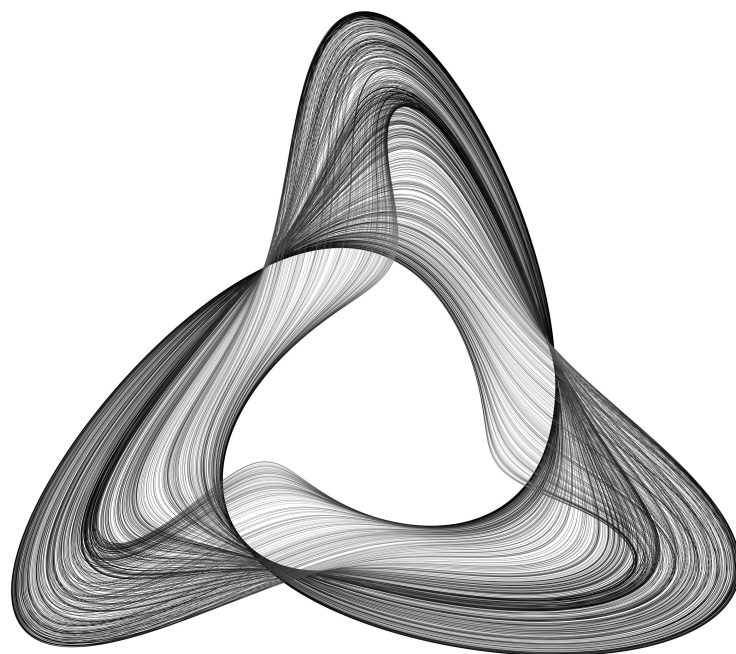


Vorlesungsverzeichnis

Mathematik



Mainz

Wintersemester 2022/23

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Wintersemester 2022/23 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Juni 2022

Das umseitige Bild zeigt den Halvorsen Attraktor. Dies ist ein sogenannter seltsamer Attraktor, da der Verlauf eines Punktes entlang der Trajektorien sensitiv vom Startwert abhängt, und sich somit ein chaotisches Verhalten manifestiert. Die Trajektorien sind die Lösungen eines nicht-linearen Systems von Differentialgleichungen welches verschiedenste Phänomäne der Natur modelliert (z.B. Wetter, Strömungen ...). Um solche oder ähnliche Fragestellungen bearbeiten zu können benötigt man im wesentlichen nicht mehr als ein gutes Verständnis der Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen, welches Sie im Bachelorstudium erlangen können.

Das Bild wurde von Aaron Reith und Johannes Schmitz für das Hauptseminar Zahl und Bild im Sommersemester 2021 erstellt.

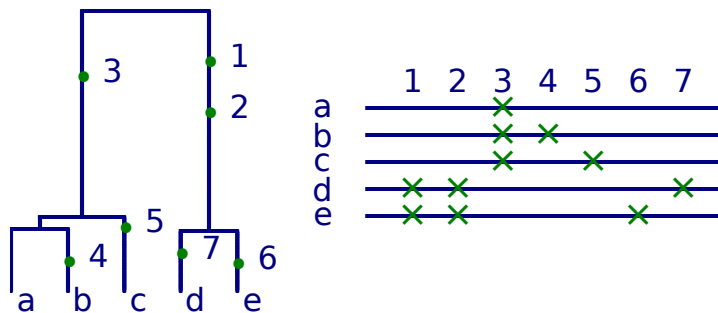
Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10	Funktionentheorie (Lehn) 05-426	Topologie (Hog-Angeloni) 05-514	Funktionentheorie (Lehn) 05-426	Modulräume von G-Bündeln auf Kurven II (Lehn) 04-432	
10-12	Numerik partieller Differentialgleichungen (Hanke-Bourgeois) 05-426 Algebraische Geometrie III (Tamme) 04-426 Spieltheorie (Schneider) 04- 432	Algebraische Geometrie I (van Straten) 04-224 Stochastik II (Klenke) 05-136 Algebra I (Lehn) 05-514 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (Lukacova) 05-426	Numerik partieller Differentialgleichungen (Hanke-Bourgeois) 05-426 Lorenz-Geometrie (Kraus) 04-422 Geometrie und Optik von der Antike bis in die frühe Neuzeit (Labs) 05-522	Algebraische Geometrie I (van Straten) 04-224 Stochastik II (Klenke) 05-136 Algebraische Geometrie III (Tamme) 04-426 Spieltheorie (Schneider) 04- 422 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (Lukacova) 05-426 Topologie (Hog-Angeloni) 04-512	Selected Topics in Scientific Computing (Werth) 05-426 Algebra I (Lehn) 05-514
12-14	Zahlentheorie (Li) C02 Praktikum zur Stochastik (Hartung) 05-514	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Schneider) 05-514	Zahlentheorie (Li) C02 Mathematical Fluid Dynamics (Lukacova) 05-426	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Schneider) 05-514	Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen (Rendall) 04-422
14-16	Evolutionsgleichungen I (Tolksdorf) 04-426 Modulräume von G-Bündeln auf Kurven II (Lehn) 04-432 Stochastische Modelle der Populationsbiologie (Birkner) 05-522	Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen (Rendall) 04-422		Evolutionsgleichungen I (Tolksdorf) 04-426 Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514 Stochastische Modelle der Populationsbiologie (Birkner) 05-136 Einführung in das Atiyah-Singer-Index-Theorem (Klaus) 04-422 14-tägig Termine siehe Jogustine	
16-18	Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514			Institutskolloquium, Do. 17.15-19 Veranstalter: alle Dozentinnen und Dozenten des Instituts Auswärtige Gäste oder Institutsmitglieder berichten über neue Entwicklungen und Forschungsergebnisse aus allen Gebieten der Mathematik. Kolloquiumsbeauftragter: T.Sauer	

Stochastische Modelle der Populationsbiologie

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

Termine: Mo, Do 14-16

Typischerweise zeigen reale Populationen genetische (und phänotypische) Variabilität. Stochastische Modelle helfen, diese Variabilität zu verstehen und die zugrundeliegenden evolutionären Kräfte, wie genetische Drift, Selektion, Mutation, Rekombination und räumliche Strukturierung, zu quantifizieren. Sie bilden damit die Grundlage für Rückschlüsse auf – häufig nicht direkt beobachtbare – biologische Mechanismen anhand beobachteter genetischer Variabilität in einer Stichprobe. Ein zentrales Thema ist dabei das Zusammenspiel zwischen der Vorwärts-Zeitentwicklung der Population und der Rückwärts-Sicht auf die Genealogien von Stichproben.



Ein genealogischer Baum mit Mutationen und zugehöriges an den Blättern beobachtetes Mutationsmuster. Beispiel: Mutation 3 ist in den Stichproben a, b und c sichtbar

Exemplarisch einige technische¹ Themenstichworte: (Kingman-)Koaleszent, Wright-Fisher-Modell und -Diffusion, Ewens'sche Stichproben-Formel, anzestraler Selektionsgraph, Stepping-Stone-Modell, interagierende Teilchensysteme

Literatur:

- R. Durrett, *Probability Models for DNA Sequence Evolution*, Springer (2008).
W. Ewens, *Mathematical population genetics*, Springer (2004).
J. Wakeley, *Coalescent Theory: An Introduction*, Roberts & Company (2008).
M. Birkner, *Stochastische Modelle der Populationsbiologie*, Vorlesungsskript, JGU Mainz (2016) <https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/SMPB1516/smpb1516.pdf>
S. Ethier, T. Kurtz, *Markov processes: characterization and convergence*, Wiley (1996).

¹Die Phänomene lassen sich prinzipiell gut mit dem Begriffsapparat aus der Vorlesung Einführung in die Stochastik verstehen. Die Vorlesung wird gelegentlich avancierte stochastische Werkzeuge (etwa Diffusionsprozesse, stochastische Differentialgleichungen) verwenden, diese aber anhand diskreter Approximationen und biologischer Intuition heuristisch motivieren und ggfs. z.T. entwickeln; sie kann bei entsprechender Motivation auch als Einladung aufgefasst werden, sich mit solchen Begriffen zu befassen. William Feller schreibt im Vorwort zum 2. Band seines Klassikers *An introduction to probability theory and its applications* (in ähnlicher Sache): “[...] the level of difficulty cannot be measured objectively; it depends on the type of information one seeks and the details one is prepared to skip. The traveler often has the choice between climbing a peak or using a cable car.”

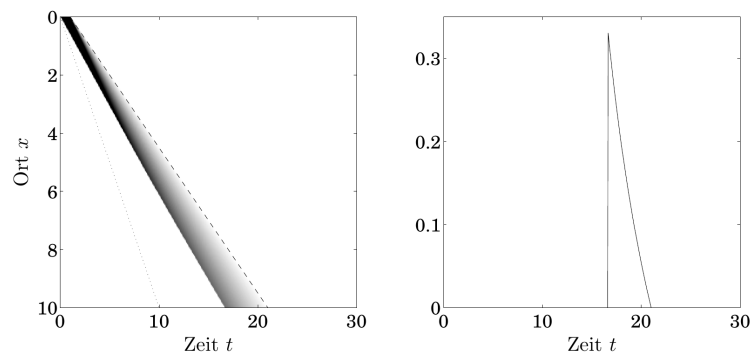
Numerik partieller Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine: Mo, Mi 10–12

Partielle Differentialgleichungen treten in vielen Anwendungen auf, vor allem in den Ingenieurwissenschaften, aber auch in den Naturwissenschaften, neben der Physik vor allem in der Meteorologie, der Geophysik und der Biologie.

Analytische Lösungen dieser Gleichungen sind nur in ganz seltenen Ausnahmefällen möglich und selbst dann zumeist nur in Form unendlicher Reihen. Daher müssen diese Gleichungen in der Praxis numerisch gelöst werden. Die entsprechenden Verfahren hängen von dem Typ der Gleichung ab: Für elliptische Gleichungen werden in der Regel variationelle Verfahren (Galerkin-Verfahren für finite Elemente) verwendet, für parabolische Differentialgleichungen werden diese dann mit Zeitintegrationsverfahren (Runge-Kutta-Verfahren) kombiniert, und für hyperbolische Verfahren werden schließlich Differenzen- bzw. finite Volumen-Verfahren eingesetzt. Alle diese Verfahren werden in der Vorlesung exemplarisch behandelt.



Konzentrationsverteilung innerhalb einer Chromatographie-Säule (links) und Ausfluss aus der Säule als Funktion der Zeit (rechts)

Die Veranstaltung umfasst neben der vierstündigen Vorlesung eine zweistündige Übung. Es werden die Inhalte der Lehrveranstaltungen Grundlagen der Numerik sowie Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen vorausgesetzt.

Literatur:

C. Großmann, H.-G. Roos, *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, Teubner, Wiesbaden (2005).

M. Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner, Wiesbaden (2006).

P. Knabner, L. Angermann, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Springer, Berlin (2000).

A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Berlin (1997).

Einführung in die Topologie

Dozentin: Dr. Cynthia Hog-Angeloni

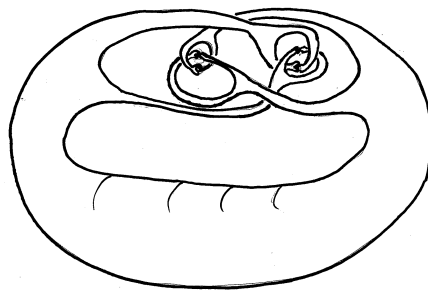
Termine: Di 8-10, Do 10-12

Die Topologie beschäftigt sich mit qualitativen Eigenschaften von Räumen, die unter stetigen Verformungen unverändert bleiben: *Gummi-Mathematik* !

Sie hat sich aus der Geometrie entwickelt, auf lateinisch unter dem Namen: ‘geometria situs’ (Geometrie der Lage) oder ‘analysis situs’ (Griechisch-Latein für ‘Analysieren des Ortes’).

Ein topologischer Raum stellt eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von “Nähe” dar. Damit gewinnt man substantielle Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie Stetigkeit und Grenzwert.

Das Fundament der Topologie ist die *Mengentheoretische Topologie*; ihrem Studium gilt etwa das erste Drittel der Vorlesung. Darauf baut die *Algebraische Topologie* auf, in der topologische Räume (oder auch Lagebeziehungen im Raum wie zum Beispiel in der Knotentheorie) mit Hilfe von algebraischen Strukturen untersucht werden.



The Alexander horned sphere

Von Hocking, John G. und Young Gail, S. "Topology", Dover Books on Mathematics, 1988.

Literatur:

R. Courant, H. Robbins, *Was ist Mathematik?*, Springer (2001).

H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea (2004).

G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer (1997).

A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).

R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner (2013).

Einführung in das Atiyah-Singer-Index-Theorem

Dozent: apl. Prof. Dr. Stephan Klaus

Termine: Do 14-16, ca. alle 2 Wochen, Termine siehe Jogustine

$$\dim(\ker(D)) - \dim(\ker(D^*)) = \int_M \text{ch}(D) Td(M)$$

Das Atiyah-Singer-Index-Theorem stellt einen Zusammenhang her zwischen den Lösungsräumen elliptischer partieller Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten und gewissen topologischen Invarianten. Vereinfacht gesprochen gibt der analytische Index der Differentialgleichung die Dimension des Lösungsraumes an, während der topologische Index durch sogenannte charakteristische Klassen beschrieben wird. Das Theorem besagt, dass beide Indizes übereinstimmen. Es handelt sich dabei um eines der berühmtesten Ergebnisse in der Differentialtopologie, das in zahlreichen anderen Gebieten angewendet werden kann und dort wichtige Sätze und Theoreme verallgemeinert, z.B. das Gauß-Bonnet-Chern-Theorem, das Riemann-Roch-Theorem und den Signatursatz von Hirzebruch.

Die Vorlesung wird eine übersichtsartige Einführung in diese Theorie geben, wobei auch die genannten Anwendungen auf Topologie, Differentialgeometrie und algebraische Geometrie besprochen werden sollen.

Voraussetzungen: Solide Grundkenntnisse in Differentialtopologie (insbesondere Mannigfaltigkeiten, Differentialformen, deRham-Kohomologie, Vektorbündel)

Zielgruppe: Fortgeschrittene Lehrveranstaltung mit Überblickscharakter, ohne Übungen

Zuordnung Gebiete: Differentialtopologie mit Verbindungen zur Differentialgeometrie und Algebraischen Geometrie

Literatur:

Nicole Berline, Ezra Getzler, Michele Vergne
Heat Kernels and Dirac Operators
Grundlehren der Mathematik, Springer Heidelberg (2004)

Peter B. Gilkey
Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Theorem
Publish or Perish (1995)
Das Buch ist online frei verfügbar unter <http://www.emis.de/monographs/gilkey/>

Richard S. Palais
Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem
Annals of Mathematics Studies 57, Princeton Univ. Press (1965)

Stochastik II

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Di, Do 10-12

Die Vorlesung ist der erste Teil des Vertiefungsmoduls Stochastik und wendet sich an Studierende der Fachrichtung Mathematik, die bereits die Stochastik I gehört haben.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glücksspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in den Vordergrund gerückt.

Wir beschäftigen uns mit fortgeschrittenen Themen der Wahrscheinlichkeitstheorie wie Martingalen, Konvergenz von Maßen, Konstruktion von Produkträumen und Charakteristischen Funktionen.

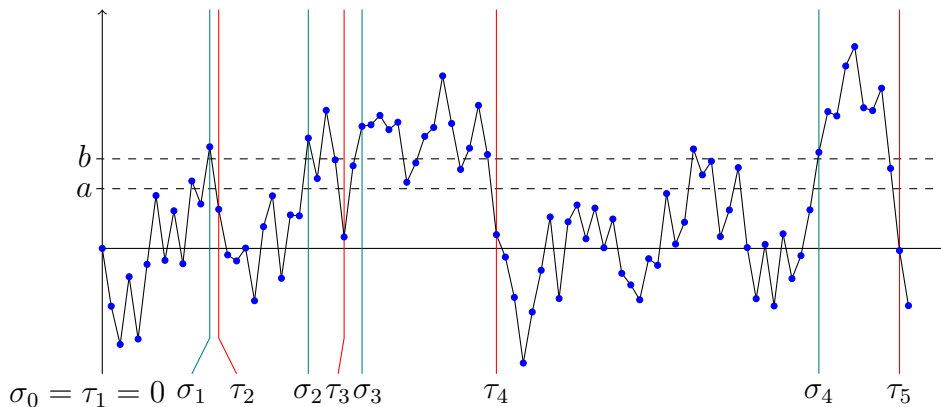


FIGURE 1. Aufkreuzungen (τ_i, σ_i) über $[a, b]$ zum Beweis des Martingalkonvergenzsatzes, aus [Klenke 2020]

Literatur:

L. Breiman, *Probability*, Wiley Verlag (1968).

R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 5. Auflage (2019).

J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, 8. Auflage (2018).

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Wiley Verlag, Band 1 und Band 2 (1968 und 1971).

H.-O. Georgii, *Stochastik*, de Gruyter, 5. Auflage (2015).

A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 4. Auflage (2020).

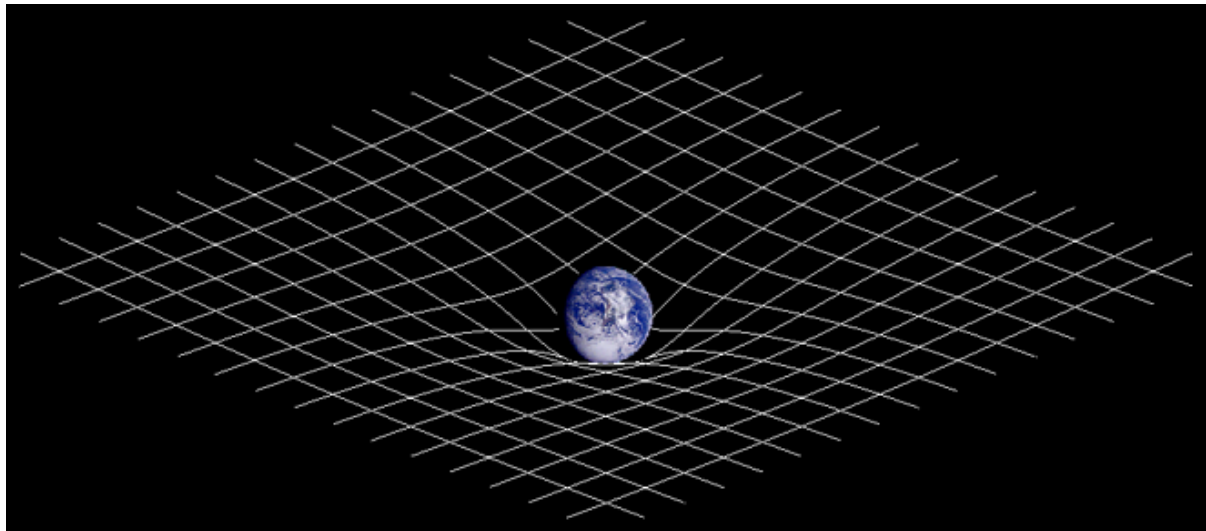
Ergänzungsvorlesung Lorentzgeometrie

Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus

Termin: Mi 10-12

Wir beschäftigen uns in dieser Vorlesung mit der Differentialgeometrie auf Lorentzmannigfaltigkeiten, die auch in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielen. Insbesondere behandeln wir Klassifikationen des Krümmungstensors von vierdimensionalen Raumzeiten und lichtartigen Geodätischen.

Vorkenntnisse: Die Vorlesung richtet sich in erster Linie an HörerInnen der Semi-Riemannschen Differentialgeometrie 1, aber auch HörerInnen mit soliden Kenntnissen der elementaren Differentialgeometrie sind willkommen.



Bildquelle:

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Spacetime.curvature.png&oldid=485034886>

Literatur:

O'Neil, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press (1983).

Hawking, Ellis, *The large Structure of Spacetime*, Cambridge (1973).

Beem, Ehrlich, *Global Lorentzian Geometry*, CRC Press (1996).

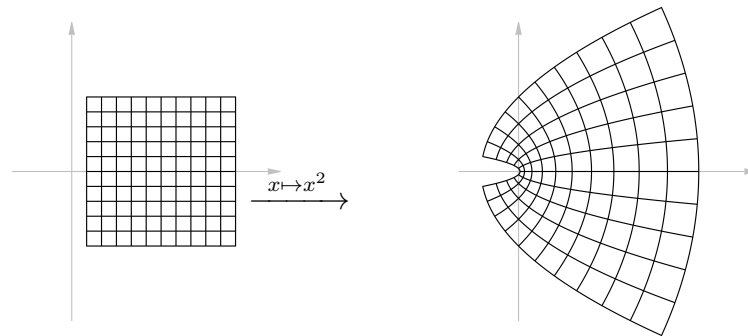
Hall, G.S., *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, World Scientific (2004).

Funktionentheorie

Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Mo, Mi 8-10

Gegenstand der Funktionentheorie ist das Studium der holomorphen (= komplex differenzierbaren) Funktionen einer komplexen Variable $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Im Gegensatz zur reellen Theorie ist eine holomorphe Funktion automatisch beliebig oft komplex differenzierbar und lässt sich überall in eine Potenzreihe entwickeln. Die Funktionentheorie ist wegen der erstaunlichen Eleganz der Resultate und der Beweismethoden sicher eine schönsten elementaren mathematischen Theorien. Wichtige Resultate sind der Residuensatz, die Cauchysche Integralformel, das Maximumprinzip und der Riemannsche Abbildungssatz.



Das Bild illustriert das konforme Verhalten (= Winkeltreue) holomorpher Funktionen.

Zur Vorlesung gibt es eine zweistündige Übung. Voraussetzungen für den Besuch der Veranstaltung sind Grundkenntnisse der Analysis im Umfang der Grundvorlesungen Analysis I und Analysis II. Kenntnisse in Analysis III sind natürlich nützlich, werden aber nicht gebraucht.

Literatur:

- R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer Verlag (1995).
- H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer, (1976).
- A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer (1922, . . . , 2000)
- T. Needham, *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenburg (2001).

Algebra I

Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Di, Fr 10-12

Die Vorlesung Algebra I schließt sich unmittelbar an die Vorlesungen Lineare Algebra I und Lineare Algebra II an. Sie ist Voraussetzung für alle späteren Veranstaltungen in den Bereichen Algebra, Algebraische Geometrie und Algebraische Zahlentheorie. Zur Vorlesung gehört eine 2stündige Übung.

In der Vorlesung werden die Gruppentheorie und die Ringtheorie weiterentwickelt. Eigentliches Thema ist aber die Theorie der algebraischen und transzendenten Körpererweiterungen. Historisch war für Entwicklung der modernen Algebra die Frage von zentraler Bedeutung, warum es für Polynomgleichungen in einer Unbestimmten, wie etwa

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

zwar Lösungsformeln für die Grade $n \leq 4$ gibt, aber nicht für $n \geq 5$.

Später hat sich das Gewicht der Forschung mehr in Richtung allgemeiner Strukturfragen über Körper und Körpererweiterungen $K \subset L$ verschoben. Bezeichnet L die kleinste Körpererweiterung des Koeffizientenkörpers K , über der das Polynom f vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so bilden diejenigen Automorphismen $\varphi : L \rightarrow L$, die den Körper K punktweise festhalten, eine endliche Gruppe G , die sogenannte Galoisgruppe der Gleichung $f = 0$. Es stellt sich heraus, daß die Frage der Auflösbarkeit der Gleichung vollständig durch die Struktur der Gruppe G kontrolliert wird. Die Ursprünge der Theorie gehen auf Evariste Galois (1811 - 1832) zurück, zu dessen Nachruhm auch der frühe und tragische Tod im Duell beigetragen hat. Als Anwendung der Körpertheorie wird auch gezeigt, warum die klassischen Probleme der Winkeldreiteilung, der Verdoppelung des Würfels und der Quadratur des Kreises keine Lösungen mit Zirkel und Lineal zulassen.



Evariste Galois

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - (6 + 2\sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right)$$

(Konstruktion des regulären 17-Ecks mit Zirkel und Lineal nach Gauß)

Literatur:

B.L. van der Waerden, *Algebra I*, Springer

S. Bosch, *Algebra*, Springer Verlag.

S. Lang, *Algebra*. Springer Verlag.

M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser.

Modulräume von G -Bündeln auf Kurven II

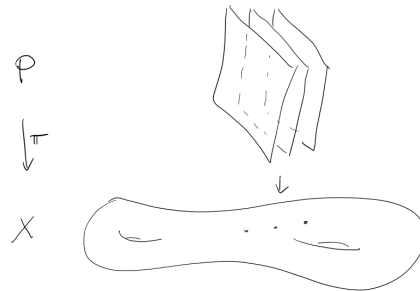
Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Mo 14-16, Do 8-10

Die Vorlesung richtet sich an alle Studentinnen und Studenten mit guten Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie.

Wir betrachten eine glatte projektive Kurve X und eine algebraische Gruppe, etwa $G = \mathrm{GL}_n$. Ein G -Hauptfaserbündel ist, grob gesprochen, eine Abbildung $\pi : P \rightarrow X$ von Schemata, die lokal in X isomorph zu einem Produkt $X \times G$ ist. Dieses Konzept verallgemeinert den Begriff des Vektorbündels über X . Selbst wenn man die topologischen Daten fixiert, kann der Isomorphietyp eines Hauptfaserbündels variieren, und die Menge der Isomorphietypen werden durch sogenannte Modulräume parametrisiert.

Nach einer Einführung in die Theorie der algebraischen Gruppen sollen zunächst die geometrischen Eigenschaften von Hauptfaserbündeln selbst studiert werden, danach der Modulstack der Hauptfaserbündel. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei sind sogenannte Schleifengruppen, und das erste Ziel ist der Beweis des Uniformisierungssatzes. Wenn dann noch Zeit verbleibt, wollen wir geometrische Eigenschaft des Modulstacks besprechen, insbesondere die Zusammenhangskomponenten und die Picardgruppe.



Zu den algebraischen Gruppen gibt es eine Reihe von Lehrbüchern, zur Theorie der Hauptfaserbündel müssen wir auf die über zahlreiche Zeitschriftenartikel verteilte Originalliteratur zurückgreifen. Exemplarisch nenne ich die folgenden:

Literatur:

Borel, A: *Linear Algebraic Groups*, Springer GTM 126, (1991).

Le Potier, J: *Lectures on Vector bundles*, Cambridge Studies in Adv. Math. 54, (1997).

Kumar, S: *Conformal Blocks, Generalized Theta Functions and the Verlinde Formula*, Cambridge UP, New Mathematical Monographs, Series Number 42.

Sorger, Ch: *Lectures on moduli of principal G -bundles over algebraic curves*, erschienen in *Moduli Spaces in Algebraic Geometry*, ICTP Lecture Notes Series, Vol 1 (2000).

Beauville, A; Laszlo, Y, *Conformal Blocks and Generalized Theta Functions*, *Communications in Mathematical Physics* 164 (1994), p. 385 - 419.

Faltings, G, *Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles*, *J. Eur. Math. Soc.* 5 (2003), p. 41- 68.

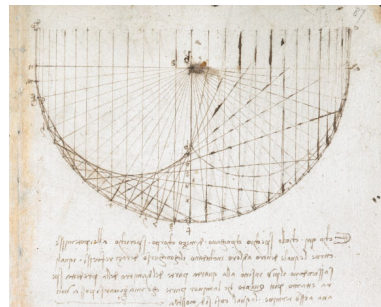
Geometrie und Optik von der Antike bis in die frühe Neuzeit

Dozent: Dr. Oliver Labs

Termin: Mi 10-12

Ein Schwerpunkt der Geschichte sowohl der Optik als auch der höheren Geometrie und insbesondere deren Schnittmenge liegt im 17. Jahrhundert. Personen wie u.a. Johannes Kepler, René Descartes, Pierre de Fermat, Christiaan Huygens, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Johann und Jakob Bernoulli und viele andere sind hier zu nennen.

Zu den zentralen frühen Beispielen dieser Zeit zählen sowohl in der höheren Geometrie als auch in der Optik die sogenannten Kaustiken und damit verwandte Objekte, etwa im Buch des Marquis de l'Hôpital über Differentialrechnung von 1696. Doch was sind die Denkprozesse und historischen Entwicklungen, die schließlich zum Verständnis solch komplexer Objekte und Zusammenhänge führen konnten?



Leonardo da Vinci, ca. 1508. Sonnenstrahlen (in dieser 2D-Darstellung von oben einfallend) reflektiert an einem kreisförmigen Spiegel. Diese werden berührt von einer geschwungenen Kurve, einer sogenannten Kaustik.

Bildquelle: British Library, MSS BL Arundel MS 263

Spannend sind bei diesem Thema von Beginn an die Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik einerseits sowie mit anderen Gebieten, wie Philosophie, Technik und Kunst, andererseits. Die Vorlesung geht, mit einem Fokus auf den ersten beiden, auf all diese Aspekte ein, indem sie zunächst die Grundlagen aus der Antike, der mittelalterlichen Hochzeit in den Ländern des Islams sowie des Spätmittelalters und der Renaissance in Westeuropa erläutert, bevor sie die Entwicklungen der frühen Neuzeit und deren wichtigste Denker und Ideen vorstellt.

Für die Hörerinnen und Hörer ist als Basis neben einer Offenheit für uns heute ungewohnte Denkweisen ein Grundwissen insbesondere in der Mathematikgeschichte, der Geometrie, der Analysis und der Optik zwar hilfreich; die wichtigsten Inhalte werden aber jeweils in der Vorlesung kurz erläutert, bevor sie verwendet werden.

Literatur:

O. Darrigol, *A History of Optics. From Greek Antiquity to the Nineteenth Century*, Oxford Univ. Press (2012).

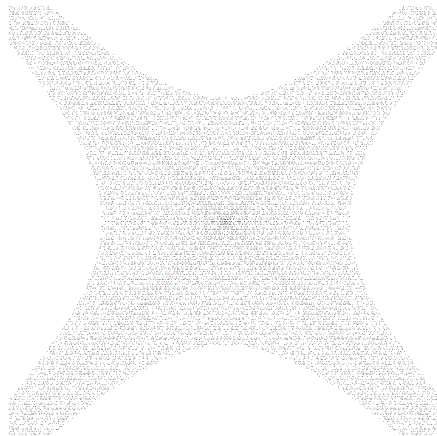
M.A. Smith, *From Light to Sight*, Univ. of Chicago Press (2015).

C.J. Scriba, P. Schreiber, *5000 Jahre Geometrie*, Springer (2001).

Zahlentheorie

Dozent: Prof Dr. Yingkun Li

Termine: Mo, Mi 12-14



Dies ist eine Einführung in klassische zahlentheoretische Fragestellungen:

- Gibt es unendlich viele Primzahlen? Wenn ja, was können wir über ihre Verteilung unter den natürlichen Zahlen sagen?
- Gibt es rechnerisch effiziente Methoden zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl prim ist?
- Welche ganzen Zahlen kann man als Summe von zwei Quadraten schreiben, d. h. für welche $a \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 + y^2 = a$?

Um z. B. die letzte Frage zu beantworten, ist es hilfreich unseren Zahlbereich auf die Gaußschen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

zu erweitern, weil dort $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ gilt.

Im Verlauf der Vorlesung werden wir anhand weiterer klassischer Fragestellungen (z. B. kann man jede ganze Zahl als Summe von drei oder vier Quadraten schreiben, welche ganzzahligen Lösungen hat die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$) weitere Zahlbereiche und Techniken kennenlernen. Gegen Ende der Vorlesung wollen wir auch die Anfänge der algebraischen Zahlentheorie entwickeln.

Die Vorlesung ist insbesondere auch für Lehramtsstudierende hervorragend geeignet und ist z. B. eine natürliche Fortsetzung der GAZ. Wenn Sie im Studiengang BSc sind, genügt es Lineare Algebra 2 erfolgreich absolviert zu haben.

Literatur:

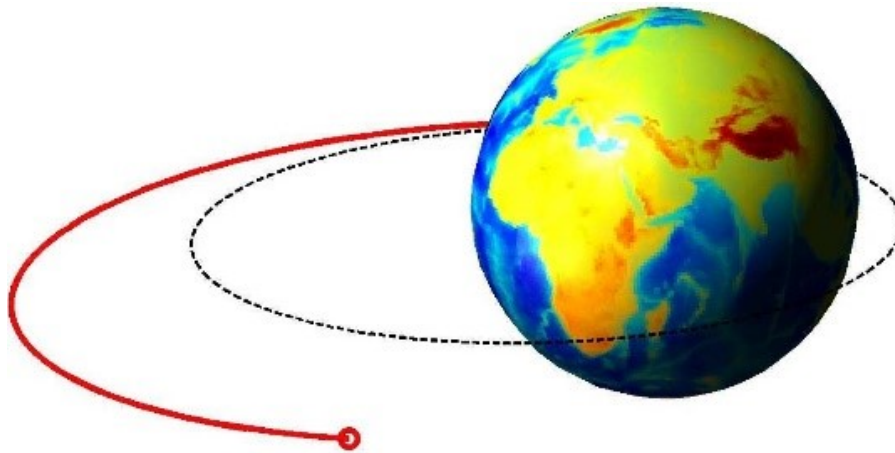
Müller-Stach und Piontkowski, *Elementare und algebraische Zahlentheorie*, Vieweg+Teubner (2007).

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Dozentin: Prof. Dr. Maria Lukacova

Termine: Di, Do 10-12

Die Vorlesung behandelt numerische Algorithmen zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen in Form von Anfangs- und Randwertaufgaben. Im Vordergrund stehen dabei Runge-Kutta-Verfahren und Differenzenverfahren. Wir werden auch die Anwendungen für mehrskalige dynamische Systeme diskutieren, die in der Physik und Biologie auftreten.



Literatur:

Quarteroni, Sacco, Saleri: Numerische Mathematik 2, Springer (2002).

Hanke-Bourgeois: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Vieweg und Teubner (2008).

Hairer, Norset, Wanner: Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems, Springer (1993).

Mathematical Fluid Dynamics

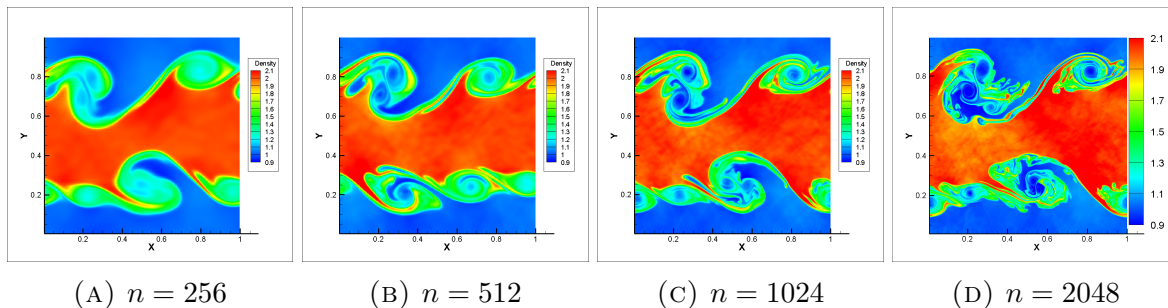
Dozentin: Prof. Dr. Mária Lukáčová

Termine: Mi 12-14

In der Vorlesung werden Bewegungsgleichungen viskoser Flüssigkeiten, Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible und kompressible Flüssigkeiten behandelt. Mathematische Resultate über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen werden präsentiert. Das offene Millenium Problem (1 Million Dollar Problem): Eindeutigkeit der Lösung von dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen wird diskutiert.

Für die numerische Approximation verwenden wir die Finite-Elemente-Methode und besprechen die Babuška-Brezi-Stabilitätsbedingung, Chorin-Projektionsverfahren und das Diskontinuierliche-Galerkin-Verfahren.

Die Vorlesung ist für Masterstudenten in der Mathematik, Physik oder Informatik gut geeignet. Insbesondere kann die Veranstaltung auch parallel zu Numerik partieller Differentialgleichungen ergänzend belegt werden.



Kelvin-Helmholtz-Instabilität: Gibt es eine eindeutige Lösung?

Literatur:

M. Lukáčová, *Lecture Notes Computational Fluid Dynamics*.

M. Feistauer, *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific & Technical (1993).

R. Temam, *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, North-Holland (1977).

V. John, *Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems*, Springer Series in Computational Mathematics (2016).

Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Alan Rendall

Termine: Di 14-16, Fr 12-14

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGL.) werden in der Analysis 2 behandelt. Sie enthalten die Ableitung $u'(x)$ einer Abbildung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn wir diese Ableitung durch partielle Ableitungen einer Abbildung $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ersetzen, z.B. $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$, bekommen wir die partiellen Differentialgleichungen (PDGL), die Gegenstand dieser Vorlesung sind. Die Eigenschaften der PDGL sind sehr divers - es gibt keine so einheitliche Theorie wie bei den DGL. Am Anfang muss man sich auf spezielle Beispiele konzentrieren. Deshalb beschäftigen wir uns in dieser Vorlesung vor allem mit bestimmten konkreten Gleichungen, die von besonderer Bedeutung sind, sowohl an sich als auch durch ihre vielfältigen Anwendungen in den Naturwissenschaften. Die zentralen Beispiele sind die Laplace-Gleichung, die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung. Sie sind alle linear, können aber benutzt werden um nichtlineare Gleichungen zu approximieren. Die Herleitung und Anwendung von Reihen- und Integraldarstellungen der Lösungen dieser Gleichungen stehen in dieser Vorlesung im Mittelpunkt. Gleichzeitig werden Beziehungen hergestellt zu Anwendungen und zu den (meist nichtlinearen) Gleichungen die dafür benötigt werden. Z. B. können die Wasserwellen auf einem See, wie sie im Bild zu sehen sind als Lösungen der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dargestellt werden. Hier ist t die Zeit, x und y sind räumliche Koordinaten und u die Wasserhöhe. Voraussetzungen für diese Vorlesung sind die Vorlesungen Analysis 1-3.



Literatur:

L. C. Evans *Partial Differential Equations*, Springer (2001).

A. D. Rendall *Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript JGU (WS 2016/17).

Kulturgeschichte der Mathematik

Dozent: Prof. Dr. Tilman Sauer

Termine: Mo 16–18, Do 14–16



Die Vorlesung gibt einen Überblick über die Entstehung des mathematischen Denkens und mathematischer Konzepte vom Ursprung in Mesopotamien bis zur Neuzeit. Behandelt werden die Entstehung des Zahlbegriffs und der elementaren arithmetischen Operationen, die Herausbildung geometrischer Konzepte und Vorstellungen und die Entstehung der Algebra. Dabei wird auch die Einbettung der Entwicklung in den allgemeineren kulturhistorischen Kontext und die Wechselwirkungen mit anderen Aspekten wissenschaftlichen Denkens (Physik, Astronomie, Kosmologie, etc) diskutiert.

Literatur:

Struik, Dirk J., *Abriß der Geschichte der Mathematik*, 1.Aufl. engl. 1948), dt. VEB D.V.d.W., viele Auflagen.

Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin, VEB DV.d.W. (1978), Nachdruck: Harri Deutsch, (2008).

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, (1972).

Boyer, Carl, *The History of Mathematics*, New York 1968, 2nd ed. by Uta Merzbach (1991).

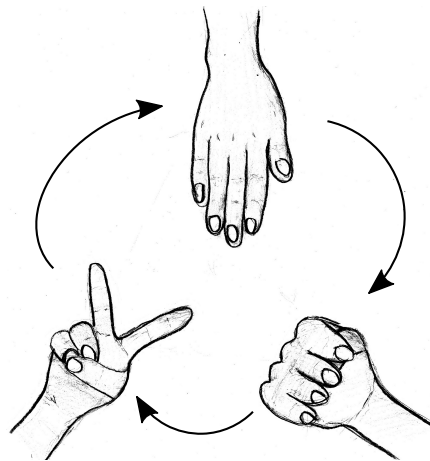
Spieltheorie

Dozent: PD Dr. Matthias Schneider

Mo 10-12, Do 10-12

Gibt es eine Sieges-Formel für "Schnick-Schnack-Schnuck"? In jedem Schulhof auf der ganzen Welt ist seit hunderten von Jahren klar: Stein schleift Schere, Schere schneidet Papier und Papier umwickelt Stein. Mit einer Gewinnstrategie sichert man sich das letzte Stück Kuchen oder muss nie wieder die Spülmaschine ausräumen.

In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischer Spieltheorie: In klassischen Zwei-Personen-Spielen vermeiden oder versuchen wir, die letzte Bohne zu nehmen. Wir bestimmen Nash-Gleichgewichte und dominante Strategien von Matrix-Spielen, (un)gerechte Verteilungen und klären die wichtigste Frage von allen: Was ist mit dem Brunnen?



Literatur:

C. Rieck, *Spieltheorie – eine Einführung*, Rieck, Eschborn (2012).

J. Bewersdorff, *Glück, Logik und Bluff*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden (2010).

M. Holler, G. Illing, *Einführung in die Spieltheorie*, Springer Verlag, Berlin (2005).

Weiterführende Analysis für das Lehramt

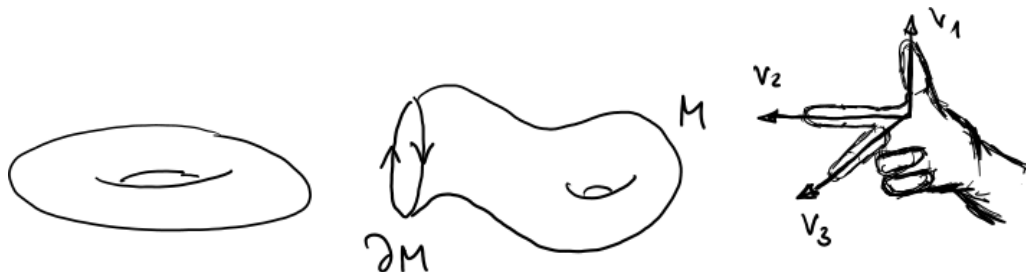
Dozent: PD Dr. Matthias Schneider

Termine: Di, Do 12-14

Wie berechnet man das Volumen eines Donuts oder die Oberfläche eines Huts?

Solche Fragen lassen sich mit mehrdimensionaler Integralrechnung beantworten - wie etwa dem *Satz von Fubini* oder der *Integraltransformationsformel*. Manchmal wird die Antwort ganz elegant mit Hilfe des *Satzes von Stokes* aus dem Ärmel geschüttelt - wenn man den rechten Ärmel benutzt.

Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Lebesguesche Integrationstheorie und die klassische Vektoranalysis. Für die Teilnahme sind solide Kenntnisse der Grundvorlesungen hilfreich.



Literatur:

O. Forster, *Analysis 3*, Vieweg+Teubner Verlag (2012).

K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer (2002).

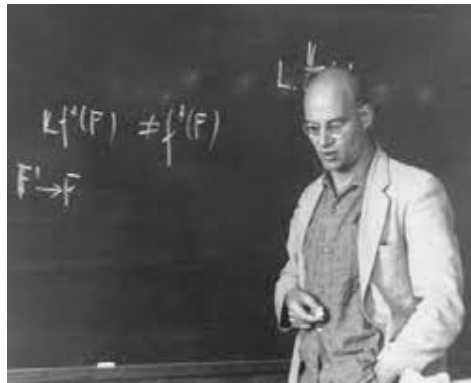
Algebraische Geometrie III

Dozent: Prof. Dr. Georg Tamme

Termine: Mo, Do 10-12

In dieser Vorlesung werden ausgewählte fortgeschrittene Themen aus der algebraischen und arithmetischen Geometrie behandelt. Mögliche Themen: Vertiefung und Anwendungen der kohärenten Kohomologietheorie, derivierte Kategorien, Grothendieck-Dualität, étale Kohomologie.

Die Vorlesung richtet sich an alle, die sich im Bereich der Algebraischen Geometrie spezialisieren wollen oder einfach Interesse an den Themen haben. Die Theorie der Schemata, Grundlagen der homologischen Algebra und die Kohomologie quasikohärenter Garben, wie sie etwa in der Algebraischen Geometrie I und II entwickelt wurden, werden als bekannt vorausgesetzt.



Grothendieck erklärt den Unterschied zwischen f^* und seinem total linksabgeleiteten Funktor Lf^*
(aus Notices of the AMS 63(3), 2016)

Literatur:

R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Springer Lecture Notes 20 (1966).

J. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press (1980).

C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press (1994).

Weitere Literatur wird in der Vorlesung bekannt gegeben.

Evolutionsgleichungen I

Dozent: Jun.-Prof. Dr. Patrick Tolksdorf

Termine: Mo, Do 14-16

Voraussetzungen: Analysis 1 - 3, LAG 1 - 2, Funktionentheorie, Funktionalanalysis

In dieser Vorlesung sollen Differentialgleichungen in einem Banachraum X der Form

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

studiert werden. Hierbei ist $f : (0, \infty) \rightarrow X$ eine gegebene Funktion, $u_0 \in X$ ein Anfangswert und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ ein gegebener linearer Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ mit geeigneten Eigenschaften. Im Fall, dass $X = \mathbb{R}^d$, A eine konstante $(d \times d)$ -Matrix und $f \equiv 0$ ist, wissen wir aus dem Kurs über gewöhnliche Differentialgleichungen, dass die eindeutige Lösung dieser Gleichung durch die Matrix-Exponentialfunktion

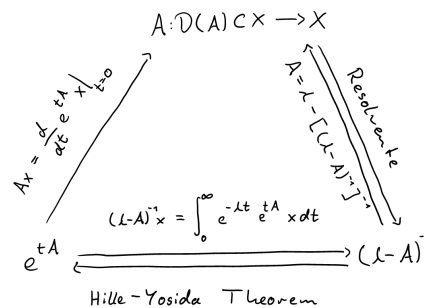
$$u(t) = e^{tA}u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}u_0$$

gegeben ist. In einem unendlich-dimensionalen Banachraum ergibt diese Reihe in der Regel allerdings keinen Sinn, so dass dies die Frage aufwirft, was " e^{tA} " sein soll. Wir werden während des Kurses sogar Exponentialfunktionen begegnen, die ab einem bestimmten Zeitpunkt immer *identisch Null* sind ...

Insbesondere sollen wichtige Anwendungsbeispiele aus der Theorie partieller Differentialgleichungen untersucht werden. Hier ist X in der Regel als Funktionenraum in der örtlichen Variable x gewählt. Zum Beispiel werden wir sehen, dass im Fall $X = BUC(\mathbb{R})$ (dem Raum aller beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen) und $A = d/dx$

$$(e^{t \frac{d}{dx}} u_0)(x) = u_0(x + t),$$

die sogenannte *Linksshift-Halbgruppe* ist.



Literatur:

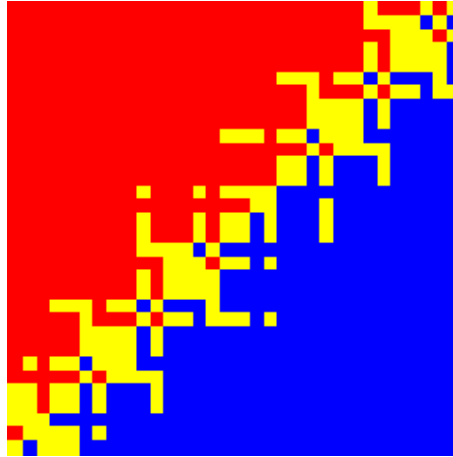
K. J. Engel und R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer-Verlag, New York (2000).

R. Denk, M. Hieber und J. Prüss. $\mathcal{R}$ -Boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type. Mem. Amer. Math. Soc. **166** (2003), no. 788.

Selected Topics in Scientific Computing

Dozent: Dr. Kai Werth

Termine: Fr 10-12



Berechnung der Orientierung *positiv*, *negativ* oder *kollinear* einer $128 \cdot 2^{-53}$ -Umgebung um den Ursprung mit zwei weiteren Punkten auf einer Ursprungsgeraden in `double-precision`.

Früher oder später kommst du als Mathematiker*in an den Punkt, deine theoretischen Erkenntnisse in praktischen Programmiercode zu gießen. Dies kann unerwartet schnell zu einem Abenteuer mit ungewissem Ausgang werden, und jeder Schritt wirft neue Fragen auf:

- Wie beginne ich, und was ist ein guter Programmierstil?
- Ist das ein Rundungsfehler oder ein Programmierfehler?
- Kann mein Algorithmus mir sagen, ob er korrekt arbeitet?
- Wie kann ich mein Programm mit einfachen Mitteln schneller und effizienter machen? Und kann mir der Zufall dabei helfen?

In dieser Vorlesung betrachten wir anhand ausgesuchter praktischer Problemstellungen einige Fallstricke, die uns beim wissenschaftlichen Programmieren begegnen können und wie wir damit umgehen.

Wir arbeiten vornehmlich in `python`, Programmierkenntnisse können hilfreich sein, sind aber keine Voraussetzung.

Literatur:

William H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press (2007).

Thomas H. Cormen et al., *Introduction to Algorithms*. The MIT Press (2001).

Kurt Mehlhorn and Stefan Näher, *LEDA – A platform for combinatorial and geometric computing*, In: CACM (1995).

Algebraische Geometrie 1

Dozent: Prof. Dr. van Straten

Termine: Di, Do 10-12

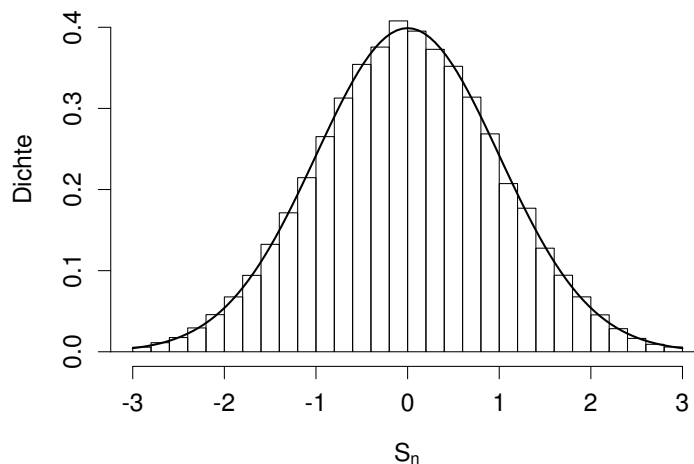
Leider konnte krankheitsbedingt noch keine Beschreibung erstellt werden.

Grundlagen der Stochastik

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Mo, Mi 10-12

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glücksspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in der Vordergrund gerückt.



Normalapproximation der Binomialverteilung

In der Vorlesungen lernen wir die grundlegenden Begriffe in der Stochastik kennen. Zu diesen gehören Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsräume. Danach setzen wir uns mit dem Begriff der bedingten Erwartung und Unabhängigkeit von Ereignissen/Zufallsvariablen auseinander. Wir werden im Anschluss das starke Gesetz der großen Zahlen kennenlernen, bevor wir uns mit Markovketten beschäftigen. Danach widmen wir uns der Normalapproximation der Binomialverteilung, um diese für statistische Tests verwenden zu können.

Literatur:

A. Bovier, *Stochastik für Lehramt-ALMA 2 Teil 1*, Vorlesungsskript,
<https://www.dropbox.com/s/zmby80t7r4ih7l8/skript.pdf?dl=0>.

G. Kersting, A. Wakolbinger, *Elementare Stochastik*, Birkhäuser (2008).

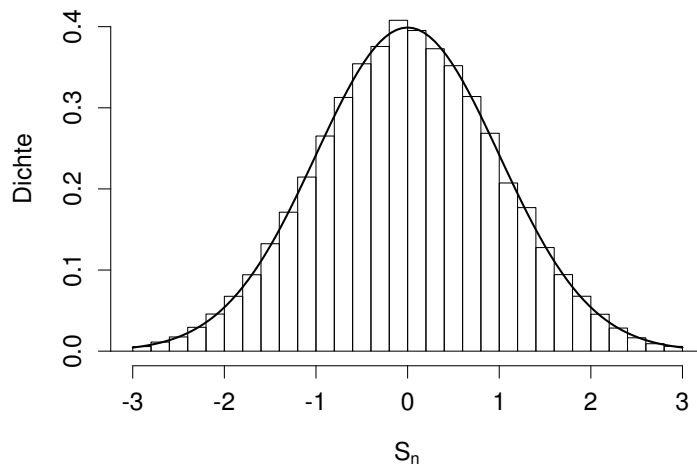
N. Henze, *Stochastik für Einsteiger*, Vieweg+Teubner (2008).

Stochastik Praktikum

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

Termine: Mo 12-14

Die Vorlesung *Grundlagen der Stochastik* wird durch das Stochastik Praktikum komplementiert. Im Praktikum lernen wir mit Hilfe von R Zufallsexperimente zu simulieren und nähern uns so auf praktische Weise den theoretischen Aussagen aus der Vorlesung. Zudem lernen wir die statistische Fragestellungen mit R zu beantworten. Die Veranstaltung beginnt damit die Grundlagen von R zu erklären und es werden keine Vorkenntnisse vorausgesetzt.



Normalapproximation der Binomialverteilung