Fomenko, Theory of oscillations and wave processes (1970)

## **Literatur:**

J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart, 2000.

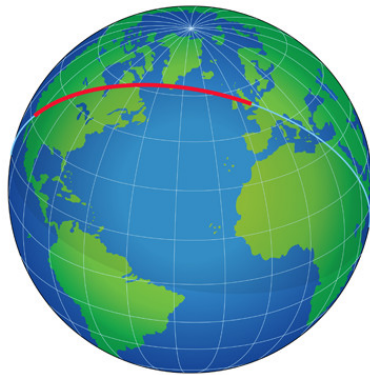
T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, verschiedene Auflagen.

# *Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten*

**Dozentin:** PD Dr. Margarita Kraus

**Termine:** Di 12-14, Do 14-16

In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit geometrischen Eigenschaften von Kurven, Flächen im Raum und deren Verallgemeinerung, den Mannigfaltigkeiten. Ein besonders wichtiger Begriff dabei ist der der Krümmung, den wir ausführlich behandeln werden. So werden wir z.B. verstehen, dass es als Folge der Krümmung der Erdoberfläche keine längenerhaltenden Landkarten geben kann. Wichtige Anwendungen der Differentialgeometrie finden sich auch in der Physik.



Bildquelle: Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=29671836>

## **Literatur:**

C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter (2010).

M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications (1976).

J. M. Lee, *Riemannian manifolds*, Springer (2010).

I. Agricola, T. Friedrich, *Vektoranalysis*, Vieweg (2010).

# *Differentialgeometrie 2*

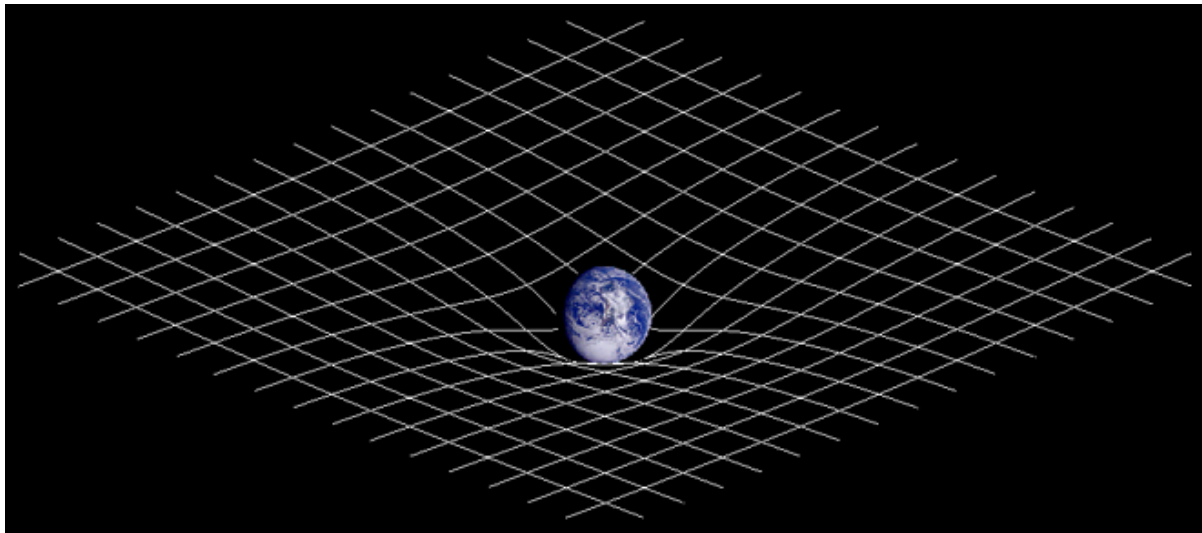
**Dozentin:** PD Dr. Margarita Kraus

**Termine:** Di, Mi 10–12

Die Vorlesung ist die Fortsetzung der Differentialgeometrie 1.

In diesem Semester werden wir uns hauptsächlich mit geodätischen Kurven auf Riemannschen und Lorentz-Mannigfaltigkeiten beschäftigen.

Für Lorentz-Mannigfaltigkeiten hat dies Anwendungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. Außerdem werden wir uns mit homogenen Räumen, also Mannigfaltigkeiten, auf denen die Isometriegruppe transitiv wirkt, beschäftigen.



## **Literatur:**

J. Beem, P. Ehrlich, *Global Lorentzian Geometry*, CRC Press (1996).

J. M. Lee, *Riemannian manifolds, an introduction to curvature*, Springer.

J. Cheeger, D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, Ams Chelsea Publishing (2008).

# *Galoiskohomologie und Brauergruppen*

**Dozent:** Dr. Lorenzo Mantovani

**Termine:** Mo, Mi 14-16



ABBILDUNG 2. Brauergruppe des Körpers  $\mathbb{R}$  von M. Raupach (Licenced under CC BY-SA 3.0)

In der algebraischen Topologie studiert man Räume durch ihre zugeordneten algebraischen Invarianten, zum Beispiel die Fundamentalgruppe und die singulären Kohomologiegruppen. In der algebraischen Geometrie studiert man algebraische Varietäten durch ihre zugeordnete Kohomologiegruppe kohärenter Garben.

In dieser Vorlesung ist unser Ziel, algebraische Invarianten von Körpern zu studieren, nämlich die Galoiskohomologiegruppen. Wir interessieren uns hauptsächlich für das Studium der ersten und zweiten Kohomologiegruppe eines Körpers  $K$  mit Koeffizienten in einer Matrixgruppe  $G$ . Wir geben eine geometrische Interpretation der Klassen in  $H^1(K, G)$  als étale  $G$ -Bündel über  $\text{Spec} K$  und der Klassen in  $H^2(K, \mathbb{G}_m)$  als zentrale einfache  $K$ -Algebren. Geplanter Inhalt der Vorlesung:

- (1) Quaternionenalgebren über Körpern, zentrale einfache Algebren und die Brauergruppe.
- (2) Nicht-abelsche Kohomologie der Körper, Torsore und kohomologischer Blick auf zentrale einfache Algebren.
- (3) Galoiskohomologie.
- (4) Kohomologischer Blick auf die Brauergruppe.
- (5) Der étale Situs eines Körpers und seine Beziehung zur Galoisgruppe.
- (6) Anwendungen.

Ein gutes Verständnis der Vorlesungen Lineare Algebra 1 und 2 sowie Algebra 1 wird vorausgesetzt. Algebra 2 ist nicht wirklich nötig, aber hilfreich.

## **Literatur:**

Gille S., Szamuely T.- *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, CUP 2006.  
Kersten I. - *Brauergruppe*, Universitätsverlag Göttingen 2007.  
Serre J. P. - *Galois Cohomology*, Springer 1997.

# Algebraische Topologie I

**Dozent:** Dr. Moritz Rahn

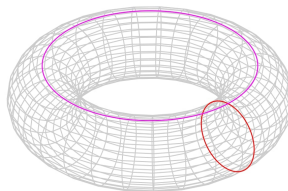
**Termine:** Mo 10-12, Mi 10-12

In der algebraischen Topologie studieren wir Räume durch ihnen zugeordnete algebraische Invarianten. Die Fundamentalgruppe und die singulären Homologiegruppen sind uns als prototypische Beispiele bereits aus der Einführung in die Topologie bekannt. Hierauf aufbauend beschäftigen wir uns in diesem Kurs mit wichtigen Varianten der singulären Homologietheorie.

- (1) Zum einen studieren wir mit den CW-Komplexen eine wichtige Klasse kombinatorisch gut kontrollierbarer Räume. Für diese gibt es eine angepasste Homologietheorie (*zelluläre Homologie*), welche mit der singulären Homologietheorie übereinstimmt, aber deutlich einfacher zu berechnen ist, was wir an einigen Beispielen illustrieren werden.
- (2) Homologiegruppen von vielen in der Natur auftretenden Räumen sind typischerweise *endlich-erzeugte* abelsche Gruppen, und als solche direkte Summen von freien abelschen Gruppen und Torsionsgruppen. Eng hiermit zusammenhängend ist die *singuläre Homologie mit Koeffizienten*, welche uns etwas weiter in die homologische Algebra lockt.
- (3) Durch den Übergang zur *singulären Kohomologie* verfeinern wir unsere algebraischen Invarianten zu (graduiert) kommutativen Ringen. Diese zusätzliche Produktstruktur ist in Berechnungen von zentraler Bedeutung. Möglicherweise beschäftigen wir uns auch mit zugehörigen Dualitätsphänomenen.

Diese Themen gehören zu dem Standardwerkzeugkoffer der Topologie.

Je nach Vorkenntnissen und zeitlichem Verlauf würde ich zum Abschluss eine knappe Einführung in die Homotopietheorie sowie in die Interaktion von Homotopietheorie und Kohomologietheorie anbieten.



Vielen Dank an die Urheber/-innen von legal frei verfügbaren Bildern der WikiMedia!

## Literatur:

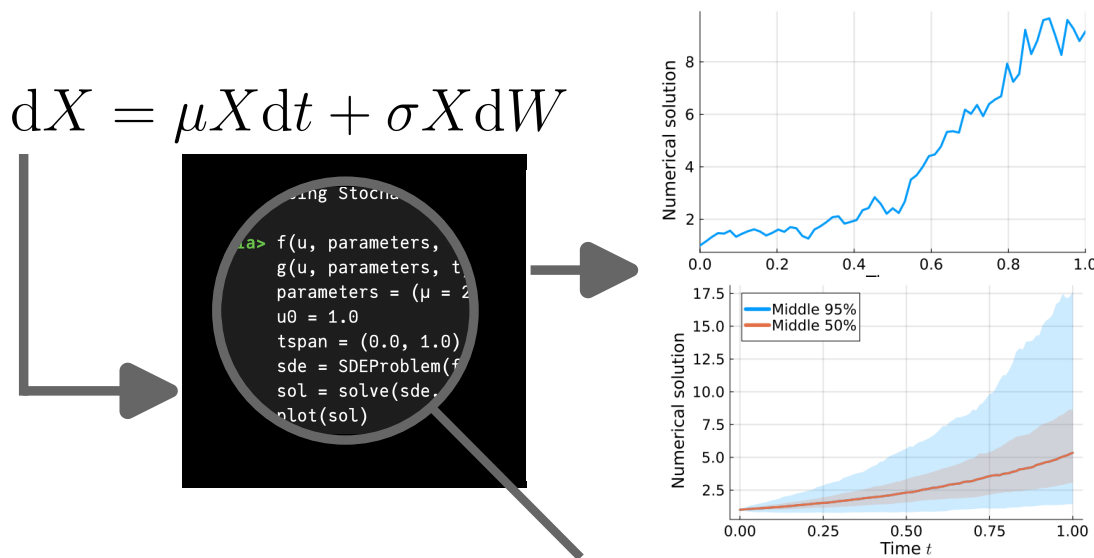
- G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer (1997).  
J. F. Davis, P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, AMS (2001).  
A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).  
R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner (2013).

# Numerik stochastischer Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Hendrik Ranocha

Termine: Mo 10-12

Zeitabhängige Prozesse in den Natur- und Ingenieurwissenschaften werden häufig mit Differentialgleichungen modelliert. Falls zufällige Einflüsse eine Rolle spielen führt dies auf stochastische Differentialgleichungen. Genau wie ihre deterministischen Verwandten können stochastische Differentialgleichungen in der Regel nicht analytisch gelöst werden. Diese Vorlesung beginnt mit einer Einführung in stochastische Differentialgleichungen als Erweiterung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Darauf aufbauend werden grundlegende Verfahren zur numerischen Behandlung stochastischer Differentialgleichungen thematisiert, etwa das Euler-Maruyama-Verfahren, starke und schwache Konvergenz sowie Monte-Carlo-Ansätze.



Die Vorlesung baut auf die *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen* auf. Sie sollten ebenfalls mit *Grundlagen der Stochastik* vertraut sein.

## Literatur:

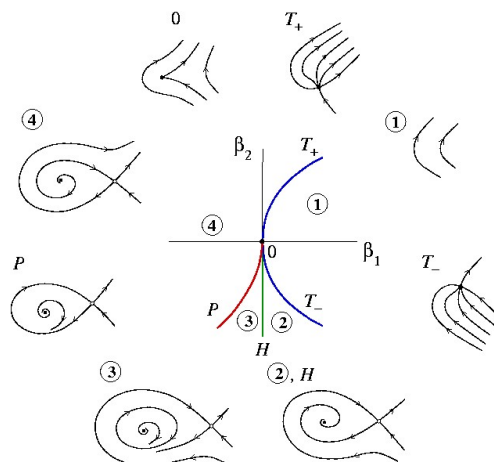
- D. Higham und P. Kloeden. *An introduction to the Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM (2021).
- P. E. Kloeden und E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer (1992).
- G. N. Milstein, M. V. Tretyakov. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*, Springer (2021).
- R. D'Ambrosio. *Numerical Approximation of Ordinary Differential Problems*, Springer (2023).
- D. Griffiths und D. Higham. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer (2010).
- L. C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, AMS (2013).

# Verzweigungstheorie

Prof. Dr. Alan Rendall

Termine: Mo 10-12

Die zeitliche Entwicklung vieler Vorgänge kann durch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben werden. Oft enthalten diese Systeme viele Parameter. Es geht also um ein System der Form  $\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha)$ . Es ist wichtig, das qualitative Verhalten der Lösungen solcher Systeme zu verstehen. Insbesondere interessiert man sich für solche Eigenschaften, die invariant sind unter Transformationen der Variablen  $x$ . Wann sind die Systeme für feste Werte von  $\alpha$  in der Nähe eines Werts  $\alpha_0$  unter solchen Transformationen äquivalent? Wenn sie es nicht sind, dann heißt  $\alpha_0$  Verzweigungspunkt. Es könnte z.B. sein, dass eine stationäre Lösung sich in zwei aufspaltet, was den Namen des Begriffs erklärt. In dieser Vorlesung geht es um die Frage, wie man Verzweigungen klassifizieren kann und wie man dieses Wissen auf Fragen in Wissenschaften wie Physik, Chemie und Biologie anwenden kann. Vorausgesetzt werden nur die Grundvorlesungen der Mathematik, insbesondere die Analysis 2.



Die Bogdanov-Takens-Verzweigung

## Literatur:

- Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Springer (2010).  
L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer (2001).  
M. Wilke und J. W. Prüß, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*, Birkhäuser (2011).

# *Geschichte der Mathematik II*

**Dozent:** Prof. Dr. Tilman Sauer

**Termine:** Mo 16-18, Do 14-16

Die Vorlesung schliesst sich inhaltlich an die "Kulturgeschichte der Mathematik" vom Wintersemester an und gibt einen Überblick über Entwicklungen in der Mathematik vom 17. Jahrhundert bis in das 20. Jahrhundert.

Ausgehend von der analytischen Geometrie von Descartes wird die Entstehung und Entfaltung der Analysis behandelt und die Entwicklung und Ausdifferenzierung der Geometrie bis hin zur Herausbildung einer mehrdimensionalen Differentialgeometrie als mathematische Voraussetzung für die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie.

Behandelte Themen u.a.: die Vielfalt der geometrischen Probleme und Methoden im 17. Jahrhundert und die Herausbildung der Analysis; weitere Entwicklung der Analysis in Richtung einer Algebraisierung; Anfänge der Variationsrechnung; Ursprünge der nicht-euklidischen Geometrie; der Begriff der Krümmung und das Theorema egregium; Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs und Axiomatisierung der Geometrie; Invariantentheorie und Tensorkalkül; klassische Mechanik und Relativitätstheorie.



Leonhard Euler (Wikimedia Commons)

## **Literatur:**

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, Wiley (1989).

Edwards, Charles, *The Historical Developments of Calculus*, Springer (1994).

Jahnke, Niels (Hg.) *Geschichte der Analysis*, Heidelberg (1999).

Mainzer, Klaus, *Geschichte der Geometrie*, B.I. (1980).

Stillwell, John. *Mathematics and Its History*, Springer (2010<sup>3</sup>).

Eigene Folien und Skripte.

# *Einführung in die Funktionalanalysis*

**Dozent:** PD Dr. Matthias Schneider

**Termine:** Mo, Do 14-16

Alle reden über und mit Dialogsystemen wie Chat-GPT und Bildgeneratoren wie DALL-E. Maschinelles Lernen wäre ohne das Studium von unendlich-dimensionalen Räumen kaum möglich - Funktionalanalysis! Also lassen wir künstliche Intelligenz sprechen:

**Was ist Funktionalanalysis? (In einem Satz!):**

Die Funktionalanalysis ist ein Bereich der Mathematik, der sich mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen und deren Funktionen befasst, wobei Konzepte wie Grenzwerte, Konvergenz, Normen und lineare Operatoren untersucht werden.

**Drei Lehrbücher zum Thema “Funktionalanalysis” für Einsteiger:**

- "Funktionalanalysis" von Dirk Werner:  
Dirk Werner bietet in diesem Buch eine gut strukturierte und leicht verständliche Einführung in die Grundlagen der Funktionalanalysis. Es legt Wert auf Motivation und Intuition, was für Einsteiger besonders hilfreich ist.
- "Introduction to Functional Analysis" von Angus E. Taylor und David C. Lay:  
Dieses Buch ist für Anfänger geeignet und bietet eine klare Einführung in die Grundlagen der Funktionalanalysis. Es enthält viele anschauliche Beispiele, um das Verständnis zu fördern.
- "A First Course in Functional Analysis" von Orr Moshe Shalit:  
Orr Moshe Shalit präsentiert die Grundlagen der Funktionalanalysis auf eine klare und zugängliche Weise. Das Buch richtet sich an Anfänger und enthält viele motivierende Beispiele.

**Visualisiere “unendlich-dimensional”:**



# *Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen*

**Dozent:** Prof. Dr. Duco van Straten

**Termine:** Di, Fr 14-16

Die Theorie der Riemannschen Flächen ist eine natürliche Erweiterung der Funktionentheorie. Ein Besuch jener ist dann auch Voraussetzung für die Teilnahme an dieser Vorlesung. Vorkenntnisse aus der Topologie über Flächen sind nützlich aber nicht unbedingt notwendig, da dies in der Vorlesung thematisiert wird.

Behandelt werden weiter die Riemannsche Flächen der algebraischen Funktion, die Überlagerungstheorie und der Riemannsche Existenzsatz. Weiter entwickeln wir die Theorie der holomorphen Differentialformen auf Riemannsche Flächen und beweisen den Satz von Riemann-Roch und die Serre Dualität. Die Vorlesung schließt ab mit der Konstruktion von meromorphen Funktionen zu vorgegebenen Divisoren und Anwendungen.



## **Literatur:**

S. K. Donaldson, *Riemann Surfaces*, Lecture notes (2004).

O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher 184, Springer (1977).

D. van Straten, *Riemannsche Flächen und algebraische Kurven*, Vorlesungsskript, Mainz (2012).

H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Flächen*, Springer Fachmedien (1997).

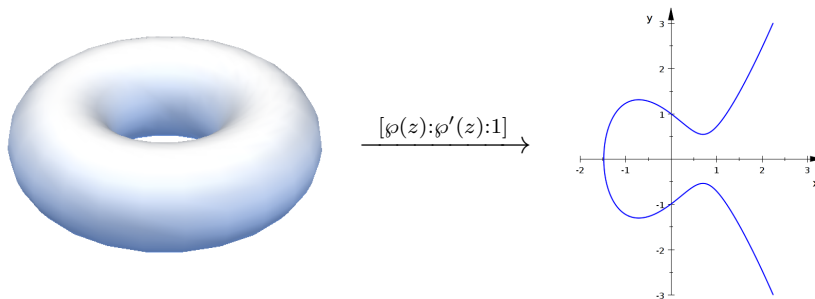
# ***Komplexe Algebraische Geometrie II***

**Dozent:** Prof. Dr. van Straten

**Termine:** Di, Fr 10-12

Diese Veranstaltung setzt die Vorlesung Algebraische Geometrie I aus dem Wintersemester 2023/24 fort.

Hauptgegenstand ist die Geometrie der komplexen Tori und abelschen Varietäten und ihrer projektiven Einbettungen.



Projektive Einbettung eines eindimensionalen komplexen Torus als komplexe ebene kubische Kurve.

## **Literatur:**

Chr. Birkenhake, H. Lange *Complex Abelian Varieties*. Springer Grundlehren 302.

Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley (1978).

G. Kempf, *Complex Abelian Varieties and Theta functions*. Springer Universitext.

D. Mumford, *Abelian Varieties*. Oxford UP (1985).

D. Mumford, *Lectures on Theta functions I-III*. Modern Birkhäuser Classics.

## LEGGENDE

