3. Übung zur Vorlesung

# Algebra I: Körper, Ringe, Moduln

im Wintersemester 2015/2016

**Aufgabe 1** — Beweise, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(a) $x^2 + 343x + 350$, $x^3 - 6x^2 + 12x + 4$, $8x^3 - 6x + 1$, $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 49x^2 + 248x + 945$ in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) $x^2 + y^2 - 1 \in K[x, y]$ für einen Körper $K$ der Charakteristik $\neq 2$. Was hat die Aufgabe überhaupt mit der Charakteristik zu tun, und was passiert, wenn man die Forderung fallen lässt?

(c) $16y^8 + y^2 - 8xy^4 + x^2 + 1$ in $\mathbb{C}[x, y]$.

**Aufgabe 2** — Es seien $a_1, \ldots, a_m$ paarweise verschiedene ganze Zahlen und $g \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad $< m/2$. Zeige, dass das Polynom

$$f := (X - a_1) \cdot \ldots \cdot (X - a_m) \cdot g - 1$$

entweder irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ oder $-f$ ein Quadrat ist. *Hinweis: Ist $f = f_1 \cdot f_2$, so betrachte $f_1^2$, $f_2^2$ und $f_1 + f_2$ an den Stellen $a_i$.*

**Aufgabe 3** — Zeige für einen kommutativen Ring $A$, dass

(a) $A$ nullteilerfrei $\Rightarrow$ $A[x]$ nullteilerfrei.

(b) $A$ nullteilerfrei $\Rightarrow$ $(A[x])^\times = A^\times$.

**Aufgabe 4** — Beweise die folgenden Aussagen.

- Der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ besitzt unendlich viele Primzahlen (Euklid).
- Für einen Körper $k$ besitzen die Polynomringe $k[x_1, \ldots, x_n]$ unendlich viele nicht-assoziierte Primelemente.

**Aufgabe 5** — Zeige für eine natürliche Zahl $n$ und eine Primzahl $p$ die Gleichheit

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

**Aufgabe 6** — Zerlege das Polynom $x^4 + 1$ in seine irreduziblen Faktoren, und zwar in den Ringen $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{C}[x]$.