# *Vorlesungsverzeichnis*

# *Mathematik*

*Mainz*

*Wintersemester 2023/24*

# *Zum Bild:*

Abgebildet ist ein Fundamentalbereich für die Kongruenzgruppe $\Gamma_0(11)$ in der oberen Halbebene. Durch Randidentifikationen entsteht hieraus die Modul-Kurve $X_0(11)$, isomorph zu der elliptische Kurve mit der Gleichung $y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20$.
11 ist die kleinste Zahl $n$ wofür $X_0(n)$ Geschlecht $\neq 0$ hat.

# *Vorwort*

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Wintersemester 2023/24 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Juni 2023

# Übersichtsplan

| Zeit | Montag | Dienstag | Mittwoch | Donnerstag | Freitag |
|---|---|---|---|---|---|
| **08-10** | Algebra I (Tamme) 04-422 | Algebraische Geometrie I (Lehn) 04-432<br><br>Topologie (Hog-Angeloni) **03**-428 | Funktionentheorie (de Jong) 04-422 | Algebraische Geometrie I (Lehn) 04-432<br><br>Topologie (Hog-Angeloni) **03**-428 | Algebra I (Tamme) 04-422 |
| **10-12** | Numerik gewöhnlicher Differential-gleichungen (Ranocha) 05-426<br><br>Differentialgeometrie I (Kraus) 04-512<br><br>Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) 05-514<br><br>Spieltheorie (Schneider) 04-422<br><br>p-adische Kohomologie (van Straten) 04-230 | Numerik partieller Differentialgleichungen (Lukacova) 05-426<br><br>Stochastik II (Klenke) 05-136<br><br>Algebraische Topologie II (Bachmann) 04-522<br><br>Gruppen und ihre Darstellungen (Rahn) 04-224 | Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (Ranocha) 05-426<br><br>Differentialgeometrie I (Kraus) 04-512<br><br>Algebraische Topologie II (Bachmann) 04-522<br><br>Spieltheorie (Schneider) 04-422<br><br>Rationale Approximation (Hanke-Bourgeois) 05-136 | Numerik partieller Differentialgleichungen (Lukacova) 05-426<br><br>Stochastik II (Klenke) 05-136<br><br>Gruppen und ihre Darstellungen (Rahn) 04-224<br><br>p-adische Kohomologie (van Straten) 04-230 | Funktionentheorie (de Jong) 04-422<br><br>Selected Topics in Scientific Computing (Werth) 05-426 |
| | | | | | |
| **12-14** | Zahlentheorie (Blickle) 05-514 | Ergänzungen zur Flächentheorie (Fröhlich) 05-426<br><br>Chaostheorie (Kostrykin) 04-512 | Zahlentheorie (Blickle) 05-514<br><br>Computational Fluid Dynamics (Lukacova) 05-426 | Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) 05-514<br><br>Chaostheorie (Kostrykin) 04-512 | Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen (Schneider) 04-422 |
| **14-16** | Praktikum zur Stochastik (Birkner) 05-514 | Research Software Engineering (Ranocha) 05-426<br><br>Funktionalanalysis II (Kostrykin) 04-522<br><br>D-Moduln (van Straten) 04-432<br><br>Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen (Schneider) 04-422 | | Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514<br><br>Spezielle Funktionen (Klaus) 04-422 ca. alle 2 Wochen, **Termine siehe Jogustine** | Research Software Engineering (Ranocha) 05-426 |
| **16-18** | Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514 | | | Funktionalanalysis II (Kostrykin) 04-522 | |

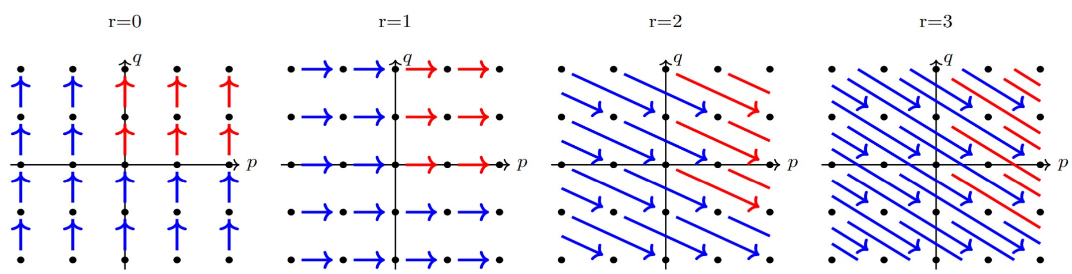
# *Algebraische Topologie 2*

**Dozent: Prof. Dr. Tom Bachmann**

**Termine: Di, Mi 10–12**

Dieser Kurs studiert Aspekte der **klassischen Homotopietheorie topologischer Räume**.
In der ersten Hälfte behandeln wir konzeptionelle Themen: höhere Homotopiegruppen, Faserungen und Kofaserungen, Postnikov-Türme und Eilenberg–Mac Lane-Räume, die Sätze von Whitehead, Blakers–Massey und Freudenthal.
In der zweiten Hälfte behandeln wir eine der grundlegendsten Berechnungstechniken der algebraischen Topologie, die *Spektralsequenzen*. Wir verwenden diese um die Kohomologie von Schleifenräumen zu verstehen. Danach besprechen wir Steenrod-Operationen und die Kohomologie von Eilenberg–Mac Lane-Räumen.

**Voraussetzungen:** Verständnis von singulärer Homologie und Kohomologie.




Einige Seiten einer Spektralsequenz.[1]

**Literatur:**

R. M. Switzer, *Algebraic Topology*, Springer (1975).

H. Miller, *Lectures on Algebraic Topology*, World Scientific (2021).

A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).

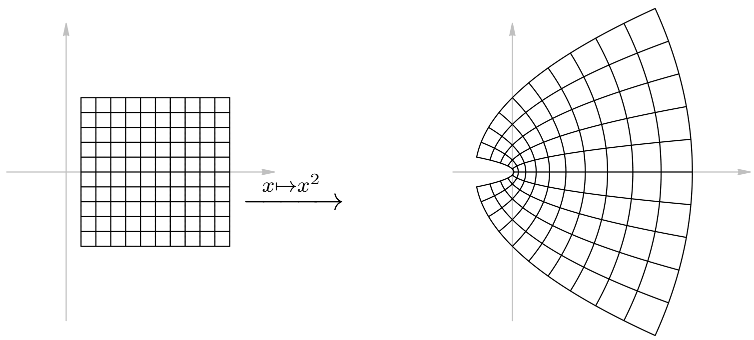
[1] "Four pages of a cohomological spectral sequence." von L.penguu. Lizenziert unter CC-by-SA via `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spectral_Sequence_Visualization.jpg`.

# *Funktionentheorie*

**Dozent: Prof. Dr. Theodorus de Jong**

**Termine: Mi 8-10, Fr 10-12**

Gegenstand der Funktionentheorie ist das Studium der holomorphen (= komplex differenzierbaren) Funktionen einer komplexen Variable $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Im Gegensatz zur reellen Theorie ist eine holomorphe Funktion automatisch beliebig oft komplex differenzierbar und läßt sich überall in eine Potenzreihe entwickeln. Die Funktionentheorie ist wegen der erstaunlichen Eleganz der Resultate und der Beweismethoden sicher eine schönsten elementaren mathematischen Theorien. Wichtige Resultate sind der Residuensatz, die Cauchysche Integralformel, das Maximumprinzip und der Riemannsche Abbildungssatz.




Das Bild illustriert das konforme Verhalten (= Winkeltreue) holomorpher Funktionen.

Zur Vorlesung gibt es eine zweistündige Übung. Voraussetzungen für den Besuch der Veranstaltung sind Grundkenntnisse der Analysis im Umfang der Grundvorlesungen Analysis I und Analysis II. Kenntnisse in Analysis III sind natürlich nützlich, werden aber nicht gebraucht.

**Literatur:**


R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer Verlag (1995).
H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer, (1976).
A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer (1922,..., 2000)
T. Needham, *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenburg (2001).

# *Weiterführende Analysis für das Lehramt*

**Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich**

**Termine: Mo 10-12, Do 12-14**

In dieser Vorlesung erlernen wir die Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie nach Lebesgue und Hausdorff. Das umfasst insbesondere die Bestimmung von Inhalten von Punktmengen in Euklidischen Räumen und damit das Berechnen mehrdimensionaler Integrale sowie eine Einführung in die fraktale Geometrie. Ferner erlernen wir wichtige Begriffe und Methoden der klassischen Vektoranalysis und schließlich die für die moderne Analysis zentralen Integralsätze von Gauß, Green und Stokes. Neben Rechnen soll vor allem viel gebastelt und gezeichnet werden.

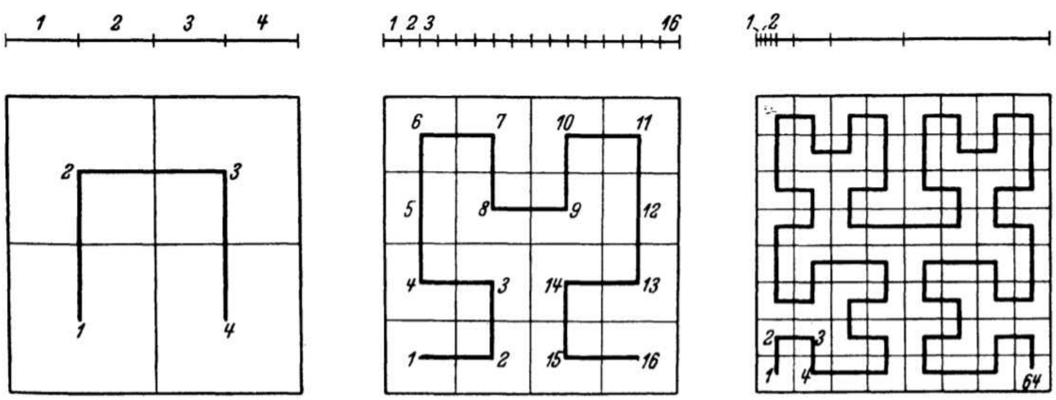



Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

D. Hilbert: *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (1891)

**Literatur:**

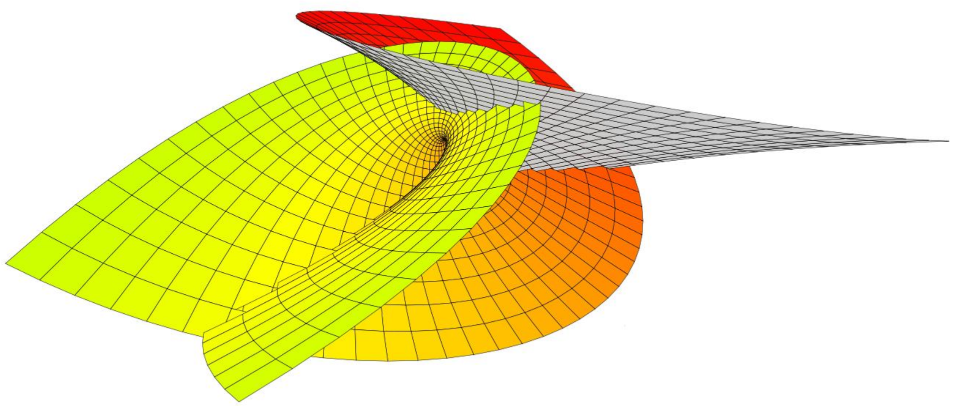

F. Burk, *A Garden of Integrals*, The Mathematical Association of America (2007).
J.J. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons (2003).
F. Sauvigny, *Analysis,* Springer Spektrum (2014).

# *Ergänzungen zur Flächentheorie*

**Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich**

**Termine: Di 12-14**

Diese Vorlesung ergänzt und führt das Seminar *Elementare Differentialgeometrie* bzw. die Vorlesung *Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten* aus dem Sommersemester 2023 fort. Wir behandeln Darstellungsformen, Fundamentalformen und Krümmungen von Flächen in Euklidischen Räumen und studieren spezielle Flächenklassen, wie Rotationsflächen, Wendelflächen, Flächen konstanter Gaußscher bzw. konstanter mittlerer Krümmung, Minimalflächen und Flächen vom Helfrich-Typ. Zur Visualisierung setzen wir verschiedene Computersoftware ein. Die Vorlesung richtet sich auch an Studierende des Lehramtes, weshalb wir besonderen Wert auf die Anwendbarkeit des Stoffes in schulichen Arbeitsgemeinschaften legen.



Minimalfläche von A. Enneper (1864)

**Literatur:**


C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, Walter de Gruyter (2010)
W. Blaschke, K. Leichtweiß, *Elementare Differentialgeometrie*, Springer (1973)
S. Cohn-Vossen, D. Hilbert, *Anschauliche Geometrie*, Springer (1996)
B. Klotzek, *Einführung in die Differentialgeometrie*, 2 Bände, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1981)
K. Strubecker, *Differentialgeometrie*, 3 Bände, R. Oldenbourg (1966)

# *Rationale Approximation*

**Dozent: Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois**

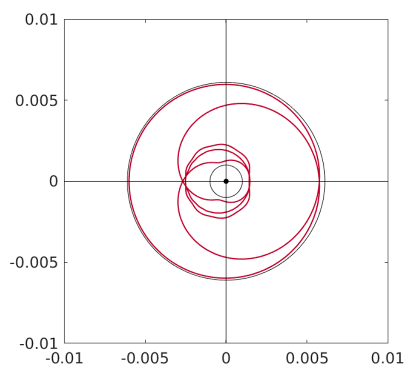
**Vorlesung: Mi 10-12**

Eine typische Fragestellung, die in dieser zweistündigen Vorlesung behandelt wird, ist wie folgt:

> Gegeben ist eine holomorphe (d.h. komplex differenzierbare) Funktion $f$ in der Einheitskreisscheibe; gesucht ist eine rationale Funktion $r$ mit Polstellen außerhalb des Einheitskreises, die die gegebene Funktion auf dem Rand des Einheitskreises möglichst gut approximiert.

Solche Fragestellungen tauchen in den Ingenieurwissenschaften oft auf, etwa bei der Konstruktion stabiler dynamischer Systeme oder in der Signalanalyse.

Die bekanntesten Ansätze zur Konstruktion solcher rationaler Funktionen sind Padé-Approximationen, baryzentrische Interpolationsschemata sowie die Theorie von Adamjan, Arov und Krein. Die Vorlesung gibt einen Einblick in die Ideen sowie die zugrundeliegende Theorien hinter den entsprechenden Methoden und behandelt exemplarische Anwendungen.




Als Appetitmacher zeigt die Abbildung in rot die Fehlerkurve (in der komplexen Ebene) einer konkreten Approximation durch eine rationale Funktion mit Zähler- und Nennergrad $n = 2$. Diese Kurve ist das Bild der Einheitskreislinie unter der Funktion $f - r$. Man sieht, dass der Fehler durchweg betragsmäßig kleiner als 0.006 und größer als 0.001 ist (die Zahlen korrespondieren zu den Radien der beiden eigezeichneten Kreislinien), und die Windungszahl der Fehlerkurve um den Ursprung ist gleich $2n + 1 = 5$. Unter diesen Umständen kann man zeigen, dass der Fehler der bestmöglichen rationalen Approximation vom gleichen Grad $n$ in der Supremumsnorm zwischen den genannten Schranken liegt.

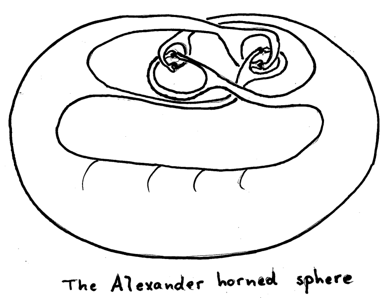
Die Vorlesung richtet sich an Studierende aller mathematischen Studiengänge ab dem vierten Fachsemester. Grundkenntnisse in Funktionentheorie sind hilfreich.

# *Einführung in die Topologie*

**Dozentin: Dr. Cynthia Hog-Angeloni**

**Termine: Di, Do 8-10**

Die Topologie beschäftigt sich mit qualitativen Eigenschaften von Räumen, die unter stetigen Verformungen unverändert bleiben: *Gummi-Mathematik* !
Sie hat sich aus der Geometrie entwickelt, auf lateinisch unter dem Namen: 'geometria situs' (Geometrie der Lage) oder 'analysis situs' (Griechisch-Latein für 'Analysieren des Ortes').
Ein topologischer Raum stellt eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von "Nähe" dar. Damit gewinnt man substantielle Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie Stetigkeit und Grenzwert.
Das Fundament der Topologie ist die *Mengentheoretische Topologie*; ihrem Studium gilt etwa das erste Drittel der Vorlesung. Darauf baut die *Algebraische Topologie* auf, in der topologische Räume (oder auch Lagebeziehungen im Raum wie zum Beispiel in der Knotentheorie) mit Hilfe von algebraischen Strukturen untersucht werden.




Von Hocking, John G. und Young Gail, S. "Topology", Dover Books on Mathematics, 1988.

**Literatur:**

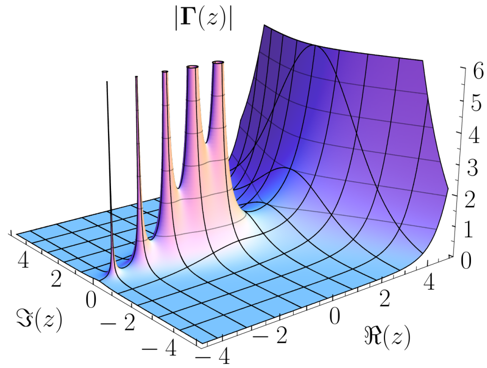
R. Courant, H. Robbins, "Was ist Mathematik?", Springer (2001).
H. Seifert, W. Threlfall, "Lehrbuch der Topologie", Chelsea (2004).
G. Bredon, "Topology and Geometry", Springer (1997).
A. Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge University Press, (2002).
R. Stöcker, H. Zieschang, "Algebraische Topologie", Teubner (2013).

# *Spezielle Funktionen*

**Dozent: apl. Prof. Dr. Stephan Klaus**

**Termine: Do 14-16, ca. alle 2 Wochen im Wintersemester 2023/24**
(die genauen Termine siehe in Jogustine)

Aus dem Grundstudium kennt man die Eulersche Gamma-Funktion und sicher hat jeder schon etwas von der Riemannschen Zeta-Funktion gehört. Dies sind Beispiele für **spezielle Funktionen**, d.h. Funktionen aus der reellen oder komplexen Analysis, die über die klassischen Funktionen hinausgehen (also keine Polynome, rationale Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponential- und Logarithmus-Funktion, trigonometrische Funktionen und ihre hyperbolischen und inversen Verwandte). Sie haben eine besondere Bedeutung in vielen Bereichen der theoretischen und angewandten Mathematik und sind daher sehr interessant.




(Graphik: Betrag der Gamma-Funktion; von Geek3, CC BY-SA 3.0, Wikimedia-ID 5156881)

Wir wollen in der Vorlesung weitere Vertreter dieser speziellen Funktionen behandeln, z.B. verwandte Funktionen zur Gamma-Funktion wie die Eulersche Beta-Funktion, die Zeta-Funktion und ihre Varianten, Hypergeometrische Funktionen, Polylogarithmen, elliptische Funktionen, Bessel- und Hankel-Funktionen ... Dabei sollen auch einige Zusammenhänge zu anderen Gebieten angesprochen werden (z.B. Zahlentheorie, Differentialgleichungen, mathematische Physik). Die Vorlesung wird eine übersichtsartige Einführung in das Gebiet der speziellen Funktionen geben.

**Voraussetzungen:** Grundkenntnisse in Analysis
**Zielgruppe:** Lehrveranstaltung mit Überblickscharakter, ohne Übungen
**Zuordnung Gebiete:** Analysis

**Literatur:**


Richard Beals, Roderick Wong, *Special functions. A graduate text.*, Cambridge University Press (2010).
George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy, *Special functions*, Encyclopedia of mathematics and its applications; volume 71, Cambridge University Press (1999).
Carlo Viola, *An Introduction to Special Functions* , Springer Unitext 102 (2016).
Z. X. Wang; D. R. Guo, *Special functions*, World Scientific (2010).

# *Stochastik II*

**Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke**

**Termine: Di, Do 10-12**

Die Vorlesung ist der erste Teil des Vertiefungsmoduls Stochastik und wendet sich an Studierende der Fachrichtung Mathematik, die bereits die Stochastik I gehört haben.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der quantitativen Betrachtung aller Phänomene, bei denen Zufall eine Rolle spielt. Zu Fermats Zeiten betraf dies hauptsächlich Glücksspiele - heute sind Fragestellungen aus der statistischen Physik, der Biologie, der Finanzmathematik, der Statistik und so weiter in den Vordergrund gerückt.

Wir beschäftigen uns mit fortgeschrittenen Themen der Wahrscheinlichkeitstheorie wie Martingalen, Konvergenz von Maßen, Konstruktion von Produkträumen und Charakteristischen Funktionen.

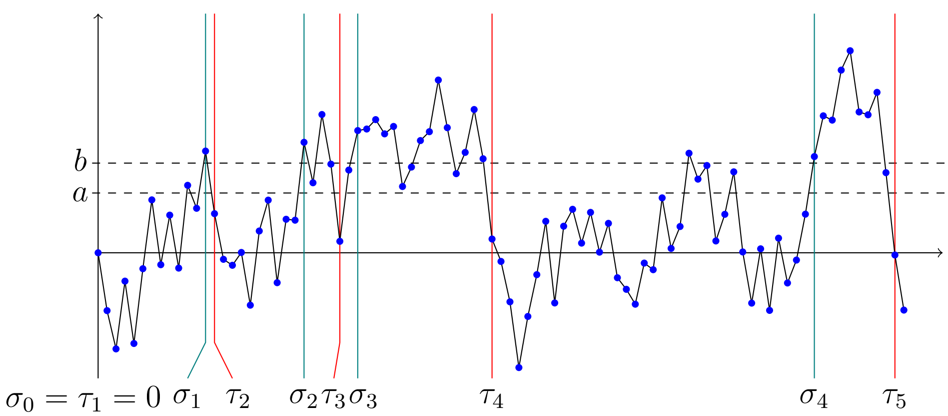



ABBILDUNG 1. Aufkreuzungen $(\tau_i, \sigma_i)$ über $[a, b]$ zum Beweis des Martingalkonvergenzsatzes, aus [Klenke 2020]

**Literatur:**


L. Breiman, *Probability*, Wiley Verlag (1968).

R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5. Auflage, Cambridge University Press (2019).

J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, 8. Auflage, Springer Verlag (2018).

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Band 1 und Band 2, Wiley Verlag (1968 und 1971).

H.-O. Georgii *Stochastik*, 5. Auflage, de Gruyter, 2015).

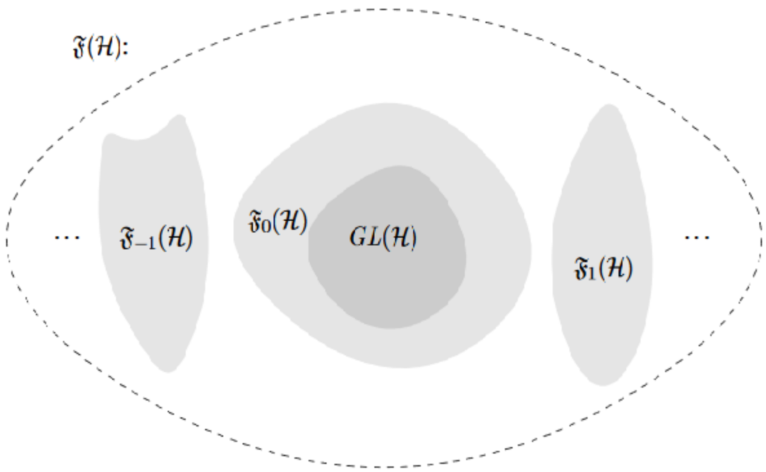
A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Auflage, Springer Verlag 2020.

# *Funktionalanalysis II*

**Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin**

**Termine: Di 14 -16, Do 16-18**

Die Vorlesung ist die Fortsetzung der gleichnamigen Lehrveranstaltung aus dem Sommersemester. Unter anderen Themen werden in diesem Teil Fredholmsche Operatoren in normierten Räumen studiert. Eine der wichtigsten Resultate der Theorie Fredholmscher Operatoren ist die sogenannte Fredholmsche Alternative. Für eine lineare Gleichung $Ax = b$ gibt sie eine erschöpfende Antwort auf die Frage, ob eine Lösung existiert und wenn ja, wie groß die Lösungsmenge ist.




**Literatur:**

D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin (2011).

H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Berlin (2006).

N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Wiley-Interscience (1988).

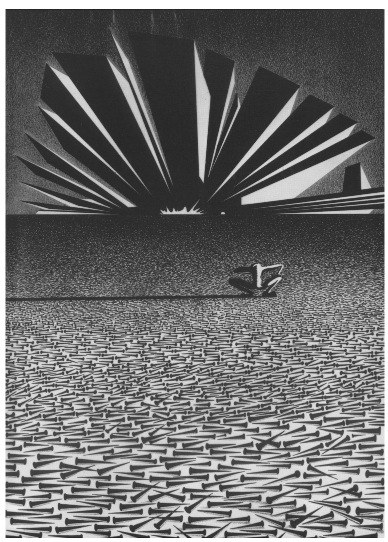
J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart (2000).

# *Chaostheorie*

**Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin**

**Termine: Di, Do 12-14, Raum 04-512**

Dynamische Systeme sind mathematische Modelle zur Beschreibung zeitabhängiger Prozesse. Dabei darf die Zeitentwicklung kontinuerlich (z.B. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen) oder diskret (z.B. iterierte Intervallabbildungen) sein. Wir beschäftigen uns mit diskreten dynamischen Systemen.
Die Theorie der dynamischen Systeme analysiert und charakterisiert das Verhalten von Trajektorien für große Zeiten. Bei manchen Systemen ist dieses Verhalten jedoch so kompliziert, dass eine mehr oder minder genaue Aussage über das Verhalten einer bestimmten Trajektorie nicht möglich ist. In diesem Fall spricht man vom Chaos. Solche Systeme sind zwar deterministisch aber nicht vorhersagbar (z.B. langfristige Wettervorhersage in der Meteorologie).
Teil II der Vorlesung wird im Sommersemester 2024 angeboten. Dort werden wir Grundlagen der Ergodentheorie studieren. Die Ergodentheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung des Verhaltens typischer Trajektorien mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden. In dieser Vorlesung beweisen wir die fundamentalen Sätze der Ergodentheorie (Poincares Wiederkehrsatz, Birkhoffs Ergodensatz, ...) und behandeln eine Vielzahl von Beispielen, auch der zahlentheoretischen Natur.
Voraussetzungen: Für Teil I: Analysis I; Für Teil II: Analysis I und II, lineare Algebra, etwas Maßtheorie ist vom Vorteil, aber keine Voraussetzung



“From Chaos to Order” A.T. Fomenko (1976)

**Literatur:**

R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, CRC Press, verschiedene Auflagen.
A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.

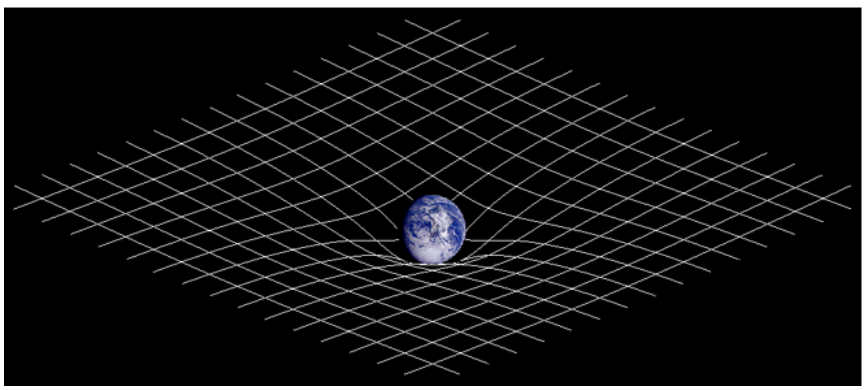
# *Differentialgeometrie I*

**Dozentin: PD Dr. Margarita Kraus**

**Termine: Mo, Mi 10-12**

In der Differentialgeometrie werden geometrische Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten mit riemannschen und semi-riemannschen Metriken behandelt. Eine zentrale Rolle spielen verschiedene Krümmungsbegriffe und lokal kürzeste Kurven, sogenannte geodätische Kurven. Auch Zusammenhänge zwischen Geometrie und Topologie und spezielle Aspekte der Lorentzgeometrie werden untersucht, die eine breite Anwendung in Mathematik und Physik haben.

**Vorkenntnisse:** Analysis 1-3
Elementare Differentialgeometrie ist hilfreich, aber nicht notwendig.



Bildquelle:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Spacetime_curvature.png&oldid=485034886

**Literatur:**

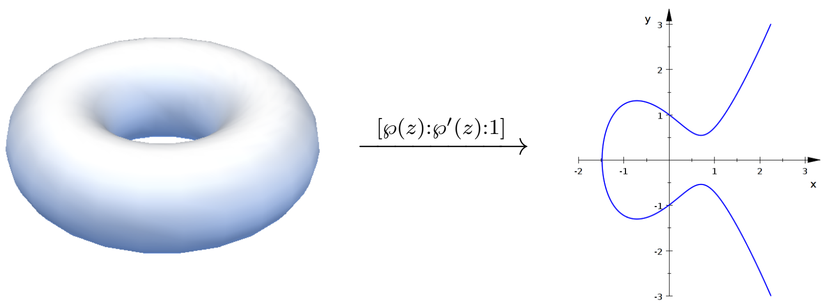

Barret O'Neil, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, (1983).
J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Springer, GTM 218, (2003).
J. M. Lee, Riemannian manifolds, an introduction to curvature, Springer.
Cheeger, Ebin, Comparison theorems in Riemannian Geometry, Ams Chelsea Publishing, (2008).

# *Komplexe Algebraische Geometrie I*

**Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn**

**Termine: Di, Do 8-10**

In der Vorlesungen sollen die Grundlagen der Geometrie der komplexen Mannigfaltigkeiten besprochen werden. Dazu gehören Kählermetriken, die Hodgezerlegung die De-Rham-Kohomologie, und die Theorie der holomorphen Geradenbündel.




Projektive Einbettung eines eindimensionalen komplexen Torus als komplexe ebene kubische Kurve.

Die Vorlesung richtet sich an Masterstudenten und fortgeschrittene Bachelorstudenten der Mathematik. Inhaltliche Voraussetzungen für den Besuch der Veranstaltung sind Grundkenntnisse der Analysis im Umfang der Grundvorlesungen Analysis I - III und der Funktionentheorie, sowie der Algebra. Vorkenntnisse über Riemannsche Flächen sind nützlich, die Vorlesung kann aber auch ohne solche Vorkenntnisse besucht werden.

**Literatur:**


D. Huybrechts, *Complex Geometry*, Springer Universitext (2004).
Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley (1978).
A. Weil, *Variétés kähleriennes*, Hermann Paris (1958).
C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Soc. Math. France (2002). Englische Ausgabe: *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I + II*, Cambridge UP (2010).

# *Computational Fluid Dynamics*

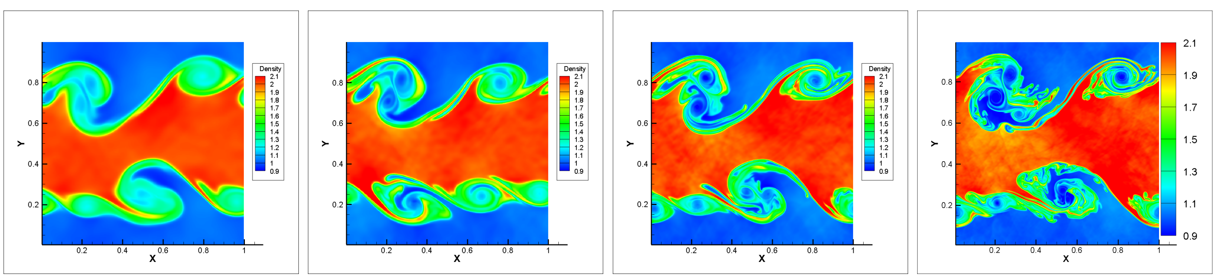
**Dozentin: Prof. Dr. Mária Lukáčová**

**Termine: Mi 12-14**

In der Vorlesung werden wichtige Techniken mathematischer Modellierung und numerischer Simulation in der Strömungsmechanik besprochen. Wir beschäftigen uns mit kontinuumsmechanischer Modellierung kompressibler Fluide, mit der Theorie von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen, sowie auch mit numerischer Simulation reibungsfreier kompressibler Strömungen mit Hilfe von Finite-Volumen-Verfahren und Diskontinuierlichen-Galerkin-Verfahren. Darüber hinaus werden wir die Anwendung des wissenschaftlichen maschinellen Lernens für die Approximation der Strömungsprozesse diskutieren.

Die Vorlesung ist für Masterstudenten in der Mathematik, Physik oder Informatik gut geeignet. Interessierte Bachelorstudenten im späten Bachelorsemester können die Vorlesung auch besuchen. Insbesondere kann die Veranstaltung parallel zu *Numerik partieller Differentialgleichungen* ergänzend belegt werden.

**Voraussetzungen:** Grundlagen der Numerik, Grundvorlesungen der Analysis




(A) $n = 256$ (B) $n = 512$ (C) $n = 1024$ (D) $n = 2048$

*Wirbelstrukturen in der Scherströmung*

**Literatur:**

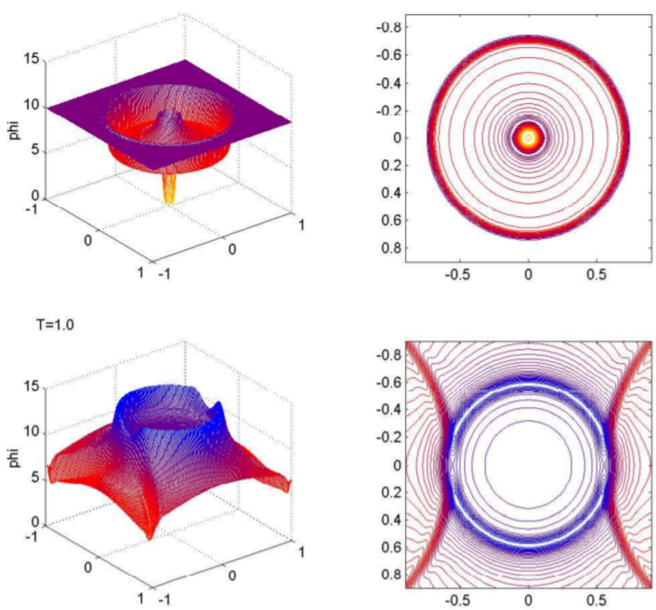
M. Lukáčová: Lecture Notes Computational Fluid Dynamics.
M. Feistauer: Mathematical Methods in Fluid Dynamics, Longman Scientific & Technical (1993).
R.J. Le Veque: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press (2002).

# *Numerik partieller Differentialgleichungen*

**Dozentin: Prof. Dr. Mária Lukáčová**

**Termine: Di, Do 10-12**

Viele natürliche oder technische Prozesse lassen sich mit partiellen Differentialgleichungen beschreiben. Da es oft unmöglich ist, Lösungen solcher Gleichungen analytisch in geschlossener Form zu finden, sind wir auf numerische Verfahren angewiesen.
In dieser Vorlesung werden moderne Verfahren für numerische Lösung partieller Differentialgleichungen vorgestellt. Diese Verfahren basieren auf der Theorie der schwachen Lösungen. Wir werden uns mit elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Gleichungen beschäftigen und lernen die Finite Elemente- und Finite Volumen-Verfahren kennen. Numerische Simulationen praktischer Anwendungen werden theoretische Vorlesungsinhalte ergänzen.
Es handelt sich bei dieser Vorlesung um den ersten Teil des Vertiefungsmoduls "Wissenschaftliches Rechnen" in den mathematischen Masterstudiengängen. Der zweite Teil des Moduls, das "Modellierungspraktikum" wird im kommenden Sommersemester angeboten werden.
*Vorrausetzung:* Grundlagen der Numerik, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen




*Numerische Simulation der Wellenausbreitung.*

**Literatur:**

A. Quarteroni, A. Valli: Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer (1994).
D. Braess: Finite Elemente, Springer (2003).
M. Hanke-Bourgeois: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Teubner (2002).
R.J. Le Veque: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, (2002).

# *Gruppen und ihre Darstellungen*

**Dozent: Dr. Moritz Rahn**

**Termine: Di, Do 10-12**

**Zielgruppe: M.Ed.**

Diese Vorlesung bietet eine Einführung in die Theorie von ***Gruppen*** und auch die Theorie von ***Darstellungen von Gruppen***. Bekanntermaßen werden Gruppen abstrakt durch eine kurze Liste von Axiomen definiert, und die Gruppentheorie studiert die beeindruckende expressive Kraft dieser Axiome. Die Leitidee, dass Gruppen Symmetrien kodieren, ist hierbei sehr hilfreich, und diese Perspektive wird in dem Begriff einer Darstellung einer Gruppe formal fixiert: Eine Darstellung einer Gruppe $G$ auf einem $K$-Vektorraum $V$ ist einfach ein Homomorphismus von Gruppen

$$\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_K(V)\colon g \mapsto \rho(g),$$

wobei $\mathrm{Aut}_K(V)$ die aus der linearen Algebra bekannte Automorphismengruppe von $V$ ist. Per Definition wird hierbei also jedem Gruppenelement $g \in G$ eine Symmetrie von $V$ (also ein Automorphismus $\rho(g)\colon V \to V$) zugeordnet, und der Übergang zu Symmetrien ist verträglich mit der Gruppenstrukur auf $G$.
Das Ziel dieser Vorlesung besteht nun darin, etwas Gruppentheorie zu studieren, die grundlegende Darstellungstheorie (vor allem endlicher Gruppen und vor allem im Fall $K = \mathbb{C}$) zu thematisieren und auch ein wenig das reiche Wechselspiel zwischen der Gruppentheorie und der Darstellungstheorie anzudeuten. Insbesondere wollen wir einsehen, dass wir die Darstellungen endlicher Gruppen über dem Körper der komplexen Zahlen gut klassifizieren können und das hierzu ein interessanter und konkreter Kalkül gehört (Stichwort: Charaktertafel), der in Beispielen bis ins letzte Detail berechnet werden kann.

**Voraussetzungen:** Freude an den algebraischen Grundbegriffen (etwa der elementaren Gruppentheorie) und ein solides Verständnis der linearen Algebra.

| $G$ | $1$ | $\lvert C_2 \rvert$ | $\dots$ | $\lvert C_r \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $c_2$ | $\dots$ | $c_r$ |
| $\chi_1$ | $1$ | $1$ | $\dots$ | $1$ |
| $\chi_2$ | $d_2$ | $\chi_2(c_2)$ | $\dots$ | $\chi_2(c_r)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $\chi_r$ | $d_r$ | $\chi_r(c_2)$ | $\dots$ | $\chi_r(c_r)$ |

Die allgemeine Struktur einer Charaktertafel... mehr Details folgen im Kurs

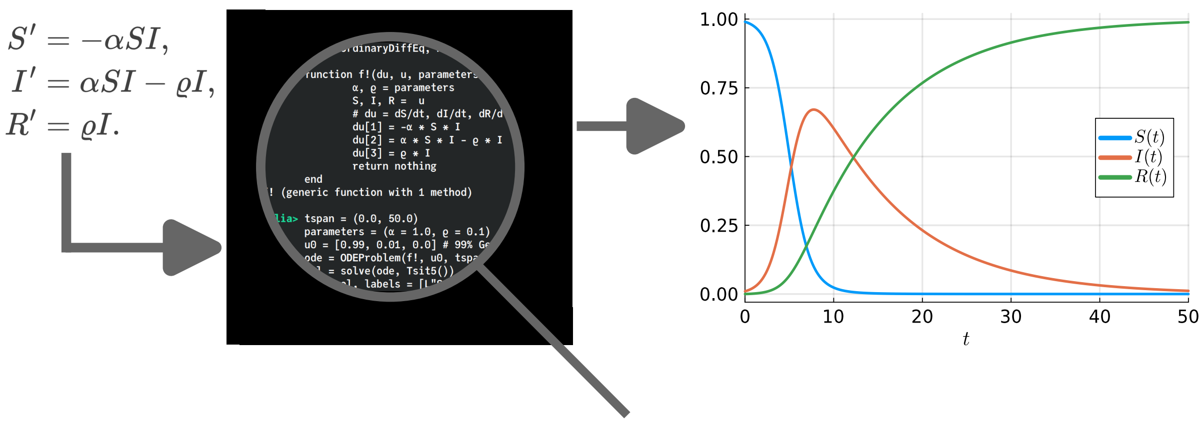
**Literatur:**
Ein richtig gut passendes Buch habe ich nicht finden können. Einen groben Eindruck vermittelt das Skript *Gewöhnliche Darstellungen endlicher Gruppen* von M. Künzer (https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/gdsk.pdf).

# *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*

**Dozent: Prof. Dr. Hendrik Ranocha**

**Termine: Mo, Mi 10-12**

Zeitabhängige Prozesse in den Natur- und Ingenieurswissenschaften werden häufig mit gewöhnlichen Differentialgleichungen modelliert. Diese können in der Regel nicht analytisch gelöst werden. Beispiele hierfür sind die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik aus der Physik, mit denen etwa die Bewegung der Planeten simuliert werden kann, sowie einfache Modelle der Populationsdynamik wie das SIR-Modell, das im Rahmen der COVID-19 Modellierung genutzt werden kann. In dieser Vorlesung werden grundlegende Verfahren zur numerischen Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen thematisiert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Runge-Kutta-Verfahren; lineare Mehrschrittverfahren werden ebenfalls diskutiert.




Die Vorlesung baut auf den *Grundlagen der Numerik* auf und bildet die Grundlage für weiterführende Veranstaltungen zur Numerik, insbesondere die *Numerik partieller Differentialgleichungen* und das *Modellierungspraktikum*.

**Literatur:**


K. Strehmel, R. Weiner und H. Podhaisky. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen*, Vieweg+Teubner (2012).
E. Hairer, S. P. Nørsett und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Non-stiff Problems*, Springer (2008).
E. Hairer und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer (2010).
R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Steady-State and Time-Dependent Problems*, SIAM (2007).
Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Vieweg und Teubner (2008).

# *Research Software Engineering in Julia*

**Dozent: Prof. Dr. Hendrik Ranocha**

**Termine: Di, Fr 14-16**

In vielen Bereichen aktueller Forschung wird Software verwendet. Gerade für das wissenschaftliche Rechnen ist es unerlässlich, auch selbst Software zu schreiben. Allerdings wird der dazu notwendige Hintergrund nur selten in Lehrveranstaltungen der klassischen Mathematik oder Naturwissenschaften aufgegriffen und man geht davon aus, dass alle ja schon etwas Programmieren im Studium lernen und der Rest dann auch nicht so schwer ist — wenn einem denn überhaupt bewusst ist, dass es da noch einen Rest gibt. In dieser Veranstaltung schauen wir uns diesen Rest speziell an und behandeln Themen wie Versionskontrolle mit Git, continuous integration mit GitHub Actions, Erstellung von Dokumentation, und reproduzierbare Forschung anhand der Programmiersprache Julia. Wir gehen auch darauf ein, warum all dies nicht nur für einen späteren akademischen Weg wichtig sein kann sondern auch beispielsweise für das Anfertigen einer Masterarbeit oder eine berufliche Tätigkeit in der freien Wirtschaft.

Diese Veranstaltung richtet sich an fortgeschrittene Studierende im Bachelor sowie Studierende im Master. Wir werden die Konzepte vor allem anhand von klassischen Algorithmen der numerischen Mathematik entwickeln und vorstellen. Insbesondere sollten Sie mit den *Grundlagen der Numerik* vertraut sein und mindestens eine Programmiersprache beherrschen.

**Literatur:**

https://julialang.org

# *Kulturgeschichte der Mathematik*

**Dozent: Prof. Dr. Tilman Sauer**

**Termine: Mo 16-18, Do 14-16**

Die Vorlesung gibt einen Überblick über die Entstehung des mathematischen Denkens und mathematischer Konzepte vom Ursprung in Mesopotamien bis zur Neuzeit. Behandelt werden die Entstehung des Zahlbegriffs und der elementaren arithmetischen Operationen, die Herausbildung geometrischer Konzepte und Vorstellungen und die Entstehung der Algebra. Dabei wird auch die Einbettung der Entwicklung in den allgemeineren kulturhistorischen Kontext und die Wechselwirkungen mit anderen Aspekten wissenschaftlichen Denkens (Physik, Astronomie, Kosmologie, etc) diskutiert.

**Literatur:**


Boyer, Carl, *The History of Mathematics*, New York 1968, 2nd ed. by Uta Merzbach (1991).
Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press (1972).
Stillwell, John. *Mathematics and Its History*, Springer ($2010^3$).
Struik, Dirk J., *Abriß der Geschichte der Mathematik* (1.Aufl. engl. 1948, dt. VEB D.V.d.W., viele Auflagen).
Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin, VEB DV.d.W.1978, Nachdruck: Harri Deutsch (2008).

# *Grundlagen partieller Differenzialgleichungen*

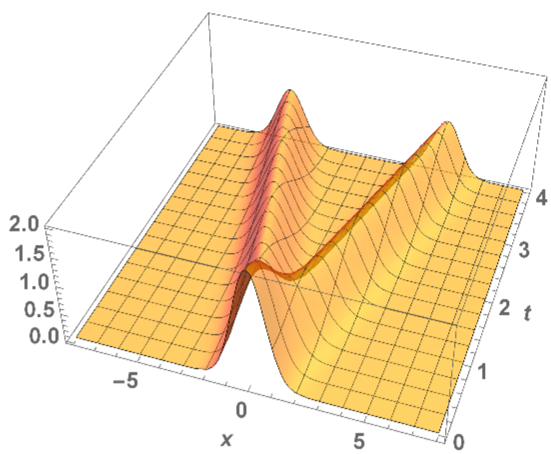
**Dozent: PD Dr. Matthias Schneider**

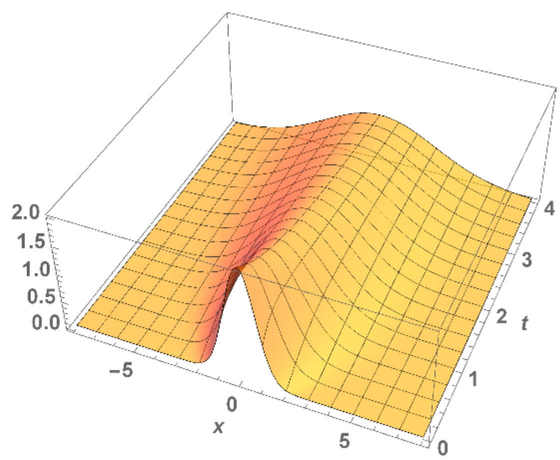
**Termine: Di 14-16, Fr 12-14**

Mindestens eine Millionen US-Dollar bringt die sehr genaue Analyse einer nichtlinearen partiellen Differenzialgleichung, der sogenannten Navier-Stokes Gleichung. Um sich dieses Geld zu verdienen, ist es sinnvoll zunächst lineare Gleichungen zu studieren, wie etwa die eindimensionalen Versionen der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ oder der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$.

Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Schwerpunkt auf linearen Gleichungen. Für die Teilnahme an der Vorlesung sind solide Kenntnisse der Vorlesungen Analysis 1-3 hilfreich.

*Zum Aufwärmen:* Welches der unteren beiden Bilder passt zur Wellen- beziehungsweise Wärmeleitungsgleichung?




**Literatur:**

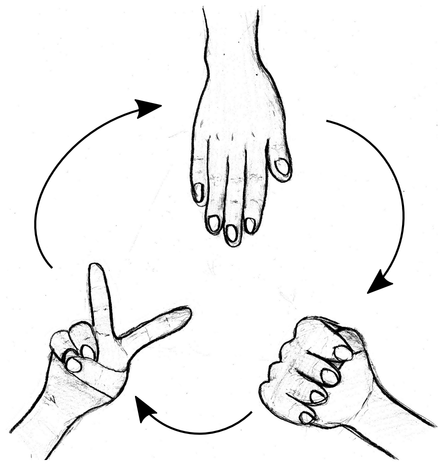
L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence (2010).
J. Jost, *Partielle Differentialgleichungen*, Springer, Berlin (1998).
W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York (1987).
M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I. Basic Theory*, Springer, Berlin. (1996)
R. Courant & D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer, New York (1968).

# *Spieltheorie*

**Dozent: PD Dr. Matthias Schneider**

**Mo, Mi 10-12**

Gibt es eine Sieges-Formel für *Schnick-Schnack-Schnuck*? In jedem Schulhof auf der ganzen Welt ist seit hunderten von Jahren klar: Stein schleift Schere, Schere schneidet Papier und Papier umwickelt Stein. Mit einer Gewinnstrategie sichert man sich das letzte Stück Kuchen oder muss nie wieder die Spülmaschine ausräumen.
In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischer Spieltheorie: In klassischen Zwei-Personen-Spielen vermeiden oder versuchen wir, die letzte Bohne zu nehmen. Wir bestimmen Nash-Gleichgewichte und dominante Strategien von Matrix-Spielen, (un)gerechte Verteilungen und klären die wichtigste Frage von allen: Was ist mit dem Brunnen?



**Literatur:**

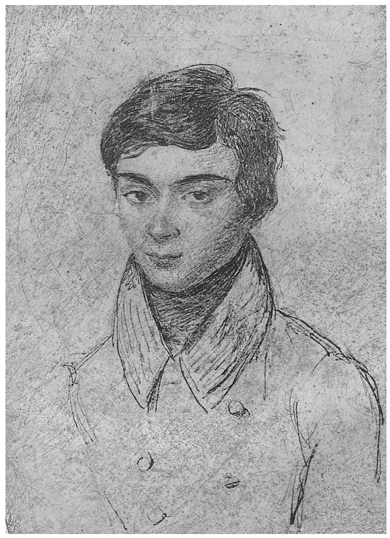
C. Rieck, *Spieltheorie – eine Einführung.*, Rieck, Eschborn (2012).
J. Bewersdorff, *Glück, Logik und Bluff*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden (2010).
M. Holler, G. Illing: *Einführung in die Spieltheorie.* Springer Verlag, Berlin (2005)

# *Algebra*

**Dozent: Prof. Dr. Georg Tamme**

**Termine: Mo, Fr 8-10**

Die Vorlesung Algebra I schließt sich unmittelbar an die Vorlesungen Lineare Algebra I und Lineare Algebra II an. Sie ist Voraussetzung für alle späteren Veranstaltungen in den Bereichen Algebra, Algebraische Geometrie und Algebraische Zahlentheorie. Mit den klassischen Themen, die in dieser Vorlesung behandelt werden, ist sie auch für Lehramtsstudierende sehr gut geeignet. Zur Vorlesung gehört eine zweistündige Übung.



Évariste Galois

In der Vorlesung wird zunächst die Gruppen- und Ringtheorie weiter entwickelt. Das wichtigste Thema der Vorlesung ist die berühmte Galoistheorie, welche einen Zusammenhang zwischen den Lösungen von Polynomgleichungen auf der einen Seite und Eigenschaften von gewissen Symmetriegruppen der Gleichung auf der anderen herstellt. Damit kann man eine Reihe, zum Teil auf die Antike zurückgehende, Probleme lösen: Dreiteilung des Winkels, Quadratur des Kreises, Konstruierbarkeit regelmäßiger $n$-Ecke, (Un)lösbarkeit von Polynomgleichungen durch iteriertes Wurzelziehen.

**Literatur:**


M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser.
S. Bosch, *Algebra*, Springer.
G. Fischer, R. Sacher, *Einführung in die Algebra*, Teubner.
S. Lang, *Algebra*, Springer.
F. Lorenz, *Einführung in die Algebra I*, Spektrum.

# *D-Moduln und Distributionen*

**Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten**

**Termine: Di 14-16**

Eine *algebraische Theorie* über Systeme von linearen partielle Differentialgleichungen interpretiert solche Gleichungssysteme als Moduln über die Weyl-Algebra

$$D = k\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \ldots, \frac{d}{dx_n}\rangle, \qquad \frac{d}{dx_i}x_i - x_i\frac{d}{dx_i} = 1.$$

Diese elegante Theorie hat Anwendungen in der Analysis, algebraischen Geometrie und Kombinatorik. So hat J. Bernstein einen rein algebraischen Beweis für das Theorem von Malgrange-Ehrenpreis gefunden, welcher die Existenz einer Fundamental-Lösung eines partiellen Differential Operators als *Distribution* sicher stellt.
In dieser Ergänzungs-Vorlesung werden wir die grundlegenden Themen der Theorie der D-moduln und Distributionen entwickeln und einige wichtige Anwendungen aufzeigen.

**Themen der Vorlesung:**

- Theorie der Distribution
- Fundamentallösungen
- Weyl-algebra als filtrierter noetherscher Ring
- Systeme von partiellen Differentialgleichungen als Moduln über Weyl-algebra
- Holonome D-moduln
- Existenz der b-Funktion
- Distributionen der Bernstein-Klasse

**Vorkenntnisse:**
Kenntnisse der Grundvorlesungen und der Funktionentheorie werden vorausgesetzt. Algebraische Kenntnisse über die Idealtheorie des Polynomrings, wie etwa aus der Computeralgebra oder Algebra II sind von Vorteil, aber nicht zwingend notwendig. Kenntnisse über Funktionalanalysis, Distributionen und partielle Differentialgleichungen sind von Vorteil, aber auch nicht zwingend notwendig, da der Hauptakzent auf der algebraischen Entwicklung der Theorie liegt.

**Literatur:**

J. Bernstein, *Modules over the ring of differential operators; the study of fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Functional Analysis and its Applications 5, No.2, 1-16 (1971).

J.-E. Björk, *Rings of Differential operators*, North Holland Mathematical Library Vol. 21, North-Holland Publishing Company Amsterdam-Oxford-New York (1979).

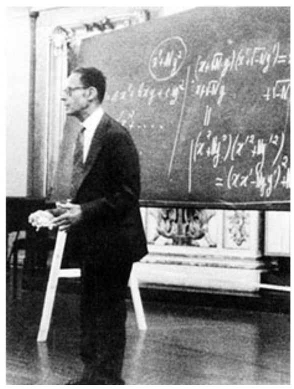
S. C. Coutinho, *A primer of Algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts Vol. **33**, Cambridge Univerity Press, Cambridge (1995).

# *Point-counting and $p$-adic Cohomology*

**Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten**

**Termine: Mo, Do 10-12**

The conjectures by A. Weil, the subsequent theoretical developments and proofs make up a central core of arithmetic algebraic geometry. In this course we will roughly follow the historical path that culminated in Delignes proof of the Riemann hypothesis for the Hasse-Weil congruence Zeta-function. Then we follow the path taken by Dwork and develop his $p$-adic cohomology theory that can be used to 'count points using differential equations', which has led to fast algorithms to count points of varieties over finite fields.



**Prerequisites**: Solid knowledge of algebraic geometry and some knowledge of elementary number theory are of great help.

**Literatur:**

P.Deligne, *La conjecture de Weil : I*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 43, pp. 273-307 (1974).

P.Deligne, *La conjecture de Weil : II*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 52, pp. 137-252 (1980).

B. Dwork, *p-adic cycles*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 37, pp. 27-115 (1969).

K. S. Kedlaya, *p-adic Differential Equations*, Cambridge studies in advanced mathemetics 125, Cambridge (2010).

P. Monsky: *p-adic analysis and Zeta-Functions*, Kinokuniya (1970).

André Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 55, pp. 497-508 (1949).

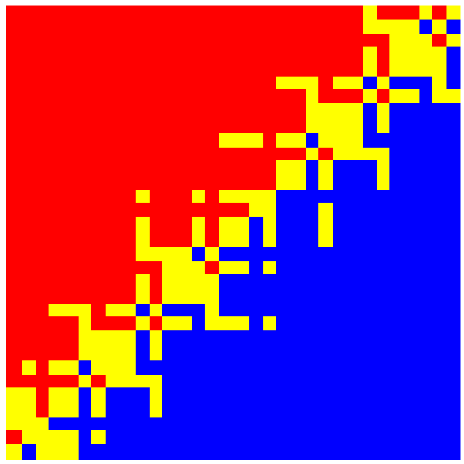
# *Selected Topics in Scientific Computing*

oder

### *Die 4 Schritte zum wissenschaftlichen Programmieren*

**Dozent: Dr. Kai Werth**

**Termine: Fr 10-12**



Programmierfehler oder Rundungsfehler? Hier wurde die Orientierung (*positiv*, *negativ* oder *null*) der Punkte einer $128 \cdot 2^{-53}$-Umgebung um den Ursprung mit der Ursprungsgeraden berechnet.

Es heißt, es seien 36 Schritte notwendig, um ein/e Kung-Fu-Meister/in zu werden. Den Weg zum wissenschaftlichen Programmieren meistern wir in dieser Veranstaltung bereits in vier Schritten:

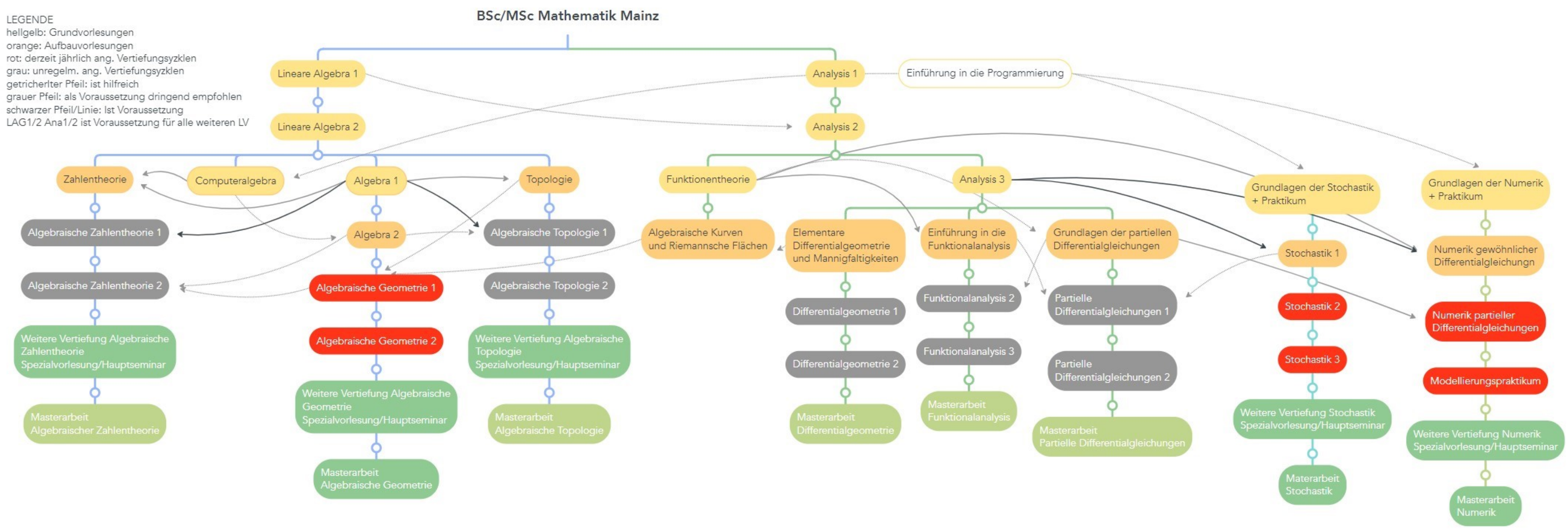
(1) Lerne, den Rundungsfehler vom Programmierfehler zu unterscheiden!
(2) Der Weg von der Formel zum Code.
(3) Strukturiere deinen Code weise!
(4) Parallelisiere statt zu paralysieren!

Anhand kleiner Beispiele in Python erarbeiten wir uns eine Programmgrundlage, die wir nach und nach erweitern und optimieren, bis wir sie am Ende als Simulation auf dem Rechencluster laufen lassen können.

Dabei ist kein schwarzer Gürtel in Programmierung nötig, aber gewisse Kenntnisse erleichtern sicher den Einstieg. Wir arbeiten auf einer Jupyterhub, für die lediglich ein Browser und ein gültiger ZDV-Account benötigt wird. Es muss also nichts installiert werden.

**Literatur:**

C.R. Harris et al., 2020, *Array programming with NumPy*, Nature, 585, pp.357–362.
W.H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2007).
T.H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms,* The MIT Press (2001).
K. Mehlhorn, S. Näher *LEDA – A platform for combinatorial and geometric computing,* in: CACM (1995).


BSc/MSc Mathematik Mainz
LEGENDE
hellgelb: Grundvorlesungen
orange: Aufbauvorlesungen
rot: derzeit jährlich ang. Vertiefungsyzklen
grau: unregelm. ang. Vertiefungsyzklen
getricherlter Pfeil: ist hilfreich
grauer Pfeil: als Voraussetzung dringend empfohlen
schwarzer Pfeil/Linie: Ist Voraussetzung
LAG1/2 Ana1/2 ist Voraussetzung für alle weiteren LV
Lineare Algebra 1
Lineare Algebra 2
Analysis 1
Analysis 2
Einführung in die Programmierung
Zahlentheorie
Computeralgebra
Algebra 1
Topologie
Algebra 2
Algebraische Zahlentheorie 1
Algebraische Zahlentheorie 2
Weitere Vertiefung Algebraische Zahlentheorie Spezialvorlesung/Hauptseminar
Masterarbeit Algebraischer Zahlentheorie
Algebraische Geometrie 1
Algebraische Geometrie 2
Weitere Vertiefung Algebraische Geometrie Spezialvorlesung/Hauptseminar
Masterarbeit Algebraische Geometrie
Algebraische Topologie 1
Algebraische Topologie 2
Weitere Vertiefung Algebraische Topologie Spezialvorlesung/Hauptseminar
Masterarbeit Algebraische Topologie
Funktionentheorie
Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen
Analysis 3
Elementare Differentialgeometrie und Mannigfaltigkeiten
Differentialgeometrie 1
Differentialgeometrie 2
Masterarbeit Differentialgeometrie
Einführung in die Funktionalanalysis
Funktionalanalysis 2
Funktionalanalysis 3
Masterarbeit Funktionalanalysis
Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen
Partielle Differentialgleichungen 1
Partielle Differentialgleichungen 2
Masterarbeit Partielle Differentialgleichungen
Grundlagen der Stochastik + Praktikum
Stochastik 1
Stochastik 2
Stochastik 3
Weitere Vertiefung Stochastik Spezialvorlesung/Hauptseminar
Materarbeit Stochastik
Grundlagen der Numerik + Praktikum
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungn
Numerik partieller Differentialgleichungen
Modellierungspraktikum
Weitere Vertiefung Numerik Spezialvorlesung/Hauptseminar
Masterarbeit Numerik