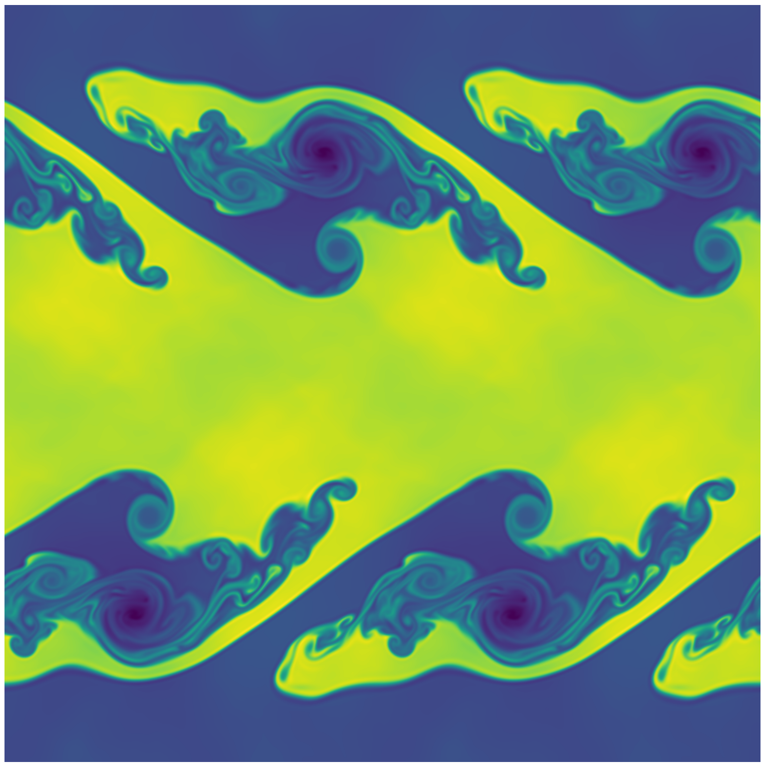
Vorlesungsverzeichnis

Mathematik



Mainz

Wintersemester 2025/26

Zum Bild:

Gemeinsam statt einsam: Um diese hochaufgelöste Flüssigkeitssimulation einer *Kelvin-Helmholtz-Instabilität* zweier Fluide mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten in endlicher Zeit berechnen zu können, lösen wir die Euler-Gleichungen über ein Finite-Volumen-Verfahren mit einer effizienten Parallelisierung auf 256 parallelen Recheneinheiten unseres heimischen *MOGON II* Clusters.

Das Bild wurde im Wintersemester 2024/25 als Lösung des letzten Übungsblatts im Rahmen der Vorlesung *Selected Topics in Scientific Computing* erstellt.

Vorwort

Dieses Vorlesungsverzeichnis enthält eine Übersicht über die weiterführenden Vorlesungen, welche im kommenden Wintersemester 2025/26 am Institut für Mathematik in Mainz gehalten werden. Man findet Kurzfassungen der Inhalte der einzelnen Vorlesungen und Literaturhinweise. Diese sind als Information und Entscheidungshilfe für alle Mathematikstudierenden nach dem Grundstudium gedacht.

Die Vorlesungen aus dem Grundstudium, die Service-Veranstaltungen, Praktika sowie die Seminare erscheinen in der Regel nicht in dieser Übersicht.

D. van Straten

Mainz, Juni 2025

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-10	Algebra I (Blickle) 05-426	Topologie (Hog-Angeloni) 03-428	Funktionentheorie (Lehn) 04-224	Topologie (Hog-Angeloni) 03-428	Algebra I (Blickle) 05-426
10-12	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) N6	Numerics of Partial Differential Equations (Hanke-Bourgeois) 04-422 Probability II (Klenke) 05-522 Homologische Algebra (Rahn) 04-432 Algebraic Number Theory III (Tamme) 05-136	Matrixfunktionen (Hanke-Bourgeois) 05-426 Eichtheorie (Kraus) 04-230 Representation Theory of Algebraic Groups I (Eberhardt) 04-224	Numerics of Partial Differential Equations (Hanke-Bourgeois) 04-422 Probability II (Klenke) 05-522 Homologische Algebra (Rahn) 04-432 Representation Theory of Algebraic Groups I (Eberhardt) 04-224 Chemical Reaction Network Theory (Rendall) 04-426	Funktionentheorie (Lehn) 04-224 Selected Topics in Scientific Computing (Werth) 05-426 Algebraic Number Theory III (Tamme) 05-136
12-14	Zahlentheorie (de Jong) 03-428 Spieltheorie (Schneider) 05-522 Eichtheorie (Kraus) 04-230	Partial Differential Equations (Gürbüz) 04-422	Zahlentheorie (de Jong) 03-428 Spieltheorie (Schneider) 05-522 Fachdidaktik III: Ausgew. Probleme des MU (Weiss) 04-426	Weiterführende Analysis für das Lehramt (Fröhlich) N2 Stochastic population models (Birkner) 05-136	Partial Differential Equations (Gürbüz) 04-422 Stochastic population models (Birkner) 05-136
14-16	Theory of Schemes (Mantovani) 05-522 Numerik gewöhnlicher Differential-gleichungen (Ranocha) 04-230 Oberseminar Geometry an Physics (Jockers, Lehn, van Straten) 05-426	Functional Analysis in Action: Computational Fluid Dynamics (Lukácová) 05-426 Einführung in die Homotopietheorie (Klaus) 04-422ca. 14-tägig, genauen Termine siehe Jogustine Oberseminar Arithmetic Geometry and Motivic Homotopy Theory (Bachmann, Blickle, Tamme) 04-426	Theory of Schemes (Mantovani) 05-522	Functional Analysis in Action: Computational Fluid Dynamics (Lukácová) 05-426 Numerik gewöhnl. Differentialgleichungen (Ranocha) 04-224 Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514	
16-18	Kulturgeschichte der Mathematik (Sauer) 05-514	Chemical Reaction Network Theory (Rendall) 04-426			

Distributions (Kostrykin) TERMIN / RAUM

Functional Analysis II (Kostrykin) TERMIN / RAUM

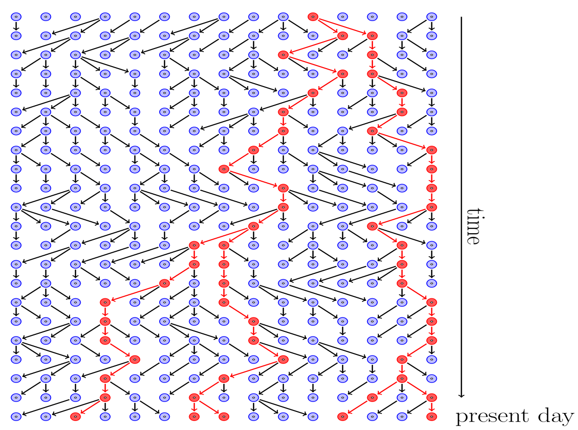
Stochastic population models[1]

Dozent: Prof. Dr. Matthias Birkner

Termine[2]: Thu, Fri 12-14

There is a lot of variability – both genetic and phenotypic – in real populations. Stochastic models can help to understand this and to quantify underlying evolutionary mechanisms like selection, mutation, genetic drift, recombination or spatial structure. They also form the basis for inference of biological mechanisms and their parameters based on observed genetic variability in sampled individuals. A central thread of the course will be the interplay between the forwards in time dynamics of the population and the backwards in time view on the genealogy of samples.

Some exemplary (technical[3], but see notes) keywords: Wright-Fisher model and diffusion, coalescents, Ewens' sampling formula, ancestral selection and recombination graphs, branching processes, stepping stone model, interacting particle systems



Schematic representation of a randomly reproducing population
and a present-day sample together with its genealogy (in red)

Literature:

R. Durrett, *Probability Models for DNA Sequence Evolution*, Springer (2008).
W. Ewens, *Mathematical population genetics*, Springer (2004).
J. Wakeley, *Coalescent Theory: An Introduction*, Roberts & Company (2008).
M. Birkner, *Stochastische Modelle der Populationsbiologie*, Vorlesungsskript, JGU Mainz (2016) `https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/SMPB1516/smpb1516.pdf`
S. Ethier, T. Kurtz, *Markov processes: characterization and convergence*, Wiley (1996).

Notes 1. The language can to some extent be negotiated at the beginning. A mixture of German and English is also an option.
2. Brown bag: Given the times, it is perfectly fine to bring a (small) lunch to lectures.
3. The principal ideas and phenomena can be understood and appreciated using notions from "Grundlagen der Stochastik". Advanced tools, e.g. diffusion processes or stochastic differential equations, may feature occasionally but will be motivated and illustrated by discrete approximations (and this course is of course also an invitation to learn about such objects). From the introduction of W. Feller's famous book on probability: "The traveler often has the choice between climbing a peak or using a cable car."
4. M.Ed. students (with our without biology as a second subject) are very welcome.

Algebra I

Dozent: Prof. Dr. Manuel Blickle

Termine: Mo, Fr 8-10

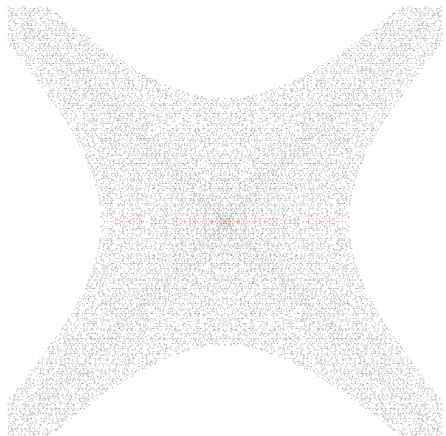
Beitrag wird nachgereicht.

Literatur:

Zahlentheorie

Dozent: Prof. Dr. Theodorus de Jong

Termine: Mo, Mi 12-14



Dies ist eine Einführung in klassische zahlentheoretische Fragestellungen:

- Gibt es unendlich viele Primzahlen? Wenn ja, was können wir über ihre Verteilung unter den natürlichen Zahlen sagen?
- Gibt es rechnerisch effiziente Methoden zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl prim ist?
- Welche ganzen Zahlen kann man als Summe von zwei Quadraten schreiben, d. h. für welche $a \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 + y^2 = a$?

Um z. B. die letzte Frage zu beantworten, ist es hilfreich unseren Zahlbereich auf die Gaußschen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

zu erweitern, weil dort $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ gilt.
Im Verlauf der Vorlesung werden wir anhand weiterer klassischer Fragestellungen (z.B. kann man jede ganze Zahl als Summe von drei oder vier Quadraten schreiben, welche ganzzahligen Lösungen hat die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$) weitere Zahlbereiche und Techniken kennenlernen. Gegen Ende der Vorlesung wollen wir auch die Anfänge der algebraischen Zahlentheorie entwickeln.

Die Vorlesung ist insbesondere auch für Lehramtsstudierende hervorragend geeignet und ist z. B. eine natürliche Fortsetzung der GAZ. Wenn Sie im Studiengang BSc sind, genügt es Lineare Algebra 2 erfolgreich absolviert zu haben.

Literatur:

Müller-Stach und Piontkowski, *Elementare und algebraische Zahlentheorie*, Vieweg+Teubner (2007).

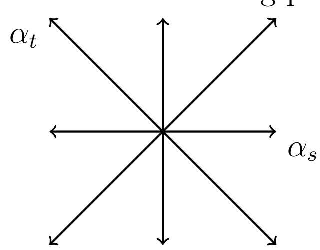
Representation Theory of Algebraic Groups I

Dozent: Dr. Jens Eberhardt

Termine: Mi, Do 10-12

The study of continuous symmetries naturally leads to the concept of Lie groups, which are fundamental in many areas of mathematics and physics, describing, for example, essential aspects of our physical reality. It is a notable fact that many characteristics of Lie groups—which are inherently topological and continuous objects—can be understood in completely algebraic terms, often described entirely by polynomials. This realization paves the way for the study of the algebraic counterpart of Lie groups: *linear algebraic groups*. These include many of the classical groups familiar from linear algebra and geometry, such as the general linear group (GL_n), the symplectic group (Sp_{2n}), and the orthogonal group (O_n).

In this course, we will classify the most significant linear algebraic groups, namely the reductive ones. This classification is combinatorial and can be understood through objects known as root data. We will see how the structure of these groups, including their representations, can be analyzed using such combinatorial data. For example, the structure of the symplectic group Sp_4 is encoded in the following picture (type B_2 root system):



This approach using root data allows for a unified way to understand classical groups and other related families. To develop this theory, we will utilize Lie algebras, which offer an infinitesimal perspective on algebraic groups via algebraic methods. We will also introduce essential concepts from algebraic geometry, such as affine and projective varieties, which provide the natural language for objects defined by polynomials.

The primary goal of this lecture is to build an understanding of this classification and to develop an intuition for the structure of linear algebraic groups. This course is also a preparation for the course in the next term where we will learn more about the representation theory of those groups.

Literature:
Borel, A., Linear Algebraic Groups.
Séminaire Claude Chevalley, Classification des groupes de Lie algébriques.

Weiterführende Analysis für das Lehramt

Dozent: Prof. Dr. Steffen Fröhlich

Termine: Mo 10-12, Do 12-14

In dieser Vorlesung erlernen wir die Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie nach Lebesgue und Hausdorff. Das umfasst insbesondere die Bestimmung von Inhalten von Punktmengen in Euklidischen Räumen und damit das Berechnen mehrdimensionaler Integrale sowie eine Einführung in die fraktale Geometrie. Ferner erlernen wir wichtige Begriffe und Methoden der klassischen Vektoranalysis und schließlich die für die moderne Analysis zentralen Integralsätze von Gauß, Green und Stokes. Neben Rechnen soll vor allem viel gebastelt und gezeichnet werden.

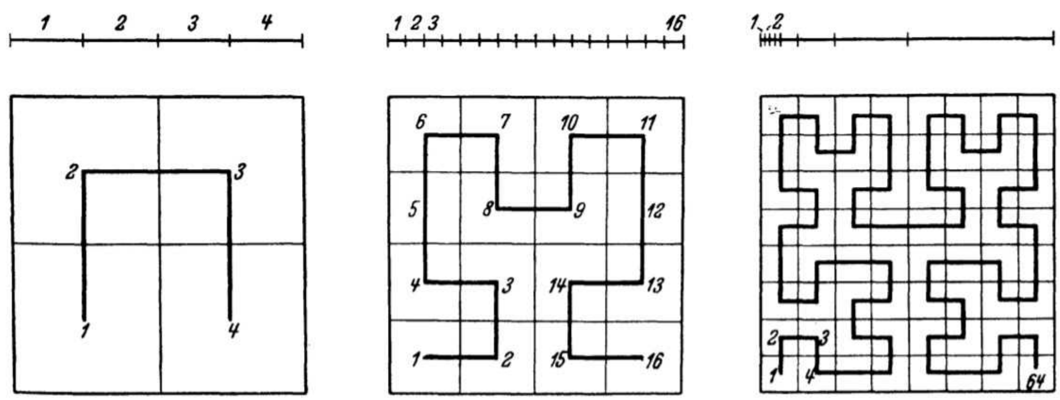


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

D. Hilbert: *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (1891)

Literatur:

F. Burk, *A Garden of Integrals*, The Mathematical Association of America (2007).

J.J. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons (2003).

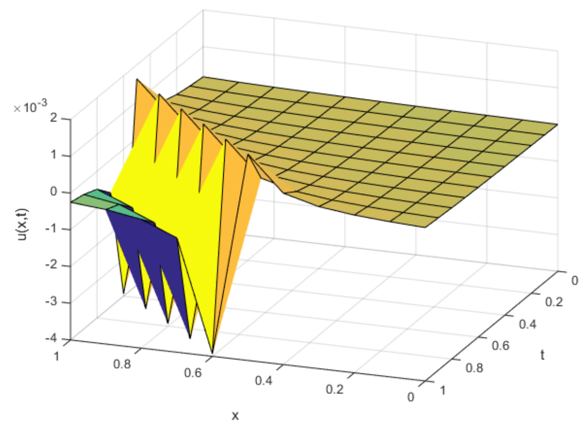
F. Sauvigny, *Analysis,* Springer Spektrum (2014).

Introduction to Partial Differential Equations

Dr. Burcu Gürbüz

Tuesday, Friday 12-14

Partial differential equations (PDEs) play a central role in the mathematical modeling of numerous physical, biological, and engineering systems. From heat conduction to fluid dynamics, the behavior of such systems is often described by PDEs, which involve functions of several variables and their partial derivatives.



A numerical solution of a relativistic wave equation under initial conditions

This course will provide a solid foundation in the theory of PDEs, focusing on their classification, solution techniques, and applications. The course also addresses initial and boundary value problems, maximum principles, and the mean-value property of harmonic functions, alongside interpretations relevant to scientific and engineering applications.

References:

L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, (2010).
W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, (1987).
M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I. Basic Theory*, Springer, Berlin, (1996).
W. E. Boyce, R. C. DiPrima, D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, (2021).

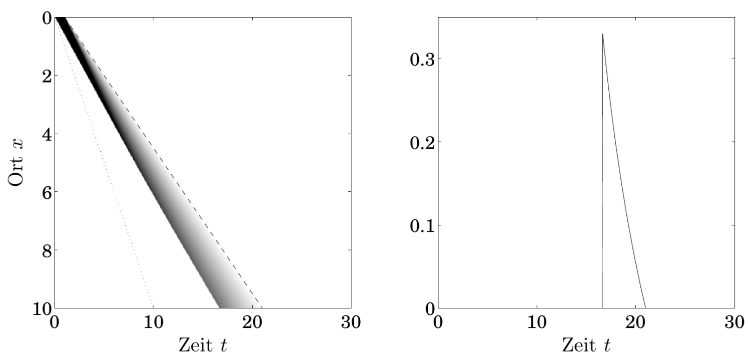
Numerik partieller Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine: Di, Do 10–12

Partielle Differentialgleichungen treten in vielen Anwendungen auf, vor allem in den Ingenieurwissenschaften, aber auch in den Naturwissenschaften, neben der Physik vor allem in der Meteorologie, der Geophysik und der Biologie.

Analytische Lösungen dieser Gleichungen sind nur in ganz seltenen Ausnahmefällen möglich und selbst dann zumeist nur in Form unendlicher Reihen. Daher müssen diese Gleichungen in der Praxis numerisch gelöst werden. Die entsprechenden Verfahren hängen von dem Typ der Gleichung ab: Für elliptische Gleichungen werden in der Regel variationelle Verfahren (Galerkin-Verfahren für finite Elemente) verwendet, für parabolische Differentialgleichungen werden diese dann mit Zeitintegrationsverfahren (Runge-Kutta-Verfahren) kombiniert, und für hyperbolische Verfahren werden schließlich Differenzen- bzw. finite Volumen-Verfahren eingesetzt. Alle diese Verfahren werden in der Vorlesung exemplarisch behandelt.



Konzentrationsverteilung innerhalb einer Chromatographie-Säule (links) und Ausfluss aus der Säule als Funktion der Zeit (rechts)

Die Veranstaltung umfasst neben der vierstündigen Vorlesung eine zweistündige Übung. Es werden die Inhalte der Lehrveranstaltungen Grundlagen der Numerik sowie Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen vorausgesetzt.
Die Vorlesung wird bei Bedarf in Englisch gehalten.

Literatur:

C. Großmann, H.-G. Roos, *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, Teubner, Wiesbaden (2005).

M. Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*,Teubner, Wiesbaden (2006).

P. Knabner, L. Angermann, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Springer, Berlin (2000).

A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Berlin (1997).

Matrix Functions

Dozent: Prof. Dr. Hanke-Bourgeois

Termine: Mi 10-12

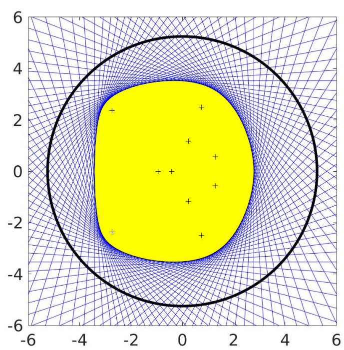
Wird bei einer als (konvergente) Potenzreihe gegebenen Funktion f anstelle eines skalaren Arguments $x \in \mathbb{R}$ oder $z \in \mathbb{C}$ eine quadratische Matrix A eingesetzt, so spricht man von einer Matrixfunktion. Elementare Beispiele sind die Potenzen A^n mit $n \in \mathbb{N}$ oder auch rationale Funktionen, wie z.B.

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n ,$$

sofern die Spektralnorm $\|A\|_2$ von A kleiner als Eins ist. Ein weiteres Beispiel ist die Exponentialfunktion

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n ,$$

die etwa bei Systemen linearer Differentialgleichungen von Bedeutung ist.
Die Vorlesung stellt verschiedene äquivalente Definitionen für die Matrixfunktion $f(A)$ vor, führt in das zugehörige Spektralkalkül ein, entwickelt numerische Algorithmen für die Berechnung konkreter Beispielfunktionen, wie die Exponentialfunktion, die Quadratwurzel und die Signumfunktion, sowie effiziente Algorithmen für allgemeinere Funktionen. Drei konkrete Anwendungsbeispiele runden die Vorlesung ab.



Der Satz von Toeplitz-Hausdorff besagt, dass der sogenannte Wertebereich

$$W(A) = \{ \zeta = \langle z, Az \rangle : z \in \mathbb{C}^n , \|z\|_2 = 1 \} \subset \mathbb{C}$$

einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine konvexe Obermenge des Spektrums ist. Die eingeschlossene eingefärbte Menge in der obigen Abbildung ist der Wertebereich einer konkreten Matrix $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$; die Kreuze zeigen die Eigenwerte von A an. Abhängig von der Ausdehnung des Wertebereichs lassen sich für gewisse Approximationen an Matrixfunktionen Konvergenzaussagen machen.
Bei Bedarf findet die Vorlesung in Englisch statt.

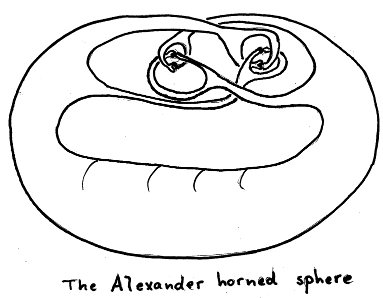
Literatur:
N.J. Higham, *Functions of Matrices*, SIAM, Philadelphia (2008).

Einführung in die Topologie

Dozentin: Dr. Cynthia Hog-Angeloni

Termine: Di, Do 8-10

Die Topologie beschäftigt sich mit qualitativen Eigenschaften von Räumen, die unter stetigen Verformungen unverändert bleiben: *Gummi-Mathematik* !
Sie hat sich aus der Geometrie entwickelt, auf lateinisch unter dem Namen: 'geometria situs' (Geometrie der Lage) oder 'analysis situs' (Griechisch-Latein für 'Analysieren des Ortes').
Ein topologischer Raum stellt eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von "Nähe" dar. Damit gewinnt man substantielle Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie Stetigkeit und Grenzwert.
Das Fundament der Topologie ist die *Mengentheoretische Topologie*; ihrem Studium gilt etwa das erste Drittel der Vorlesung. Darauf baut die *Algebraische Topologie* auf, in der topologische Räume (sowie Lagebeziehungen im Raum wie zum Beispiel in der Knotentheorie) mit Hilfe von algebraischen Strukturen untersucht werden.



Von Hocking, John G. und Young Gail, S. "Topology", Dover Books on Mathematics, 1988.

Literatur:

R. Courant, H. Robbins, "Was ist Mathematik?", Springer (2001).
H. Seifert, W. Threlfall, "Lehrbuch der Topologie", Chelsea (2004).
G. Bredon, "Topology and Geometry", Springer (1997).
A. Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge University Press, (2002).
R. Stöcker, H. Zieschang, "Algebraische Topologie", Teubner (2013).

Einführung in die Homotopietheorie

Dozent: Prof. Dr. Stephan Klaus

Termine: Do 14-16 ca. alle 2 Wochen (siehe Termine in Jogustine)

In dieser Ergänzungsvorlesung werden wir eine Einführung in die Homotopietheorie geben. Diese hat interessante Verbindungen zu anderen Gebieten wie z.B. theoretische Physik und arithmetische Geometrie. Dabei werden Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie vorausgesetzt (insbesondere CW-Komplexe) und aus der algebraischen Topologie sollten singuläre Homologie- und Kohomologietheorie bekannt sein.

Im Einzelnen sollen folgende Themen besprochen werden:

(1) Homotopie und (Ko-)Homologie
(2) Modellkategorien
(3) Simpliziale Homotopietheorie
(4) Eilenberg-MacLane-Räume und Kohomologie-Operationen
(5) Zerlegungen von Postnikov, Whitehead und Brown-Copeland
(6) Theoreme von Hurewicz, Whitehead und Freudenthal
(7) Die Adams-Spektralsequenz und einige Homotopiegruppen von Sphären

Zielgruppe/Voraussetzungen: Studentinnen und Studenten der Mathematik mit Grundkenntnissen in mengentheoretischer und algebraischer Topologie.

Zuordnung Gebiete: Topologie

Für genaue Termine siehe bitte Jogustine.

Literatur:

VR.M. Switzer, *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Nature (2002).
R.E. Mosher, M.C. Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory*, Dover (2008).
J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics (1993).

Probability Theory II

Prof. Dr. Achim Klenke

Tuesday, Thursday 10-12

The lecture is the first part of the in-depth module Probability Theory and is aimed at students of mathematics who have already heard Probability Theory I (Stochastik I) .

The theory of probability deals with the quantitative consideration of all phenomena in which chance plays a role. In Fermat's time, this mainly concerned gambling - today questions from statistical physics, biology, financial mathematics, statistics and so on have come to the fore.

We deal with advanced topics of probability theory such as martingales, convergence of measures, construction of product spaces and characteristic functions.

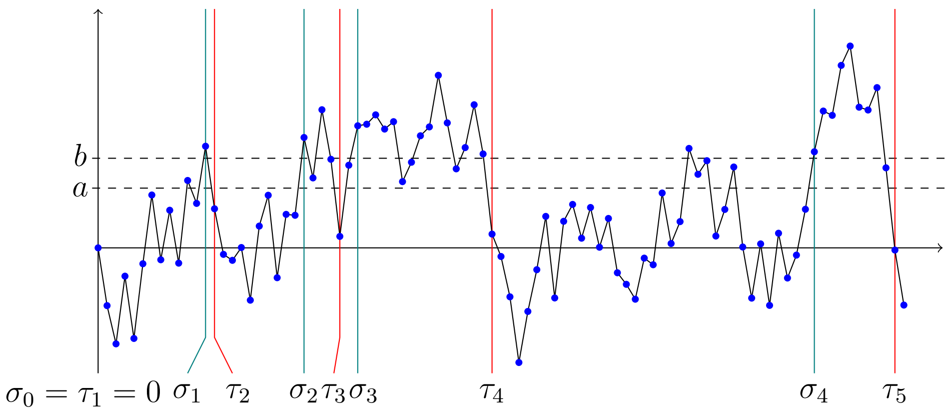


ABBILDUNG 1. Upcrossings (τ_i, σ_i) over $[a, b]$ used in the proof of the martingale convergence theorem, figure taken from [Klenke 2020]

Literature:

L. Breiman, *Probability*, Wiley (1968).
R. Durrett, Probability: Theory and Examples, Cambridge University Press (2019, 5th edition).
J. Elstrodt, *Ma{ss*- und Integrationstheorie, 8th edition, Springer (2018).
W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Vol. 1 and Vol. 2, Wiley (1968 and 1971).
H.-O. Georgii, *Stochastik*, 5th edition, de Gruyter (2015).
A. Klenke, *Probability Theory*, 3rd edition, Springer (2020).

Distributions

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Tag, Uhrzeit (Raum)

Beitrag wird nachgereicht.

Literatur:

Funktional Analysis II

Dozent: Prof. Dr. Vadim Kostrykin

Termine: Tag, Uhrzeit (Raum)

Beitrag wird nachgereicht.

Literatur:

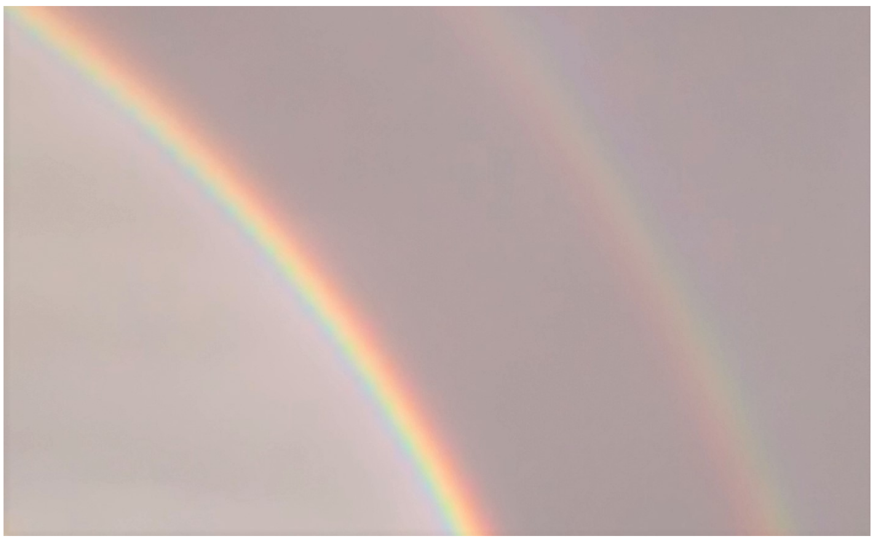
Eichtheorie 2

Dozent: PD Dr. Margarita Kraus

Zeit: Mo 12-14, Mi 10-12

Inhalt:

Die Eichtheorie 2 ist die Fortsetzung der Eichtheorie 1. Dort haben wir uns mit Faserbündeln und Zusammenhängen beschäftigt. In der Eichtheorie 2 werden wir Anwendungen davon kennenlernen. Themen werden unter anderem sein: Eichinvariante, Lagrangeformen, Yang-Mills-Theorie, der Satz von Emmy Noether, Maxwell-Dirac-Theorie und Dirac-Operatoren und Symmetriebrechung.



Literatur:

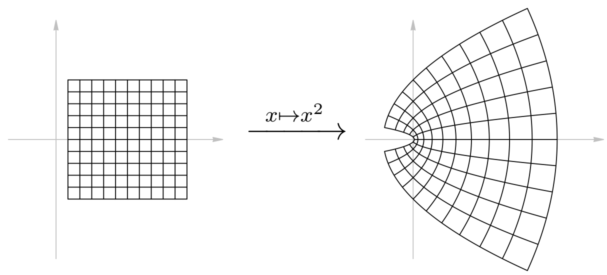
1) Nash, Sen, *Differential Geometry, Gaugetheories and Gravity*, Cambridge University Press
2) Bleecker, *Gaugetheory and Variational Principles*, Dover Publications
3) Frankel, *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press
4) Hamliton, *Mathematical Gauge Theories*, Springer

Funktionentheorie

Dozent: Prof. Dr. Manfred Lehn

Termine: Mi 8-10, Fr 10-12 Raum 04-224

Gegenstand der Funktionentheorie ist das Studium der holomorphen (= komplex differenzierbaren) Funktionen einer komplexen Variable $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Im Gegensatz zur reellen Theorie ist eine holomorphe Funktion automatisch beliebig oft komplex differenzierbar und läßt sich überall in eine Potenzreihe entwickeln. Die Funktionentheorie ist wegen der erstaunlichen Eleganz der Resultate und der Beweismethoden sicher eine schönsten elementaren mathematischen Theorien. Wichtige Resultate sind der Residuensatz, die Cauchysche Integralformel, das Maximumprinzip und der Riemannsche Abbildungssatz.



Das Bild illustriert das konforme Verhalten (= Winkeltreue) holomorpher Funktionen.

Zur Vorlesung gibt es eine zweistündige Übung. Voraussetzungen für den Besuch der Veranstaltung sind Grundkenntnisse der Analysis im Umfang der Grundvorlesungen Analysis I und Analysis II.

Literatur:

R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer Verlag (1995).
H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer, (1976).
A. Hurwitz, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer (1922,..., 2000)
T. Needham, *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenbourg 2001.

Functional Analysis in Action: Computational Fluid Dynamics

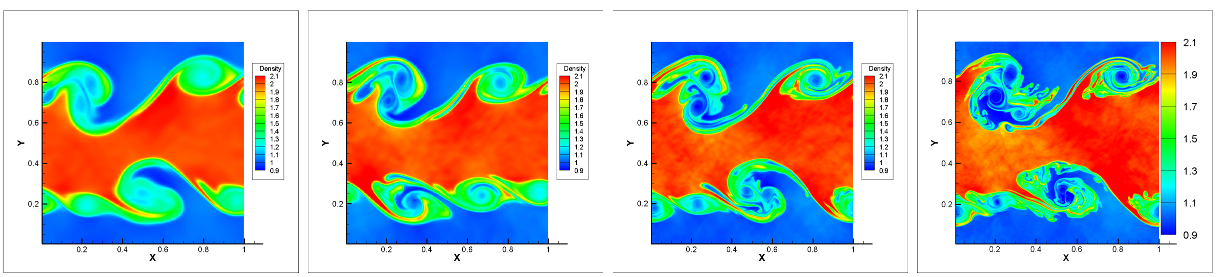
Dozentin: Prof. Dr. Mária Lukáčová

Termine: Di, Do 14-16

In der Vorlesung werden wichtige Techniken mathematischer Modellierung und numerischer Simulation in der Strömungsmechanik besprochen. Wir beschäftigen uns mit kontinuumsmechanischer Modellierung kompressibler Fluide, mit der Theorie von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen, sowie auch mit numerischer Simulation reibungsfreier kompressibler Strömungen mit Hilfe von Finite-Volumen-Verfahren und Diskontinuierlichen-Galerkin-Verfahren. Darüber hinaus werden wir die Konvergenz und Fehler der numerischen Methoden analysieren. Die Anwendung des wissenschaftlichen maschinellen Lernens für die Approximation der Strömungsprozesse wird diskutiert.

Die Vorlesung ist für Masterstudenten in der Mathematik, Physik oder Informatik gut geeignet. Interessierte Bachelorstudenten im späten Bachelorsemester können die Vorlesung auch besuchen. Insbesondere kann die Veranstaltung parallel zu Numerik partieller Differentialgleichungen ergänzend belegt werden.

Vorrausetzung: Grundlagen der Numerik, Grundvorlesungen der Analysis.



(A) $n = 256$ (B) $n = 512$ (C) $n = 1024$ (D) $n = 2048$

Wirbelstrukturen in der Scherströmung

Literatur:

1. M. Lukáčová: *Lecture Notes Computational Fluid Dynamics*, Skript.
2. M. Feistauer: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific & Technical (1993).
3. E. Feireisl, M. Lukáčová, H. Mizerová, B. She: *Numerical Analysis of Compressible Fluid Flows*, Springer (2021).

Homologische Algebra

Dozent: Dr. Moritz Rahn

Termine: Di, Do 10-12

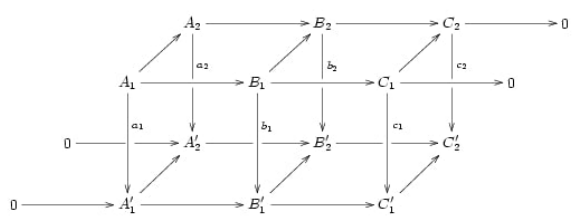
Zielgruppe: B.Sc., M.Sc.

Diverse funktorielle Konstruktionen wie etwa Tensorprodukte, Homomorphismenmoduln, Invarianten und Koinvarianten von Gruppenwirkungen, I-Torsionsmoduln (wobei I ein Ideal in einem Ring R ist) spielen eine wichtige Rolle in der Algebra und weiteren Gebieten. Beim täglichen Umgang mit diesen Funktoren ist es sehr hiflreich, ihre formalen Eigenschaften gut zu überblicken: zahlreiche Konstruktionen etwa sind additiv und sind entweder mit Untermoduln oder mit Quotientenmoduln verträglich, selten mit beiden. Wir sagen, dass diese Konstruktionen nicht exakt sind (nicht alle kurzen exakten Sequenzen werden erhalten), und in der *homologischen Algebra* studieren wir diese Abweichung von der Exaktheit auf eine recht systematische Art.

Je nach Geschmack und Interesse Ihrerseits können die Schwerpunkte dieses Kurses gerne angepasst werden. Zu den sehr wahrscheinlichen Zielen und Themen gehören:

(1) Modulkategorien (zentrale Konstruktionen und deren Exaktheitseigenschaften), Studium prominente Klassen von Moduln
(2) Konstruktion von klassisch derivierten Funktoren und Illustration an zentralen Beispielen
(3) Aufbau des kategorientheoretischen Werkzeugkoffers
(4) abelsche Kategorien, Garben und Garbenkohomologie
(5) derivierte Funktoren und derivierte Kategorien

Die homologische Algebra lebt von ihren Anwendungen in so verschiedenen Gebiete wie algebraischer Topologie, algebraischer Geometrie, Darstellungstheorie, Gruppentheorie und der Theorie der Lie-Algebren. Wir wollen zumindest versuchen, einen ersten Eindruck hiervon anzudeuten.



Verbindungshomomorphismen sind natürlich!

Literatur:

F. Anderson, K. Fuller, "Rings and categories of modules", Springer (1992).
M. Kashiwara, "Categories and Sheaves", Springer (2006).
S. Mac Lane, "Categories for the working mathematician", Springer (1998).
J. Rotman, "An introduction to homological algebar", Springer, (2009).
C. Weibel, "An introduction to homological algebra", Cambridge University Press (1994).

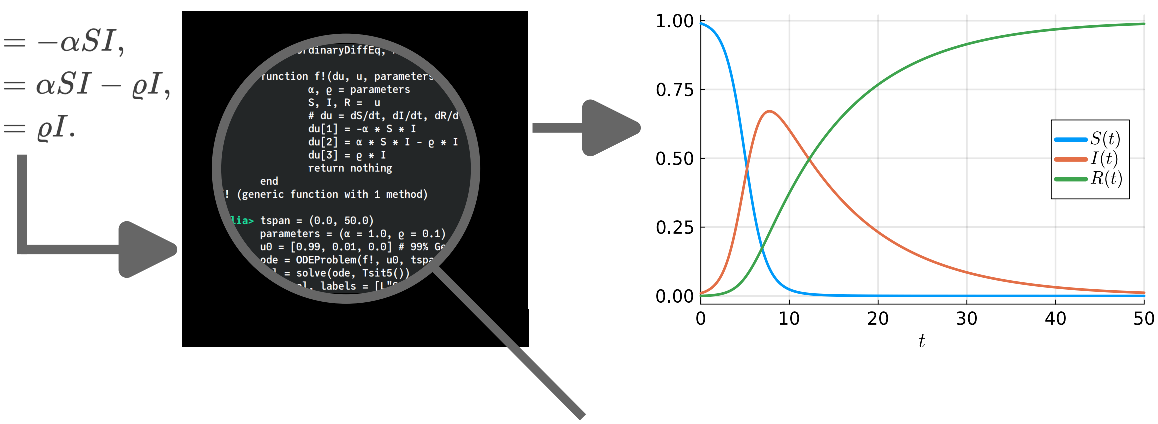
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Dozent: Prof. Dr. Hendrik Ranocha

Termine: Mo, Do 14–16

Zeitabhängige Prozesse in den Natur- und Ingenieurswissenschaften werden häufig mit gewöhnlichen Differentialgleichungen modelliert. Diese können in der Regel nicht analytisch gelöst werden. Beispiele hierfür sind die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik aus der Physik, mit denen etwa die Bewegung der Planeten simuliert werden kann, sowie einfache Modelle der Populationsdynamik wie das SIR-Modell, das im Rahmen der COVID-19 Modellierung genutzt werden kann. In dieser Vorlesung werden grundlegende Verfahren zur numerischen Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen thematisiert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Runge-Kutta-Verfahren.

$$
\begin{aligned}
S' &= -\alpha S I, \\
I' &= \alpha S I - \varrho I, \\
R' &= \varrho I.
\end{aligned}
$$



Die Vorlesung baut auf den *Grundlagen der Numerik* auf und bildet die Grundlage für weiterführende Veranstaltungen zur Numerik, insbesondere die *Numerik partieller Differentialgleichungen* und das *Modellierungspraktikum*.

Literatur:

K. Strehmel, R. Weiner und H. Podhaisky. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen*, Vieweg+Teubner (2012).
E. Hairer, S. P. Nørsett und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer (2008).
E. Hairer und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer (2010).
E. Hairer, C. Lubich und G. Wanner. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer (2006).
R. J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Steady-State and Time-Dependent Problems*, SIAM (2007).
J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons Ltd (2016).
J. C. Butcher. *B-series: algebraic analysis of numerical methods*. Springer Nature (2021).
Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Vieweg und Teubner (2008).

Chemical Reaction Network Theory

Dozent: Prof. Dr. Alan Rendall

Termine: Di 16-18, Do 10-12

Chemical reaction networks play a central role in chemistry and biology. They often include many reactions and many participating substances. The available information about which substances and which reactions are involved is often limited. This situation led to the development of a theory called Chemical Reaction Network Theory (CRNT). In CRNT ordinary differential equations are used to investigate general properties of chemical systems, in particular the number of steady states, which are independent of the missing information. This is done by concentrating on structural properties. This course presents CRNT and shows how it can be used to understand concrete examples of reaction networks coming from biology and chemistry. The figure shows a network from an article which arose from the MSc. thesis of Dorothea Möhring. The prerequisites for the course are only the basic mathematics courses so that it is suitable for BSc, MSc. and MEd. students. The course will be in English but note that a German version of the lecture notes is provided.

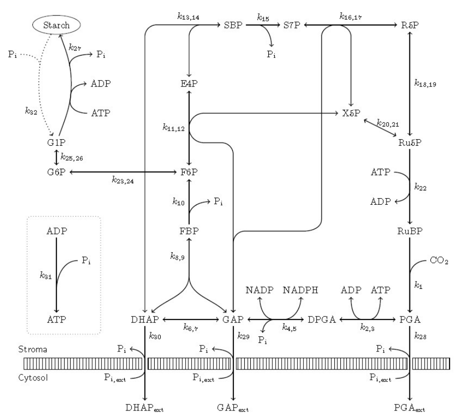


Figure 1: A model for the Calvin cycle of photosynthesis

Literatur:

M. Feinberg, *Lectures on chemical reaction networks*, online verfügbar unter der Adresse https://crnt.osu.edu/LecturesOnReactionNetworks.

D. Möhring und A. D. Rendall, *Overload breakdown in models for photosynthesis*, Dyn. Sys. 32, 234-248 (2017).

A. D. Rendall, *Theorie der chemischen Reaktionsnetzwerke*, Vorlesungsskript, JGU, WS 2021/22.

A. D. Rendall, *Chemical reaction network theory*, Vorlesungskript, JGU, WS 2021/22.

Kulturgeschichte der Mathematik

Dozent: Prof. Dr. Tilman Sauer

Termine: Mo 16-18, Do 14-16

Die Vorlesung gibt einen Überblick über die Entstehung des mathematischen Denkens und mathematischer Konzepte vom Ursprung in Mesopotamien bis zur Neuzeit. Behandelt werden die Entstehung des Zahlbegriffs und der elementaren arithmetischen Operationen, die Herausbildung geometrischer Konzepte und Vorstellungen und die Entstehung der Algebra. Dabei wird auch die Einbettung der Entwicklung in den allgemeineren kulturhistorischen Kontext und die Wechselwirkungen mit anderen Aspekten wissenschaftlichen Denkens (Physik, Astronomie, Kosmologie, etc) diskutiert.

Literatur:

Boyer, Carl, *The History of Mathematics*, New York 1968, 2nd ed. by Uta Merzbach (1991).

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press (1972).

Stillwell, John. *Mathematics and Its History*, Springer 2010^3.
Struik, Dirk J., *Abriß der Geschichte der Mathematik* (1.Aufl. engl. 1948, dt. VEB D.V.d.W., viele Auflagen).

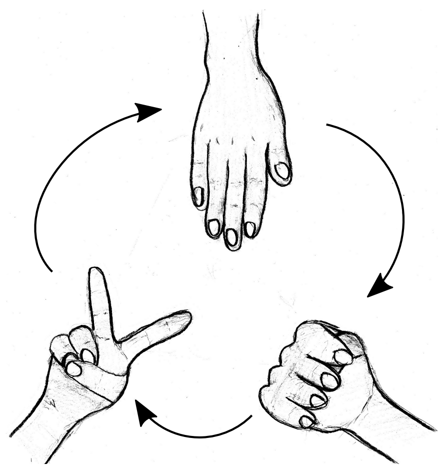
Wußing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin, VEB DV.d.W.1978, Nachdruck: Harri Deutsch (2008).

Spieltheorie

Dozent: PD Dr. Matthias Schneider

Mo, Mi 12–14

Gibt es eine Sieges-Formel für „Schnick-Schnack-Schnuck"? In jedem Schulhof auf der ganzen Welt ist seit hunderten von Jahren klar: Stein schleift Schere, Schere schneidet Papier und Papier umwickelt Stein. Mit einer Gewinnstrategie sichert man sich das letzte Stück Kuchen oder muss nie wieder die Spülmaschine ausräumen.
In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischer Spieltheorie: In klassischen Zwei-Personen-Spielen vermeiden oder versuchen wir, die letzte Bohne zu nehmen. Wir bestimmen Nash-Gleichgewichte und dominante Strategien von Matrix-Spielen, (un)gerechte Verteilungen und klären die wichtigste Frage von allen: Was ist mit dem Brunnen?



Literatur:

C. Rieck, *Spieltheorie – eine Einführung.*, Rieck, Eschborn 2012,

J. Bewersdorff, *Glück, Logik und Bluff*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2010,

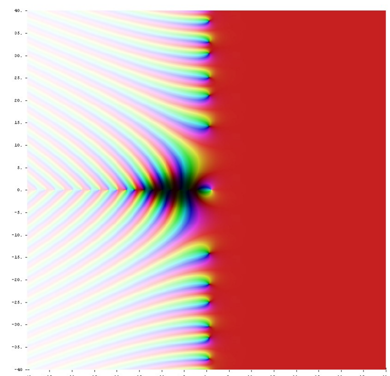
M. Holler, G. Illing: *Einführung in die Spieltheorie.* Springer Verlag, Berlin 2005.

Algebraic Number Theory III

Lecturer: Prof. Dr. Georg Tamme

Date: Tue + Fri 10-12

This is a continuation of the course on Algebraic Number Theory from the last two semesters. The goal will be to discuss some applications and complements of class field theory. Possible topics are analytical aspects (L-functions, density theorems), Iwasawa's theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions, K_2 of number fields and applications to the Brauer group.



The Riemann Zeta function

Prerequisites: A good working knowledge of Algebraic Number Theory as presented, for example, in Algebraic Number Theory I and II (basics on number fields, local fields, group cohomology, local class field theory).

Literature:

J.W.S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press.
J. Milne, *Class Field Theory*, online
J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg *Cohomology of number fields*, Springer.
J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer.
J. Neukirch, *Klassenkörpertheorie*, Springer.
J.-P. Serre, *Local Fields*, Springer.

Additional literature will be announced in the lecture.

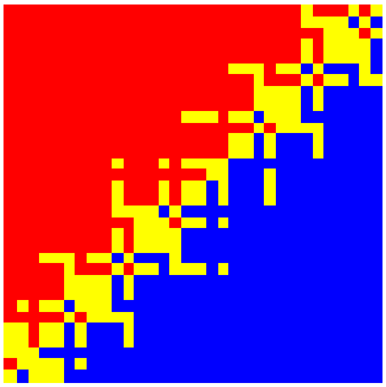
Selected Topics in Scientific Computing

oder

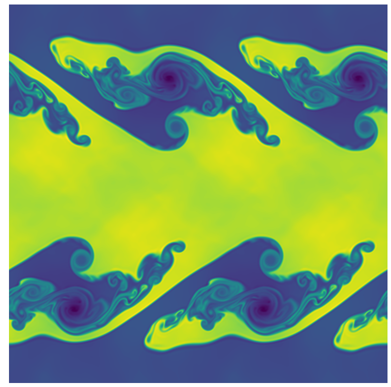
Die 4 Schritte zum wissenschaftlichen Programmieren

Dozent: Dr. Kai Werth

Termine: Fr 10-12



Programmierfehler oder Rundungsfehler? Hier wurde die Orientierung (*positiv*, *negativ* oder *null*) der Punkte einer $128 \cdot 2^{-53}$-Umgebung um den Ursprung mit der Ursprungsgeraden berechnet.



Gemeinsam statt einsam: Diese hochaufgelöste Flüssigkeitssimulation einer *Kelvin-Helmholtz-Instabilität* berechnen wir in endlicher Zeit nur durch effizientes Parallelisieren auf 265 Recheneinheiten auf *MOGON II*.

Es heißt, es seien 36 Schritte notwendig, um ein/e Kung-Fu-Meister/in zu werden. Den Weg zum wissenschaftlichen Programmieren meistern wir in dieser Veranstaltung bereits in vier Schritten:

(1) Lerne, den Rundungsfehler vom Programmierfehler zu unterscheiden!
(2) Der Weg von der Formel zum Code.
(3) Strukturiere deinen Code weise!
(4) Parallelisiere statt zu paralysieren!

Anhand kleiner Beispiele in Python erarbeiten wir uns eine Programmgrundlage, die wir nach und nach erweitern und optimieren, bis wir sie am Ende als Simulation auf dem Rechencluster laufen lassen können.

Dabei ist kein schwarzer Gürtel in Programmierung nötig, aber gewisse Kenntnisse erleichtern sicher den Einstieg. Wir arbeiten auf einer Jupyterhub, für die lediglich ein Browser und ein gültiger ZDV-Account benötigt wird. Es muss also nichts installiert werden.

Literatur:

C.R. Harris et al., 2020, *Array programming with NumPy*, Nature, 585, pp.357–362.
W.H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (2007).
T.H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms,* The MIT Press (2001).
K. Mehlhorn, S. Näher *LEDA – A platform for combinatorial and geometric computing,* in: CACM (1995).

LEGENDE
hellgelb: Grundvorlesungen
orange: Aufbauvorlesungen
rot: derzeit jährlich ang. Vertiefungsyzklen
grau: unregelm. ang. Vertiefungsyzklen
getricherlter Pfeil: ist hilfreich
grauer Pfeil: als Voraussetzung dringend empfohlen
schwarzer Pfeil/Linie: Ist Voraussetzung
LAG1/2 Ana1/2 ist Voraussetzung für alle weiteren LV

BSc/MSc Mathematik Mainz