2. Übung zur Vorlesung

Algebra I: Körper, Ringe, Moduln

im Wintersemester 2015/2016

Aufgabe 1 (Lineare Kongruenzen) — Bestimme alle ganzzahligen Lösungen der simultanen Kongruenz

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & 1 & \mod 7 \\ x & \equiv & 1 & \mod 10 \\ 5x & \equiv & 2 & \mod 13. \end{array}$$

Aufgabe 2 (Partialbruchzerlegung) — Es sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring und $x = \frac{r}{s}$ ein nicht-triviales Element im Quotientenkörper $K = Q(R)$, dessen Nenner in gekürzter Darstellung eine Primfaktorzerlegung $s = p_1^{e_1} \cdots p_l^{e_l}$ besitzt. Zeige, dass sich x immer schreiben lässt als

$$x = \frac{a_1}{p_1^{e_1}} + \ldots + \frac{a_l}{p_l^{e_l}}$$

mit $p_i^{e_i} \nmid a_i$. Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\frac{4x-10}{x^2-6x+8}$ in $\mathbb{C}[x]$ und von $\frac{131}{182}$ in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (Lokalisierungen I) — Es sei R ein kommutativer Ring.

(a) Zeige, dass jede Inklusion zweier multiplikativ abgeschlossener Teilmengen $S \subset S'$ immer eine Ringabbildungen $S^{-1}R \to (S')^{-1}R$ zwischen den Lokalisierungen induziert.

(b) Was sind die nilpotenten Elemente in $S^{-1}R$?

(c) Ein Ideal $I \subset R$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R \setminus I$ multiplikativ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (Lokalisierungen II) — Es sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge eines kommutativen Rings. Die *Saturierung* von S ist die Menge

$$S' := \{r \in R \mid \exists s \in R : rs \in S\}.$$

Zeige, dass S' eine multiplikativ abgeschlossene Menge ist die S enthält und weiter, dass die induzierte Abbildung $S^{-1}R \to (S')^{-1}R$ ein Isomorphismus von Ringen ist.
Bestimme alle multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Welche davon sind saturiert (d. h. gleich ihrer Saturierung)? Was ist jeweils die Lokalisierung? Bestimme alle saturierten multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sowie die zugehörigen Lokalisierungen.

Aufgabe 5 (Moebiussche Umkehrformeln) — Man definiert die Möbiusfunktion $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch $\mu(n) = (-1)^r$, wenn $n = p_1 \cdots p_r$ für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$, und $\mu(n) = 0$ in allen anderen Fällen. Insbesondere ist also $\mu(1) = 1$. Zeige, dass

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und, dass für beliebige Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to A$ in eine abelsche Gruppe A die Formeln

(a) $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$

(b) $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$

äquivalent sind. Vergleiche dies mit den Formeln für die Eulersche Phi-Funktion aus der Vorlesung,

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \qquad \varphi(n) = n \prod_{p|n \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Zusammenhang?