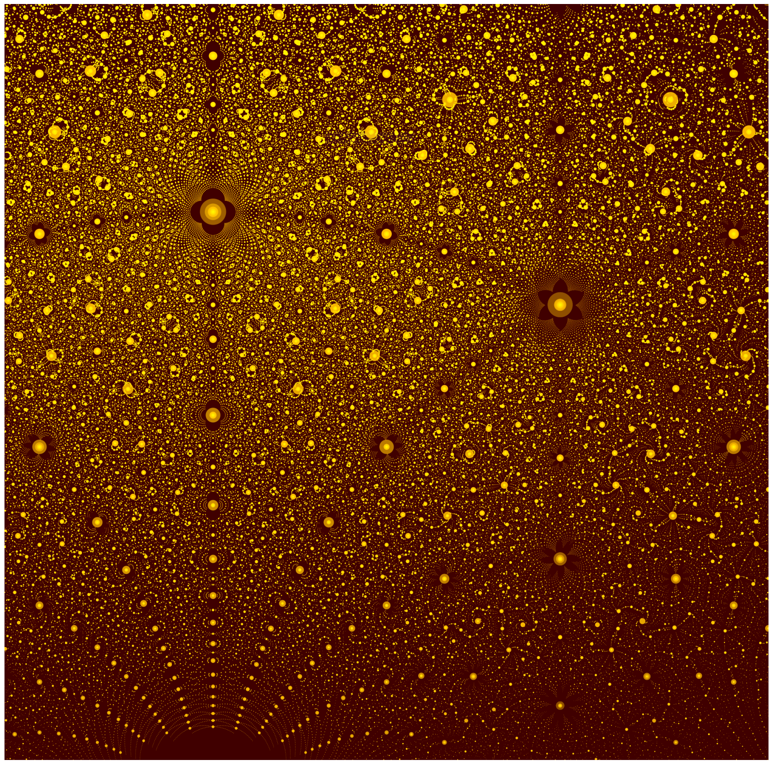
Vorlesungsverzeichnis

Mathematik



Mainz

Wintersemester 2024/25

Zum Bild:

Hier sieht man alle Nullstellen kubischer Polynome der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit Koeffizienten $a \in (1, 15)$ und $b, c, d \in (15, 15)$ in einem Ausschnitt der komplexen Zahlenebene.
Kann man die entstehenden Muster erklären?

Das Bild wurde von Catherin Beyer und Clara Schmidt für das Hauptseminar „Zahl und Bild“ im Sommersemester 2021 bei Prof. Dr. Manuel Blickle erstellt.

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Wintersemester 2024/25 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Juni 2024

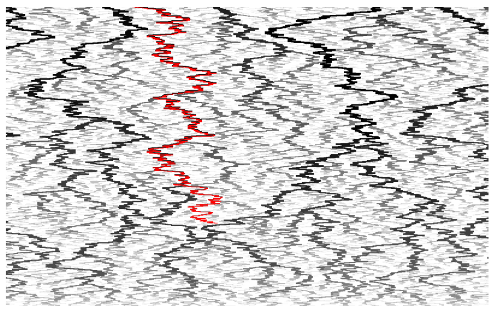
Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10	Algebra I (Lehn) 05-426	Topologie (Hog-Angeloni) 03-428 Algebraic Number Theory I (Tamme) 04-426	Funktionentheorie (Rendall) 04-512	Topologie (Hog-Angeloni) 03-428 Algebraic Number Theory I (Tamme) 04-426	Algebra I (Lehn) 05-426
10-12	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) N**6** Spieltheorie (Schneider) 04-432 Brownian web and net – english (Alberti) 05-522 Topics on F-singularities – english (Blickle) 04-422 Introduction to homotopical algebra (Rahn) 04-230 Numerik gewöhnlicher Differential-gleichungen (Hanke-Bourgeois) 05-136	Numerical Methods for Partial Differential Equations (Ranocha) 04-422 Stochastics II (Birkner) 05-136 p-adic Cohomology II – english (van Straten) 04-426 Algebraic Topology II (Rahn) 04-224 Moderne diskrete Wahrsch.theorie-Techniken u. Beispiele (Hartung) 04-512	Algebraic Topology II (Rahn) 04-224 Spieltheorie (Schneider) 04-432 Foundations of motivic homotopy theory– english (Bachmann) 05-426 Introduction to homotopical algebra (Rahn) 04-230 Numerik gewöhnlicher Differential-gleichungen (Hanke-Bourgeois) 05-136	Numerical Methods for Partial Differential Equations (Ranocha) 04-422 Stochastics II (Birkner) 05-136 Asymptotic Expansions – english (Rendall) 04-516 Foundations of motivic homotopy theory– english (Bachmann) 05-426 Moderne diskrete Wahrsch.theorie-Techniken u. Beispiele (Hartung) 04-512	Funktionentheorie (Rendall) 04-512 Selected Topics in Scientific Computing (Werth) 05-426
12-14	Praktikum zur Stochastik (Klenke) 05-514	Introduction to Partial Differential Equations - english (Schneider) 04-422	Zahlentheorie (de Jong) 03-428 **13:00**-16:30 Uhr: Angewandte Differentialgeometrie (Spindler) 04-224	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) N**2**	Introduction to Partial Differential Equations (Schneider) 04-422
14-16		Zahlentheorie (de Jong) 03-428 Numerics and Analysis of Conservation Laws – english (Lukacova) 05-426 Quadratic forms and lattices – english (Lehn) 04-432		Numerics and Analysis of Conservation Laws – english (Lukacova) 05-426 Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514 Physik auf Mannigfaltigkeiten (Klaus) 04-422 ca. 14-tägig siehe Jogustine	
16-18	Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514 Quadratic forms and lattices – english (Lehn) 04-432				

The Brownian web and net

Dozent: Dr. Frederic Alberti

Termin: Mo 10–12

The Brownian motion is the universal scaling limit of a large class of one-dimensional random walks, and is of fundamental importance to probability theory and its applications. The *Brownian web* is comprised of uncountably many Brownian paths, interpreted as subsets of $1+1$-dimensional continuous spacetime. Put simply, one Brownian path is started in *every single* point in spacetime and each pair of paths coalesces upon contact.



An artist's impression of the Brownian web. Taken from J.M. Swart, *Alberti/the Brownian web and net*

Our first task will be to give a rigorous mathematical description of this object, which will be an interesting challenge in its own right. Subsequently, we will investigate the Brownian web more closely and discover a variety of intriguing properties and behaviours. Last not least, we will consider the convergence of collections of paths of discrete random walks to the Brownian web. The *Brownian net* is a variant of the Brownian web in which paths exhibit branching as well as coalescence. Our considerations with regards to the Brownian net will be mostly heuristic in nature.
This lecture presupposes a good basic knowledge of probability theory, as taught, for instance, in the lecture courses *"Stochastics I & II"*; the course "Stochastics II" may also be taken in parellel. A certain level of comfort with the more abstract notions of basic analysis, such as convergence in general metric spaces and (point-set) topology will be beneficial as well[1]

Literatur:

P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley (1995).

J.M. Swart, *The Brownian web and net*,
`https://staff.utia.cas.cz/swart/lecture_notes/BW23_04_21.pdf`

[1]Much of the subject matter can be motivated by pictures and discrete approximations. On the other hand, this lecture also aims to inspire the motivated student to tackle the more technical 'nuts and bolts' of the subject, in the sense of William Feller: "the level of difficulty cannot be measured objectively; it depends on the type of information one seeks and the details one is prepared to skip. The traveler often has the choice between climbing a peak or using a cable car."

Foundations of motivic homotopy theory

Dozent: Prof. Dr. Tom Bachmann

Termine: Mi, Do 10-12

The idea of motives goes back to A. Grothendieck, in the form of *motivic homotopy theory* to F. Morel and V. Voevodsky. The aim of motivic homotopy theory is to "solve" the following "equation":

$$\frac{\text{(motivic homotopy theory)}}{\text{(algebraic varieties over } k\text{)}} = \frac{\text{(homotopy theory of spaces)}}{\text{(smooth manifolds)}}.$$

That is, it aims to define a homotopy theory of smooth algebraic varieties (or more general schemes), suitable for studying e.g. their cohomological properties. One key property of this homotopy theory is that the affine line $\mathbb{A}^1$ replaces the role of the interval $[0,1]$, that is, becomes contractible.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1 \arrow[r] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

A proof that in motivic homotopy theory, the suspension of $\mathbb{G}_m$ is $\mathbb{P}^1$.

The lectures will develop the foundations of (unstable as well as stable) motivic homotopy theory, with an emphasis on the case where the base is a perfect field. Topics will include the characterization of Nisnevich sheaves using distinguished squares, the homotopy purity theorem, and the stable connectivity theorem.
To follow the course, basic knowledge of scheme theory (approximately up to the notion of smooth morphisms) as well as homotopical category theory is necessary. I will develop everything in the language of ∞-categories, but for listeners only acquainted with model categories the translations should be straightforward.

Literatur:

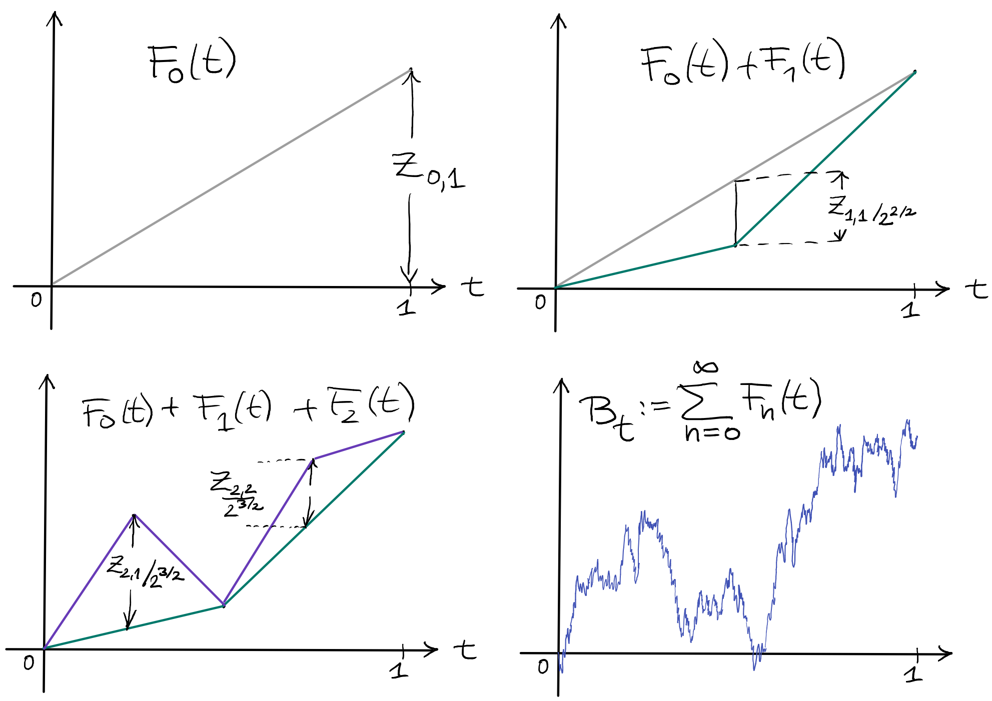
B. Antieau, E. Elmanto, *A primer for unstable motivic homotopy theory.*
M. Hoyois, *The six operations in equivariant motivic homotopy theory.*
V. Voevodsky, O. Röndigs, P. A. Østvær, *Voevodsky's Nordfjordeid lectures: motivic homotopy theory*, Springer (2007).

Stochastik II

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

Termine: Di, Do 10-12

Stochastik als mathematische Disziplin beschäftigt sich mit der Modellierung und Untersuchung von zufälligen Phänomenen. Sie besitzt beeindruckende und erfolgreiche außermathematische Anwendungen (beispielsweise in der Physik, der Biologie, der Ökonomie) und hat zugleich interessante und tiefliegende Beziehungen zu anderen mathematischen Fachgebieten.



Paul Lévys Konstruktion der Brownschen Bewegung

Die Vorlesung Stochastik II baut auf den Begriffen der Stochastik I auf und behandelt fortgeschrittene Themen der Stochastik, insbesondere stochastische Prozesse in stetiger Zeit. Weitere Themenstichpunkte sind Austauschbarkeit, unendliche Teilbarkeit, Poissonprozesse, Markovprozesse und -halbgruppen, Ergodensätze, Brownsche Bewegung, Invarianzprinzip.
Die Vorlesung bildet auch den ersten Teil des Vertiefungszyklus Stochastik.

Literatur:

A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl., Springer, 2020.
O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 3. ed, Springer, 2021.
R. Durrett, *Probability : theory and examples*, 5th ed., Cambridge UP, 2019.
W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Band 1 und 2, Wiley, 1968 und 1971.
L. Breiman, *Probability*, Wiley, 1968.

Topics on F-singularities

Dozent: Prof. Dr. Manuel Blickle

Termine: Mo 10-12

For commutative rings over a field of positive characteristic p, the Frobenius morphism, i.e. the map $F : R \to R \ r \mapsto r^p$ is a ring homomorphism. A fundamental result of Kunz states, that for Noetherian rings R, the Frobenius is a flat morphism if and only if R is a regular Noetherian ring. Conversely, the failure of the flatness of the Frobenius can be used to measure the singularity (=degree of non-regularity) of R. This idea leads to the theory of F-singularities, which – originating in the tight closure theory of Hochster and Huneke – developed during the last 30 years as an active field of research.

In this course I will start from scratch (i.e. only a basic understanding of commutative algebra/algebraic geometry is necessary) covering the basic definitions and interrelations of the most important F-singularity classes

$$\begin{array}{ccc} F\text{-regular} & \Longrightarrow & F\text{-rational} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ F\text{-pure} & \Longrightarrow & F\text{-injective} \end{array}$$

Towards the second half of the course I hope to venture into more recent developments for mixed characteristic singularities.

Prerequisites:
The formal prerequisites are minor, just some Commutative Algebra or Algebraic Geometry is necessary, but the pace of the coures will be fast and regular exercises will be given, so participants will be required to work on their own to keep up.

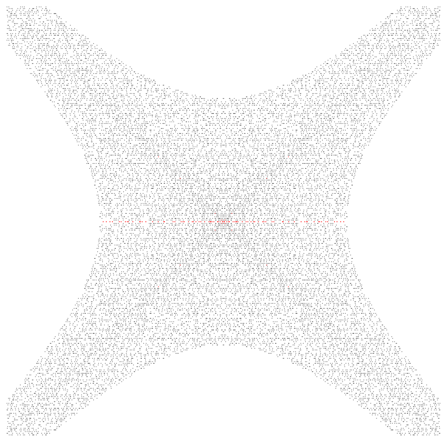
Literature:

- Schwede, Smith: Singularities defined by the Frobenius
  https://github.com/kschwede/FrobeniusSingularitiesBook/blob/main/FrobeniusSingularitiesBook.
- Ma, Polstra: F-singularities: A commutative algebra approach.

Zahlentheorie

Dozent: Prof. Dr. Theodorus de Jong

Termine: Di 14-16, Mi 12-14



Dies ist eine Einführung in klassische zahlentheoretische Fragestellungen:

- Gibt es unendlich viele Primzahlen? Wenn ja, was können wir über ihre Verteilung unter den natürlichen Zahlen sagen?
- Gibt es rechnerisch effiziente Methoden zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl prim ist?
- Welche ganzen Zahlen kann man als Summe von zwei Quadraten schreiben, d. h. für welche $a \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 + y^2 = a$?

Um z. B. die letzte Frage zu beantworten, ist es hilfreich unseren Zahlbereich auf die Gaußschen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

zu erweitern, weil dort $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ gilt.
Im Verlauf der Vorlesung werden wir anhand weiterer klassischer Fragestellungen (z.B. kann man jede ganze Zahl als Summe von drei oder vier Quadraten schreiben, welche ganzzahligen Lösungen hat die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$) weitere Zahlbereiche und Techniken kennenlernen. Gegen Ende der Vorlesung wollen wir auch die Anfänge der algebraischen Zahlentheorie entwickeln.

Die Vorlesung ist insbesondere auch für Lehramtsstudierende hervorragend geeignet und ist z. B. eine natürliche Fortsetzung der GAZ. Wenn Sie im Studiengang BSc sind, genügt es Lineare Algebra 2 erfolgreich absolviert zu haben.

Literatur:

Müller-Stach und Piontkowski, *Elementare und algebraische Zahlentheorie*, Vieweg+Teubner (2007).

Weiterführende Analysis für das Lehramt

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: Mo 10-12, Do 12-14

In dieser Vorlesung erlernen wir die Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie nach Lebesgue und Hausdorff. Das umfasst insbesondere die Bestimmung von Inhalten von Punktmengen in Euklidischen Räumen und damit das Berechnen mehrdimensionaler Integrale sowie eine Einführung in die fraktale Geometrie. Ferner erlernen wir wichtige Begriffe und Methoden der klassischen Vektoranalysis und schließlich die für die moderne Analysis zentralen Integralsätze von Gauß, Green und Stokes. Neben Rechnen soll vor allem viel gebastelt und gezeichnet werden.

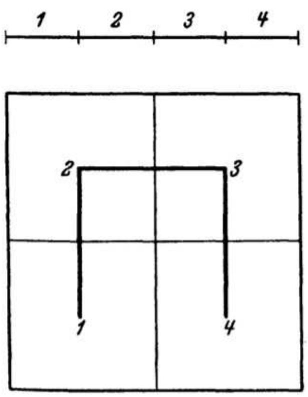


Abb. 1.

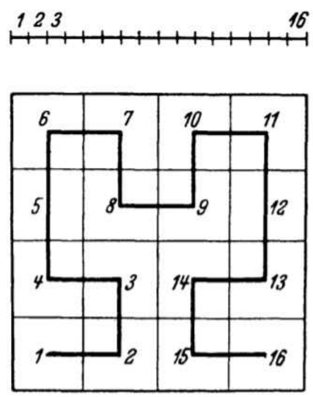


Abb. 2.

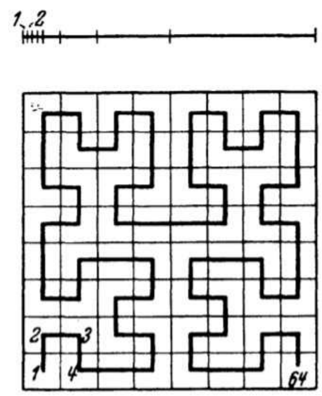


Abb. 3.

D. Hilbert: *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (1891)

Literatur:

F. Burk, *A Garden of Integrals*, The Mathematical Association of America (2007).

J.J. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons (2003).

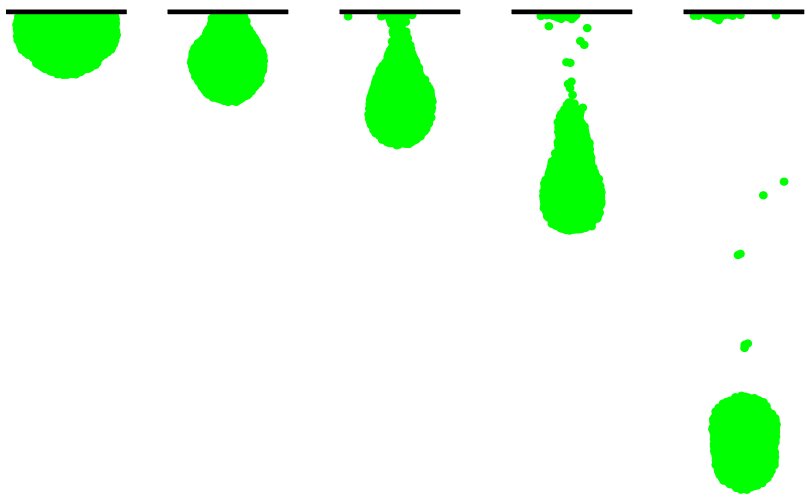
F. Sauvigny, *Analysis,* Springer Spektrum (2014).

Numerik gewöhnlicher Differentialgeichungen

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine: Mo, Mi 10-12

Zeitabhängige Prozesse, die das dynamische Verhalten einer oder mehrerer gekoppelter Größen beschreiben, z.B. Populationsmodelle, Reaktionskinetik, Mehrkörperprobleme, führen bei der Modellierung zumeist auf Anfangs- oder Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen oder differential-algebraische Gleichungen.



Die Vorlesung behandelt numerische Algorithmen zur Lösung solcher Problemstellungen, im Vordergrund stehen dabei Runge-Kutta-Verfahren und Differenzenverfahren. Damit baut sie auf *Grundlagen der Numerik* auf und bildet ihrerseits das Fundament für weiterführende Veranstaltungen zur Numerik, insbesondere *Numerik partieller Differentialgleichungen* und dem *Modellierungspraktikum*.

Literatur:

A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerische Mathematik 2*, Springer, Heidelberg (2002).
M. Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner, Wiesbaden (2009).

Moderne diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie - Techniken und (viele) Beispiele

Dozent: Prof. Dr. Lisa Hartung

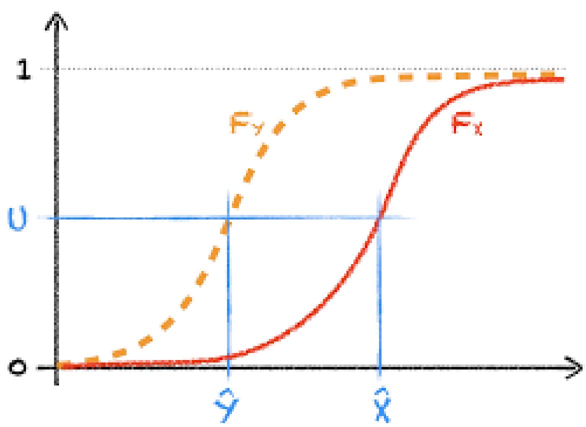
Termine: Di, Do 10-12

In der Vorlesung werden eine Reihe von nützlichen Techniken vorgestellt, welche aber aus der modernen diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie nicht mehr wegzudenken sind. Viele der Konzepte werden im Rahmen der Einführung in die Stochastik höchstens angeschnitten und auch in den darauf aufbauenden Vorlesungen nicht im Detail vorgestellt. Eine unvollständige Liste der Themen, die wir behandeln möchten:

- Erste und zweite Momentenmethode
- Tail Abschätzungen und Konzentrationsungleichungen
- Stochastische Ordnung und Kopplungen
- Verzweigungsprozesse

In dieser Vorlesung möchten wir uns Zeit nehmen diese, an sich elementaren, Techniken im Detail kennenzulernen (und auch zu klären, was hinter den Begriffen steckt). Anhand vieler Beispiele werden wir zum einen ihren Nutzen sehen und zum anderen einen ersten Einblick in diverse Forschungsgebiete innerhalb der Stochastik erhalten. Die Vorlesung orientiert sich an Elementen des unten genannten Buches.

Die Vorlesung ist auf deutsch und eignet sich für B.Sc. und M.Ed. Studierende.



Stochastische Ordnung: Die Verteilungsfunktionen erfüllen $F_X \leq F_Y$. Graphik von Sebastien Roch.

Voraussetzungen: Stochastik 0

Literatur:

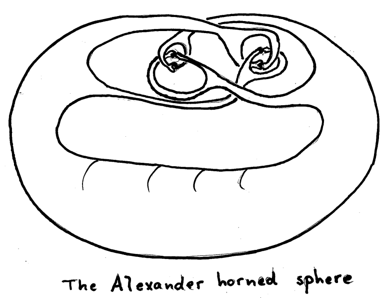
Sebastien Roch, *Modern Discrete Probability: An Essential Toolkit*,
https://people.math.wisc.edu/ roch/mdp/.

Einführung in die Topologie

Dozentin: Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Termine: Di, Do 8-10

Die Topologie beschäftigt sich mit qualitativen Eigenschaften von Räumen, die unter stetigen Verformungen unverändert bleiben: *Gummi-Mathematik* !
Sie hat sich aus der Geometrie entwickelt, auf lateinisch unter dem Namen: 'geometria situs' (Geometrie der Lage) oder 'analysis situs' (Griechisch-Latein für 'Analysieren des Ortes').
Ein topologischer Raum stellt eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von "Nähe" dar. Damit gewinnt man substantielle Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie Stetigkeit und Grenzwert.
Das Fundament der Topologie ist die *Mengentheoretische Topologie*; ihrem Studium gilt etwa das erste Drittel der Vorlesung. Darauf baut die *Algebraische Topologie* auf, in der topologische Räume (sowie Lagebeziehungen im Raum wie zum Beispiel in der Knotentheorie) mit Hilfe von algebraischen Strukturen untersucht werden.



Von Hocking, John G. und Young Gail, S. "Topology", Dover Books on Mathematics, 1988.

Literatur:

R. Courant, H. Robbins, "Was ist Mathematik?", Springer (2001).
H. Seifert, W. Threlfall, "Lehrbuch der Topologie", Chelsea (2004).
G. Bredon, "Topology and Geometry", Springer (1997).
A. Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge University Press, (2002).
R. Stöcker, H. Zieschang, "Algebraische Topologie", Teubner (2013).

Physik auf Mannigfaltigkeiten

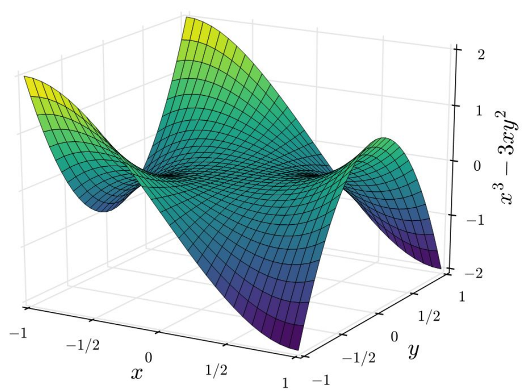
Dozent: Prof. Dr. Stephan Klaus

Termine: Do 14-16, ca. alle 2 Wochen im Wintersemester 2024/25
(die genauen Termine werden in Jogustine noch bekannt gegeben)

In dieser Ergänzungsvorlesung sollen wichtige mathematische Modelle der theoretischen Physik behandelt werden, allerdings nicht (nur) im Euklidischen Raum, sondern auf beliebig gekrümmten Mannigfaltigkeiten. Das Fehlen von kartesischen Koordinaten macht es dabei erforderlich, den geometrischen Kern der betroffenen physikalischen Gesetze zu verstehen. Durch den koordinatenfreien Formalismus aus der Differentialgeometrie können viele Gesetze und Zusammenhänge sehr elegant formuliert werden.

Im Einzelnen sollen folgende Themen und Modelle besprochen werden:

(1) Klassische Mechanik nach Lagrange und Hamilton
(2) Elektrodynamik
(3) Klassische Feldtheorie und Eichtheorie
(4) Hydrodynamik
(5) Elastomechanik
(6) Quantenmechanik



(Graphic by Nicoguaro, wikimedia 48854230, CC BY 4.0)

Zielgruppe/Voraussetzungen: Studentinnen und Studenten der Mathematik mit Grundkenntnissen zu Differentialformen und Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Zuordnung Gebiete: Differentialgeometrie und theoretische Physik

Literatur:

- V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag (1989)
- V.I. Arnold, B.A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences 125, Springer-Verlag (1998)
- D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Dover Books on Physics (2005)

Computerpraktikum Stochastik

Dozent: Prof. Dr. Achim Klenke

Termine: Mo 12-14

Ziel des Praktikums ist es, die Möglichkeiten und Begriffe der Stochastik praktisch zu erfahren, konkrete Probleme mit Hilfe stochastischer Methoden und Computereinsatz zu lösen sowie Perspektiven für den Computereinsatz im Schulunterricht zu bekommen.
Als Software wird das freie Statistik-Software-Paket R verwendet.
Kenntnisse hierin werden im Praktikum vermittelt.

Ein paar der vorgesehenen Programmpunkte sind:

- Einführung in R
- Simulation von Markovketten und Anwendungen davon
- Simulation stochastischer Differentialgleichungen
- Monte Carlo Simulation und Methoden der Fehlerminimierung
- Statistische Auswertung mit R

Im Rahmen des Praktikums schreiben Sie auch in Heimarbeit kleinere Programme, die Sie abgeben. Die Abgaben werden bewertet und als Kriterium zur Scheinvergabe herangezogen. Des Weiteren ist die regelmäßige Teilnahme verpflichtend.

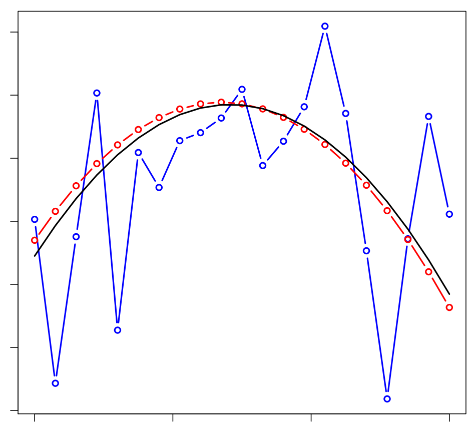


Abbildung 1. Gekoppelte Monte Carlo Schätzung für ein parameterabhängiges Integral

Literatur:

- Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie. 4. Auflage
- Klenke: Elementare Stochastik. Vorlesungsskript
- Ligges: Programmieren mit R. Springer Verlag
- Madras: Lectures on Monte Carlo Methods
- Sawitzki: Einführung in R. StatLab Heidelberg
  `http://www.statlab.uni-heidelberg.de/projects/r/`
- Venables und Ripley: Modern Applied Statistics with S

Fourieranalysis

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Di, Do 16-18

Die Fourieranalysis beschäftigt sich mit der Darstellung von Funktionen durch Fourier-Reihen

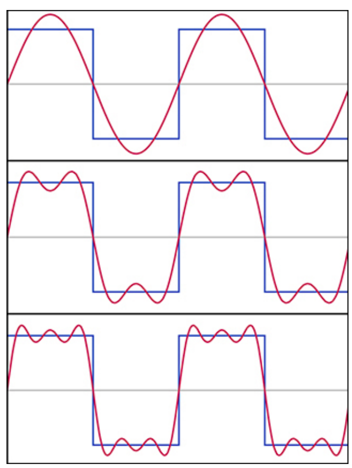
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

oder durch Fourier-Integrale

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{its} g(s) ds.$$

Sie besitzt unzählige Anwendungen in fast allen Gebieten der Mathematik sowie in der Physik und den Ingenieurwissenschaften. In der Vorlesung wird die Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale entwickelt. Auch einige Anwendungen dieser Theorie werden besprochen.

Voraussetzungen: Analysis I und II, lineare Algebra, etwas Lebesgue-Integrationstheorie ist von Vorteil, aber keine Voraussetzung.



Literatur:

E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis, Vol. 1)*, Princeton Univ. Press (2003).

L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer, verschiedene Auflagen.

A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, verschiedene Auflagen.

Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, verschiedene Auflagen.

Quadratische Formen

Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termin: Mo 16-18, Di 14-16

Die Vorlesung bietet eine Einführung in die Theorie der quadratischen Formen über Körpern und über den ganzen Zahlen. Typische Fragen sind etwa: Auf wie viele verschiedene Weisen lässt sich eine natürliche Zahl n als Summe

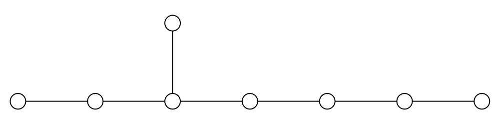
$$n = a_1^2 + \ldots + a_k^2$$

von k Quadraten schreiben? Wie viele positiv definite unimodulare ganzzahlige Gitter gibt es?

Die behandelten Themen umfassen: Symplektische und quadratische Formen, symplektische und orthogonale Gruppen, Cliffordalgebren, Spingruppen, Spindarstellungen, Arf- und Dickson-Invarianten, Witt-Ringe, Quadratische Formen über p-adischen Körpern, der Satz von Hasse-Minkowski, Klassifikation der indefiniten unimodularen Gitter, Thetafunktionen zu Gittern und ihre modularen Eigenschaften, Leechgitter und Klassifikation der positiv definiten geraden unimodularen Gitter vom Rang ≤ 24 und die Siegelsche Maßformel.

Vorausgesetzt werden gute Kenntnisse in Algebra, mindestens im Umfang der Vorlesung Algebra I. Grundkenntnisse in Zahlentheorie und Funktionentheorie sind sicher nützlich. Zur Vorlesung soll ein Skript entstehen.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & \\ & & & & -1 & & & 2 \end{pmatrix}$$



$$\Theta = 1 + 240(q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + \ldots)$$

(Schnittmatrix des E_8-Gitters, des einzigen unimodularen positiv definiten geraden Gitters vom Rang 8, der Dynkingraph des zugehörigen Wurzelssystems, und die Thetafunktion des Gitters.)

Literatur:

J. Milnor, D. Husemoller: Symmetric Bilinear Forms. Erg. Mathematik 73. Springer.
M. Kneser: Quadratische Formen. Springer.
J.-P. Serre: A Course in Arithmetic. Springer GTM 7.
W. Scharlau: Quadratic and Hermitian forms. Grundl. math. Wiss 270. Springer.
T.Y. Lam: Introduction To Quadratic Forms Over Fields. (Grad. Stud. Math) AMS.

Algebra I

Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Mo, Fr 8-10

Die Vorlesung Algebra I schließt sich unmittelbar an die Vorlesungen Lineare Algebra I und II an. Sie ist Voraussetzung für alle späteren Veranstaltungen in den Bereichen Algebra, Algebraische Geometrie und Algebraische Zahlentheorie. Zur Vorlesung gehört eine 2-stündige Übung.
In der Vorlesung werden die Gruppentheorie und die Ringtheorie weiterentwickelt. Eigentliches Thema ist aber die Theorie der algebraischen und transzendenten Körpererweiterungen. Historisch war für Entwicklung der modernen Algebra die Frage von zentraler Bedeutung, warum es für Polynomgleichungen in einer Unbestimmten, wie etwa

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

zwar Lösungsformeln für die Grade $n \leq 4$ gibt, aber nicht für $n \geq 5$. Später hat sich das Gewicht der Forschung mehr in Richtung allgemeiner Strukturfragen über Körper und Körpererweiterungen $K \subset L$ verschoben. Bezeichnet L die kleinste Körpererweiterung des Koeffizientenkörpers K, über der das Polynom f vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so bilden diejenigen Automorphismen $\varphi : L \to L$, die den Körper K punktweise festhalten, eine endliche Gruppe G, die sogenannte Galoisgruppe der Gleichung $f = 0$. Es stellt sich heraus, daß die Frage der Auflösbarkeit der Gleichung vollständig durch die Struktur der Gruppe G kontrolliert wird. Die Ursprünge der Theorie gehen auf Evariste Galois (1811 - 1832) zurück, zu dessen Nachruhm auch der frühe und tragische Tod im Duell beigetragen hat. Als Anwendung der Körpertheorie wird auch gezeigt, warum die klassischen Probleme der Winkeldreiteilung, der Verdoppelung des Würfels und der Quadratur des Kreises keine Lösungen mit Zirkel und Lineal zulassen.

Evariste Galois

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\Big(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \sqrt{68+12\sqrt{17}-(6+2\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\Big)$$

(Konstruktion des regulären 17-Ecks mit Zirkel und Lineal nach Gauß)

Literatur:

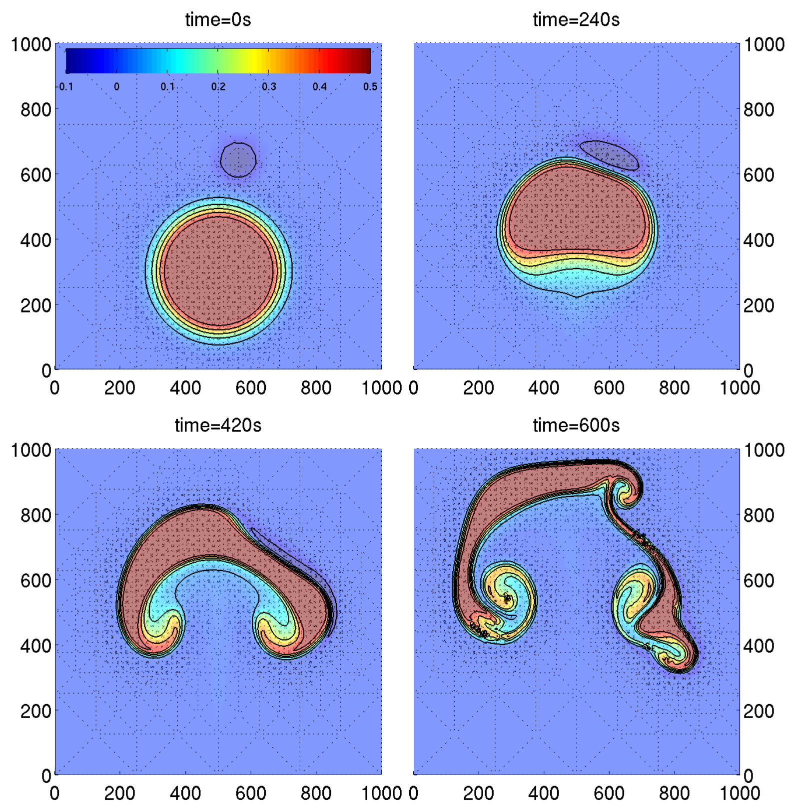
B.L. van der Waerden: Algebra I. Springer Verlag.
S. Bosch: Algebra. Springer Verlag.
S. Lang: Algebra. Springer Verlag.
M. Artin: Algebra. Birkhäuser.

Numerics and Analysis of Conservation Laws

Dozentin: Prof. Dr. Mária Lukáčová

Termine: Di, Do 14-16

Conservation laws are fundamental for many physical, biological and economic processes. The focus of this lecture is on mathematical modelling techniques, analytical approaches and numerical simulation techniques. We start with continuum mechanical modeling and derive the first principles, i.e. the conservation of mass, momentum and energy and later extend them by the entropy principle. We will discuss various concepts of solutions, such as strong, weak and very weak (dissipative weak) solutions. Connections to the theory of turbulence, the Third Millenium Prize Problem of mathematics and the Hypothesis of John Nash (Beautiful Mind) will be discussed.
In the second part of the lecture we will point out multiscale modelling approaches, such as the kinetic theory, particle-based modeling and hererogeneous multiscale methods. We also illustrate various applications in physics, biology or social hydrodynamics.
It is planed that the lecture will be given in English, however if there is an interest it can be taught in German. This course can be attended by Bachelor students in their higher semesters, Master students of Mathematics or Computational Science, Physics or Informatics. PhD students are also welcome.



Literature:

1 M. Lukáčová: *Lecture Notes Computational Fluid Dynamics.*
2 E. Feireisl, M. Lukáčová, H. Mizerová and B. She: *Numerical Analysis of Compressible Flows*, Springer, 2021.
3 R. J. Le Veque: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
4 J. Nash:*Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.*, Amer. J. Math. 80(4):931-954, 1958.

Algebraic Topology II

Dozent: Dr. Moritz Rahn

Termine: Di, Do 10-12

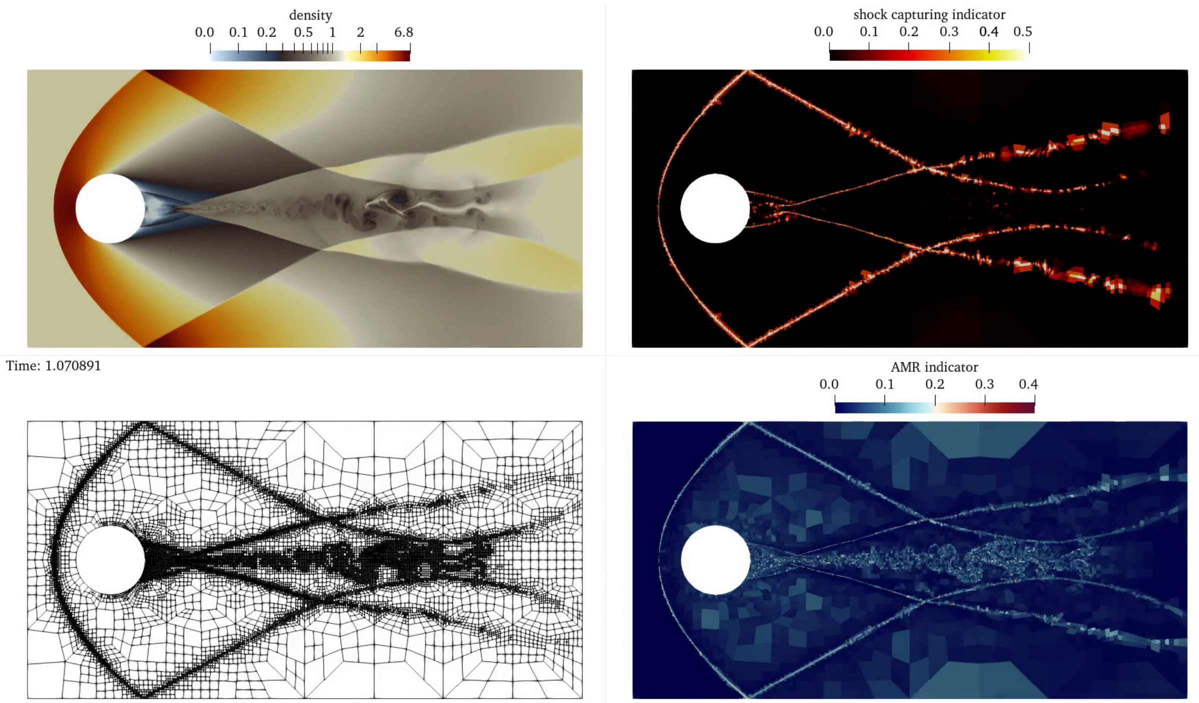
eine Beschreibung wird nachgereicht

Numerical Methods for Partial Differential Equations

Instructor: Prof. Dr. Hendrik Ranocha

Dates: Tuesday and Thursday, 10–12

Many problems in science and engineering can be modeled by partial differential equations (PDEs), e.g., stability of structures like bridges by elliptic PDEs, biological processes like immune response and pattern formation by parabolic PDEs, and the airflow around airplanes by hyperbolic PDEs. In this course, we will discuss basic methods for the numerical solution of PDEs, including finite difference methods, finite element methods, and finite volume methods.



Supersonic flow around a circular cylinder simulated using a convex combination of high-order discontinuous Galerkin and low-order finite volume methods.

This lecture assumes familiarity with the *Grundlagen der Numerik* and basic knowledge of *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. This course is a prerequisite for further courses in numerical mathematics, in particular the *Modellierungspraktikum*.

Since this is an advanced course, it will be held in English. It is part of the *Vertiefungsmodul Wissenschaftliches Rechnen* (scientific computing).

Literatur:

Braess, *Finite Elements*, Cambridge University Press (2010).

Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Vieweg und Teubner (2008).

Hesthaven, *Numerical Methods for Conservation Laws*, SIAM (2018).

Kopriva, *Implementing Spectral Methods for PDEs*, Springer (2009).

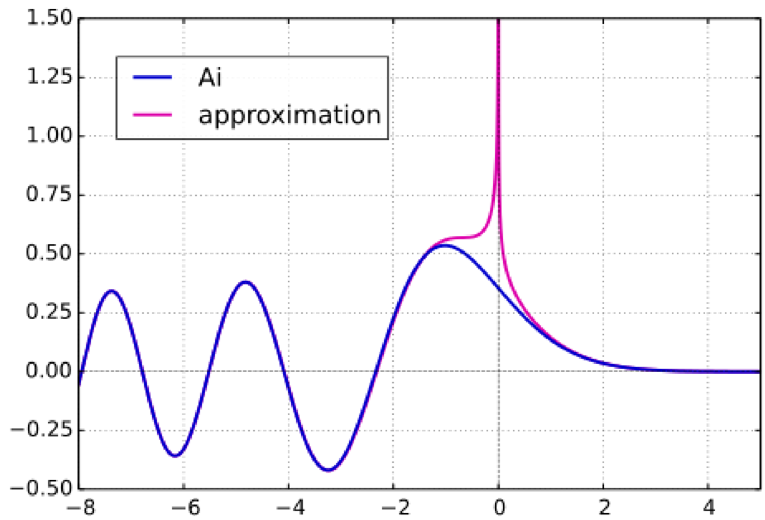
R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Steady-State and Time-Dependent Problems*, SIAM (2007).

Asymptotic expansions

Lecturer: Prof. Dr. Alan Rendall

Time: Thursday, 10-12

This course is concerned with asymptotic expansions. In an asymptotic expansion a function of interest is written as the sum of an explicit expression and a remainder term, for example the Taylor expansion $f(x) = f(0) + f'(0)x + O(x^2)$, for short $f(x) \sim f(0) + f'(0)x$. We can also consider asymptotic series such as $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. This statement claims nothing about the convergence of the series on the right hand side. It only means that the difference between a partial sum of the series and the left hand side is smaller than all terms in the partial sum. Surprisingly it can happen that asymptotic expansions are more useful in applications than convergent series. We will discuss applications of these ideas to ordinary differential equations whose solutions have complicated behaviour near a point. A famous example is the harmless-looking equation $\frac{d^2y}{dx^2} = xy$, the Airy equation. The prerequisites for this course are the basic courses (Grundvorlesungen). A knowledge of complex analysis (Funktionentheorie) could be helpful but is not necessary in order to follow the course. The course is aimed at MSc students but could also be followed by BSc or MEd students. The main source for the course is the book of Wasow quoted below.



A solution of the Airy equation (blue)
and an asymptotic approximation to it (magenta)

Literatur:

W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover (1987).

Funktionentheorie

Dozent: Prof. Dr. Alan Rendall

Termine: Mi 8-10, Fr 10-12

In den Vorlesungen Analysis I und Analysis II lernen wir Eigenschaften von Funktionen kennen, die von reellen Variablen abhängen. In der Funktionentheorie geht es um Funktionen von komplexen Variablen. Was ist dabei neu? Warum kann ich nicht einfach eine komplexe Variable als zwei reelle betrachten? In dieser Vorlesung betrachten wir Abbildungen von (Teilmengen von) $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ die als Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ betrachtet nicht nur beliebig oft differenzierbar sind, sondern eine zusätzliche Eigenschaft haben. Sie sind *holomorph*. Bekannte Funktionen wie Polynome oder die Exponentialfunktion haben diese Eigenschaft. In dieser Vorlesung geht es um die zahlreichen bemerkenswerten Eigenschaften von holomorphen Funktionen. Voraussetzung für diese Vorlesung sind die Vorlesungen Analysis I und Analysis II.

Augustin-Louis Cauchy.
Einer der Gründer der Funktionentheorie.

Literatur:

Conway, J. B. Functions of one complex variable. 1978 Springer, Berlin.
Remmert, R. und Schumacher, G. 1991 Funktionentheorie 2. Springer, Berlin.
Salamon, D. A. 2012 Funktionentheorie. Birkhäuser, Basel.

Kulturgeschichte der Mathematik

Dozent: Prof. Dr. Tilman Sauer

Termine: Mo 16-18, Do 14-16

Die Vorlesung gibt einen Überblick über die Entstehung des mathematischen Denkens und mathematischer Konzepte vom Ursprung in Mesopotamien bis zur Neuzeit. Behandelt werden die Entstehung des Zahlbegriffs und der elementaren arithmetischen Operationen, die Herausbildung geometrischer Konzepte und Vorstellungen und die Entstehung der Algebra. Dabei wird auch die Einbettung der Entwicklung in den allgemeineren kulturhistorischen Kontext und die Wechselwirkungen mit anderen Aspekten wissenschaftlichen Denkens (Physik, Astronomie, Kosmologie, etc) diskutiert.

Literatur:

Boyer, Carl, *The History of Mathematics*, New York 1968, 2nd ed. by Uta Merzbach (1991).

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press (1972).

Stillwell, John. *Mathematics and Its History*, Springer 2010^3.
Struik, Dirk J., *Abriß der Geschichte der Mathematik* (1.Aufl. engl. 1948, dt. VEB D.V.d.W., viele Auflagen).

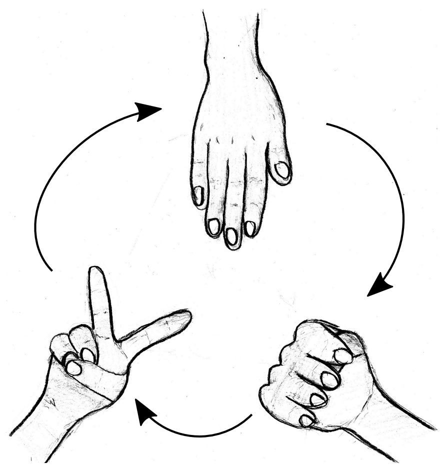
Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin, VEB DV.d.W.1978, Nachdruck: Harri Deutsch (2008).

Spieltheorie

Dozent: PD Dr. Matthias Schneider

Montag und Mittwoch von 10-12 Uhr

Gibt es eine Sieges-Formel für „Schnick-Schnack-Schnuck"? In jedem Schulhof auf der ganzen Welt ist seit hunderten von Jahren klar: Stein schleift Schere, Schere schneidet Papier und Papier umwickelt Stein. Mit einer Gewinnstrategie sichert man sich das letzte Stück Kuchen oder muss nie wieder die Spülmaschine ausräumen.
In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischer Spieltheorie: In klassischen Zwei-Personen-Spielen vermeiden oder versuchen wir, die letzte Bohne zu nehmen. Wir bestimmen Nash-Gleichgewichte und dominante Strategien von Matrix-Spielen, (un)gerechte Verteilungen und klären die wichtigste Frage von allen: Was ist mit dem Brunnen?



Literatur:

C. Rieck, *Spieltheorie – eine Einführung.*, Rieck, Eschborn 2012,

J. Bewersdorff, *Glück, Logik und Bluff*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2010,

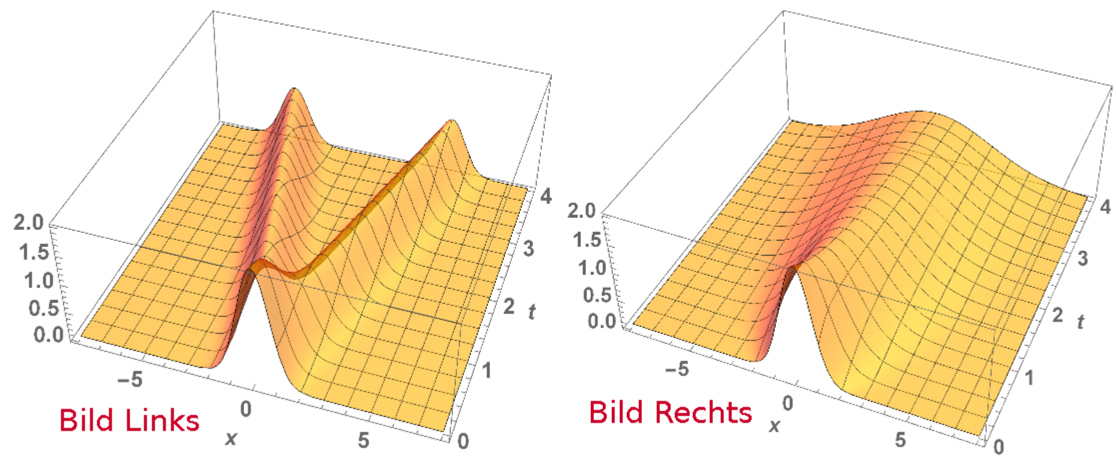
M. Holler, G. Illing: *Einführung in die Spieltheorie.* Springer Verlag, Berlin 2005.

Introduction to partial differential equations

PD Dr. Matthias Schneider

Tuesday and Friday 12-14

A million dollars awaits anyone who can solve the Navier-Stokes equation - a nonlinear partial differential equation. To earn this money, it is reasonable to study linear equations first, such as the one-dimensional heat equation $u_t = u_{xx}$ or the one-dimensional wave equation $u_{tt} = u_{xx}$.
This course is an introduction to the theory of linear partial differential equations.
To warm up: For the solutions below, match the type of equation: heat or wave?



Literature:

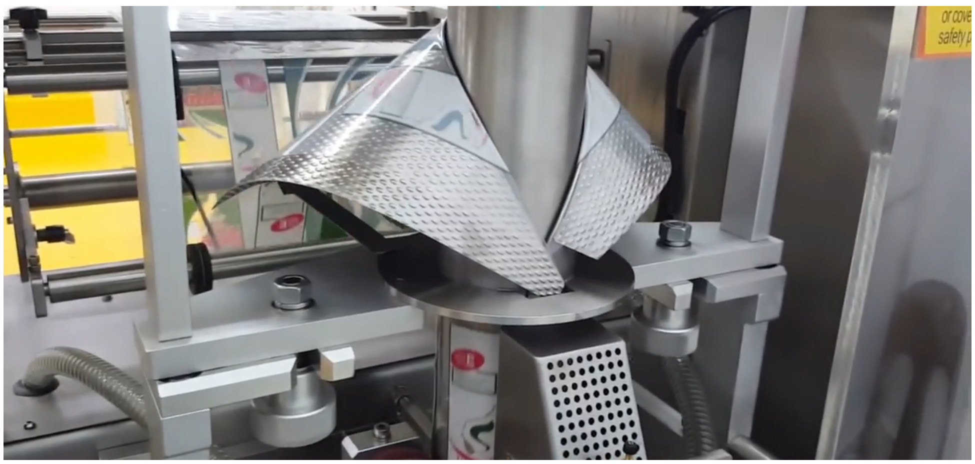
L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence. (2010)
W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York. (1987)
M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I. Basic Theory*, Springer, Berlin. (1996)

Angewandte Differentialgeometrie

Dozent: Prof. Dr. Karlheinz Spindler

Termine: Mi 13:00-16:30

Viele Anwendungsprobleme mit geometrischer Struktur (etwa in den Bereichen Satellitensteuerung, Robotik, Bildverarbeitung) lassen sich sehr elegant und auch numerisch effektiv lösen, wenn man differentialgeometrische Methoden heranzieht. Beispiele sind Optimalsteuerungen auf Lieschen Gruppen (Lageregelung von Satelliten, Steuerung von Quantenspinsystemen, Bewegungssteuerung mechanischer Systeme) oder Parameterschätzprobleme auf Mannigfaltigkeiten (Lagebestimmung von Satelliten, Schätzung geometrischer Objekte in der Bildverarbeitung oder im Data Mining). Es gibt aber auch ganz klassische Anwendungen wie etwa Eulers Theorie der Elastica oder die Benutzung abwickelbarer Flächen bei der Gestaltung industrieller Verpackungsmaschinen. In der Vorlesung wird gezeigt, wie sich Methoden aus der Differentialgeometrie und der Analysis auf Mannigfaltigkeiten zur Lösung solcher Probleme heranziehen lassen. Kenntnisse der elementaren Differentialgeometrie (Kurven, Flächen, höherdimensionale Mannigfaltigkeiten) sind nützlich, werden aber nicht vorausgesetzt; die benötigten Grundlagen werden innerhalb der Vorlesung bereitgestellt.



Formschulter einer industriellen Verpackungsmaschine

Literatur:

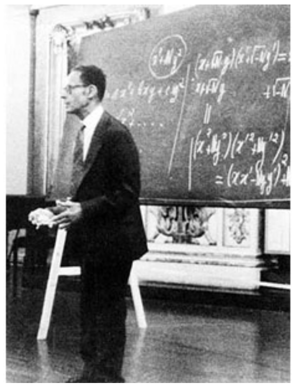
- J. Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, Cambridge University Press (2007).
- A. Agrachev, Yu. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Springer (2004).
- V. G. Ivancevic, T. T. Ivancevic, *Applied Differential Geometry – A Modern Introduction*, World Scientific Publishing (2007).
- M. Epstein, *Differential Geometry – Basic Notions and Physical Examples*, Springer (2014).
- D. Ailabouni, A. Meister, K. Spindler, *Attitude maneuvers avoiding forbidden directions*, Astrodynamics **7** (3), S. 351-362 (2023).
- L. Naiwert, K. Spindler, *Regression ellipses via hyperbolic geometry*, Elemente der Mathematik **78** (3), S. 101-112 (2023).

p-adic Cohomology II

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten

Termine: Di 10-12

This course is a sequel to the course *Point-counting and p-adic cohomology* where we introduced Zeta-functions, the Weil conjectures and gave Dworks rationality proof in which over convergent power series played a crucial role and led to the p-adic cohomology of Monsky and Washnitzer. In this course we develop Dworks p-adic cohomology theory that can be used to 'count points using differential equations'.



Prerequisites: Solid knowledge of and interest in arithmetic aspects of algebraic geometry.

Literatur:

P. Candelas, X. de la Ossa, D. van Straten,*Local Zeta-functions from Calabi-Yau equations*, `ArXive 2104.07816`.

B. Dwork, *p-adic cycles*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 37, pp. 27-115 (1969).

B. Dwork, *Lectures on p-adic Differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 253.
K. S. Kedlaya, *p-adic Differential Equations*, Cambridge studies in advanced mathemeti cs 125, Cambridge (2010).

P. Monsky: *p-adic analysis and Zeta-Functions*, Kinokuniya (1970).

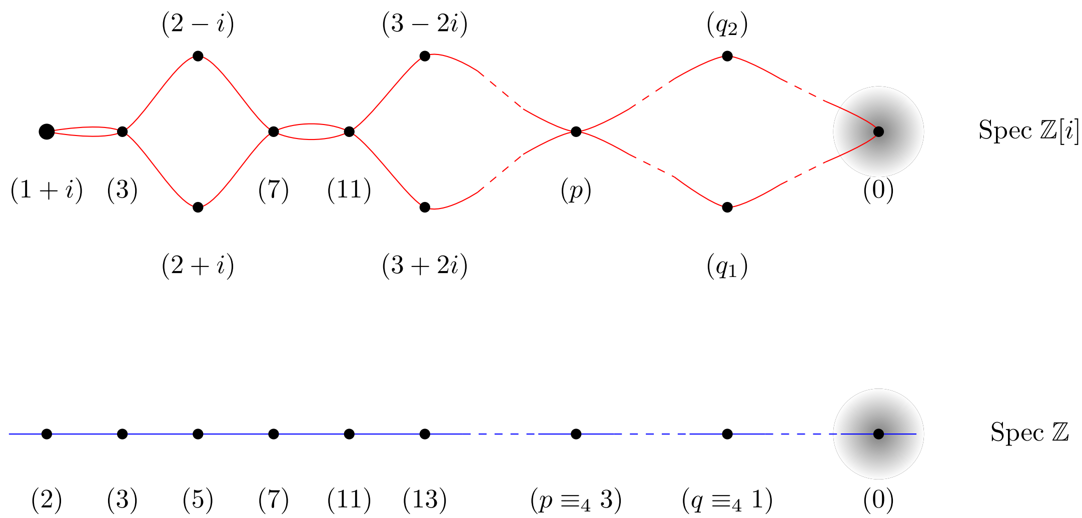
M. van der Put, *The cohomology of Monsky and Washnitzer*, Mém. SMF,Vol.23,33-59 (1986).

Algebraic Number Theory I

Lecturer: Prof. Dr. Georg Tamme

Date: Tue, Thu 8-10 (04-426)

This course gives an introduction to algebraic number theory. We will cover number fields, rings of algebraic integers, Dedekind domains, Minkowski's lattice point theory, finiteness of class numbers, Dirichlet's unit theorem, ramification theory, cyclotomic fields, local fields, valuations.



This course will be continued in the summer term 2025 where I intend to discuss local class field theory.

Prerequisites: Algebra 1 (ring theory, Galois theory); also Algebra 2 (commutative algebra) is highly recommended, though not strictly necessary.

Literature:

J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer.
J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer.
Additional literature will be announced in the lecture.

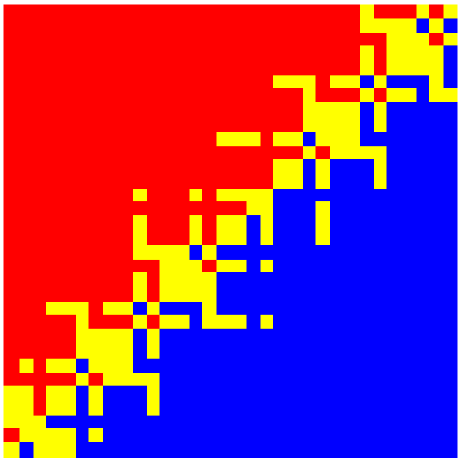
Selected Topics in Scientific Computing

oder

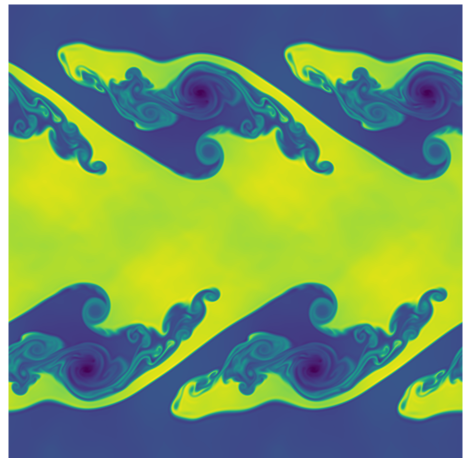
Die 4 Schritte zum wissenschaftlichen Programmieren

Dozent: Dr. Kai Werth

Termine: Fr 10-12



Programmierfehler oder Rundungsfehler? Hier wurde die Orientierung (*positiv*, *negativ* oder *null*) der Punkte einer $128 \cdot 2^{-53}$-Umgebung um den Ursprung mit der Ursprungsgeraden berechnet.



Gemeinsam statt einsam: Diese detaillierte Flüssigkeitssimulation einer *Kelvin-Helmholz-Instabilität* berechnen wir in endlicher Zeit nur durch effektives parallelisieren auf 265 Rechnenknoten von *Mogon*.

Es heißt, es seien 36 Schritte notwendig, um ein/e Kung-Fu-Meister/in zu werden.
Den Weg zum wissenschaftlichen Programmieren meistern wir in dieser Veranstaltung bereits in vier Schritten:

(1) Lerne, den Rundungsfehler vom Programmierfehler zu unterscheiden!
(2) Der Weg von der Formel zum Code.
(3) Strukturiere deinen Code weise!
(4) Parallelisiere statt zu paralysieren!

Anhand kleiner Beispiele in Python erarbeiten wir uns eine Programmgrundlage, die wir nach und nach erweitern und optimieren, bis wir sie am Ende als Simulation auf dem Rechencluster laufen lassen können.

Dabei ist kein schwarzer Gürtel in Programmierung nötig, aber gewisse Kenntnisse erleichtern sicher den Einstieg. Wir arbeiten auf einer Jupyterhub, für die lediglich ein Browser und ein gültiger ZDV-Account benötigt wird. Es muss also nichts installiert werden.

Literatur:

C.R. Harris et al., 2020, *Array programming with NumPy*, Nature, 585, pp.357–362.
W.H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2007).
T.H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms,* The MIT Press (2001).
K. Mehlhorn, S. Näher *LEDA – A platform for combinatorial and geometric computing,* in: CACM (1995).

LEGENDE
hellgelb: Grundvorlesungen
orange: Aufbauvorlesungen
rot: derzeit jährlich ang. Vertiefungszyklen
grau: unregelm. ang. Vertiefungszyklen
getricherlter Pfeil: ist hilfreich
grauer Pfeil: als Voraussetzung dringend empfohlen
schwarzer Pfeil/Linie: Ist Voraussetzung
LAG1/2 Ana1/2 ist Voraussetzung für alle weiteren LV

BSc/MSc Mathematik Mainz