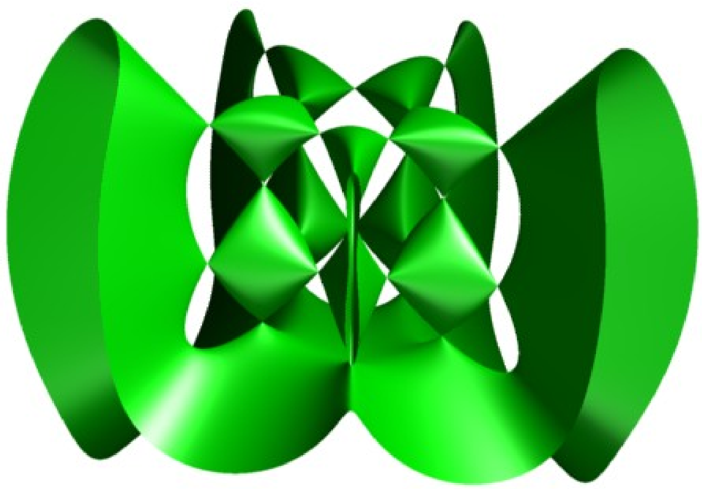
Vorlesungsverzeichnis

Mathematik



Mainz

Wintersemester 2020/21

Quintik mit 30 ***Knotenpunte***

Die auf der Vorderseite abgebildete Fläche wird durch die Polynomgleichung

$$f(x, y) - 8(T_5(z) + 1) = 0$$

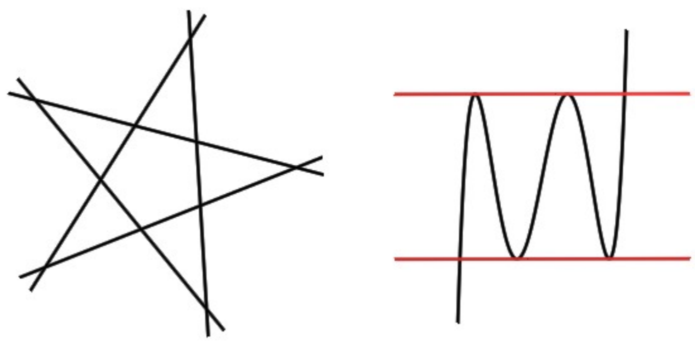
beschrieben. Hierbei ist

$$f(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5y^4x - 5(x^2 + y^2)^2 + 20(x^2 + y^2) - 16 = L_1L_2L_3L_4L_5$$

das Produkt von fünf Geraden, welche die Kanten eines regelmässigen Fünfecks bilden und

$$T_5(z) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

das fünfte Tchebychev-Polynom.



Die Fläche besitzt 30 Knotenpunkte; über den 10 Schnittpunkten der fünf Geraden $L_i = 0$ finden wir jeweils zwei Knotenpunkte, über den fünf lokalen Maxima von $f(x, y)$ im Inneren der fünf Dreiecken jeweils zwei, also insgesamt $2.10 + 2.5 = 30$.

Togliatti konstruierte in 1937 Flächen von Grad 5 mit 31 Knotenpunkten. Beauville zeigte 1979 mit Hilfe von Kodierungstheorie das diese die maximale Anzahl von Knotenpunkten ist: $\mu(5) = 31$.

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Wintersemester 2020/21 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Juli 2020

Übersichtsplan

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10	Topologie (Hog-Angeloni) – DIGITAL	Algebra I: Körper, Ringe, Moduln (van Straten) - DIGITAL Modulformen und abelsche Varietäten I (Lehn) – HYBRID Ausgewählte Themen Computeralgebra (de Jong) - DIGITAL	Funktionentheorie (Hanke-Bourgeois) - HYBRID	Topologie (Hog-Angeloni) – DIGITAL	Algebra I: Körper, Ringe, Moduln (van Straten) – DIGITAL Modulformen und abelsche Varietäten I (Lehn) – HYBRID
10-12	Stochastik II (Hartung) - DIGITAL Computational Fluid Dynamics (Lukacova) – HYBRID	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (Bachmayr) - DIGITAL Brown'sche Bewegung (Klenke)- DIGITAL Topics in Algebraic Geometry (Blickle) – HYBRID Geschichte der Naturwissenschaften I (Martina Schneider) – DIGITAL	Stochastik II (Hartung) - DIGITAL	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (Bachmayr) – DIGITAL - Analysis II (Fröhlich) - DIGITAL Brown'sche Bewegung (Klenke) - DIGITAL Topics in Alg. Geometry (Blickle)– HYBRID Ausgewählte Themen Computeralgebra (de Jong) - DIGITAL	Funktionentheorie (Hanke-Bourgeois) - HYBRID Harmonische Analysis u. partielle Differential-gleichungen (Tolksdorf) - DIGITAL
12-14	Zahlentheorie (Graf) - DIGITAL Numerik von Eigenwertproblemen (Bachmayr) – DIGITAL Vanishing theorems in algebraic geometry, characteristic zero and characteristic p (Zuo) – HYBRID	Weiterführende Analysis, Lehramt (Fröhlich) - DIGITAL Komplexe Geometrie II (Zuo) - HYBRID	Zahlentheorie (Graf) – DIGITAL Eichtehorie (Kraus) – PRÄSENZ Harmon. Analysis u. partielle Diff.gl. (Tolksdorf) - DIGITAL	Weiterführende Analysis, Lehramt (Fröhlich) - DIGITAL Komplexe Geometrie II (Zuo) - HYBRID Eichtehorie (Kraus) – PRÄSENZ Vanishing theo. in alg.geom. characteristic zero and characteristic p (Zuo) – HYBRID	Grundlagen der partiellen Differential-gleichungen (Schneider) - DIGITAL
14-16	Praktikum Stochastik (Birkner) – DIGITAL	Grundlagen d. partiellen Differentialgleichungen (Schneider) - DIGITAL Numerik partieller Differentialgleichungen (Lukacova) – HYBRID Codierungstheorie (Malevich) – DIGITAL Funktionalanalysis (Kostrykin) - HYBRID		Numerik partieller Differentialgleichungen (Lukacova) – HYBRID PDE III (Kostrykin) - HYBRID Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) – DIGITAL	
16-18	Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) – DIGITAL Analysis II (Fröhlich) – DIGITAL	PDE III (Kostrykin) - HYBRID		Funktionalanalysis (Kostrykin) - HYBRID	

Anwendungen der Spektralsequenz von Serre Teil 2 (Klaus) – DIGITAL – Tag/Uhrzeit?

Numerik von Eigenwertproblemen

Dozent: Prof. Dr. Markus Bachmayr

Termine: Mo 12-14 (Digital)

In dieser Vorlesung geht es um numerische Verfahren für Eigenwertproblemen, die eine der grundlegenden Fragestellungen der numerischen linearen Algebra darstellen:

- Beispiele von Eigenwertproblemen in der Berechnung von Resonanzen, von Wellenfunktionen in der Quantenphysik und im Google PageRank-Algorithmus,
- grundlegende Eigenschaften von Eigenwertproblemen, die für numerische Verfahren wichtig sind,
- direkte und inverse Vektoriteration, Unterraumiteration,
- das QR-Verfahren zur Berechnung aller Eigenwerte dichtbesetzter Matrizen,
- Eigenwertlöser für große dünnbesetzte Matrizen.

David Hilbert, 1904

Vorausgesetzt wird neben den Grundvorlesungen die Veranstaltung *Grundlagen der Numerik*. Die Vorlesung richtet sich gleichermaßen an Studierende im B.Sc., M.Sc. und M.Ed. Mathematik, sowie M.Sc. Computational Sciences.

Literatur:

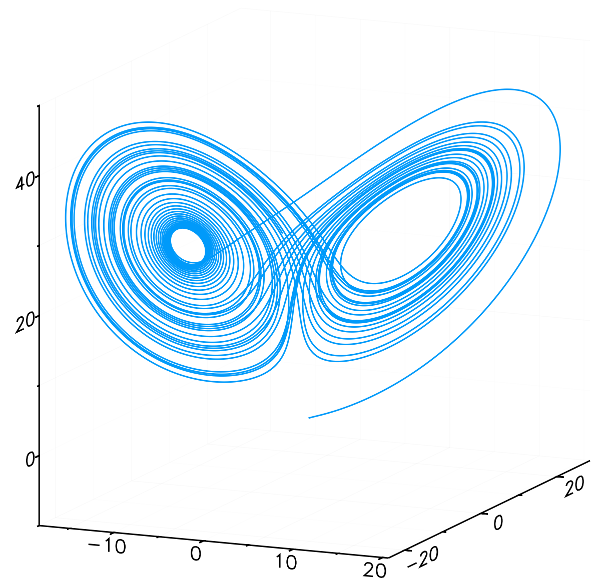
Golub, van Loan, *Matrix Computations*, JHU Press (2013).
Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens,* Vieweg und Teubner (2008).
Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, SIAM (2011).

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Markus Bachmayr

Termin: Di, Do 10-12 (Digital)

In dieser Vorlesung werden die Analyse und Umsetzung numerischer Verfahren für Anfangswertprobleme und Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt. Im Vordergrund stehen dabei Runge-Kutta-Verfahren, Differenzenverfahren und Finite Elemente.



Die Vorlesung baut auf *Grundlagen der Numerik* auf und bildet die Grundlage für weiterführende Veranstaltungen zur Numerik, insbesondere *Numerik partieller Differentialgleichungen* und *Modellierungspraktikum.*

Literatur:

Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens,* Vieweg und Teubner (2008).

Hairer, Norset, Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems,* Springer (1993).

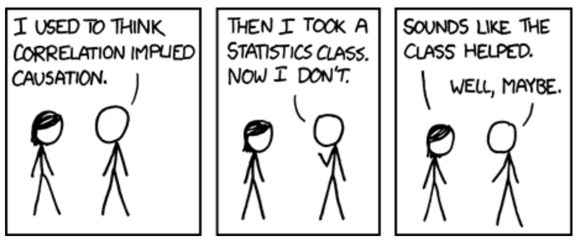
Grundlagen der Stochastik

Dozent/in: Prof. Dr. Matthias Birkner

Termine: Mo 10–12 und Mi 10–12 (Vorlesung "Einführung in die Stochastik")
Mo 14–16 (Stochastik-Praktikum)

Beide Veranstaltungen werden online stattfinden.

Die Stochastik, d.h. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, als mathematische Disziplin beschäftigt sich mit der Modellierung und Analyse von Zufallsphänomenen. Ihre Denkweisen und Methoden finden heute in weiten Bereichen der Natur- und Sozialwissenschaften Anwendung, man denke beispielsweise an Populationsgenetik, statistische Physik, Demoskopie, Bewertung von Versicherungskontrakten und von derivaten Finanzinstrumenten. In der Vorlesung werden wir die grundlegenden Begriffe und Ergebnisse der Stochastik auf technisch (relativ) elementarem Niveau kennen lernen, sie setzt nur die Grundvorlesungen in Analysis und linearer Algebra voraus.



https://xkcd.com/552/ (CC BY-NC 2.5)

Es gibt begleitende Übungen (mit separaten Zetteln für B.Ed.- und für B.Sc.-Studenten). Weiterhin wird ein einstündiges **Tutorium** angeboten. Dieses richtet sich vorwiegend an B.Ed.-Studierende, kann aber natürlich gerne von allen Teilnehmern der Vorlesung besucht werden.

Im **Stochastik-Praktikum** werden wir anhand von eigenen Programmen und Analysen in der Programmiersprache und Statistik-Umgebung R konkrete Probleme lösen, die von Hand zu mühsam oder schlicht unmöglich zu bewältigen wären, und zudem anhand von Computersimulationen die Intuition hinter den zentralen Resultaten der Stochastik schulen. Es gibt einen Einblick in die vielfältigen Möglichkeiten, die heute für die praktische Arbeit mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen und stochastischen Prozessen, mit Grenzwertsätzen und mit statistischen Verfahren zur Verfügung stehen. Das Stochastik-Praktikum ist verpflichtend für Studierende des Studiengangs B.Sc. Mathematik und sehr empfehlenswert für Studierende des Studiengangs B.Ed. Mathematik. Diese können es sich als Ergänzung im M.Ed. anerkennen lassen.

Literatur:

G. Kersting und A. Wakolbinger, *Elementare Stochastik*, Birkhäuser 2010.
H.-O. Georgii, *Stochastik*, De Gruyter 2015.
C.M. Grinstead und J.L. Snell, *Introduction to Probability*, AMS 1997. http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/book.html

Vorlesung: Topics in Algebraic Geometry

Dozent: Prof. Dr. Blickle

Termine: Di, Do 12-14 (Digital)

After the foundations of the theory of schemes and their morphisms has been layed down in the preceding term, this course will be a thorough introducion to quasi-coherent sheaves on schemes and their cohomology. Topics to be covered include:

(1) Cohomology of sheaves as derived functors and Cech cohomology.
(2) Serre duality. Riemann Roch and other applications in low dimensions.
(3) General duality theory.
(4) Applications to schemes in positive characteristic.

Who is this course for: Participants of Algebraic Geometry 2. Anyone who is familiar with the basic notions of schemes and their morphisms (Chapter 2 of Harshornes book will certainly suffice) should benefit form this course. Some exposure to homological algebra will also be helpful but the necessary material will be reviewed.
To be safe I am planning this course as digital lecture course, but I am hopeful that there will be some real life interactions as well.

Literatur:

Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, (1977).
The Stacks Project, *https://stacks.math.columbia.edu/*
Vakil, *Foundations of Algebraic Geometry*, available online
Görtz, Wedhorn, *Algebraic Geometry 1*, Viehweg-Teubner
Mumford *Red Book of Varieties and Schemes*, Springer

Ausgewählte Themen aus der Computeralgebra

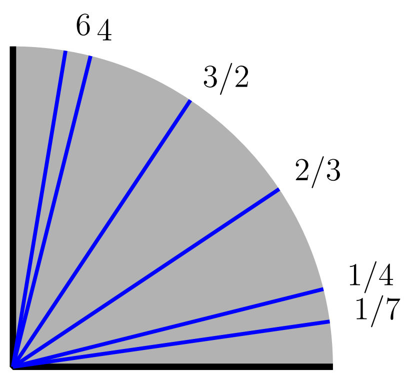
Dozent: Prof. Dr. Theo de Jong

Termine: Di 10-12, Do 8-10 (Digital)

In dieser Vorlesung werden verschiedene Themen der Computeralgebra besprochen/behandelt. Diese sind verständlich mit den Kenntnissen aus der Aufbauvorlesung *Computeralgebra*. Es ist noch nicht endgültig entschieden, welche Themen behandelt werden. Diese Auswahl ist auch von den Interessen der Studierenden abhängig. Anbei eine nicht vollständige Liste möglicher Themen:

(1) Van Hoeij's Algorithmus zur Faktorisierung von Polynomen
(2) Gröbner Fans und Gröbner Walk
(3) Modulare Algorithmen
(4) Algebraische Kodierungstheorie
(5) Diskrete und schnelle Fourieranalysis
(6) Primärzerlegung und automatische Beweise in der Geometrie

Voraussetzung: Vorlesung Computeralgebra.



Gröbner Fan von $\langle x^2 - y^3, x^3 - y^2 + x \rangle$

Literatur:

Cox, Little, O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer Verlag
Cox, Little, O'Shea: *Using algebraic Geometry*, Springer Verlag
von zur Gathen, Gerhard: *Modern Computer Algebra*, Cambridge University Press

WEITERFÜHRENDE ANALYSIS FÜR DAS LEHRAMT

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: Digital

In dieser Vorlesung erlernen wir die Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie nach Lebesgue und Hausdorff. Das umfasst insbesondere die Bestimmung von Inhalten von Punktmengen in Euklidischen Räumen und damit das Berechnen mehrdimensionaler Integrale sowie eine Einführung in die fraktale Geometrie. Ferner erlernen wir wichtige Begriffe und Methoden der klassischen Vektoranalysis und schließlich die für die moderne Analysis zentralen Integralsätze von Gauß, Green und Stokes. Neben Rechnen soll vor allem viel gebastelt und gezeichnet werden.

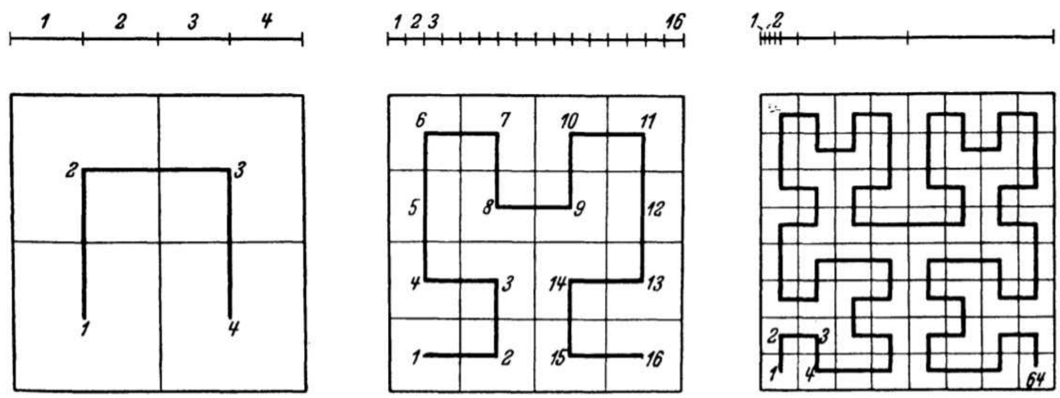


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

D. Hilbert: *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (1891)

Literatur:

F. Burk, *A Garden of Integrals*, The Mathematical Association of America (2007)
J.J. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons (2003)
F. Sauvigny, *Analysis,* Springer Spektrum (2014)

ANALYSIS 2

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: Digital

Diese Vorlesung führt die *Analysis 1* aus dem Sommersemester 2019 fort. Wir behandeln das eindimensionale Riemannsche Integral und schließen damit den im vorigen Semester begonnenen Teil II: *Funktionen in einer Veränderlichen* ab. In Teil III des Vorlesungszyklus erlernen wir die Grundlagen der Theorie der metrischen und topologischen Räume, und Teil IV umfasst Themen der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen. Die Vorlesung findet digital statt, Materialien werden bereitgestellt im digitalen Lernzentrum unter moodle sowie auf der Seite

https://www.geometrie-und-logik.de/studium/analysis-2-ws-2020/

D'APRÈS ce qui a été dit dans la dernière leçon, si l'on divise $X-x_0$ en élémens infiniment petits x_1-x_0, x_2-x_1 ... $X-x_{n-1}$, la somme

(1) $$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

convergera vers une limite représentée par l'intégrale définie

(2) $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Des principes sur lesquels nous avons fondé cette proposition il résulte qu'on parviendrait encore à la même limite, si la valeur de S, au lieu

A.-L. Cauchy: *Résumé des leçons données à l'école Royale Polytechnique, sur le calcul infinitésimal* (1823)

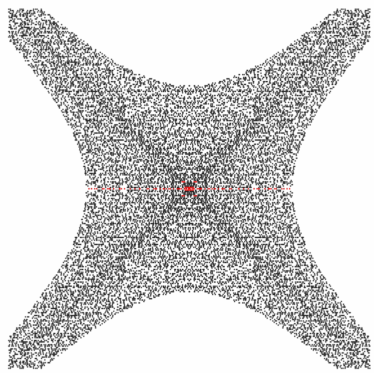
Literatur:

F. Burk, *A Garden of Integrals*, The Mathematical Association of America (2007)
J.J. Koliha, *Metrics, norms and integrals*, World Scientific (2008)
D.S. Kurtz, C.W. Swartz, *Theories of integration*, World Scientific (2004)
F. Sauvigny, *Analysis,* Springer Spektrum (2014)

Zahlentheorie

Dozent: Dr. Patrick Graf

Termine: Mo, Mi 12-14 (Digital)



Dies ist eine Einführung in klassische zahlentheoretische Fragestellungen:

- Gibt es unendlich viele Primzahlen? Wenn ja, was können wir über ihre Verteilung unter den natürlichen Zahlen sagen?
- Gibt es rechnerisch effiziente Methoden zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl prim ist?
- Welche ganzen Zahlen kann man als Summe von zwei Quadraten schreiben, d. h. für welche $a \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 + y^2 = a$?

Um z. B. die letzte Frage zu beantworten, ist es hilfreich unseren Zahlbereich auf die Gaußschen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

zu erweitern, weil dort $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ gilt.
Im Verlauf der Vorlesung werden wir anhand weiterer klassischer Fragestellungen (z.B. kann man jede ganze Zahl als Summe von drei oder vier Quadraten schreiben, welche ganzzahligen Lösungen hat die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$) weitere Zahlbereiche und Techniken kennenlernen. Gegen Ende der Vorlesung wollen wir auch die Anfänge der algebraischen Zahlentheorie entwickeln.
Im Vergleich zur letztjährigen gleichnamigen Vorlesung soll der Fokus diesmal stärker auf konkreten Problemstellungen liegen.
Die Vorlesung ist insbesondere auch für Lehramtsstudierende hervorragend geeignet und ist z. B. eine natürliche Fortsetzung der GAZ. Wenn Sie im Studiengang BSc sind, genügt es Lineare Algebra 2 erfolgreich absolviert zu haben.

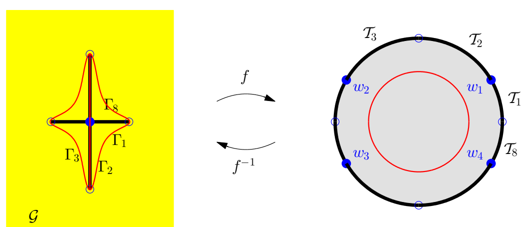
Literatur: Müller-Stach und Piontkowski, *Elementare und algebraische Zahlentheorie*, Vieweg+Teubner (2007).

Funktionentheorie

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine: Mi 8-10, Fr 10-12 (Hybrid - Digital und Präsenz)

Die Funktionentheorie entspricht, salopp gesprochen, einer Analysis I über dem Körper der komplexen Zahlen. Aufgrund der Isomorphie von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ hat die Theorie aber auch Bezüge zur mehrdimensionalen Analysis. Beide Beschreibungen werden dem Thema aber nicht gerecht. In gewisser Weise ist die Funktionentheorie die Krönung der Analysis; eine wunderschöne, in sich abgeschlossene Theorie mit präzisen, einfach zu formulierenden und trotzdem tiefliegenden Resultaten. Oder anders gesagt: Viele Dinge, die in der Analysis I irgendwie unbefriedigend oder zu einem gewissen Grad vage bleiben, werden durch die Funktionentheorie durchdrungen und erhalten eine ganz natürliche Bedeutung. Ein klassisches Beispiel sind Taylorreihen: Wo konvergiert die Taylorreihe gegen die gegebene Funktion, und warum dort und nicht woanders?
Einer der Höhepunkte der Veranstaltung ist sicher der Riemannsche Abbildungssatz. Er besagt, dass zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet (also vereinfacht gesagt, einem Gebiet in der komplexen Ebene "ohne Löcher") eine differenzierbare Funktion existiert, die dieses Gebiet bijektiv auf die (offene) Einheitskreisscheibe abbildet. Diese Funktion ist zudem im Wesentlichen eindeutig bestimmt, d.h, bis auf eine Schar bijektiver Transformationen des Einheitskreises, die sich aus Rotationen, Translationen und Inversionen zusammensetzen. Exemplarisch sei hier das folgende Beispiel angeführt:



Die Funktion

$$f^{-1}(z) = (z^2 + \frac{1}{z^2} - a)^{1/2}, \qquad |z| < 1,$$

ist die Umkehrfunktion der Riemannschen Abbildungsfunktion, die das Komplementärgebiet des links eingezeichneten Kreuzes (mit dem Ursprung als Mittelpunkt) auf die Einheitskreisscheibe abbildet. Die Abbildungsfunktion f besitzt eine stetige Fortsetzung auf das Kreuz mit unterschiedlichen Bildern, je nachdem, von welcher Seite der Grenzwert betrachtet wird. Der Ursprung besitzt entsprechend vier Bildpunkte $w_1, \ldots, w_4$ auf dem Einheitskreis.
Die Veranstaltung ist ein Aufbaumodul aus dem Bereich B. Es kann wahlweise im Bachelorstudiengang oder in den Masterstudiengängen als Wahlpflichtmodul eingebracht werden. Außerdem eignet sich die Veranstaltung gut für Lehramtsstudierende, denn lediglich die Vorlesungen Analysis I und Analysis II werden als bekannt vorausgesetzt.
Wegen der Corona-Pandemie wird die Veranstaltung in digitaler Form mit optionalen "Präsenz-Häppchen" angeboten. Das genaue Format wird auf der Website

`www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/funktionentheorie-ws-2020-2021`

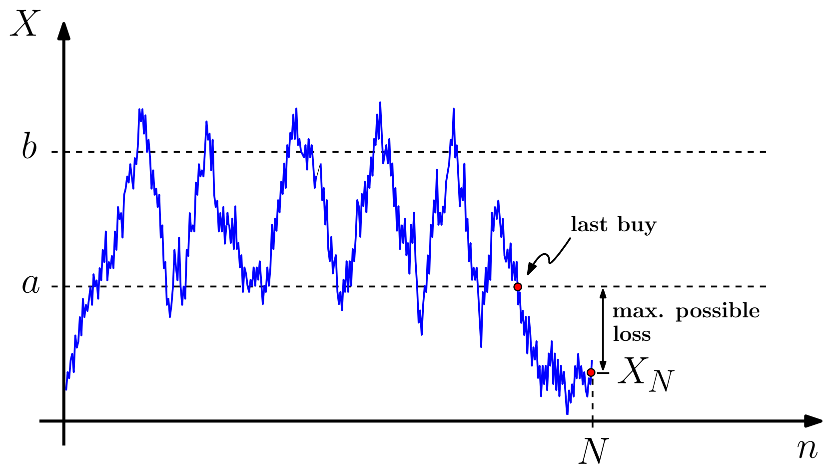
publiziert und regelmäßig aktualisiert. Dort finden sich auch Literaturangaben.

Stochastik II

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Mo, Mi 10-12 (Digital - via MS Teams)

Der Schwerpunkt der Vorlesung liegt auf dem Verständnis stochastischer Prozesse. Zunächst überlegen wir uns, wie wir solche auf allgemeinen Indexmengen definieren können. Anschließend lernen wir die allgemeine bedingte Erwartungen kennen (welche es uns insbesondere erlaubt, auf Nullmengen und Zufallsvariablen zu bedingen). Diese werden dann verwendet, um wunderschöne Aussagen über Martingale zu zeigen. Dies sind stochastische Prozesse, welche keine Informationen über die Zukunft beinhalten, d.h. deren bedingte Erwartung auf einen früheren Zeitpunkt gerade mit der Verteilung zu diesem Zeitpunkt ist. Danach werden wir uns mit einem zentralen stochastischen Prozess und dessen Eigenschaften beschäftigen: der Brownschen Bewegung. Wir werden einen funktionalen zentralen Grenzwertsatz beweisen, dessen Limesobjekt gerade die Brownsche Bewegung ist. Im Anschluss werden wir uns noch mit Punktprozessen, Poissonpunktprozessen und Lévy Prozessen beschäftigen. Dies wird es uns auch erlauben, einen funktionalen Grenzwertsatz zu beweisen, falls die zugrundeliegenden Zufallsvariablen keine endliche Varianz haben.



Doob's Upcrossing Lemma: Wie oft überschreitet ein Martingal ein gewisses Niveau?

Voraussetzungen: Stochastik 1; Organisatorisches: siehe meine Homepage

Literatur:

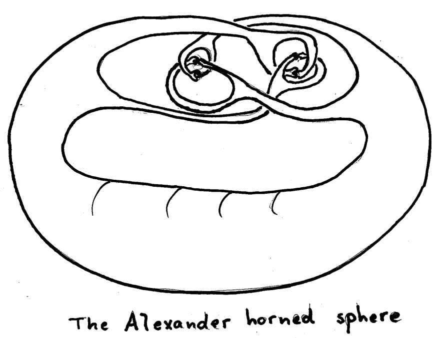
A. Bovier, *Stochastic Processes*, Vorlesungsskript, `https://www.dropbox.com/s/5f6s9fnpf4gejgf/wt2-new.pdf?dl=0`.
A. Bovier, *Extremes, Sums, Lévy processes, and ageing*, Vorlesungsskript, `https://wt.iam.uni-bonn.de/fileadmin/WT/Inhalt/people/Anton_Bovier/lecture-notes/levy.pdf` L.C.D. Rogers and D. Williamson, *Diffusions, Markov processes and martingales. Vol. 1*, Cambridge University Press
Y.S. Chow and H. Teicher, *Probability theory. Independence, interchangeability, martingales*, Springer, 1997

Einführung in die Topologie

Dozentin: Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Termine: Mo und Do 8-10 Vorlesung und Übung (Digital)

Die Topologie beschäftigt sich mit qualitativen Eigenschaften von Räumen, die unter stetigen Verformungen unverändert bleiben: *Gummi-Mathematik* !
Sie hat sich aus der Geometrie entwickelt, auf lateinisch unter dem Namen: 'geometria situs' (Geometrie der Lage) oder 'analysis situs' (Griechisch-Latein für 'Analysieren des Ortes').
Ein topologischer Raum stellt eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von "Nähe" dar. Damit gewinnt man substantielle Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie Stetigkeit und Grenzwert.
Das Fundament der Topologie ist die *Mengentheoretische Topologie*; ihrem Studium gilt etwa das erste Drittel der Vorlesung. Darauf baut die *Algebraische Topologie* auf, in der topologische Räume (oder auch Lagebeziehungen im Raum wie zum Beispiel in der Knotentheorie) mit Hilfe von algebraischen Strukturen untersucht werden.



Von Hocking, John G. und Young Gail, S. "Topology", Dover Books on Mathematics, 1988.

Literatur:

R. Courant, H. Robbins, "Was ist Mathematik?", Springer (2001).
H. Seifert, W. Threlfall, "Lehrbuch der Topologie", Chelsea (2004).
G. Bredon, "Topology and Geometry", Springer (1997).
A. Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge University Press, (2002).
R. Stöcker, H. Zieschang, "Algebraische Topologie", Teubner (2013).

Die Brownsche Bewegung und Stochastische Prozesse

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Di, Do 10-12 (Digital)

Die Vorlesung wendet sich an Studierende der Mathematik (Master). Minimalvoraussetzung sind die Vorlesungen Einführung in die Stochastik und Stochastik I.
Der Botaniker Brown stellte im 19. Jahrhundert einen zufälligen Prozess vor, der die Bewegung eines Teilchens in einer Suspension beschreiben soll. Im Jahr 1900 benutzte Bachelier diesen Prozess zur Modellierung der Aktienkurse an der Pariser Börse. 1905 gab Einstein eine Interpretation des Prozesses als Resultat eines Bombardements von kleinsten Partikeln, die das Teilchen in seiner Position verschieben. Erst 1923 gab Wiener eine mathematisch rigorose Konstruktion des Prozesses an. Später entwickelte Itô einen Kalkül, der Integration bezüglich der Pfade der Brown'schen Bewegung erlaubte und begründete damit die stochastische Analysis. Ohne Übertreibung kann man sagen, dass die Brown'sche Bewegung das zentrale Objekt der Wahrscheinlichkeitstheorie ist.

In dieser Vorlesung geht es nicht um stochastische Differentialgleichungen und nicht vorrangig um das Itô-Integral. Vielmehr steht die Brown'sche Bewegung selber mit ihren vielen faszinierenden Eigenschaften im Zentrum der Betrachtungen. So geht es etwa um die Hausdorff Dimension des Pfades der Brown'schen Bewegung, um die Frage, ob der Pfad Mehrfachpunkte hat ($d > 3$: nein, $d = 3$: Doppelpunkte, $d = 2$: Mehrfachpunkte jeder Multiplizität, auch überabzählbarer Multiplizität), wie sich diejenigen Mengen charakterisieren lassen, die von der Brown'schen Bewegung getroffen werden etc.
Je nachdem, wie viel Zeit bleibt, werden im zweiten Teil der Vorlesung weitere stochastische Prozesse vorgestellt, etwa Lévy Prozesse, Fragmentierungsprozesse oder wechselwirkende Systeme.

Literatur:

P. Mörters und Y. Peres: Brownian motion, Cambridge University Press.

Partielle Differentialgleichungen III

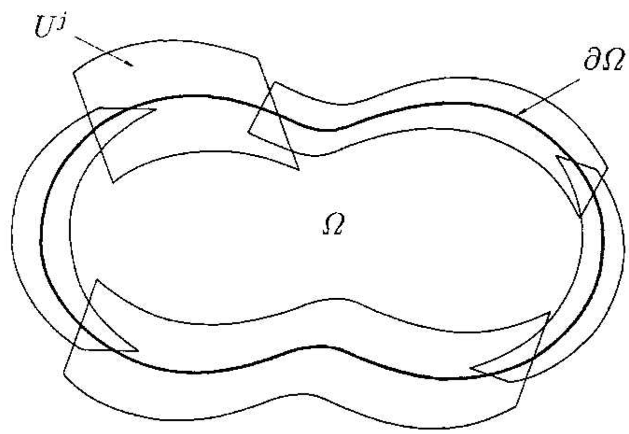
Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Dienstag 16-18 und Donnerstag 14-16

Die Vorlesung widmet sich der Theorie der Sobolev-Räumen und ihren Anwendungen auf Randwertaufgaben für elliptische partielle Differentialfleichung, z.B. Poissongleichung:

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \qquad \text{und} \qquad u = g \qquad \text{auf } \partial\Omega, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Dieser Lehrveranstaltung ist die Fortsetzung der gleichnamigen Lehrveranstaltung aus dem Sommersemester 2020.
Über die Form der Vorlesung (digital oder in Präsenz) werden wir zu Beginn der Vorlesungszeit sprechen.



Literatur:

R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).
R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press (2003).

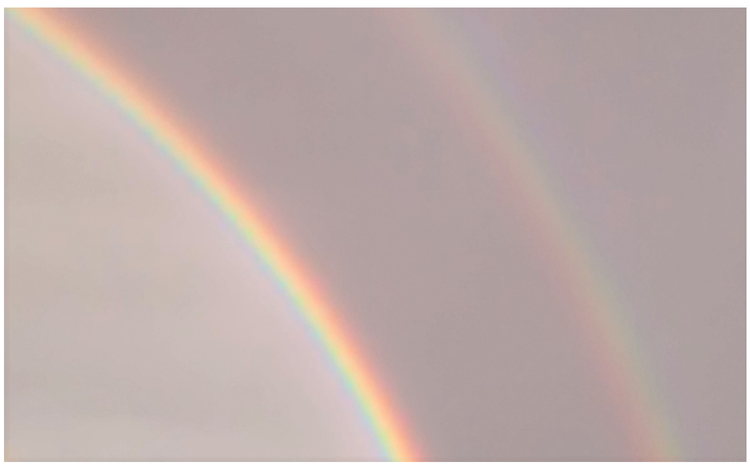
Eichtheorie 1

Dozent: PD Dr. Margarita Kraus

Termine: Mi, 12-14 und Do 12-14 (Präsenz)

Inhalt:

In der Physik bezeichnet man mit Eichtheorien Theorien, deren Vorhersagen invariant unter gewissen Symmetrien sind. Auch in der Mathematik spielen sie eine wichtige Rolle. In der Vorlesung Eichtheorie 1 beschäftigen wir uns mit den mathematischen Grundlagen dieser Theorien, nämlich mit Faserbündeln, Zusammenhängen und ihrer Krümmung, Liegruppen und Spinoren. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse über Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten (z.B. aus der elementaren Differentialgeometrie, ev. auch Mathematik für Physiker 2a oder Analysis 3).



Literatur:

1) D. Bleecker, *Gaugetheory and Variational Principles*, Dover Publications, 1981
2) T. Frankel, *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press, 2004
3) M. Hamliton, *Mathematical Gauge Theories*, Springer, 2017

Lineare Algebra und Geometrie I

Dozent/in: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Mo 10-12, Fr 12-14 (Digital)

Die Vorlesung über Lineare Algebra und Geometrie I ist zusammen mit der Vorlesung Analysis I die Grundlage für jedes Mathematikstudium. Sie ist deshalb eine Pflichtveranstaltung sowohl für den Studiengang BSc Mathematik wie den Mathematikteil des BEd Lehramtsstudiengangs und soll in der Regel im ersten Fachsemester besucht werden.

Angesichts der zu erwartenden Teilnehmerzahlen wird die Vorlesung in der gegebenen pandemischen Situation virtuell stattfinden müssen.

Zur Vorlesung gibt es zweistündige Übungen in kleinen Gruppen, die zu verschiedenen Zeiten angeboten werden. Die Teilnahme and den Übungen ist verpflichtend. Parallel dazu bietet das Institut als zusätzlichen Raum zum Üben und zum Diskutieren mit Kommilitonen, Tutoren und Dozenten die sogenannte Lernwerkstatt an. Die Teilnahme wird dringend empohlen.

Die Vorlesung bietet im methodischen Teil eine Einführung in das mathematische Handwerkszeug, etwa Mengenlehre und Aussagenlogik, Beweismethoden, Heuristische Verfahren, Axiomatisches Denken, algebraische Strukturen. Inhaltlich geht es um Lineare Gleichungssysteme, Matrizenrechnung, Vektorräume, lineare Abbildungen, analytische Geometrie, Skalarprodukte, Determinanten, Körper und Gruppen.
Es gibt zahllose Lehrbücher zur Linearen Algebra, die alle mehr oder weniger phantasielos genauso heißen, sich aber inhaltlich durchaus unterscheiden können. Ich empfehle immer, neben der Vorlesung mit wenigstens einem *anderen* Buch zu arbeiten, um die Themen der Vorlesung zu vertiefen oder aus einem anderen Blickwinkel kennenzulernen. Die Bereichsbibliothek Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften und die Lehrbuchsammlung der Zentralbibliothek stellen viele Quellen zur Verfügung. Es empfiehlt sich, diese Bücher daraufhin auszuprobieren, inwieweit sie dem eigenen Lerntyp entsprechen, bevor man sich für einen Kauf entscheidet. Hier ist eine kleine Auswahl an deutschen Lehrbüchern zum Thema der Vorlesung.

Literatur:

S. Bosch, *Lineare Algebra.* Springer Spektrum.
G. Fischer, *Lineare Algebra.* Springer Spektrum.
K. Jänich *Lineare Algebra.* Springer Verlag.
T. de Jong, *Lineare Algebra.* Pearson Studium.

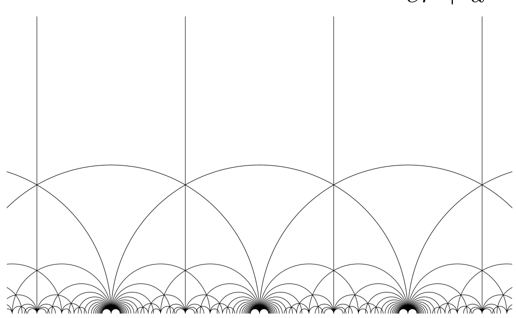
Modulformen und abelsche Varietäten I

Dozent/in: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Di, Fr 8-10 (Hybrid)

Diese Vorlesung ist der erste Teil eines zweisemestrigen Vertiefungsmoduls und wird im Sommersemester 2021 fortgesetzt. Wenn es die Teilnehmerzahl und die allgemeinen pandemischen Umstände erlauben, soll die Veranstaltung als Präsenzvorlesung durchgeführt werden. *On request the lecture will be read in English.*
Die Vorlesung richtet sich an Mathematik- und Physikstudenten ab dem fünften Fachß-semester. Soweit es die Zeit erlaubt, sollen in diesem Semester die folgenden Themen behandelt werden: Elliptische Funktionen, elliptische Modulformen, Thetafunktionen, kubische Kurven, Modultheorie elliptischer Kurven, Siegelsche Modulformen, Bezüge zur Zahlentheorie. Vorausgesetzt werden gute Kenntnisse in Algebra und Funktionentheorie. Angesichts der wichtigen historischen Rolle dieses klassischen Themas und der vielen Bezüge zur Zahlentheorie, zur Topologie, zu quadratischen Formen und zur algebraischen Geometrie läßt sich das Thema kaum behandeln, ohne gelegentlich auch in diesen Bereichen zu wildern. Mittelfristig ist die Vorlesungsreihe als eine Einführung in die algebraische Geometrie vermittels der Geometrie abelscher Varietäten gedacht.
Das folgende Bild zeigt eine Pflasterung der oberen Halbebene durch Fundamentalbereiche für die Gruppenwirkung

$$\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$



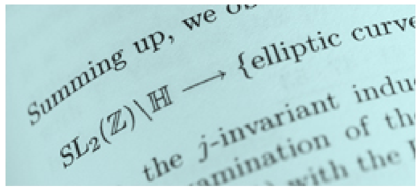
Für eine erste Orientierung zum Thema eignen sich die folgenden Bücher.

Literatur:

E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 254, Springer Verlag 1983.
A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen.* Springer Verlag 1922, 2000.
H. McKean, V. Moll, *Elliptic Curves.* Cambridge University Press, 1997, 1999.
D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I.* Modern Birkhäuser Classics 1983, 2007.

Dozent/in: Prof. Dr. Yingkun Li
VERANSTALTUNG AUS DARMSTADT - nur für freiwillige Hörerschaft

Termine: Fr 11:30-15:10 (Digital)



Number fields are the main actors in algebraic number theory. Class field theory gives a qualitative description of abelian extensions of a number field K. The Kronecker-Weber theorem states that any finite, abelian extension of the number field $\mathbb{Q}$ is contained in a cyclotomic extension, which is generated by the values of the special function $f(z) = e^{2\pi iz}$ at the special points $z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$. Extension of this result to other number field is Hilbert's 12^{th} problem, and not much is known in general.

When K is an imaginary quadratic field though, the theory of complex multiplication gives a beautiful extension of the Kronecker-Weber theorem. Here, $f(z)$ will be a function on the modular curve $\Gamma(N)\backslash\mathbb{H} = Y(N)$, which is (most of the time) a moduli space of elliptic curves, and the special points will be elliptic curves with complex multiplication. For example, take f to be the j-invariant (as in the picture above)

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196884q + O(q^2),\ q = e^{2\pi iz}$$

and $z_0 = \frac{1+\sqrt{163}i}{2}$. The theory of complex multiplication, together with the fact that $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ has class number one, implies that $j(z_0)$ is an integer, which explains why the number

$$e^{\sqrt{163}\pi} = 262537412640768743.99999999999250.....$$

is very close to an integer.

The goal of this course is to describe and prove the main results in complex multiplication. Basic understanding of complex analysis and algebraic number theory will be assumed. During the first half of the course, we will briefly introduce elliptic curve and modular form, and discuss relevant concepts in algebraic geometry and algebraic number theory. In the second half, we will accomplish the goal above. If time permits at the end, we will also discuss applications, such as to cryptography, and recent developments.

Literatur:

D., Cox, *Primes of the form* $x^2 + ny^2$, John Wiley & Sons, (2013).
N., Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Springer, (1993).
R., Schertz, *Complex multiplication*, CUP, (2010).
J., Silverman, *Advance topics in elliptic curves*, Springer, (1994).

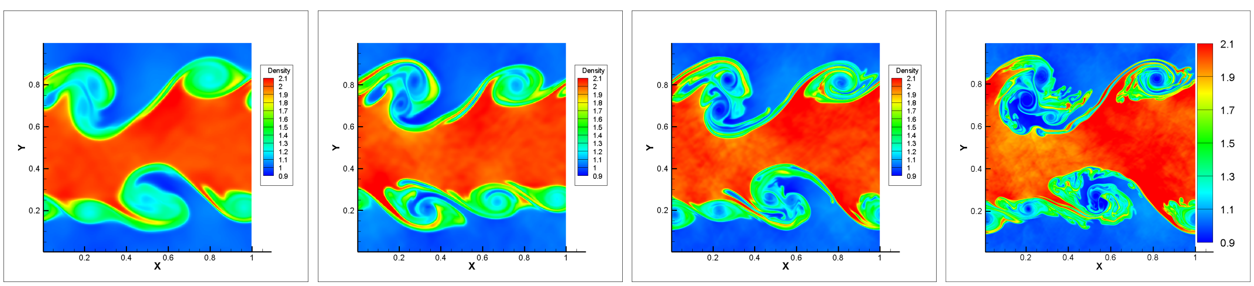
Computational Fluid Dynamics

Dozent/in: Prof. Dr. Mária Lukáčová

Termine: Mo 10-12 (Hybrid)

In der Vorlesung werden wichtige Techniken mathematischer Modellierung und numerischer Simulation in der Strömungsmechanik besprochen. Wir beschäftigen uns mit kontinuums-mechanischer Modellierung kompressibler Fluide, mit der Theorie von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen, sowie auch mit numerischer Simulation reibungsfreier kompressibler Strömungen mit Hilfe von Finite-Volumen-Verfahren und Diskontinuierlichen-Galerkin-Verfahren. Die Vorlesung ist f¨ur Masterstudenten in der Mathematik, Physik oder Informatik gut geeignet. Insbesondere kann die Veranstaltung auch parallel zu Numerik partieller Differentialgleichungen ergänzend belegt werden.

Vorrausetzung: Grundlage der Numerik, Grundvorlesungen der Analysis



(A) $n = 256$ (B) $n = 512$ (C) $n = 1024$ (D) $n = 2048$

Wirbelstrukturen in der Scherströmung

Literatur:

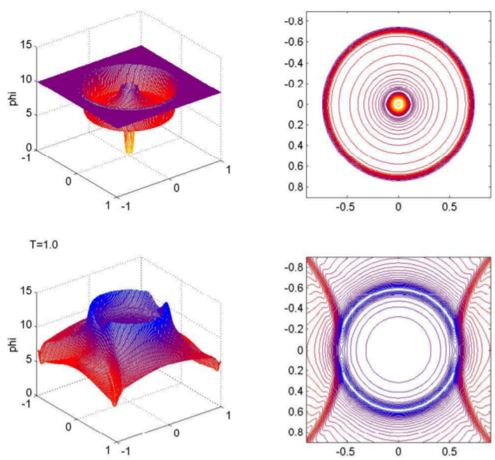
1. M. Lukáčová: Lecture Notes Computational Fluid Dynamics.
2. M. Feistauer: Mathematical Methods in Fluid Dynamics, Longman Scientific & Technical (1993).
3. R.J. Le Veque: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press (2002).

Numerik partieller Differentialgleichungen

Dozent/in: Prof. Dr. Mária Lukáčová

Termine: Di, Do 14-16 (Hybrid)

Viele natürliche oder technische Prozesse lassen sich mit partieller Differentialgleichungen beschreiben. Da es oft unmöglich ist, Lösungen solcher Gleichungen analytisch in geschlossener Form zu finden, sind wir auf numerische Verfahren angewiesen.
In dieser Vorlesung werden moderne Verfahren für numerische Lösung partieller Differentialgleichungen vorgestellt. Diese Verfahren basieren auf der Theorie der schwachen Lösungen. Wir werden uns mit elliptischer, parabolischer und hyperbolischer Gleichungen beschäftigen und lernen die Finite Elemente- und Finite Volumen-Verfahren kennen. Numerische Simulationen praktischer Anwendungen werden theoretische Vorlesungsinhalte ergänzen.
Es handelt sich bei dieser Vorlesung um den ersten Teil des Vertiefungsmoduls "Wissenschaftliches Rechnen" in den mathematischen Masterstudiengängen. Der zweite Teil des Moduls, das "Modellierungspraktikum" wird im kommenden Sommersemester angeboten werden.
Vorrausetzung: Grundlage der Numerik, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen



Numerische Simulation der Wellenausbreitung.

Literatur:

1. A. Quarteroni, A. Valli: Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer (1994).
2. D. Braess: Finite Elemente, Springer (2003).
3. M. Hanke-Bourgeois: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Teubner (2002).
4. R.J. Le Veque: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, (2002).

Codierungstheorie

Dozent/in: Dr. Anton Malevich

Termine: Di 14-16 (Digital)
2-stündige Vorlesung für B.Sc.- und M.Ed.-Studierende

Du wolltest schon immer wissen, was hinter QR-Codes steckt? Oder hast du sogar den Wikipedia-Eintrag geöffnet, kannst aber nichts weiter mit den Reed-Solomon-Codes anfangen? Und vielleicht fragst Du Dich, was das alles mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus zu tun hat?

Warte nicht länger und sichere Deinen Platz in der Vorlesung Codierungstheorie im Wintersemester.

Mehr Infos:

Scanne den QR-Code, obviously!

Introduction to the Langlands program

Dozent/in: Prof. Dr. Timo Richarz

Termine: Tuesdays, 13:30 – 15:10 (Digital - via Zoom, starting November 3rd.)

The Langlands program is a web of far reaching conjectures connecting representation theory, number theory and algebraic geometry. It roughly states, among other things, that number-theoretically defined L-functions are the same as representation-theoretically defined, so called, automorphic L-functions. This vastly generalizes Artin's reciprocity law in class field theory. The aim of this course is to formulate the Langlands conjectures and to give some elementary examples.

Prerequisites: Number theory, linear algebraic groups, algebraic geometry.
Website: https://timo-richarz.com/activities/lp_wise20/

This course will be 2h/week starting in the week of November 2nd in 2020. If you are interested in participating, please contact the lecturer via email: richarz "at" mathematik.tu-darmstadt.de

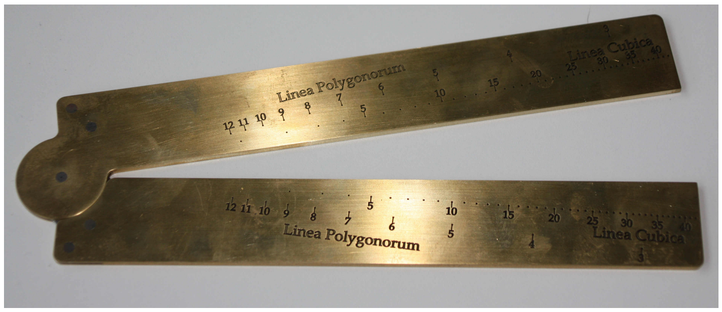
Literatur:

J. Bernstein, S. Gelbart, *An Introduction to the Langlands Program*, Birkhäuser (2004).

Kulturgeschichte der Mathematik

Dozent/in: Prof. Dr. Tilman Sauer

Termine: Mo 16-18, Do 14-16 (Digital)



Die Vorlesung gibt einen Überblick über die Entstehung des mathematischen Denkens und mathematischer Konzepte vom Ursprung in Mesopotamien bis zur Neuzeit. Behandelt werden die Entstehung des Zahlbegriffs und der elementaren arithmetischen Operationen, die Herausbildung geometrischer Konzepte und Vorstellungen und die Entstehung der Algebra. Dabei wird auch die Einbettung der Entwicklung in den allgemeineren kulturhistorischen Kontext und die Wechselwirkungen mit anderen Aspekten wissenschaftlichen Denkens (Physik, Astronomie, Kosmologie, etc) diskutiert.

Literatur:

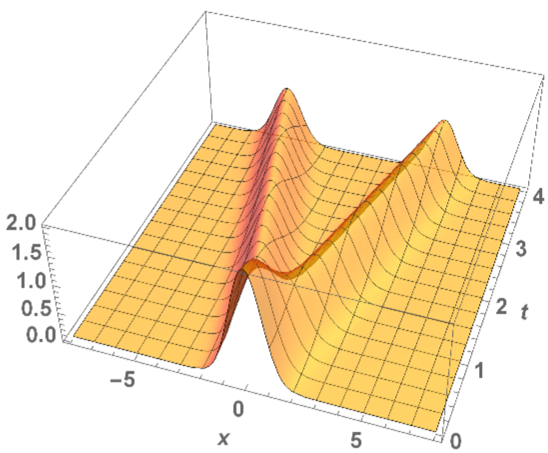
Struik, Dirk J., *Abriß der Geschichte der Mathematik*, 1.Aufl. engl. 1948, dt. VEB D.V.d.W., viele Auflagen.
Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathemik*, Berlin, VEB DV.d.W.1978, Nachdruck: Harri Deutsch, 2008.
Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, 1972.
Boyer, Carl, *The History of Mathematics*, New York 1968, 2nd ed. by Uta Merzbach 1991.

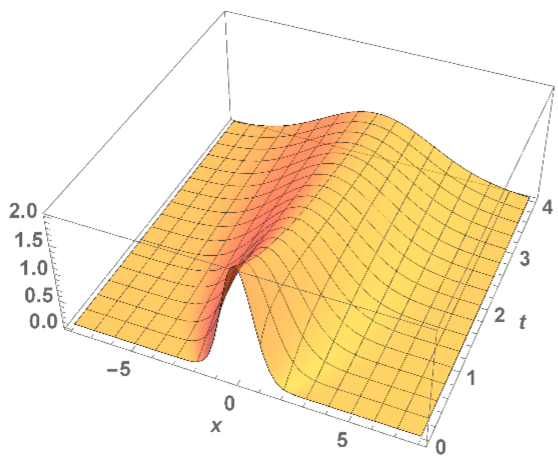
Grundlagen partieller Differenzialgleichungen

Dozent: PD Dr. Matthias Schneider

Termine: Digital in Moodle

Mindestens eine Millionen US-Dollar bringt die sehr genaue Analyse einer nichtlinearen partiellen Differenzialgleichung, der sogenannten Navier-Stokes Gleichung. Um sich dieses Geld zu verdienen, ist es sinnvoll zunächst lineare Gleichungen zu studieren, wie etwa die eindimensionalen Versionen der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ oder der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$.
Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Schwerpunkt auf linearen Gleichungen. Für Teilnahme an der Vorlesung sind solide Kenntnisse der Vorlesungen Analysis 1-3 hilfreich.
Am Anfang der Vorlesung wird darüber abgestimmt, welches der unteren beiden Bilder zur Wellen- beziehungsweise Wärmeleitungsgleichung passt.





Literatur:

L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence. (2010)
J. Jost, *Partielle Differentialgleichungen*, Springer, Berlin. (1998)
W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York. (1987)
M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I. Basic Theory*, Springer, Berlin. (1996)
R. Courant & D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer, New York. (1968)

Harmonische Analysis und partielle Differentialgleichungen

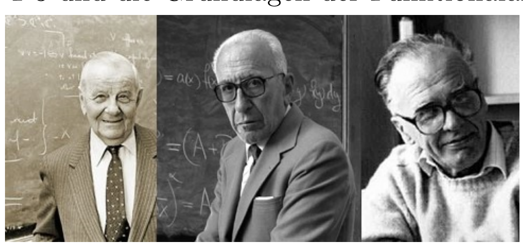
Dozent: Jun. Prof. Dr. Patrick Tolksdorf

Termine: Mi 12-14, Fr 10-12 von 04.11. bis 18.12. (Digital)

Das Hauptuntersuchungsobjekt dieser Vorlesung sind sogenannte Calderón-Zygmund-Operatoren. Dies sind Operatoren, die von der Form

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

sind, wobei der Integralkern k bestimmte Singularitäten aufweist. In der Calderón-Zygmund-Theorie wird unter der Voraussetzung, dass T beschränkt auf $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^\mathrm{d})$ ist und unter weiteren Voraussetzungen an den Integralkern k gezeigt, dass diese Operatoren auch beschränkt auf $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ für alle $1 < p < \infty$ sind. Man sieht also, dass diese L^p-Beschränktheit eine Art "Startpunkt" voraussetzt, nämlich dass man bereits die Beschränktheit im Falle $p = 2$ weiß. In dieser Vorlesung wird es um die Frage gehen, wann solche Operatoren überhaupt auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ beschränkt sind, wann also überhaupt diese "Startvoraussetzung" für die Calderón-Zygmund-Theorie erfüllt ist.
Es stellt sich heraus, dass man für die Beantwortung dieser Frage herausfinden muss, wie der Operator T auf der Einsfunktion agiert, d.h. man muss die Funktion $T1$ verstehen und zeigen, dass diese im Raum BMO, dem Raum aller Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation, liegt. Dies ist das sogenannte $T1$-Theorem von David und Journé und wird eines der Hauptresultate dieser Vorlesung darstellen. Eine zentrale Rolle bilden hierbei die sogenannten Carleson-Maße welche von dem Abelpreisträger Lennart Carleson eingeführt wurden.
Die Vorlesung wird sich größtenteils mit Themen aus der Harmonischen Analysis beschäftigen und von Anfang November bis Weihnachten gehen. Die Anwendungen zu den partiellen Differentialgleichungen werden erst danach im gleichnamigen Hauptseminar hergestellt. Als Voraussetzung sollten Sie die Vorlesungen Analysis 1-3 und die Grundlagen der Funktionalanalysis mitbringen.



Antoni Zygmund, Alberto Calderón und Lennart Carleson.

Literatur:

J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, (2001).
L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2014).

Komplexe Geometrie II

Dozent: Prof. Dr. Zuo

Termine: Mo, Do 12-14 (Hybrid)

In der Vorlesung Komplexe Geometrie II im WS2020, werden folgende Themen behandelt:
Die Hodge-Strukturen auf kompakten Kähler Mannigfaltigkeiten.
Der Lefschetzsche Zerlegungssatz.
Familien komplexer Mannigfaltigkeiten.
Variation von Hodge-Strukturen.
Das Graduierte Higg-Bündel einer Variation von Hodge Strukturen.
Periodische Horizontale Abbildung.
Griffiths Krümmungsformel.
Negativität des Kerns vom Higgs-Feld.
Fundamentalgruppe einer periodischen Abbildung.

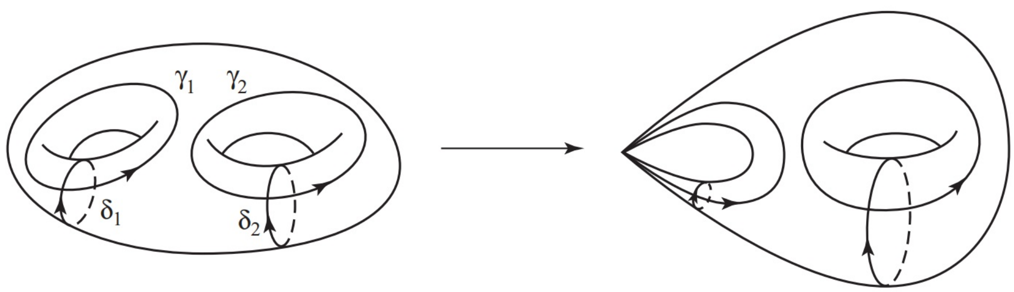


FIGURE 2. Degeneration einer Familie von Kurven vom Geschlecht 2

Vorkenntnis: Komplexe Geometrie I.

Vanishing theorems in algebraic geometry, characteristic zero and characteristic p

Dozent: Prof. Dr. Zuo

Termine: Mo, Do 12-14

In der Vertiefungsvorlesung im WS2020 "Vanishing theorems in algebraic geometry, characteristic zero and characteristic p" werden die folgende Themen behandelt.
Kodaira vanishing theorem, an introduction.
Logarithmic de Rham local system und complex.
Vanishing theorem for invertible sheaves.
Cyclic covers.
Some applications of vanshing theorem.
Charcteristic p methods: Scheme lifted to mod p^2 .
Deligne-Illusie's Lemma: Hasse-Witt map.
Vanishing theorem of Kodaira-Saito type.

$$
\begin{tikzcd}
& (V,\nabla,)_0 \arrow[dr, "\mathrm{Gr}"] & & \cdots \arrow[dr, "\mathrm{Gr}"] & & (V,\nabla,)_e \arrow[dr, "\mathrm{Gr}"] & & \cdots \arrow[dr, "\mathrm{Gr}"] & & (V,\nabla,)_{e+f-1} \arrow[dr, "\mathrm{Gr}"] & \\
(E,\theta)_0 \arrow[ur, "\mathcal{C}^{-1}"'] & & \cdots \arrow[ur, "\mathcal{C}_1^{-1}"'] & & (E,\theta)_e \arrow[ur, "\mathcal{C}^{-1}"'] & & (E,\theta)_{e+1} \arrow[ur, "\mathcal{C}^{-1}"'] & & \cdots \arrow[ur, "\mathcal{C}^{-1}"'] & & (E,\theta)_{e+f} \arrow[llllll, bend left, "\simeq"]
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 3. preperiodic Higgs-de Rham flow in char. p.

Vorkenntnis: Elementare Algebrasiche Geometrie, Komplexe Geometrie I.

https://download.uni-mainz.de/mathematik/Studienbuero/LV/KommVZ-WS2021.pdf