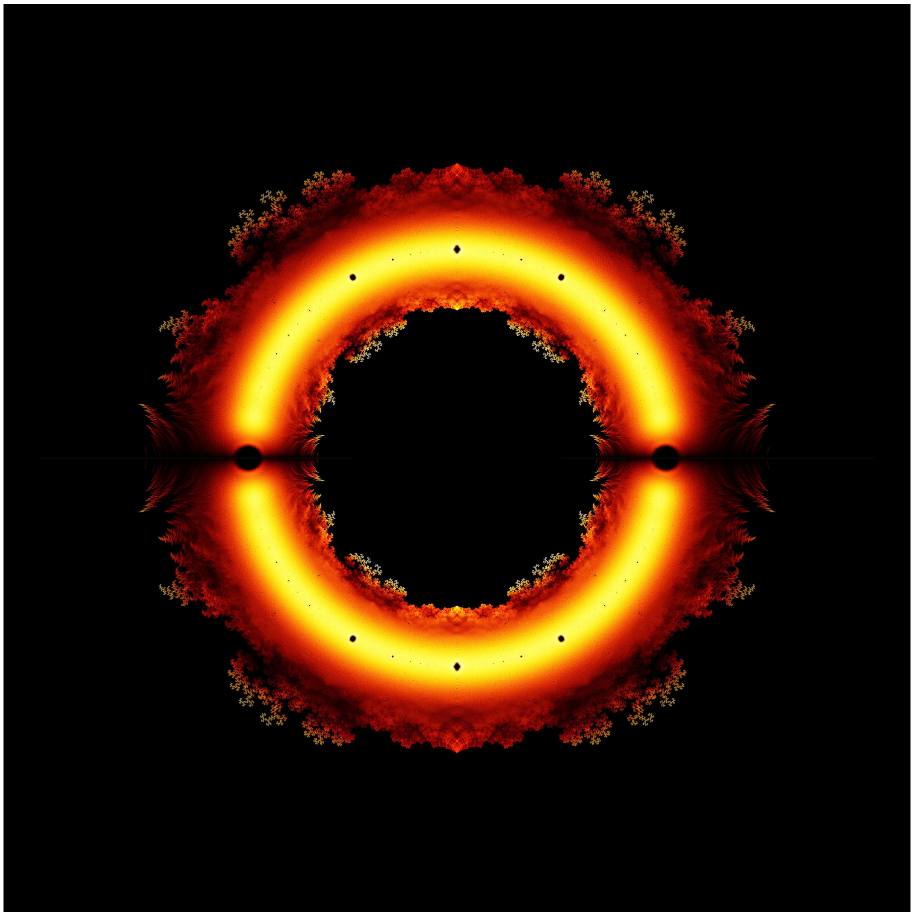
Vorlesungsverzeichnis

Mathematik



Mainz

Wintersemester 2019/2020

The Ring of Fire

Für dieses feurige Bild betrachten wir ganz besondere Funktionen: die **Littlewood-Polynome** (LWP). Diese haben die allgemeine Form:

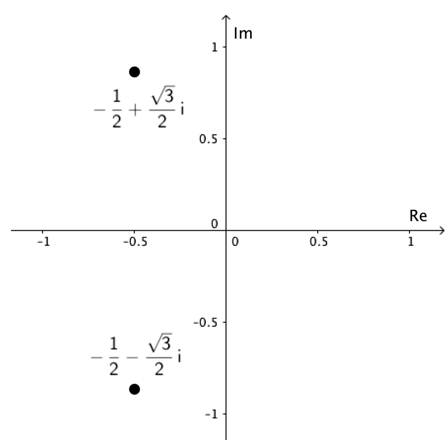
$$f(x) = \pm 1 \pm x \pm x^2 \pm ... \pm x^n$$

Man erkennt hier bereits ihre Besonderheit: alle Vorfaktoren von x sind entweder 1 oder -1. Wir betrachten nun beispielsweise $f(x) = 1 + x + x^2$. Dieses hat den Grad 2, entsprechend der höchsten Potenz von x. Die pq-Formel liefert die beiden Nullstellen von $f(x)$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 - 1} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{-3}}{2}.$$

In den reellen Zahlen besitzt $f(x)$ demnach keine Nullstelle, da wir unter der Wurzel eine negative Zahl, die -3, steht. Fügt man zu den reellen Zahlen die imaginäre Einheit i dazu, so erhält man die komplexen Zahlen. Diese Einheit i hat folgende Eigenschaft: $i^2 = -1$. Mit diesem Trick kann man aus negativen Zahlen die Wurzel ziehen und erhalten wir die beiden komplexen Nullstellen:

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \text{ und } -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i$$



Nun kann man die Nullstellen auf der entstehenden komplexen Zahlenebene abtragen, wobei das $(-\frac{1}{2})$ in der Zahlenebene nach rechts und das $(\frac{\sqrt{3}}{2} i)$ nach oben abgetragen werden. Aber zwei Punkte ergeben noch lange kein Bild! Zeichnet man aber alle 90 Millionen Nullstellen aller LWP vom Grad 22, das heißt $f(x) = x^{22} \pm x^{21} \pm ... \pm 1$, in die Zahlenebene ein, dann erhält man damit den Ring und die schönen drachenartigen Muster. Um die Färbung zu erhalten, wurden die Punkte, die sehr oft als Nullstelle auftreten viel heller gezeichnet, als solche die nur selten als Nullstelle auftreten. Dabei werden weiße Punkte bis zu 500.000fach getroffen, wie beispielsweise der helle Ring und die Spitzen der Muster am Rand der Nullstellenmenge.

Interessanterweise, ähneln die Randmuster stark den Drachenkurven. Ein Zusammenhang ist vermutet, mathematisch aber noch nicht ganz erforscht. Vielleicht hat dieses Poster Ihr Interesse geweckt, diesen Zusammenhang näher zu erforschen?

Konzeption und Gestaltung von Manuel Krummeck, Tamara Nutz und Kim Vosen. Entstanden im Rahmen des Seminars **Zahl & Bild** von Prof. Dr. Manuel Blickle im Wintersemester 2016/17 an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
goo.gl/ZgPbaa

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Wintersemester 2019/20 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.
In die Gesamtübersicht wurden diesmal auch die Beschreibungen der Seminare mit aufgenommen, soweit Beiträge eingegangen sind.
Die Vorlesungen aus dem Grundstudium sowie die Service-Veranstaltungen erscheinen in der Regel nicht in diese Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Juli 2019

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10	Topologie (Hog-Angeloni)	Projektive Geometrie (Leinen) Algebra I (Zuo)	Projektive Geometrie (Leinen) Funktionentheorie (Lehn)	Topologie (Hog-Angeloni)	Algebra I (Zuo)
10-12	Numerik partieller Differential-gleichungen (Hanke-Bourgeois) Statistik (Birkner) Grundlagen der Stochastik (Hartung)	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (Bachmayr) Partielle Differentialgleichungen III (Rendall) Stochastische Analysis (Klenke)	Numerik partieller Differential-gleichungen (Hanke-Bourgeois) Algebraische Zahlentheorie II (Javanpeykar) Statistik (Birkner) Grundlagen der Stochastik (Hartung)	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (Bachmayr) Algebraische Zahlentheorie II (Javanpeykar) Stochastische Analysis (Klenke)	Funktionentheorie (Lehn) Struktur komplexer Netzwerke, Ergänzungsvorlesung (Mönch) Differentialtopologie (Kraus)
12-14	Zahlentheorie (Stäbler) Partielle Differentialgleichungen III (Rendall)	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) Algebraische Geometrie I (Blickle)	Zahlentheorie (Stäbler) Differentialtopologie (Kraus)	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) Algebraische Geometrie I (Blickle) Fourieranalysis (Kostrykin)	Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen (Kostrykin)
14-16	Regularisierung inverser Probleme (Hanke-Bourgeois) Praktikum zur Stochastik (Birkner)	Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen (Kostrykin)		Adaptive Methoden für partielle Differentialgleichungen (Bachmayr) Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer)	Grundlagen der Geometrie und Logik (Fröhlich)
16-18	Ergänzung zur Analysis 3 (Kraus) Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer)	Stochastik II (Höpfner)		Stochastik II (Höpfner)	

+ Hauptseminar: Rechnen mit historischen Instrumenten (Sauer) – Themenvergabe und Terminfindung Do 11.7., 8 Uhr, 05-522

Adaptive Methoden für partielle Differentialgleichungen

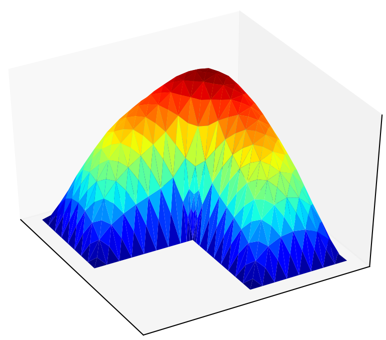
Dozent: Prof. Dr. Markus Bachmayr

Termin: Do 14–16

Um effiziente Approximationen zu erhalten, ist es für die numerische Simulation vieler partieller Differentialgleichungen erforderlich, die verwendete Diskretisierung an die Lösung anzupassen. Information zur unbekannten Lösung erhält man aber nur mittels für konkrete Diskretisierungen berechneter Näherungen. Man geht daher schrittweise vor und verfeinert eine grobe Ausgangsdiskretisierung nach und nach, bis ein Kriterium an den Fehler erfüllt ist. Bei solchen adaptiven Methoden ergeben sich zwei wesentliche Fragen:

(1) Ist sichergestellt, dass dieser Prozess gegen die exakte Lösung konvergiert?
(2) Kann man auch garantieren, dass die Anzahl der arithmetischen Operationen zur Berechnung der Näherungslösung die bestmögliche Skalierung in der Anzahl der Unbekannten aufweist, das adaptive Verfahren also nicht teurer ist als nötig?

Vor allem bei (2) hängt eine positive Antwort sehr stark von der richtigen Konstruktion des Verfahrens ab. In dieser Vorlesung werden vor allem die grundlegenden mathematischen Konzepte behandelt, die entwickelt wurden um die Komplexität solcher Algorithmen zu verstehen, die sich an nicht explizit bekannte Lösungen anpassen.



Die Vorlesung verwendet Grundkenntnisse zu elliptischen Randwertproblemen. Die mathematischen Konzepte werden auf Basis einfacher Diskretisierungen entwickelt, die in der Vorlesung eingeführt werden. Insbesondere kann die Veranstaltung auch parallel zu *Numerik partieller Differentialgleichungen* ergänzend belegt werden.

Literatur:

R. H. Nochetto, K. G. Siebert, und A. Veeser, *Theory of adaptive finite element methods: an introduction.* In *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*, Springer (2009).

J. M. Cascon, C. Kreuzer, R. H. Nochetto, und K. G. Siebert, *Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., **46** (2008).

T. Gantumur, H. Harbrecht, und R. Stevenson, *An optimal adaptive wavelet method without coarsening of the iterands.* Math. Comp., **76** (2007).

Algebra I - Körper, Ringe, Moduln

Dozent: Prof. Dr. Kang Zuo

Termine: Di und Fr 8–10

In der Vorlesung "Algebra I" im WS19/20 werden die folgende Stoffe behandelt: Grundbegriffe der Gruppen, Polynomgleichungen, Ringe, Polynomringe, Euklidische Ringe, Faktorielle Ringe, Körpererweiterungen, Galoistheorie sowie Geometrische Konstruktionen.
Dabei werden Vorkenntnisse von Linearer Algebra I und II vorausgesetzt.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\zeta_3\sqrt[3]{2}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\zeta_3^2\sqrt[3]{2}) \arrow[dl, dash] & \mathbb{Q}(\zeta_3) \arrow[dll, dash] \\
& \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \langle (1) \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle (1,2) \rangle \arrow[dr, dash] & \langle (2,3) \rangle \arrow[d, dash] & \langle (1,3) \rangle \arrow[dl, dash] & \langle (1,2,3) \rangle \arrow[dll, dash] \\
& S_3 & &
\end{tikzcd}
$$

Literatur:

M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser (1993).

G. Fischer, *Lehrbuch der Algebra*, Springer Spektrum (2007).

S. Lang, *Algebra*, Addison Wesley (1965).

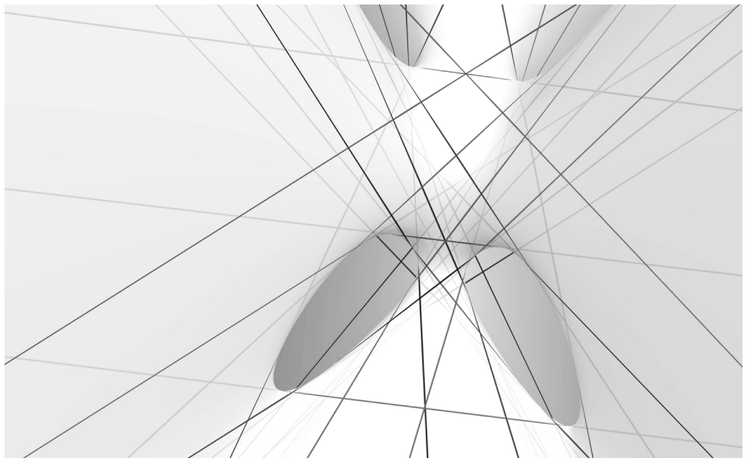
B.L. Van der Waerden, *Algebra I*, Springer (1966).

Skript zur Galois Theorie.

Vorlesung: Algebraic Geometry 1

Dozent: Prof. Dr. Blickle

Termine: Di, Do 12-14



The Clebsch Cubic (a variety) with its 27 lines.

Algebraic Geometry is a very active and highly developed field with far reaching connections to number theory, topology, differential geometry, complex geometry, combinatorics .... In its core, however, algebraic geometry is simply concerned with the solution of polynomial equations in several variables. The solution set of such systems of polynomial equations can be made into a geometric space, called a variety. Algebraic geometry is the study of algebraic varieties and more abstract gadgets alike (schemes, algebraic spaces, stacks ...).
In this course you will get a classical introduction to the subject focusing on affine and projective varieties and more particular on curves. This will provide all participants with the necessary background to tackle the more demanding and abstract introduction to scheme theory (Algebraic Geometry 2) in the following semesters.
Minimal prerequisites are solid foundations in algebra through either of the courses Algebra 1 or Computeralgebra and a further course such as Zahlentheorie, Topologie, Riemannsche Flächen or, ideally, Algebra 2. Participation without Algebra 2 is possible but will require that you learn some of that material on your own (guidance will be provided).
For each of the 30 Lectures there will be 1 Exercise which has to be prepared. The exercises will be discussed during class. The course will be taught in English unless there is consensus among the participants to do otherwise. There will be a final exam after the course.

Literatur:

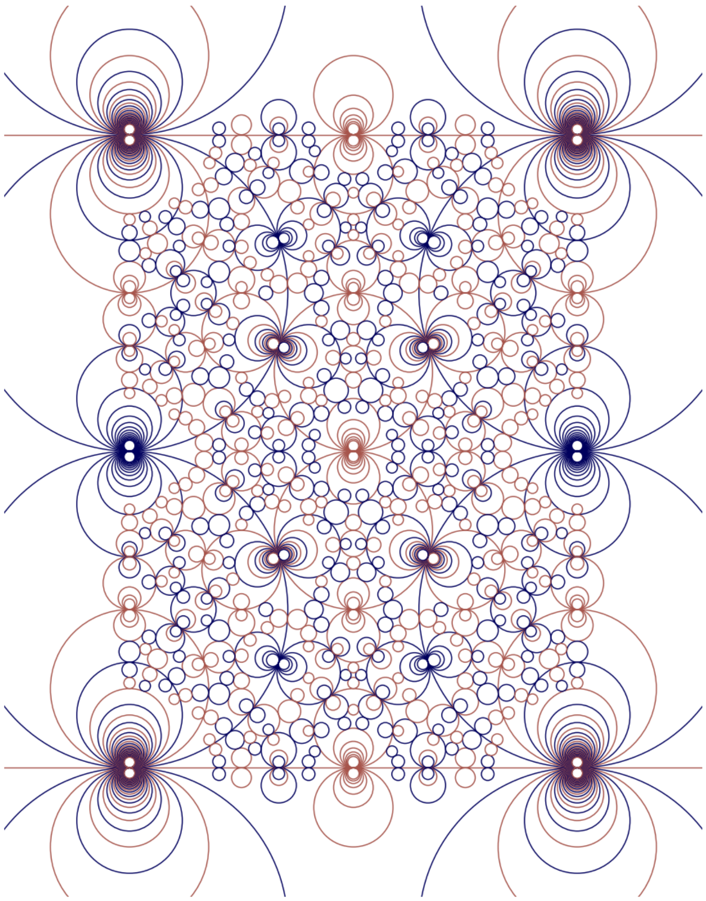
Fulton, *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry.* (1969)
Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, (1977).
Reid, *Undergraduate algebraic geometry.* Cambridge University Press (1988)

Algebraische Zahlentheorie II

Dozent: Jun. Prof. Dr. Ariyan Javanpeykar

Termine: Mi und Do 10–12

Jede Zahl hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren. Das heißt, der Ring der ganze Zahlen ist ein faktorieller Ring. In dieser Vorlesung werden wir uns zunächst mit Verallgemeinerungen dieser Aussage beschäftigen. Dazu werden wir die Theorie von Dedekind/Oedekind-Ringen ausführlich behandeln.



Danach legen wir den Fokus auf Zahlkörper und beschäftigen uns mit klassischen Endlichkeitssätzen von Dirichlet, Hermite, und Minkowski. Zum Beispiel beweisen wir, dass die (abelsche) Einheitengruppe des Rings der ganzen Zahlen eines Zahlkörpers endlich erzeugt ist.

Literatur:

Neukirch, J., *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag 1992.

Weiterfürende Analysis für das Lehramt

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: Di und Do 12–14

In dieser Vorlesung erlernen wir die Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie nach Lebesgue und Hausdorff. Das umfasst insbesondere die Bestimmung von Inhalten von Punktmengen in Euklidischen Räumen und damit das Berechnen mehrdimensionaler Integrale sowie eine Einführung in die fraktale Geometrie. Ferner erlernen wir wichtige Begriffe und Methoden der klassischen Vektoranalysis und schließlich die für die moderne Analysis zentralen Integralsätze von Gauß, Green und Stokes. Neben Rechnen soll vor allem viel gebastelt und gezeichnet werden.

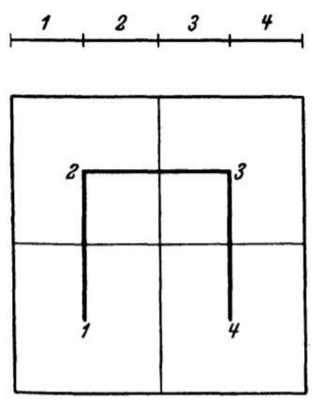


Abb. 1.

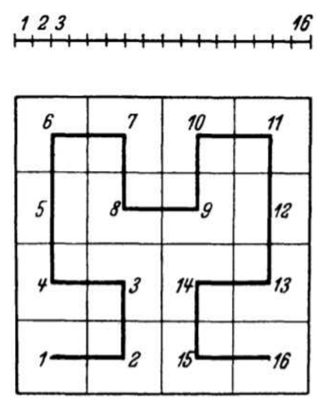


Abb. 2.

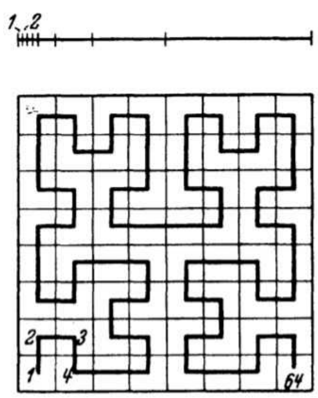


Abb. 3.

D. Hilbert: *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (1891)

Literatur:

F. Burk, *A Garden of Integrals*, The Mathematical Association of America (2007).

J.J. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons (2003).

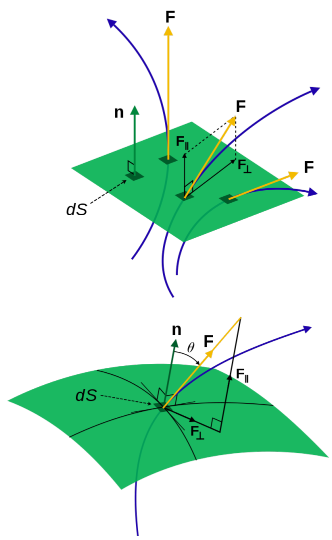
F. Sauvigny, *Analysis,* Springer Spektrum (2014).

Ergänzung zur Analysis 3

Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus

Termin: Mo 16–18

In dieser Vorlesung werden einige Themen behandelt, die in der Vorlesung Analysis 3 nur kurz angerissen wurden. Insbesondere werden wir uns detaillierter mit Differentialformen beschäftigen, mit deren Hilfe eine elegante Formulierung des Integrals möglich ist, und einen ersten Einblick in die Rham-Kohomologie geben.



Literatur:

Agricola, Friedrich; *Globale Analysis, Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik*, Springer.

Cartan; *Differential Forms, Dover Publications.*

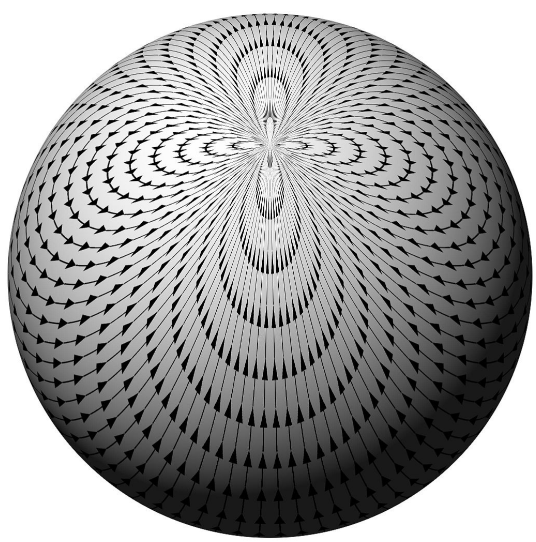
Holmann, Rummler; *Alternierende Differentialformen*, Wissenschaftsverlag.

Differentialtopologie

Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus

Termine: Mi 12-14, Fr 10–12

Die Differentialtopologie beschäftigt sich mit Mannigfaltigkeiten und Eigenschaften, die unter differenzierbaren Abbildungen erhalten bleiben. Entscheidend beeinflusst wurde dieses Gebiet der Mathematik durch die Entdeckung Milnors, dass es auf der topologischen 7-dimensionalen Sphäre mehrere differenzierbare Strukturen gibt.
In der Vorlesung werden zuerst grundlegende Techniken der Differentialtopologie behandelt, wie Flüsse von Vektorfeldern, Vektorraumbündel und Transversalitätssätze. Anschließend werden wir einige interessante Ergebnisse aus der Differentialtopologie wie den Brown'schen Fixpunktsatz, den Satz von Poincare Hopf und exotische differenzierbare Strukturen behandeln.
Vorausgesetzt werden neben den Vorlesungen Analysis 1-3 grundlegende Kenntnisse über Mannigfaltigkeiten, z.B. aus der Vorlesung elementare Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten oder Topologie.



Literatur:

Hirsch, *Differential topology*, Springer (1976).

Bröcker, Jänich, *Differentialtopologie*, Springer (1973).

Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, Univ. Press (1965).

Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

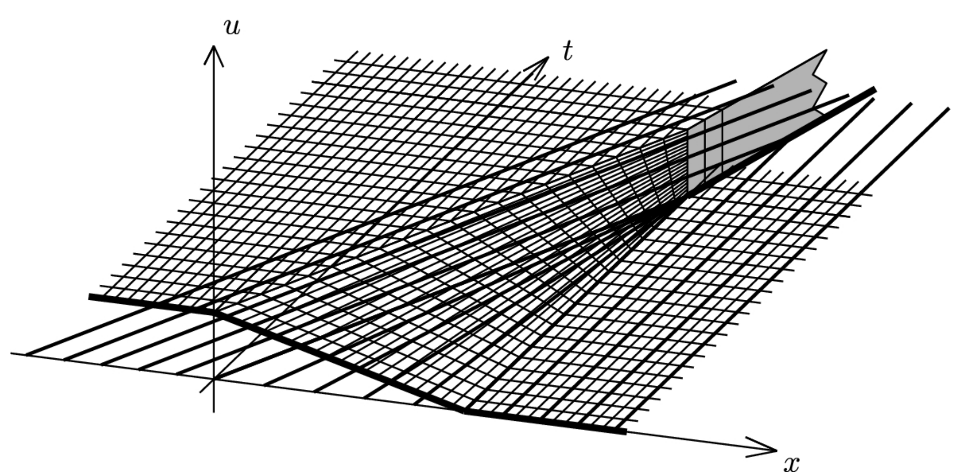
Termine: Di 14-16 und Fr 12-14, Raum 04-522

Unter einer partiellen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung, welche die gesuchte Funktion u mehrerer Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geq 2)$ mit einigen ihrer partiellen Ableitungen verknüpft. Die höchste Ordnung der auftretenden Ableitungen heißt Ordnung der Differentialgleichung. In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, Insbesondere behandeln wir die Burgersgleichung $u_t + uu_x = 0$, $t, x \in \mathbb{R}$, eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung. Sie besitzt nicht unbedingt eine eindeutige Lösung. Bei geeignet gewählten Anfangswerten können Stoßwellen beobachtet werden. Die Laplacegleichung $\Delta u := \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = 0$ ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie spielt eine fundamentale Rolle in der Analysis. Von Interesse sind Randwertaufgaben für die Laplacegleichung. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Man sucht eine Lösung u der Laplacegleichung in Ω, welche die Randbedingung

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} u(y) = g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \partial\Omega$$

erfüllt.

Voraussetzungen: Analysis I und II, lineare Algebra, etwas Lebesgue-Integrationstheorie ist von Vorteil, aber keine Voraussetzung.



Literatur:

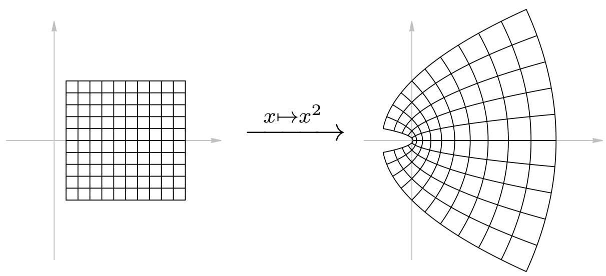
L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1998, 2010).

Funktionentheorie

Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Mi 8–10, Fr 10–12

Gegenstand der Funktionentheorie ist das Studium der holomorphen (= komplex differenzierbaren) Funktionen einer komplexen Variable $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Im Gegensatz zur reellen Theorie ist eine holomorphe Funktion automatisch beliebig oft komplex differenzierbar und läßt sich überall in eine Potenzreihe entwickeln. Die Funktionentheorie ist sicher eine schönsten elementaren mathematischen Theorien wegen der erstaunlichen Eleganz der Resultate und der Beweismethoden. Wichtige Resultate sind der Residuensatz, die Cauchysche Integralformel, das Maximumprinzip und der Riemannsche Abbildungssatz.



Das Bild illustriert das konforme Verhalten (= Winkeltreue) holomorpher Funktionen.

Zur Vorlesung gibt es eine zweistündige Übung. Voraussetzungen für den Besuch der Veranstaltung sind Grundkenntnisse der Analysis im Umfang der Grundvorlesungen Analysis I und Analysis II. Kenntnisse in Analysis III sind natürlich nützlich, werden aber nicht gebraucht.

Literatur:

R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer Verlag (1995).

H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer, (1976).

A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer (1922,…, 2000).

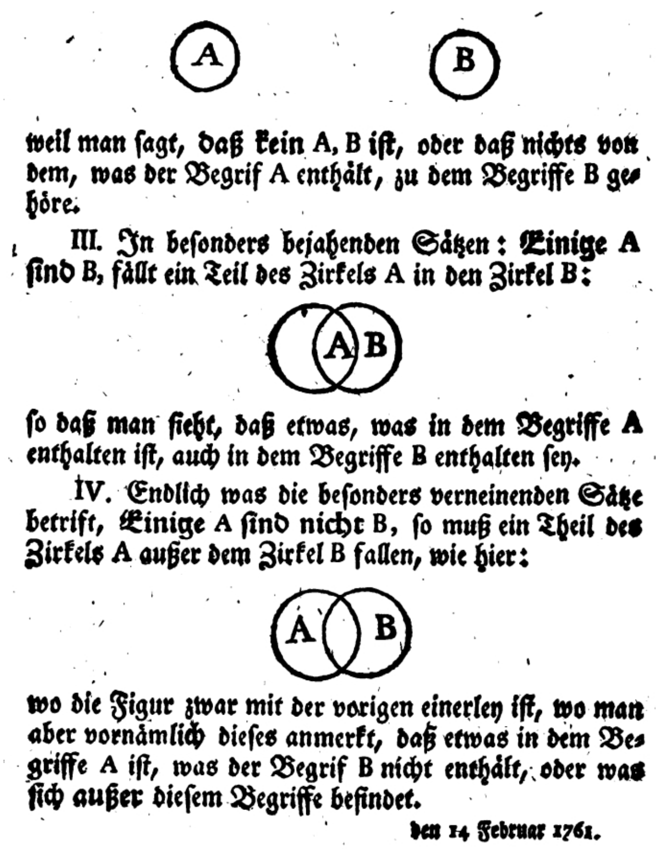
T. Needham, *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenbourg (2001).

Grundlagen der Geometrie und Logik

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: Fr 14–16 Uhr

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in klassische und moderne Begriffe der mathematischen Logik, deren Entwicklung eng mit der Geschichte der Euklidischen Geometrie und des uns heute vertrauten Zahlbegriffs verlief. Wir diskutieren solche historischen Stationen, beginnend mit der Geometrie des griechischen Alterums bis zu den berühmten Gödelschen Sätzen und der für maschinengestützte Beweise beispielgebenden Formulierung einer Elementargeometrie nach Alfred Tarski.


weil man sagt, daß kein A, B ist, oder daß nichts von dem, was der Begrif A enthält, zu dem Begriffe B gehöre.

III. In besonders bejahenden Sätzen: Einige A sind B, fällt ein Teil des Zirkels A in den Zirkel B:

so daß man sieht, daß etwas, was in dem Begriffe A enthalten ist, auch in dem Begriffe B enthalten sey.

IV. Endlich was die besonders verneinenden Sätze betrift, Einige A sind nicht B, so muß ein Theil des Zirkels A außer dem Zirkel B fallen, wie hier:

wo die Figur zwar mit der vorigen einerley ist, wo man aber vornämlich dieses anmerkt, daß etwas in dem Begriffe A ist, was der Begrif B nicht enthält, oder was sich außer diesem Begriffe befindet.

den 14 Februar 1761.

Aus L. Euler: *Briefe an eine deutsche Prinzessin*

Literatur:

D.W. Hoffmann, *Grenzen der Mathematik*, Springer Spektrum (2018).

D.W. Hoffmann, *Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze*, Springer Spektrum (2017).

Kulturgeschichte der Mathematik

Dozent/in: Prof. Dr. Tilman Sauer

Termine: Mo 16–18, Do 14–16

Die Vorlesung gibt einen Überblick über die Entstehung des mathematischen Denkens und mathematischer Konzepte vom Ursprung in Mesopotamien bis zur Neuzeit. Behandelt werden die Entstehung des Zahlbegriffs und der elementaren arithmetischen Operationen, die Herausbildung geometrischer Konzepte und Vorstellungen und die Entstehung der Algebra. Dabei wird auch die Einbettung der Entwicklung in den allgemeineren kulturhistorischen Kontext und die Wechselwirkungen mit anderen Aspekten wissenschaftlichen Denkens (Physik, Astronomie, Kosmologie, etc) diskutiert.

Literatur:

Struik, Dirk J., *Abriß der Geschichte der Mathematik*, 1.Aufl. engl. 1948), dt. VEB D.V.d.W., viele Auflagen.

Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathemik*, Berlin, VEB DV.d.W. (1978), Nachdruck: Harri Deutsch, (2008).

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, (1972).

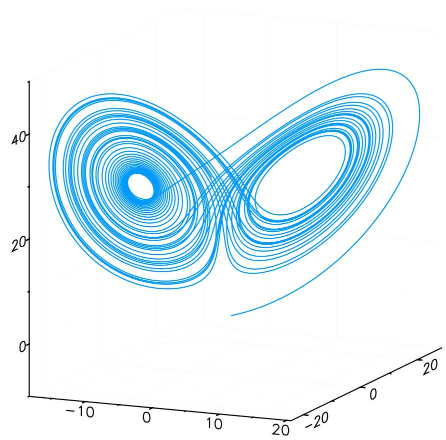
Boyer, Carl, *The History of Mathematics*, New York 1968, 2nd ed. by Uta Merzbach (1991).

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Markus Bachmayr

Termin: Di und Do 10–12

In dieser Vorlesung werden die Analyse und Umsetzung numerischer Verfahren für Anfangswertprobleme und Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt.



Die Vorlesung baut auf *Grundlagen der Numerik* auf und bildet die Grundlage für weiterführende Veranstaltungen zur Numerik, insbesondere *Numerik partieller Differentialgleichungen* und *Modellierungspraktikum*.

Literatur:

Quarteroni, Sacco, Saleri, *Numerische Mathematik 2,* Springer (2002).

Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens,* Vieweg und Teubner (2008).

Hairer, Norset, Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems,* Springer (1993).

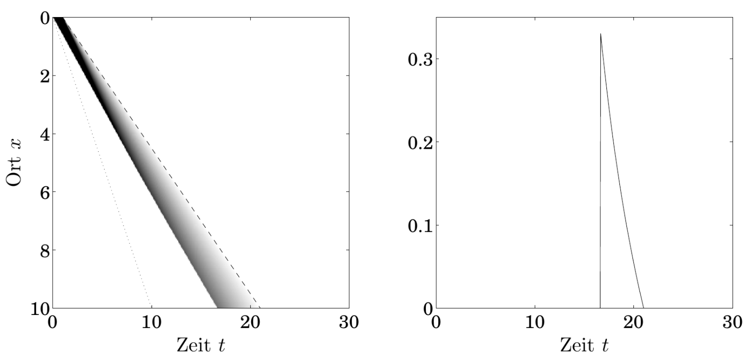
Numerik partieller Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine: Mo und Mi 10–12

Partielle Differentialgleichungen treten in vielen Anwendungen auf, vor allem in den Ingenieurwissenschaften, aber auch in den Naturwissenschaften, neben der Physik vor allem in der Meteorologie, der Geophysik und der Biologie.

Analytische Lösungen dieser Gleichungen sind nur in ganz seltenen Ausnahmefällen möglich und selbst dann zumeist nur in Form unendlicher Reihen. Daher müssen diese Gleichungen in der Praxis numerisch gelöst werden. Die entsprechenden Verfahren hängen von dem Typ der Gleichung ab: Für elliptische Gleichungen werden in der Regel variationelle Verfahren (Galerkin-Verfahren für finite Elemente) verwendet, für parabolische Differentialgleichungen werden diese dann mit Zeitintegrationsverfahren (Runge-Kutta-Verfahren) kombiniert, und für hyperbolische Verfahren werden schließlich Differenzen- bzw. finite Volumen-Verfahren eingesetzt. Alle diese Verfahren werden in der Vorlesung exemplarisch behandelt.



Konzentrationsverteilung innerhalb einer Chromatographie-Säule (links) und Ausfluss aus der Säule als Funktion der Zeit (rechts)

Die Veranstaltung umfasst neben der vierstündigen Vorlesung eine zweistündige Übung. Es werden die Inhalte der Lehrveranstaltungen Grundlagen der Numerik sowie Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen vorausgesetzt.

Literatur:

C. Großmann, H.-G. Roos, *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, Teubner, Wiesbaden, (2005).

M. Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*,Teubner, Wiesbaden, (2006).

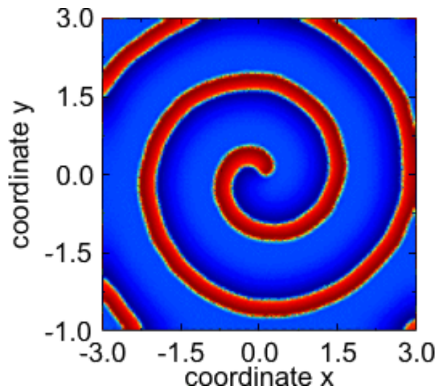
P. Knabner, L. Angermann, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, (2000).

A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, (1997).

Partielle Differentialgleichungen III

Dozent/in: Prof. Dr. Alan Rendall

Termine: Mo 12–14, Di 10–12



In dieser Vorlesung geht es um Systeme von Reaktionsdiffusionsgleichungen. Es handelt sich um eine Klasse von nichtlinearen parabolischen partiellen Differentialgleichungen, die zahlreiche Anwendungen in der Chemie und der Biologie besitzen. Die Unbekannten $u_i(t, x)$ sind z. B. die Konzentrationen von chemischen Stoffen, oder die Populationsdichten von Individuen oder Genen. Typische Phänomeme, die bei Lösungen solcher Gleichungen auftreten sind Musterbildung (z. B. Fellzeichnung von Raubkatzen) oder Wanderwellen (z.B. Ausbreitung einer Mutation in einer Population). In der Vorlesung wird erklärt, wie das qualitative Verhalten von Lösungen untersucht werden kann. Dabei werden verschiedene Begriffe und Ergebnisse eingesetzt, die in der Vorlesung 'Partielle Differentialgleichungen II' erklärt wurden.

Literatur:

P. C. Fife, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, Springer, Berlin, (1979).

J. D. Murray, *Mathematical biology*, Springer, Berlin, (1989).

J. Smoller, *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, Springer, Berlin, (1994).

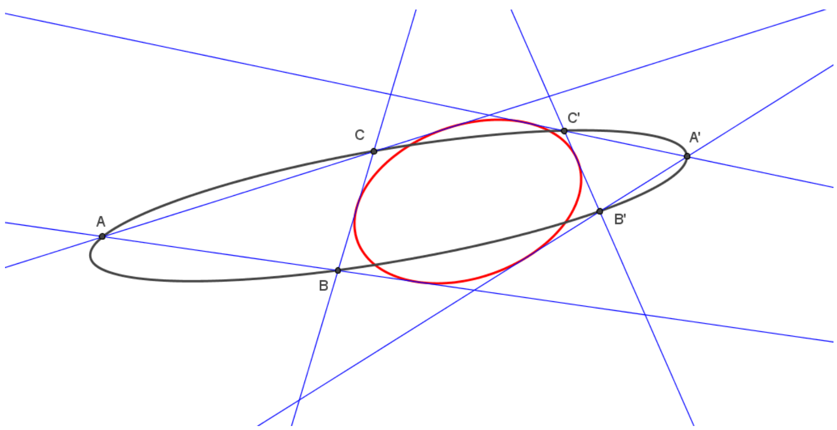
Projektive Geometrie

Dozent: **apl. Prof. Dr. Felix Leinen**

Termine: **Di und Mi 08 – 10 Uhr**

Homepage: `www.staff.uni-mainz.de/leinen/PG.html`

Zunächst werden die Sätze von Ceva, Menelaos, Desargues und Pappos im Rahmen der affinen Geometrie behandelt, welche unserer gewöhnlichen Anschauung entspricht. Um das pathologischen Verhalten paralleler Geraden auszuräumen, wird sodann der Übergang zur projektiven Geometrie vollzogen. Dort betrachten wir auch Quadriken (projektive Versionen der affinen Kegelschnitte) und leiten die Sätze von Pascal, Brianchon und Poncelet her. Schließlich wird noch hinterfragt, unter welchen Voraussetzungen an die projektive Geometrie die Sätze von Desargues und Pappos ihre Gültigkeit behalten.



Liegen die Ecken der Dreiecke $\triangle\, A\, B\, C$ und $\triangle\, A'\, B'\, C'$ auf einem Kegelschnitt, so verlaufen ihre Seiten tangential an einen Kegelschnitt.

Literatur:

Ihre selbst angefertigte Vorlesungsmitschrift.

W. P. Barth, *Geometrie*, Skript aus dem Jahr 2008.
`www.studium.math.fau.de/fileadmin/studium/skripten/barth/geoset.pdf`

A. Beutelspacher – U. Rosenbaum, *Projektive Geometrie*, Vieweg 2004.

L. Kadison – M. T. Kromann, *Projective Geometry and Modern Algebra*, Birkhäuser 1996.

A. Holme, *Geometry. Our Cultural Heritage*, Springer-Verlag 2002.

M. Koecher – A. Krieg, *Ebene Geometrie*, Springer-Verlag 2007.
`www.springerlink.com/content/j154w1`

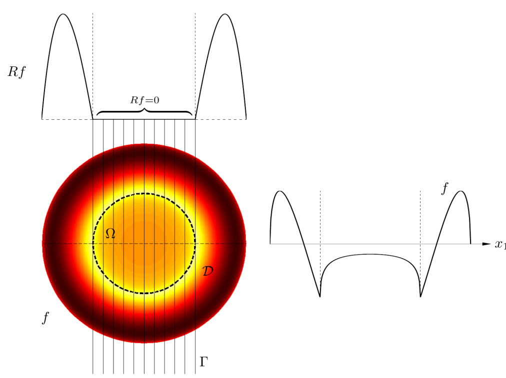
Regularisierung inverser Probleme

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine: Mo 14–16

Problemstellungen, deren Lösungen nicht stetig von den gegebenen Größen abhängen, heißen nach Hadamard "schlecht gestellt". Bekannte Beispiele sind das Cauchy-Problem für elliptische Differentialgleichungen oder die Aufgabenstellungen, die den meisten tomographischen Untersuchungsmethoden zugrunde liegen. Andere Anwendungen ergeben sich im Kontext der beiden Sonderforschungsbereiche Transregio 146 „Multiscale Simulation Methods for Soft-Matter Systems“ und Transregio 165 „Waves to Weather“, an denen das Institut für Mathematik beteiligt ist.

Standardmethoden der Numerik versagen typischerweise bei der Lösung schlecht gestellter Gleichungen, da sie instabil werden. Ein Verständnis dieser Instabilitäten ist nur möglich, wenn die Problemstellung im zugrundeliegenden unendlich dimensionalen Funktionenraum mit funktionalanalytischen Methoden analysiert wird. In diesem Rahmen lassen sich Zugänge finden (Regularisierungsmethoden), mit denen die gesuchte Lösung der Aufgabenstellung stabil und mit zufriedenstellender Genauigkeit numerisch bestimmt werden kann.



Radialsymmetrischer "Geist" in der Computertomogrphie

In der Vorlesung wird die zugrundeliegende mathematische Theorie entwickelt. Zudem werden reale Anwendungen sowie konkrete Regularisierungstechniken vorgestellt.

Die Veranstaltung ist eine Ergänzungsvorlesung und richtet sich an Studierende des Masterstudiengangs Mathematik mit Vorkenntnissen in Funktionalanalysis.

Literatur:

A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, New York, (2011).

A. Rieder, *Keine Probleme mit Inversen Problemen*, Vieweg, Wiesbaden, (2003).

M. Hanke, *A Taste of Inverse Problems. Basic Theory and Examples*, SIAM, Philadelphia, (2017).

Statistik

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

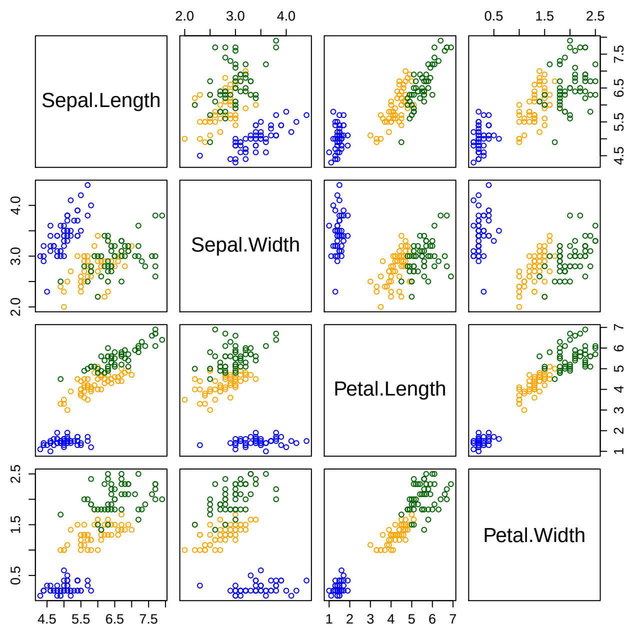
Termine: Mo und Mi 10-12

Werden weibliche Bankangestellte bei Beförderungen benachteiligt? Haben im Sternzeichen Fische Geborene erhöhte Chancen, einen septischen Schock zu überleben?

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it.

(Andrejs Dunkels, 1939–89)

Wir werden in dieser Vorlesung klassische Themen der (mathematischen) Statistik und einige Ausblicke auf modernere, speziell hochdimensionale Verfahren diskutieren und mit R-Beispielen illustrieren.



Die Vorlesung richtet sich an fortgeschrittene B.Sc.-Studenten sowie M.Ed.- und M.Sc.-Studenten (auch solche, die sich nicht in Stochastik vertiefen möchten). Kenntnisse aus der *Einführung in die Stochastik* werden vorausgesetzt, Wissen aus dem *Stochastik-Praktikum* und der Vorlesung *Stochastik I* ist gelegentlich hilfreich, aber nicht unbedingt erforderlich.

Literatur (Auswahl)**:**

H.-O. Georgii, *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, de Gruyter (2015).
P.J. Bickel, K.A. Doksum, *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*, Holden-Day (1977).
J.A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*, Duxbury Press (1995).
T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, Springer (2009).
The R Project for Statistical Computing `http://www.r-project.org/`

Stochastische Analysis

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Di und Do 10–12

Die Vorlesung richtet sich an Studierende der Mathematik im Masterstudiengang oder im fortgeschrittenen Lehramtstudium. Gute Kenntnisse in Stochastik I und II werden vorausgesetzt. Inhalte der Vorlesung sind unter anderem:

- Pfadweise stochastisches Integral
- Potentialtheorie der Brown'schen Bewegung
- Stochastische Integration bezüglich Semimartingalen
- Itô-Kalkül
- Stochastische Differentialgleichungen
- Martingalprobleme

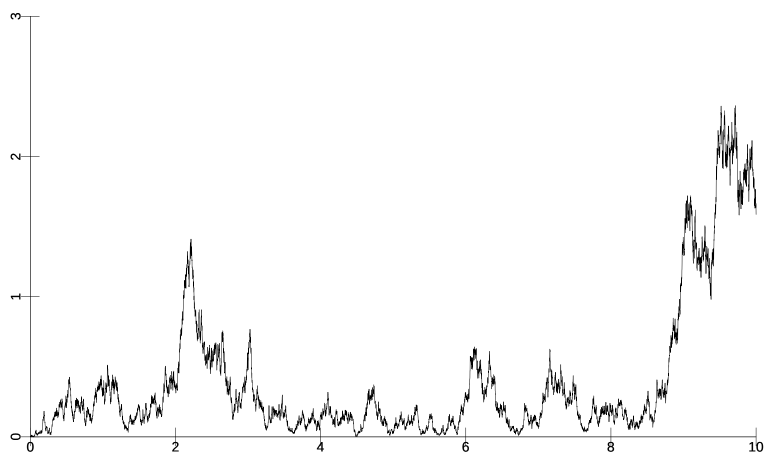


FIGURE 1. Simulation einer Cox-Ingersoll-Ross Differentialgleichung

Literatur:

R. Durrett, *Stochastic Calculus. A Practical Introduction (Probability and Stochastics Series)*, CRC, London (1996)

N. Ikeda, S. Watanabe *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Kodansha (1981)

K. Ito, H. P. Jr. McKean, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer (1996)

S. Karatzas, *Brownian motion and stochastic calculus*

P. Mörters, Y. Peres, *Brownian Motion*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Band 30, Cambridge University Press (2010)

B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer (2010)

P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer (2005)

D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian motion*, Springer (2005)

Rogers, Williams, *Diffusions, Markov processes and martingales*, Band I, II, Cambridge University Press (2000)

Stochastik II

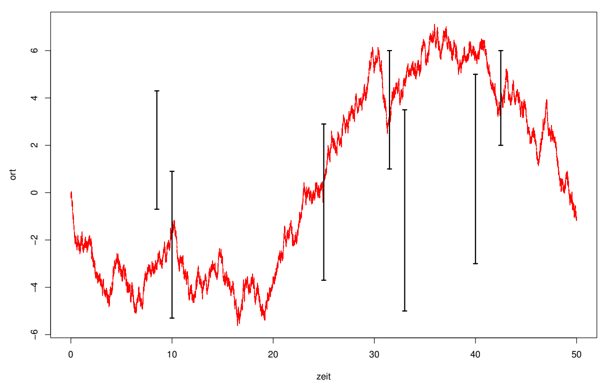
Dozent: Prof. Dr. Reinhard Höpfner

geänderte Zeiten: Di, Do 16-18, Raum 05-426

Die 'Stochastik II' bildet den ersten Teil des Vertiefungsmoduls Stochastik. Voraussetzung für die Teilnahme ist eine bestandene 'Stochastik I'. Eine 'Stochastische Analysis – Stochastik III' wird im SoSe2020 als zweiter Teil des Vertiefungsmoduls anschliessen.

Nachdem in der 'Stochastik I' die Masstheorie als Sprache der Stochastik sowie die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie (mit starkem Fokus auf iid ZV) entwickelt wurden, geht es in der 'Stochastik II' vornehmlich um verschiedene Klassen stochastischer Prozesse (Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen, Brownsche Bewegung, Markovprozesse).

Ein Eingangskapitel behandelt reguläre Versionen bedingter Erwartungen als Voraussetzung z.B. für die Martingaltheorie. Die schönen Grenzwertsätze für Martingale in diskreter Zeit werden sehr sorgfältig diskutiert. Der Konsistenzsatz von Kolmogorov



wird bewiesen. Auf diesem basiert die Konstruktion stochastischer Prozesse auch in stetiger Zeit – so können Prozesse in stetiger Zeit eingeführt und ihre Pfadeigenschaften diskutiert werden. Wichtige Eigenschaften der Brownschen Bewegung werden bewiesen, z.B. der Satz vom iterierten Logarithmus, oder der berühmte Satz von P. Lévy: die Menge der Nullstellen des typischen Brownschen Pfades 'is a perfect closed set of Lebesgue mesure zero'.

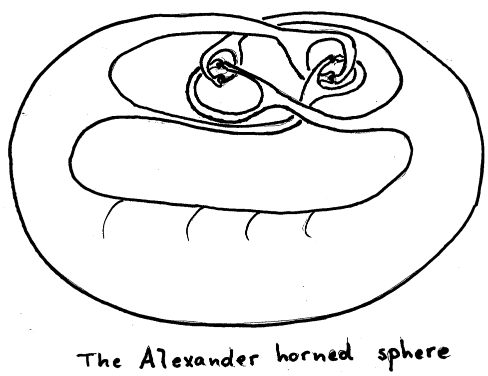
Literatur: wird in der Vorlesung mitgeteilt

Einführung in die Topologie

Dozentin: Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Termine: Mo und Do 8–10

Die Topologie beschäftigt sich mit qualitativen Eigenschaften von Räumen, die unter stetigen Verformungen unverändert bleiben: *Gummi-Mathematik* !
Sie hat sich aus der Geometrie entwickelt, auf lateinisch unter dem Namen: 'geometria situs' (Geometrie der Lage) oder 'analysis situs' (Griechisch-Latein für 'Analysieren des Ortes').
Ein topologischer Raum stellt eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von "Nähe" dar. Damit gewinnt man substantielle Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie Stetigkeit und Grenzwert.
Das Fundament der Topologie ist die *Mengentheoretische Topologie*; ihrem Studium gilt etwa das erste Drittel der Vorlesung. Darauf baut die *Algebraische Topologie* auf, in der topologische Räume (oder auch Lagebeziehungen im Raum wie zum Beispiel in der Knotentheorie) mit Hilfe von algebraischen Strukturen untersucht werden.



Von Hocking, John G. und Young Gail, S. "Topology", Dover Books on Mathematics, 1988.

Literatur:

R. Courant, H. Robbins, *Was ist Mathematik?*, Springer (2001).

H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea (2004).

G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer (1997).

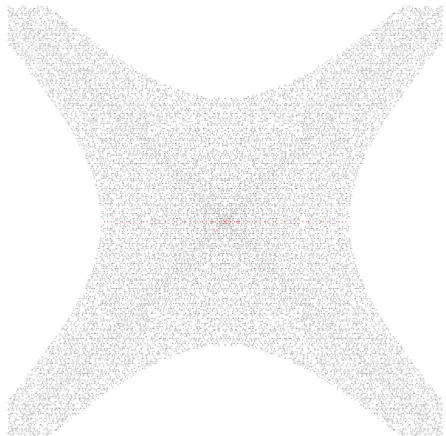
A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).

R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner (2013).

Zahlentheorie

Dozent: Dr. Axel Stäbler

Termine: Mo und Mi 12–14



Dies ist eine Einführung in klassische zahlentheoretische Fragestellungen:

- Gibt es unendlich viele Primzahlen? Wenn ja, was können wir über ihre Verteilung unter den natürlichen Zahlen sagen?
- Gibt es rechnerisch effiziente Methoden zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl prim ist?
- Welche ganzen Zahlen kann man als Summe von zwei Quadraten schreiben, d. h. für welche $a \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 + y^2 = a$?

Um z. B. die letzte Frage zu beantworten, ist es hilfreich unseren Zahlbereich auf die Gaußschen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

zu erweitern, weil dort $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ gilt.
Im Verlauf der Vorlesung werden wir anhand weiterer klassischer Fragestellungen (z.B. kann man jede ganze Zahl als Summe von drei oder vier Quadraten schreiben, welche ganzzahligen Lösungen hat die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$) weitere Zahlbereiche und Techniken kennenlernen. Gegen Ende der Vorlesung wollen wir auch die Anfänge der algebraischen Zahlentheorie entwickeln.
Im Vergleich zur letztjährigen gleichnamigen Vorlesung soll der Fokus diesmal stärker auf konkreten Problemstellungen liegen.
Die Vorlesung ist insbesondere auch für Lehramtsstudierende hervorragend geeignet und ist z. B. eine natürliche Fortsetzung der GAZ. Wenn Sie im Studiengang BSc sind, genügt es Lineare Algebra 2 erfolgreich absolviert zu haben.

Literatur:

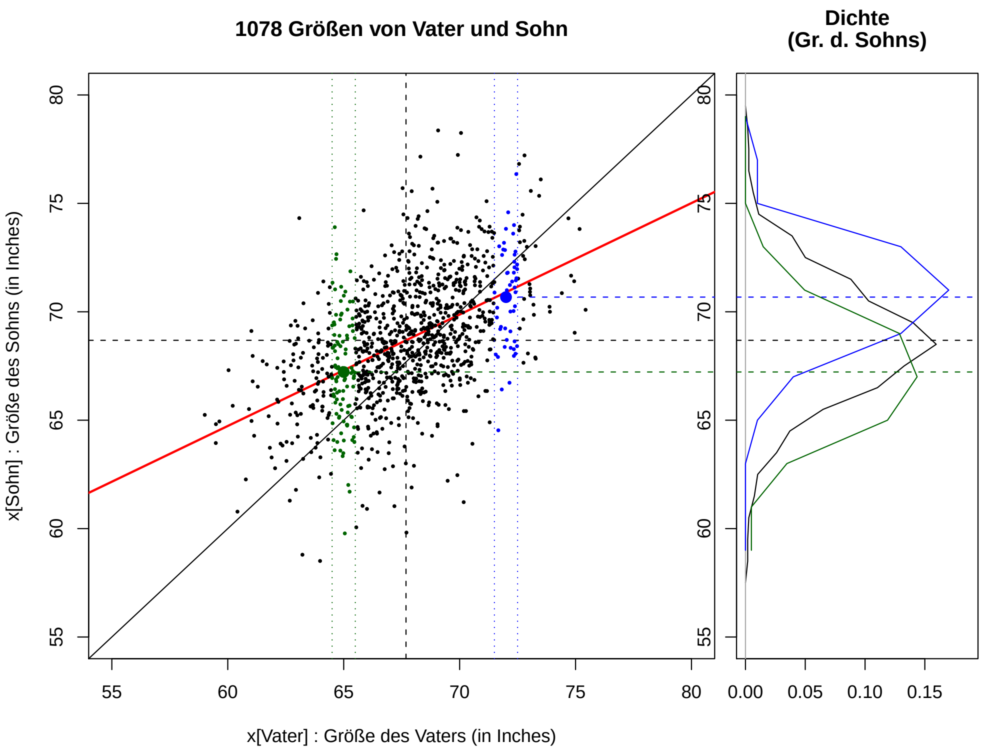
Müller-Stach und Piontkowski, *Elementare und algebraische Zahlentheorie*, Vieweg+Teubner (2007).

Stochastik-Praktikum

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

Termin: Mo 14-16

Wir werden anhand von eigenen Programmen und Analysen (ggfs. auf dem eigenen Notebook) in der Programmiersprache und Statistik-Umgebung R konkrete Probleme aus dem Bereich der Stochastik lösen, die von Hand zu mühsam oder schlicht unmöglich zu bewältigen wären. Zudem werden wir anhand von Computersimulationen die Intuition hinter den zentralen Resultaten der Stochastik schulen.



Das Stochastik-Praktikum gibt einen Einblick in die vielfältigen Möglichkeiten, die heute für die praktische Arbeit mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen und stochastischen Prozessen, mit Grenzwertsätzen und mit statistischen Verfahren zur Verfügung stehen. Das Stochastik-Praktikum ist verpflichtend für Studierende des Studiengangs B.Sc. Mathematik und sehr empfehlenswert für Studierende des Studiengangs B.Ed. Mathematik.

Literatur:

G. Kersting und A. Wakolbinger, *Elementare Stochastik*, Birkhäuser 2010.

H.-O. Georgii, *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, de Gruyter 2015.

The R Project for Statistical Computing `http://www.r-project.org/`

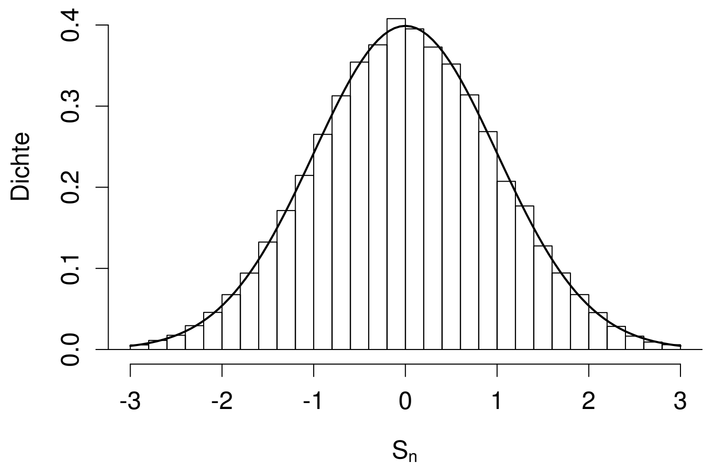
R Core Team, *An Introduction to R*, 2018. `https://cran.r-project.org/manuals.html`

Grundlagen der Stochastik

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Mo, Mi 10-12

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glückspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in der Vordergrund gerückt.



Normalapproximation der Binomialverteilung

In der Vorlesungen lernen wir die grundlegenden Begriffe in der Stochastik kennen. Zu diesen gehören Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsräume. Danach setzen wir uns mit dem Begriff der bedingten Erwartung und Unabhängigkeit von Ereignissen/Zufallsvariablen auseinander. Wir werden im Anschluss das starke Gesetz der grossen Zahlen kennenlernen, bevor wir uns mit Markovketten beschäftigen. Danach widmen wir uns der Normalapproximation der Binomialverteilung, um diese für statistische Tests verwenden zu können.

Literatur:

A. Bovier, *Stochastik für Lehramt-ALMA 2 Teil 1*, Vorlesungsskript, `https://www.dropbox.com/s/zmby80t7r4ih7l8/skript.pdf?dl=0`.

G. Kersting, A. Wakolbinger , *Einführung in die Stochastik*, Birkhäuser.

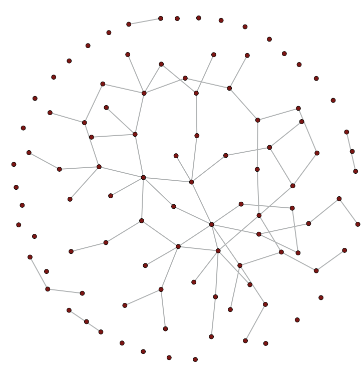
N. Henze, *Stochastik für Einsteiger*, Vieweg+Teubner.

Struktur komplexer Netzwerke

Dozent: Dr. Christian Mönch

Termine: Fr 10-12

Netzwerkstrukturen treten in verschiedensten Modellierungszusammenhängen in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften sowie in der Informatik auf, man denke z.B. an die Link-Struktur im World-Wide-Web, Übertragungspfade für Krankheiten zwischen Tieren oder Menschen, virtuelle und nicht-virtuelle soziale Netzwerke oder Beteiligungsstrukturen von Unternehmen. Überraschenderweise teilen viele dieser großen, *komplexen* Netzwerke einige grundlegende strukturelle Eigenschaften.



$Realisierung\ eines\ inhomogenen\ Zufallsgraphen\ mit\ 100\ Knoten$

In dieser Veranstaltung wollen wir einen Blick auf stochastische Modelle für solche Netzwerke werfen. Das einfachste sinnvolle Modell für ein komplexes Netzwerk ist ein gerichteter oder ungerichteter *Zufallsgraph*. Wir werden ein paar wichtige Vertreter dieser Modellklasse analysieren, sowohl deskriptive Modelle, die die Struktur realer Netzwerke idealisiert abbilden, als auch dynamische generative Modelle, die zur Erklärung des Auftretens bestimmter Strukturen beitragen. Wichtige Phänomene, die wir ergründen wollen sind, z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Six$_degrees_of_separation6degreesofseperation, unddieRobustheitvonNetzwerkenge$

Literatur:

R. van der Hofstad, *Random Graphs and Complex Networks, Vol. I* , 1. Aufl., Cambridge University Press (2016)
B. Bollobás: *Random Graphs* , 2. Aufl., Cambridge University Press (2001)
B. Bollobás, S. Janson und O. Riordan: *The phase transition in inhomogeneous random graphs*, Random Structures & Algorithms 31(1), 2007, 3–122
S. Dereich, C. Mönch und P. Mörters: *Typical distances in ultrasmall random networks*, Advances in Applied Probability 44(2), 2012, 583–601

Hauptseminar: Homologische Algebra

Dozent: Prof. Dr. M. Blickle

Termine: Di 14-16 Raum 04-426

$$
\begin{tikzcd}
 & & & A_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "a_2"] & & B_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "b_2"] & & C_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "c_2"] & & 0 \\
 & & A_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "a_1"] & & B_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "b_1"] & & C_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "c_1"] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A_2' \arrow[rr] & & B_2' \arrow[rr] & & C_2' & & \\
0 \arrow[rr] & & A_1' \arrow[ur] \arrow[rr] & & B_1' \arrow[ur] \arrow[rr] & & C_1' \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Dieses Seminar gibt eine Einführung in eines der wichtigsten Hilfsmittel der reinen Mathematik: die Homologische Algebra. Anfänglich entwickelt aus der Algebraische Topologie, breitete die Homologische Algebra bald Ihren Einfluss auf andere Gebiete aus. So ist sie heutzutage aus der kommutativen Algebra, algebraischen Geometrie, algebraischen Zahlentheorie, der Darstellungstheorie, der Differentialgeometrie oder der komplexen Geometrie nicht wegzudenken. Jeder ernsthafte Mathematiker muss diese Techniken beherrschen.
Unser Ziel ist es die Grundbegriffe der Homologischen Algebra zu erarbeiten und einige Anwendungen in Algebra und Zahlentheorie kennenzulernen.
Das Seminar ist sowohl für Bachelor als auch Masterstudenten geeignet. Solide Kenntnisse der Linearen Algebra sind vorausgesetzt. Drüberhinaus benötigt man noch eine Vertrautheit mit Moduln über kommutativen Ringen, welche durch eine oder mehrere Vorlesungen wie zum Beispiel Algebra 1, Algebra 2, oder Computeralgebra vermittelt wird. Grundbegriffe der Kategorientheorie und Kenntnis des Tensorprodukts sind hilfreich, werden aber zu Anfang des Seminars wiederholt.

Literatur:

Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

Gelfand, Manin, *Methods of homological algebra.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2003).

Rotman, *An introduction to homological algebra.* Universitext. Springer, New York, (2009).

Mac Lane, *Categories for the working mathematician.* Springer, New York, (1997).

Hauptseminar: Interacting Particle Systems

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Do 12-14 Uhr; Vorbesprechung: Do 04.07.19, 12:00 Uhr, 05-136)

An jedem Punkt des d-dimensionalen Zahlengitters sitzt ein Individuum, das eine von zwei Meinungen haben kann. Sagen wir 0 oder 1. Nach einer zufälligen Wartezeit vergisst ein Individuum seine Meinung und übernimmt stattdessen die Meinung eines zufällig gewählten Nachbarn. Danach wartet das Individuum erneut eine zufällige Wartezeit, bis es wiederum die Meinung eines zufälligen Nachbarn übernimmt und so fort. Alle Individuum verfahren so mit unabhängigen Wartezeiten und unabhängiger Auswahl des Nachbarn. Dies ist das sogenannte Wählermodell (voter model).
Dieses Wählermodell ist einerseits sehr einfach, andererseits zeigt es in vielerlei Hinsicht ein sehr komplexes Verhalten. Aus diesem Grunde ist das Wählermodell eines der zentralen Modelle der Theorie zufälliger wechselwirkender Teilchensysteme.
In diesem Seminar sollen anhand von Originalliteratur die folgenden Aspekte untersucht werden:

- Wie lässt sich das Wählermodell mathematisch rigoros definieren? Wie sieht das Langzeitverhalten in niedriger Dimension (bis zwei) und hoher (ab drei) Dimension aus? Bilden sich Cluster gleicher Meinung? Wie groß sind diese?
- Wie ändert sich das Langzeitverhalten, wenn man das Wählermodell auf einen großen (ganzzahligen) Torus definiert, statt auf dem unendlichen Zahlengitter? In welchen Zeitskalen „bemerkt“ das System die Endlichkeit und wie äußert sich sie quantitativ?
- Wird die Wechselwirkung auch mit weiter entfernten Nachbarn erlaubt und der Raum geeignet reskaliert, so lässt sich unter gewissen Annahmen die Konvergenz gegen ein Modell im kontinuierlichen Raum zeigen. In einer Dimension hat das reskalierte Limesmodell die Gestalt einer stochastischen partiellen Differentialgleichung.
- In höherer Dimension lässt sich die Konvergenz gegen die sogenannte Super-Brown'sche Bewegung zeigen, einen maßwertigen Diffusionsprozess.
- Wie lässt sich die Konvergenz gegen die Super-Brown'sche Bewegung auch für nahe Verwandte des Wählermodells zeigen?

Literatur:

J.T. Cox, *Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus* in Zd, Ann. Probab. 17(4), 1333-1366 (1989).
J.T. Cox, R. Durrett, E.A. Perkins, *Rescaled voter models converge to super-Brownian motion*, Ann Probab. 28(1). 185-234, (2000).
J.T. Cox, *D. Griffeath: Diffusive clustering in the two-dimensional voter model*, Ann. Probab. 14(2), 347—370 (1986).
J.T. Cox, A. Klenke, *Rescaled Interacting Diffusions converge to Super Brownian Motion*, Annals of Applied Probability Vol 13(2), 501-514, (2003)
R. Durrett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*, Wadsworth (1988). Liegt im Sekretariat aus.
C. Mueller, R. Tribe, *Stochastic P.D.E's arising from the long range contact and long range voter processes*, Probab. Theory Related Fields, 102(4):519–545, (1995).
T.M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer Verlag (1985).

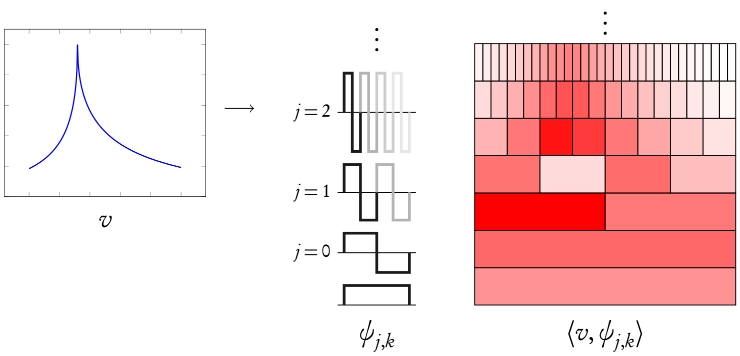
Hauptseminar: Nichtlineare Approximationen

Dozent: Prof. Dr. Markus Bachmayr

Termin: wird noch bekanntgegeben

Durch passend gewählte Freiheitsgrade lässt sich in vielen numerischen Fragestellungen eine deutliche Reduktion des Aufwandes erreichen. Beispielsweise lassen sich für eine $n \times n$-Matrix die n^2 Einträge schreiben in der Form $a_i b_j$ mit Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$, anstatt n^2 genügen also $2n$ Freiheitsgrade, diese gehen aber *nichtlinear* in der Beschreibung der Matrix ein. In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit verschiedenen allgemeineren numerischen Techniken, die unter Ausnutzung spezieller Strukturen und nichtlinearer Parametrisierungen auf sehr mächtige Verfahren führen. Beispiele sind etwa:

- Dünnbesetzte Basisentwicklungen und adaptive Gitterverfeinerung
- Hierarchische Matrizen
- Niedrigrang-Tensorzerlegungen
- Reduzierte-Basis-Methoden
- Approximation durch neuronale Netze



Literatur:

R. DeVore, *Nonlinear Approximation*, Acta Numerica (1998).

R. DeVore und A. Kunoth (eds.), *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*, Springer (2009).

W. Hackbusch, *Hierarchische Matrizen*, Springer (2009).

W. Hackbusch, *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*, Springer (2012).

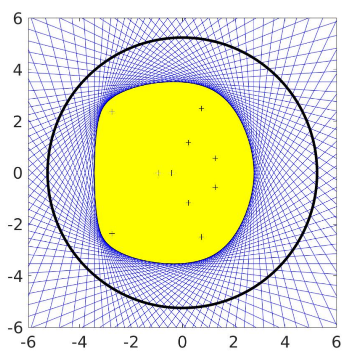
P. Grohs, D. Perekrestenko, D. Elbrächter, and H. Bölcskei, *Deep Neural Network Approximation Theory*, arXiv:1901.02220 (https://arxiv.org/pdf/1901.02220.pdf)

Hauptseminar: Matrixfunktionen

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine:

In diesem Hauptseminar werden verschiedene (analytische wie numerische) Aspekte von Matrixfunktionen, also von Ausdrücken der Form $f(A)$, in denen f eine (auf einem komplexen Gebiet) definierte skalare Funktion und A einen Operator in einem Banachraum bezeichnet. Dies beinhaltet den Fall, dass der Banachraum ein endlichdimensionaler Vektorraum ist und der Operator durch eine quadratische Matrix repräsentiert wird (daher der Name der Veranstaltung).



Wertebereich einer Matrix

Konkrete Beispiele sind die Exponentialfunktion, die etwa im Kontext gewöhnlicher Differentialgleichungen in Banachräumen oder in der Graphentheorie auftritt, die Quadratwurzel und die Signum-Funktion, die in verschiedenen physikalischen Anwendungen relevant sind. Ausgangspunkt für das Hauptseminar ist die Vorlesung Funktionalanalysis; für verschiedene Vorträge sind Numerik-Kenntnisse (im Umfang der Grundlagen-Vorlesung) nützlich.

Literatur:

Literatur wird in der Vorbesprechung zur Verfügung gestellt.

Hauptseminar über Minimum-Distanz-Schätzer (BSc, MEd)

Dozent: Prof. Dr. Reinhard Höpfner

Termine: MO 14–16, Raum 05.522

Minimum-Distanz-Schätzverfahren können für viele Probleme in der Statistik auf verschiedene Weise konstruiert werden. Empirische Objekte $\widehat{\Psi}_n$, berechnet z.B. aus den ersten n vorliegenden iid Beobachtungen, werden mit theoretischen Grössen $\Psi(\vartheta)$ verglichen, die ihnen unter wahrem Parameter ϑ entsprechen würden; einen Schätzer für den unbekannten Parameter, der der gemachten Beobachtung zugrundeliegt, gewinnt man durch Minimieren eines geeigneten Abstandes zwischen $\widehat{\Psi}_n$ und $\Psi(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$. Millar (1984) hat die wesentlichen Voraussetzungen herausgearbeitet, unter denen derartige Schätzer gute Eigenschaften (eine allgemeine Darstellung der reskalierten Schätzfehler und asymptotische Normalität) haben.

Literatur:

Millar, P.: A general approach to the optimality of minimum distance estimators. Transactions American Math. Soc. 286(1), 377–418, 1984.
Höpfner, R.: *Asymptotic Statistics*. de Gruyter 2014 (nur Kapitel 2).