

Analysis II

Vorlesung im Sommersemester 2003

Manfred Lehn

Mainz, 5. August 2003

(redigierte Fassung vom 13. August 2011: kleine Korrekturen,
neue Schriftart, neue Bilder, keine Textänderungen)

Inhaltsverzeichnis

1	Topologische Grundbegriffe	1
1.1	Skalarprodukte	2
1.2	Normen	6
1.3	Metrische Räume	13
1.4	Topologische Räume	18
1.5	Stetige Abbildungen	21
1.6	Kompakte Räume	23
1.7	Äquivalenz von Normen	28
2	Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$	32
2.1	Richtungsableitungen	32
2.2	Höhere Ableitungen	40
2.3	Taylorformel und Anwendung	45
2.4	Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher	48
3	Implizite Funktionen	52
3.1	Der Banachsche Fixpunktsatz	52
3.2	Fixpunktgleichungen	54
3.3	Satz über implizite Funktionen	56
3.4	Satz von der lokalen Umkehrbarkeit	64
3.5	Extrema mit Nebenbedingungen	67
4	Differentialgleichungen	72
4.1	Elementare Lösungsmethoden	72
4.1.1	Trennung der Variablen	80
4.2	Existenz- und Eindeigkeitssätze	83
4.2.1	Vorbereitungen	85
4.2.2	Das Iterationsverfahren	88
4.2.3	Exkurs über Zusammenhangsbegriffe	93
4.2.4	Maximale Lösungen	95
4.3	Komplexe Differentialgleichungen	97
4.4	Differentialgleichungen höherer Ordnung	98
4.5	Lineare Differentialgleichungssysteme	100
4.6	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	102
4.7	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	104
4.7.1	Die gedämpfte harmonische Schwingung	108

5	Vervollständigungen	113
5.1	Vervollständigungen metrischer Räume	113
5.2	Vervollständigungen normierter Räume	118
5.3	Vervollständigungen bewerteter Körper	118
5.3.1	Die reellen Zahlen	121
5.3.2	Die p -adischen Zahlen	121

1 Topologische Grundbegriffe

Im ersten Teil der Vorlesung haben wir uns mit reellen und komplexen Zahlen beschäftigt. Ein zentraler Punkt war die präzise mathematische Formulierung davon, was es bedeuten soll, dass eine Folge von Zahlen sich einer gegebenen Zahl beliebig genau nähert, d.h. gegen diese Zahl konvergiert. Der Konvergenzbegriff war entscheidend für die Definition der Stetigkeit einer Funktion und aller anderen analytischen Begriffe, wie der Ableitung oder des Integrals, bei denen eine Größe zunächst ungefähr hingeschrieben wird, etwa die Tangentensteigung als Steigung der Sekante oder das Integral als Ober- oder Untersumme, bevor man den entscheidenden Grenzübergang vornimmt.

In diesem zweiten Semester wollen wir uns aus der Eindimensionalität lösen und Analysis und Geometrie auf höherdimensionalen Gebilden betreiben. So hängt die Lufttemperatur als Funktion des Ortes eben von drei räumlichen Koordinaten ab und die Temperatur einer eingeschlossenen Gasmenge von Druck und Volumen. Umgekehrt müssen wir die Bahn eines Massenpunktes im Anschauungsraum durch drei Funktionen der Zeit beschreiben.

Wir wollen allgemeiner Differentialrechnung für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ betreiben. Dafür brauchen wir einen Konvergenzbegriff für Folgen im $\mathbb{R}^n$. Wir gehen spätestens hier von einer algebraischen zu einer geometrischen Sprechweise über und sprechen von Punkten statt von Zahlen. Wir können alle Definitionen aus der Analysis I sofort übertragen, sobald wir wissen, was ε -Umgebungen sein sollen. Und was das sein wird, ist nicht schwer zu erraten, sobald wir einen Abstandsbegriff für Punkte im $\mathbb{R}^n$ haben.

In der euklidischen Ebene ist der Abstand zweier Punkte mit den Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) bekanntlich durch den Ausdruck

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

gegeben. Das ist der Satz des Pythagoras. Im Raum geht es genauso, und die Verallgemeinerung für den $\mathbb{R}^n$ springt ins Auge. Tatsächlich hat der Anschauungsraum eine weitere Eigenschaft: Wir können nicht nur den Abstand zweier Punkte angeben, sondern auch den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden. Mathematisch abstrahieren wir diese Erfahrungen zum Begriff des Skalarproduktes. Vektorräume mit Skalarprodukt werden im ersten Unterabschnitt dieses Kapitels besprochen. Die prominentesten Beispiele sind der $\mathbb{R}^n$ und der Raum der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall. (Dieses letzte Beispiel werden wir später beträchtlich verallgemeinern.)

Wir haben aber bereits oben gesehen, dass wir für die Diskussion von Konvergenz gar nicht alle Informationen benötigen, die ein Skalarprodukt bereitstellt. Wenn wir nur noch die Länge eines Vektors zurückbehalten und die Eigenschaften des Längen-

begriffs axiomatisieren, erhalten wir den Begriff einer Norm. Wir haben die Nützlichkeit des Normbegriffs bereits im letzten Semester gesehen, als wir über gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen gesprochen haben.

Die Abstraktion geht aber weiter: Wenn wir nur noch über Abstände reden, so kommt es gar nicht mehr darauf an, dass der Raum, in dem wir Konvergenz betrachten, ein Vektorraum ist. Über Konvergenz von Punktfolgen zu reden, ist sicher auch dann sinnvoll, wenn die Punkte auf einer Kugeloberfläche oder irgendeiner anderen gekrümmten Fläche liegen, obgleich es sinnlos wäre, solche Punkte addieren oder mit einem Skalar multiplizieren zu wollen. Die axiomatische Definition dessen, was man von einem Abstandsbegriff auf einer beliebigen Menge erwarten sollte, führt auf den Begriff des metrischen Raumes.

Noch ist der letzte Schritt nicht getan. Wenn wir bei dem Bild einer Punktfolge auf einer Kugeloberfläche bleiben, die gegen den Nordpol konvergiert, so ändert sich anschaulich an dieser Konvergenz gar nichts, wenn wir die Kugel ein wenig aufblasen oder, gesetzt, sie wäre aus Gummi, etwas verformen und auseinander ziehen. Übrig bleibt nur noch der Umgebungsbegriff. So landen wir schließlich beim Begriff des topologischen Raumes. Aus Gründen der Einfachheit stellen wir aber nicht Umgebungen, sondern offene Mengen an den Anfang der Definition.

Dies gibt die Marschrichtung für die folgenden Abschnitte an. Wir gehen vom Speziellen zum Allgemeinen, von Vektorräumen mit Skalarprodukt zu topologischen Räumen. Auf jeder allgemeineren Ebene gilt etwas weniger als vorher. Dafür sind umgekehrt alle Sätze, die im allgemeinen bewiesen werden, im speziellen erst recht wahr, und das ist der Witz.

1.1 Skalarprodukte

Definition 1.1 — Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt auf V , wenn b die folgenden Eigenschaften hat:

1. b ist bilinear, d.h. für alle $v, v_1, v_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt
$$b(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v) = \lambda_1 b(v_1, v) + \lambda_2 b(v_2, v),$$
$$b(v, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 b(v, v_1) + \lambda_2 b(v, v_2);$$
2. b ist symmetrisch, d.h. für alle $v, v' \in V$ gilt $b(v, v') = b(v', v)$;
3. b ist positiv definit, d.h. es gilt $b(v, v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Üblicherweise werden Skalarprodukte mit Klammern geschrieben, also zum Beispiel (v, w) oder $\langle v, w \rangle$ oder $\langle v, w \rangle$.

Beispiel 1.2 — Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird für $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ und $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ durch

$$\langle x, y \rangle := x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ein Skalarprodukt definiert, das sogenannte Standardskalarprodukt. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, so betrachten wir auf dem $\mathbb{R}^n$ stets dieses Skalarprodukt.

Das ist aber reine Konvention. Es gibt nämlich noch viele andere Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^n$, die alle im Prinzip zum Standardskalarprodukt gleichwertig sind. Sie lassen sich alle folgendermaßen erhalten: Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine $(n \times n)$ -Matrix. Die Abbildung

$$a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(x, y) := x^t A y = \sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} y_j$$

ist bilinear. Sie ist ein Skalarprodukt, wenn A die folgenden Bedingungen erfüllt:

A ist symmetrisch, d.h. $A = A^t$ ($\Leftrightarrow A_{ij} = A_{ji}$ für alle i, j), und positiv definit, d.h. $x^t A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Um zu entscheiden, ob A positiv definit ist, hat man das folgende Kriterium:

Satz 1.3 (Hurwitz¹-Kriterium) — Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn $\det(A^{(k)}) > 0$ für jede der $(k \times k)$ -Matrizen

$$A^{(k)} = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Beweis. Lineare Algebra. □

Beispiel 1.4 — Es sei $V = \mathcal{C}^0([a, b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, $a < b$. Wir definieren für Funktionen $f, g \in V$ den Ausdruck:

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Aus den Rechenregeln für das Integral folgt, dass $(-, -)$ bilinear ist. Außerdem ist die Symmetrie $(f, g) = (g, f)$ offensichtlich. Tatsächlich ist $(-, -)$ ein Skalarprodukt auf V . Dazu müssen wir noch nachweisen, dass $(-, -)$ positiv definit ist, d.h. wir müssen zeigen: Ist f nicht die Nullfunktion, so gilt

$$(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx > 0.$$

Das sieht man so: f ist nach Annahme nicht die Nullfunktion. Also gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ so, dass $f(x_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f^2 gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

¹ Adolf Hurwitz, * 26.3.1859 † 18.11.1919.

$f(x)^2 > \frac{1}{2}f(x_0)^2$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap [a, b]$. Definieren wir die Funktion g durch die Vorschrift: $g(x) = \frac{1}{2}f(x_0)^2$ für $x \in U_\varepsilon(x_0)$, und $g(x) = 0$ sonst, so gilt $f(x)^2 \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Die Funktion g ist auf $[a, b]$ integrierbar. Man erhält wegen der Monotonie des Integrals:

$$(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx \geq \int_a^b g(x) dx = \frac{1}{2}f(x_0)^2 \cdot \ell > 0,$$

wobei ℓ die Länge des Intervalls $U_\varepsilon(x_0) \cap [a, b]$ ist. Das reicht. $\square$

Skalarprodukte gestatten die Definition von Längen von Vektoren und von Winkeln zwischen Vektoren.

Definition 1.5 — Es sei $(-, -)$ ein Skalarprodukt auf V . Für jeden Vektor $v \in V$ heißt

$$\|v\| := \sqrt{(v, v)}$$

die Länge oder euklidische Norm von v .

Satz 1.6 — Es sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $(-, -)$ und zugehöriger euklidischer Norm $\| - \|$. Dann gilt für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.
2. $\|v\| \geq 0$, und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
4. (Cauchy²-Schwarz³-Ungleichung)

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Außerdem gilt Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. 1. und 2. ergeben sich sofort aus den Eigenschaften des Skalarproduktes.

4. $\Rightarrow$ 3.: Es seien $v, w \in V$ beliebig. In der zweiten Zeile benutzen wir die Bilinearität des Skalarproduktes, in der dritten die Symmetrie und in der vierten die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= (v + w, v + w) \\ &= (v, v) + (v, w) + (w, v) + (w, w) \\ &= \|v\|^2 + 2 \cdot (v, w) + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

²Baron Augustin-Louis Cauchy * 21. August 1789 † 23. Mai 1857

³Hermann Amandus Schwarz

Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel und sind fertig. Allerdings müssen wir noch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen.

Zu 4.: Falls $(v, w) = 0$, ist die Behauptung sicher wahr. Es sei also $(v, w) \neq 0$. Dann gilt auch $v, w \neq 0$ und $\|v\|, \|w\| \neq 0$. Nach 2. gilt für jede reelle Zahl t :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v + tw\|^2 = \|v\|^2 + 2t(v, w) + t^2\|w\|^2 \\ &= \left(t\|w\| + \frac{(v, w)}{\|w\|} \right)^2 + \frac{1}{\|w\|^2} (\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - (v, w)^2) \end{aligned}$$

Speziell für $t = t_0 := -\frac{(v, w)}{\|w\|^2}$ verschwindet das erste Quadrat, es bleibt

$$0 \leq \frac{1}{\|w\|^2} (\|v\|^2 \|w\|^2 - (v, w)^2)$$

Daraus ergibt sich sofort die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Gilt sogar Gleichheit, d.h.

$$|(v, w)| = \|v\| \cdot \|w\|,$$

so folgt

$$\|v + t_0 w\|^2 = 0,$$

und wegen Eigenschaft 2. ergibt sich $v + t_0 w = 0$. Demnach sind v und w linear abhängig. Gilt andererseits $v = \lambda w$, so folgt

$$|(v, w)| = |(\lambda w, w)| = |\lambda| \cdot (w, w) = |\lambda| \cdot \|w\|^2 = \|v\| \cdot \|w\|.$$

Nachbemerkung: Die Punkte $v + tw$, $t \in \mathbb{R}$, liegen auf der Geraden, die durch den Aufpunktvektor v und den Richtungsvektor w bestimmt ist. $\|v + tw\|$ ist der Abstand des Geradenpunktes vom Ursprung. Der Punkt $v + t_0 w$ ist derjenige Geradenpunkt, der den kürzesten Abstand vom Ursprung hat. $\square$

Bemerkung 1.7 — Für den wichtigen Spezialfall des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^n$ kann man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung samt Zusatz auch wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - (x, y)^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{j=1}^n y_j^2 - \left(\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell \right)^2 \\ &= \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Gleichheit tritt in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung genau dann ein, wenn die Summe in der letzten Zeile verschwindet. Dazu müssen aber alle Ausdrücke

$$x_i y_j - x_j y_i = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$

einzelnen verschwinden. Nach einem Kriterium der Linearen Algebra passiert dies genau dann, wenn die nur aus den Spaltenvektoren x und y gebildete $(n \times 2)$ -Matrix den Rang ≤ 1 hat, d.h. wenn die beiden Vektoren x und y linear abhängig sind. $\square$

Sind $v, w \neq 0$, so gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$-1 \leq \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

Nun ist die Abbildung $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv. Wir können also auf den Bruch die Umkehrabbildung $\arccos$ anwenden.

Definition 1.8 (Winkel und Orthogonalität) —

1. Sind $v, w \in V \setminus \{0\}$, so heißt

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \in [0, \pi]$$

der Winkel zwischen v und w .

2. Zwei Vektoren $v, w \in V$ stehen senkrecht aufeinander (oder sind zueinander orthogonal) bezüglich $(-, -)$, in Zeichen: $v \perp w$, wenn $(v, w) = 0$.

Mit dieser Bezeichnung kann man also schreiben:

$$(v, w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \angle(v, w).$$

Aber das ist wohl gemerkt nur eine Umschreibung der Definition des Winkels.

Beispiel 1.9 — Im $\mathbb{R}^4$ steht der Vektor $x = (1, 2, -2, 3)$ senkrecht auf dem Vektor $y = (1, 2, -2, -3)$, denn $\langle x, y \rangle = 1 + 4 + 4 - 9 = 0$. Im Vektorraum $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ steht der Vektor $\sin$ senkrecht auf dem Vektor $\cos$, denn

$$(\sin, \cos) = \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

1.2 Normen

Definition 1.10 — Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn p die folgenden Eigenschaften hat:

1. Homogenität: $p(\lambda v) = |\lambda| \cdot p(v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$.
2. Positivität: $p(v) \geq 0$ für alle $v \in V$, und $p(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.
3. Dreiecksungleichung: $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ für alle $v, w \in V$.

Wenn statt 2. nur die schwächere Bedingung $p(v) \geq 0$ für alle $v \in V$ erfüllt ist, heißt p Halbnorm. Ein Vektorraum mit fest gewählter Norm heißt normierter Raum.

Beispiel 1.11 — Im $\mathbb{R}^n$ ist die euklidische Länge

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

eine Norm. Ist allgemeiner V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $(-, -)$, so ist

$$\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf V . Das steht in Satz 1.6.

Beispiel 1.12 — Im $\mathbb{R}^n$ sind auch $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$ und $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ Normen. In beiden Fällen ist die Homogenität und die Positivität klar. Nachzurechnen bleibt jeweils die Dreiecksungleichung. Da nun für Vektoren x und y und jeden Index i die gewöhnliche Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ gilt:

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|,$$

folgt auch

$$\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i| \mid i\} \leq \max\{|x_i| \mid i\} + \max\{|y_i| \mid i\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

und

$$\|x + y\|_1 = \sum_i |x_i + y_i| \leq \sum_i |x_i| + \sum_i |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Beispiel 1.13 — Es sei $p > 1$. Dann ist

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die sogenannte p -Norm. Der Beweis ist etwas aufwendiger und wird weiter unten geführt (siehe Satz 1.18 und das folgende Korollar). Speziell für $p = 2$ erhält man wieder die euklidische Norm. Für beliebige p interpolieren die p -Normen zwischen der 1-Norm und der ∞ -Norm. Genauer gilt:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Das sieht man so: Für jedes p gilt

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\} \leq \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \max\{|x_i|\} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty,$$

und für $p \rightarrow \infty$ geht $n^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$.

Bemerkung 1.14 — Jedes Skalarprodukt $(-, -)$ bestimmt eine Norm

$$\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}$$

und lässt sich umgekehrt aus dieser Norm zurückgewinnen, denn

$$(v, w) = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$

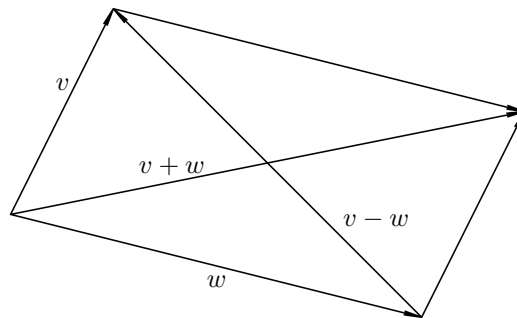
Dieser Vorgang heißt Polarisierung. Aber nicht jede Norm entsteht auf diese Weise. Der folgende Satz gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium.

Satz 1.15 — Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Genau dann existiert ein Skalarprodukt $(-, -)$ mit $\|v\|^2 = (v, v)$ für alle $v \in V$, wenn die Norm die Parallelogrammgleichung

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

für alle $v, w \in V$ erfüllt.

In Worten ausgedrückt sagt die erste Hälfte des Satzes: In einem Parallelogramm in einem Vektorraum mit Skalarprodukt ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten des Parallelogramms.



Der Satz und sein Beweis werden in der Vorlesung nicht weiter gebraucht. Ich gebe ihn hier nur der Vollständigkeit halber an.

Beweis. Die eine Richtung ist einfach: Ist $(-, -)$ ein Skalarprodukt, so gilt nach Definition der zugehörigen Norm:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= (v + w, v + w) + (v - w, v - w) \\ &= \left((v, v) + 2(v, w) + (w, w) \right) + \left((v, v) - 2(v, w) + (w, w) \right) \\ &= 2(v, v) + 2(w, w) = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass die Parallelogrammgleichung gilt. Wir definieren durch Polarisierung den Ausdruck

$$(v, w) = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$

Es ist klar, dass dieser Ausdruck symmetrisch ist. Außerdem ist $(v, v) = \|v\|^2$, so dass auch die Positivität gesichert ist. Es bleibt zu zeigen, dass (v, w) in beiden Variablen linear ist, und wegen der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass (v, w) als Funktion von w bei festem v linear ist. Wir zeigen der Reihe nach:

1. Für alle $x, y \in V$ gilt $(v, x) + (v, y) = (v, x + y)$.
2. Für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $x \in V$ gilt $(v, \lambda x) = \lambda(v, x)$.
3. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$ gilt $(v, \lambda x) = \lambda(v, x)$.

Ad 1: Nach Definition von $(-, -)$ gilt

$$\begin{aligned}
 2(v, a + b) + 2(v, a - b) &= \|v + a + b\|^2 - \|v\|^2 - \|a + b\|^2 \\
 &\quad + \|v + a - b\|^2 - \|v\|^2 - \|a - b\|^2 \\
 &= (\|v + a + b\|^2 + \|v + a - b\|^2 - 2\|v + a\|^2 - 2\|b\|^2) \\
 &\quad - (\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 - 2\|a\|^2 - 2\|b\|^2) \\
 &\quad + 2(\|v + a\|^2 - \|v\|^2 - \|a\|^2) \\
 &= 4(v, a),
 \end{aligned}$$

denn die beiden ersten geklammerten Terme sind Null nach der Parallelogrammgleichung, und der dritte Term ist gerade $2(v, a)$. Das heißt, wir haben gezeigt: Für beliebige Vektoren v, a, b gilt

$$(v, a + b) + (v, a - b) = 2(v, a). \quad (1.1)$$

Wir spezialisieren zu $a = b$ und finden wegen $(v, 0) = 0$ dass

$$(v, 2a) = 2(v, a). \quad (1.2)$$

Andererseits gilt mit $a = (x + y)/2$ und $b = (x - y)/2$:

$$(v, x) + (v, y) = 2(v, \frac{1}{2}(x + y)) = (v, x + y). \quad (1.3)$$

Ad 2: Aus (1.3) folgt

$$(v, \lambda x) = \lambda(v, x) \quad (1.4)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{N}$. Andererseits ergibt sich aus $(v, -x) + (v, x) = (v, -x + x) = (v, 0) = 0$, dass $(v, -x) = -(v, x)$. Insbesondere gilt (1.4) für alle $\lambda \in \mathbb{Z}$. Ist $q \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$q(v, (p/q)x) = (v, q(p/q)x) = (v, px) = p(v, x),$$

und das bedeutet

$$(v, \frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}(v, x).$$

Damit gilt (1.4) sogar für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Ad 3: Aus der Definition von (v, x) und der Dreiecksungleichung gewinnt man die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} |(v, x)| &= \frac{1}{2} \left| \|v + x\|^2 - \|v\|^2 - \|x\|^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| (\|v\| + \|x\|)^2 - \|v\|^2 - \|x\|^2 \right| = \|v\| \|x\|. \end{aligned}$$

Insbesondere geht $(v, x) \rightarrow 0$ für $\|x\| \rightarrow 0$. Ist λ_n eine Folge rationaler Zahlen, die gegen ein vorgegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert, so können wir wie folgt argumentieren:

$$\begin{aligned} \lambda(v, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(v, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v, \lambda_n x) \\ &= (v, \lambda x) + \lim_{n \rightarrow \infty} (v, (\lambda_n - \lambda)x) = (v, \lambda x) + 0. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Wir kehren zu den p -Normen zurück. Es sei $p > 1$, und es sei $q > 1$ die eindeutig bestimmte Zahl mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

oder äquivalent

$$(p-1) \cdot (q-1) = 1.$$

q heißt der zu p konjugierte Exponent. Wir hatten im vorigen Abschnitt die p -Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert. Es bleibt allerdings noch zu zeigen, dass dies wirklich eine Norm ist. Dies wollen wir nun nachholen. Es ist klar, dass $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und dass $\|x\|_p > 0$ für alle $x \neq 0$. Aufwendiger ist der Nachweis der Dreiecksungleichung. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung.

Lemma 1.16 (Verallgemeinerte Youngsche⁴ Ungleichung) —

Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig, monoton wachsend und bijektiv. Ferner sei g die Umkehrfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy.$$

Beweis. 1. Fall: $b = f(a)$. Jede Zerlegung $\mathcal{X} = (0 = x_0, \dots, x_n = a)$ von $[0, a]$ entspricht einer Zerlegung $\mathcal{Y} = (0 = y_0, \dots, y_n = b)$ von $[0, b]$ mit $y_i = f(x_i)$. Da f und g monoton sind, lassen sich Unter- und Obersummen direkt hinschreiben:

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) y_{i-1}, \quad \mathcal{O}(f, \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) y_i,$$

⁴William Henry Young, * 20.10.1863 † 7.7.1942.

$$\mathcal{U}(g, \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1})x_{i-1}, \quad \mathcal{O}(g, \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1})x_i.$$

Es folgt:

$$\mathcal{O}(f, \mathcal{X}) - \mathcal{U}(f, \mathcal{X}) = \mathcal{O}(g, \mathcal{Y}) - \mathcal{U}(g, \mathcal{Y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) =: \delta.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(f, \mathcal{X}) + \mathcal{U}(g, \mathcal{Y}) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})y_i + \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1})x_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_{i-1} y_{i-1}) \\ &= x_n y_n - x_0 y_0 = ab. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| ab - \int_0^a f(x)dx - \int_0^b g(y)dy \right| \\ \leq \left| \int_0^a f(x)dx - \mathcal{O}(f, \mathcal{X}) \right| + \left| \int_0^b g(y)dy - \mathcal{U}(g, \mathcal{Y}) \right| \\ \leq \delta + \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Für hinreichend feine Zerlegungen $\mathcal{X}$ wird die Differenz beliebig klein. Also bleibt

$$ab = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy.$$

2. Fall: $b < f(a)$. Das bedeutet : $a > g(b) =: c$. Gemäß dem gerade behandelten Fall gilt

$$cb = \int_0^c f(x)dx + \int_0^b g(y)dy.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy - ab &= \left(\int_0^c f(x)dx + \int_0^b g(y)dy - cb \right) \\ &\quad + \int_c^a f(x)dx - (a-c)b \geq 0, \end{aligned}$$

weil $f(x) \geq f(c) = b$ für alle $x \geq c$.

3. Fall: $b > f(a)$. Geht analog mit vertauschten Rollen. □

Folgerung 1.17 — Für alle $a, b \geq 0$ gilt $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

Beweis. Lemma 1.16 mit $f(x) = x^{p-1}$ und $g(y) = y^{q-1}$ □

Satz 1.18 — Für $p, q > 1$ gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ bestehen die folgenden Ungleichungen:

1. (Youngsche Ungleichung)

$$(x, y) \leq \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q$$

2. (Höldersche⁵ Ungleichung)

$$(x, y) \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

3. (Minkowskische⁶ Ungleichung)

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Beweis. Zu 1.: Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$$

Aufsummieren gibt die Behauptung.

Zu 2.: Falls $(x, y) = 0$ ist alles klar. Wir nehmen also an, dass $(x, y) \neq 0$. Dann ist auch $x, y \neq 0$ und $\|x\|_p, \|y\|_q \neq 0$. Wir setzen $\tilde{x} = \frac{1}{\|x\|_p}x$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\|y\|_q}y$. Diese neuen Vektoren sind normiert, d.h. $\|\tilde{x}\|_p = 1$ und $\|\tilde{y}\|_q = 1$. Auf diese Vektoren wenden wir die Youngsche Ungleichung an:

$$\frac{(x, y)}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \frac{1}{p}\|\tilde{x}\|_p^p + \frac{1}{q}\|\tilde{y}\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Multipliziert man mit dem Nenner der linken Seite, so folgt die Behauptung.

Zu 3.: Es sei $z = x + y$. Falls $\|z\|_p = 0$, so ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also ohne Einschränkung an, dass $0 \neq \|z\|_p^p = \sum |z_i|^p$. Wegen der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ gilt $|z_i| \leq |x_i| + |y_i|$. Damit folgt:

$$\sum |z_i|^p \leq \sum |z_i|^{p-1} \cdot |x_i| + \sum |z_i|^{p-1} \cdot |y_i|.$$

⁵Otto Ludwig Hölder, * 22.12.1859 † 29.8.1937.

⁶Hermann Minkowski, * 22.6. 1864 † 12.1.1909.

Wir wenden die Höldersche Ungleichung auf jeden der beiden Summanden an:

$$\begin{aligned}\|z\|_p^p &\leq \left(\sum |z_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |z_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum |z_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot (\|x\|_p + \|y\|_p) \\ &= \|z\|_p^{p-1} \cdot (\|x\|_p + \|y\|_p).\end{aligned}$$

Da $\|z\|_p \neq 0$ nach der eingangs gemachten Annahme, können wir kürzen und finden

$$\|z\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

□

Folgerung 1.19 — Für jedes $p > 1$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

□

Bemerkung 1.20 — Für $p = 2$ erhält man die euklidische Norm zurück

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Die Höldersche Ungleichung spezialisiert sich zur Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Dagegen ist $\|\cdot\|_p$ für $p < 1$ keine Norm. Was geht schief?

1.3 Metrische Räume

Definition 1.21 — Es sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X , wenn d die folgenden Eigenschaften hat. Für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$, und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Eine Menge mit fest gewählter Metrik heißt metrischer Raum. Die Elemente eines metrischen Raumes heißen Punkte.

Beispiel 1.22 — Im $\mathbb{R}^n$ ist der euklidische Abstand

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

eine Metrik. Ist allgemeiner $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist $d(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V . Dies ist eine Konsequenz der Eigenschaften einer Norm.

Beispiel 1.23 — Ist (X, d) ein metrischer Raum und $X' \subset X$ eine Teilmenge, so ist $d' := d|_{X' \times X'}$ eine Metrik auf X' . Zum Beispiel liefert die euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ durch Einschränkung eine Metrik auf der Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Beispiel 1.24 — Es sei X eine beliebige Menge. Die diskrete Metrik auf X ist durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert.

Beispiel 1.25 — Es sei Σ eine endliche Menge, die wir Alphabet nennen. Die Menge $X = \Sigma^n$ besteht dann aus allen Wörtern der Länge n mit Zeichen aus dem Alphabet Σ . Wir definieren auf X den sogenannten Hammingabstand⁷ durch

$$d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|,$$

d.h. der Abstand zweier Wörter ist die Anzahl der Stellen, an denen sie sich unterscheiden. Diese Metrik spielt in der Codierungstheorie eine wesentliche Rolle.

Definition 1.26 — Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von x .

2. Eine Menge $U \subset X$ heißt Umgebung von x , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $U_\varepsilon(x) \subset U$.
3. Eine Menge $V \subset X$ heißt offen (bezüglich der Metrik d), wenn V eine Umgebung von jedem $x \in V$ ist.

Lemma 1.27 — Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Ist $U \subset U'$ und ist U eine Umgebung von x , so ist auch U' eine Umgebung von x .
2. Sind U, U' Umgebungen von x , so ist auch $U \cap U'$ eine Umgebung von x .

Beweis. Zu 2.: Es seien U, U' Umgebungen von x . Dann gibt es $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U$ und $U_{\varepsilon'}(x) \subset U'$. Setze $\eta = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. Dann gilt $U_\eta(x) \subset U \cap U'$. $\square$

⁷Richard Wesley Hamming, * 11.2.1915 † 7.1.1998

Lemma 1.28 — Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(x)$ offen.
2. U ist genau dann eine Umgebung von x , wenn es eine offene Menge V mit $x \in V \subset U$ gibt.

Beweis. Zu 1.: Es sei $y \in U_\varepsilon(x)$ und $\varepsilon' := d(x, y) < \varepsilon$. Für beliebiges $z \in U_{\varepsilon-\varepsilon'}(y)$ folgt:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon' + (\varepsilon - \varepsilon') = \varepsilon.$$

Das zeigt, dass $z \in U_\varepsilon(x)$ und somit dass $U_{\varepsilon-\varepsilon'}(y) \subset U_\varepsilon(x)$. Folglich ist $U_\varepsilon(x)$ offen. $\square$

Zu 2.: Ist V offen mit $x \in V \subset U$, so ist V Umgebung von x , also U erst recht. Es sei umgekehrt U eine Umgebung von x . Nach Definition existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U$, und nach Teil 1 ist $U_\varepsilon(x)$ offen.

Satz 1.29 — Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. X ist offen. Sind V_1, V_2 offen, so auch $V_1 \cap V_2$.
2. $\emptyset$ ist offen. Ist $\{V_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Mengen, so ist auch $\bigcup_{i \in I} V_i$ offen.

Beweis. Folgt sofort aus den Eigenschaften von Umgebungen. $\square$

Bemerkung 1.30 — Diese Eigenschaften offener Mengen sind fundamental. Durch Induktion bekommt man aus der ersten Aussage die allgemeinere Formulierung: Ist $\{V_i\}_{i \in I}$ eine endliche Familie offener Mengen, so ist auch $\bigcap_{i \in I} V_i$ offen. Man präge sich diesen grundsätzlichen Unterschied ein: *Endliche Durchschnitte* und *beliebige Vereinigungen* offener Mengen sind offen. Für beliebige Durchschnitte wäre diese Aussage definitiv falsch: Der Durchschnitt aller offenen Kreisscheiben $U_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ um den Ursprung mit Radius $r > 0$ besteht nur aus $\{0\}$. Aber diese einelementige Menge ist nicht offen.

Später werden wir diese Eigenschaften offener Mengen zu ihrer axiomatischen Charakterisierung benutzen.

Definition 1.31 — Es sei (X, d) ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge von Punkten in X .

1. (x_n) konvergiert gegen x , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für alle $n \geq n_0$.

2. x heißt Häufungspunkt von (x_n) , wenn es für jede Umgebung U von x unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ gibt.
3. (x_n) heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$.
4. (x_n) heißt beschränkt, wenn es ein $x \in X$ und ein $c > 0$ gibt mit $d(x, x_n) < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen 1.32 — Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Falls (x_n) konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig: Sind $x, x' \in X$ verschiedene Punkte und ist $r = \frac{1}{2}d(x, x')$, so folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$U_r(x) \cap U_r(x') = \emptyset.$$

Ein Folgenpunkt x_n kann also nicht zugleich in $U_r(x)$ und $U_r(x')$ liegen.

2. Es sei (x_n) beschränkt, etwa $d(x_n, x) < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für beliebiges $x' \in X$ folgt

$$d(x_n, x') \leq d(x_n, x) + d(x, x') \leq c + d(x, x') =: c'.$$

Es kommt also auf $x \in X$ gar nicht an.

3. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.
4. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.
5. Eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge ist selbst konvergent.
6. Ist x ein Häufungspunkt von (x_n) , so gibt es eine Teilfolge, die gegen x konvergiert: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $I_k = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_{\frac{1}{k}}(x)\}$. Dann gilt $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, und weil x ein Häufungspunkt ist, ist jede der Mengen I_k unendlich. Deshalb können wir rekursiv Zahlen $n_k, k \in \mathbb{N}$, so wählen, dass $n_{k+1} > n_k$ und $n_k \in I_k$. Es folgt $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$, und das bedeutet: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

Satz 1.33 (Bolzano⁸-Weierstraß⁹ für $\mathbb{R}^n$) — Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt einen Häufungspunkt.

Ich erinnere daran, dass wir den $\mathbb{R}^n$ immer mit der euklidischen Metrik versehen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

⁸Bernard Bolzano, * 5. Oktober 1781 in Prag, † 18. Dezember 1848 in Prag. Böhmischer Mathematiker und Religionswissenschaftler

⁹Karl Weierstraß, * 31. Oktober 1815 in Ostenfelde (Westf.), † 19. Februar 1897 in Berlin

Beweis. Wir zeigen durch Induktion nach n , dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Für $n = 1$ ist das der klassische Satz von Bolzano-Weierstraß aus Analysis I. Die Behauptung sei also wahr für $n - 1$. Gegeben sei eine beschränkte Folge (x_m) . Wir schreiben jeden Punkt x_m in der Form

$$x_m = (x'_m, x''_m) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

und erhalten Folgen (x'_m) im $\mathbb{R}^{n-1}$ und (x''_m) im $\mathbb{R}$. Da

$$\|x_m\|^2 = \|x'_m\|^2 + \|x''_m\|^2,$$

sind beide Folgen beschränkt. Nach Induktion existiert eine konvergente Teilfolge (x'_{m_k}) mit Grenzwert $x' = \lim x'_{m_k}$. Als Teilfolge einer beschränkten Folge ist x''_{m_k} beschränkt. Es gibt also eine konvergente Teilfolge $x''_{m_{k_\ell}}$ mit Grenzwert x'' . Es sei $x := (x', x'') \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\|x - x_{m_{k_\ell}}\|^2 = \|x' - x'_{m_{k_\ell}}\|^2 + \|x'' - x''_{m_{k_\ell}}\|^2 \longrightarrow 0,$$

für $\ell \rightarrow \infty$. Also konvergiert die Teilfolge $(x_{m_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ gegen x . □

Definition 1.34 — 1. Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

2. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum¹⁰.

3. Ein Vektorraum mit Skalarprodukt, der bezüglich der zugehörigen euklidischen Norm vollständig ist, heißt Hilbertraum¹¹.

Folgerung 1.35 — Der $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

Beweis. Jede Cauchyfolge ist beschränkt, besitzt also nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge und muss deshalb schon selbst konvergieren. □

Beispiel 1.36 — Der Satz über gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen lässt sich auch so ausdrücken: Der Vektorraum $C^0([a, b])$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{[a, b]} = \sup |f([a, b])|$$

ist ein Banachraum.

¹⁰Stefan Banach, * 30. März 1892 in Krakau, † 31. August 1945 in Lemberg.

¹¹David Hilbert, * 23. Januar 1862 in Königsberg, † 14. Februar 1943 in Göttingen.

1.4 Topologische Räume

Definition 1.37 — Es sei X eine Menge. Eine Teilmenge $T \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt Topologie auf X , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $X \in T$. Sind $V_1, V_2 \in T$, so ist auch $V_1 \cap V_2 \in T$.
2. $\emptyset \in T$. Ist $\{V_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen $V_i \in T$, so gilt auch $\cup_{i \in I} V_i \in T$.

Ist T eine Topologie, so heißen die Mengen $V \in T$ offen bezüglich T . Eine Menge mit einer fest gewählten Topologie heißt topologischer Raum. Die Elemente eines topologischen Raumes heißen Punkte.

Beispiel 1.38 — Ist (X, d) ein metrischer Raum, so bilden die bezüglich d offenen Mengen nach Satz 1.29 eine Topologie. Diese Topologie heißt die von d induzierte metrische Topologie. Insbesondere versehen wir den $\mathbb{R}^n$ immer mit der Topologie, die durch die euklidische Metrik gegeben ist, es sei denn, etwas anderes wird ausdrücklich gesagt.

Beispiel 1.39 — Es sei X eine beliebige Menge.

1. $\{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie, die Klumpentopologie.
2. $\mathfrak{P}(X)$ ist eine Topologie, die diskrete Topologie.

Die diskrete Topologie ist genau die metrische Topologie zur diskreten Metrik. Denn angenommen, d bezeichnet die diskrete Metrik auf X . Für einen beliebigen Punkt $x \in X$ enthält der bezüglich d offene Ball $U_{1/2}(x)$ nur ein einziges Element, nämlich x . Das bedeutet, dass alle einelementigen Mengen offen sind. Aber da beliebige Vereinigungen offener Mengen offen sind, ist jede Teilmenge von X offen. Das ist genau die diskrete Topologie.

Beispiel 1.40 — Es sei (X, T) ein topologischer Raum und $X' \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist $T' = \{X' \cap V \mid V \in T\}$ eine Topologie auf X' , die Teilraumtopologie.

Beweis. Für alle $V_i \in T$ gilt: $(V_1 \cap X') \cap (V_2 \cap X') = (V_1 \cap V_2) \cap X'$ und

$$\bigcup_i (V_i \cap X') = \left(\bigcup_i V_i \right) \cap X'.$$

□

Definition 1.41 — Es sei (X, T) ein topologischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt Umgebung von $x \in X$, wenn es eine offene Menge V mit $x \in V \subset U$ gibt.

Satz 1.42 — Es sei (X, T) ein topologischer Raum.

1. Sind U, U' Umgebungen von x , so auch $U \cap U'$.
2. Ist $U \subset U'$ und ist U Umgebung von x , so auch U' .
3. $V \subset X$ ist genau dann offen, wenn V Umgebung aller Punkte aus V ist.

Beweis. Zu 1.: Sind U, U' Umgebungen von x , so gibt es offene Mengen V, V' mit $x \in V \subset U, x \in V' \subset U'$. Der Durchschnitt $V \cap V'$ ist offen und $x \in V \cap V' \subset U \cap U'$.
 Zu 3.: Ist V offen, so ist V sicher Umgebung aller Punkte. Es sei umgekehrt V Umgebung aller Punkte von V . Dann gibt es zu jedem $x \in V$ eine offene Menge W_x mit $x \in W_x \subset V$. Es folgt $V = \bigcup_{x \in V} \{x\} \subset \bigcup_{x \in V} W_x \subset V$. Also gilt überall Gleichheit, und $V = \bigcup_{x \in V} W_x$ ist als Vereinigung offener Mengen selbst offen. $\square$

Bemerkung 1.43 — Wir übernehmen die Begriffe konvergente Folge, Grenzwert und Häufungspunkt aus den vorigen Abschnitten für einen allgemeinen topologischen Raum:

1. Eine Folge (x_n) von Punkten in X konvergiert gegen $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Man beachte, dass nach dieser Definition eine Folge gegen mehrere verschiedene Punkte konvergieren kann. Ist zum Beispiel X eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie und ist (x_n) eine Folge aus paarweise verschiedenen Punkten, so konvergiert (x_n) gegen jedes $x \in X$. In metrischen Räumen ist der Grenzwert dagegen eindeutig!
2. $x \in X$ heißt Häufungspunkt der Folge (x_n) , wenn in jeder Umgebung U von x unendlich viele Folgenglieder liegen.

Definition 1.44 — Es sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$.

1. $x \in X$ heißt Randpunkt von A , wenn für jede Umgebung U von x gilt: $U \cap A \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

$$\partial A := \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } A\}$$

heißt Rand von A .

2. $A^\circ = A \setminus \partial A$ heißt Inneres von A , und Punkte in A° heißen innere Punkte von A .
3. $\overline{A} = A \cup \partial A$ heißt Abschluss von A .
4. A heißt dicht in X , wenn $\overline{A} = X$.

Beispiel 1.45 — 1. Es sei $A = (0, 1] \subset X = \mathbb{R}$. Der Rand von A besteht nur aus den Intervallgrenzen $\partial A = \{0, 1\}$, das Innere von A ist das offene Intervall $A^\circ = (0, 1)$, und der Abschluss von A ist das abgeschlossene Intervall $\overline{A} = [0, 1]$.

2. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen liegt dicht in $\mathbb{R}$: Ist x eine beliebige reelle Zahl, so gibt es in jeder noch so kleinen ε -Umgebung von x sowohl rationale wie irrationale Zahlen. Deshalb ist jedes $x \in \mathbb{R}$ ein Randpunkt von $\mathbb{Q}$.

Lemma 1.46 — Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

1. $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
2. A° ist offen. Ist $V \subset A$ offen, so gilt $V \subset A^\circ$, d.h. A° ist die größte offene Teilmenge von A .
3. A ist offen $\Leftrightarrow A = A^\circ$.
4. $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

Beweis. 1. ist klar.

2. Es sei $V \subset A$ offen. Da $V \cap (X \setminus A) = \emptyset$, ist kein Punkt von V ein Randpunkt von A . Das zeigt $V \subset A^\circ$.

Ist $x \in A^\circ$, so gibt es eine Umgebung V von x mit $V \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Es gibt dann auch eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subset V$, also $U_x \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Das bedeutet $U_x \subset A^\circ$. Es folgt: $A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} U_x$ ist offen.

3. folgt sofort aus 2.

Zu 4.:

$$X \setminus \overline{A} = X \setminus (A \cup \partial A) = (X \setminus A) \setminus \partial A = (X \setminus A) \setminus \partial(X \setminus A) = (X \setminus A)^\circ.$$

□

Folgerung 1.47 — Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $A = \overline{A}$.
2. $X \setminus A$ ist offen.

Definition 1.48 — $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Satz 1.49 — Es sei X ein topologischer Raum.

1. $\emptyset$ ist abgeschlossen. Sind A_1, A_2 abgeschlossen, so auch $A_1 \cup A_2$.
2. X ist abgeschlossen. Ist $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, so ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

Beweis. Dies sind genau die komplementären Eigenschaften zu den Eigenschaften offener Mengen aus der Definition einer Topologie 1.37. Der Beweis besteht also nur aus der Anwendung der De Morganschen Regeln. $\square$.

1.5 Stetige Abbildungen

Definition 1.50 — Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig in $a \in X$, wenn für jede Umgebung V von $f(a)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a in X ist. f heißt stetig, wenn f in allen Punkten von X stetig ist.

Satz 1.51 — Die folgenden Aussagen über eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. Urbilder offener Mengen sind offen.
3. Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Es sei $V \subset Y$ offen. Zu zeigen ist, dass $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist. Für jedes $x \in f^{-1}(V)$ ist V eine Umgebung von $f(x)$. Nach Voraussetzung ist also $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x . Das gilt für alle $x \in f^{-1}(V)$, also ist $f^{-1}(V)$ offen.

2. $\Rightarrow$ 1.: Es sei $x \in X$ und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert eine offene Menge $V \subset Y$ mit $f(x) \in V \subset U$, und es folgt $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$. Nach Annahme ist $f^{-1}(V)$ offen in X , also $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x .

2. $\Leftrightarrow$ 3.: Für alle Teilmengen $A \subset Y$ gilt $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. $\square$

Satz 1.52 — Die folgenden Aussagen über eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen sind äquivalent:

1. f ist stetig in $a \in X$.
2. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$.
3. $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 3.: Es sei (x_n) eine Folge mit Grenzwert a . Ist U eine Umgebung von $f(a)$, so ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a . Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $x_n \in f^{-1}(U)$. Das ist äquivalent zu $f(x_n) \in U$. Es folgt: $\lim f(x_n) = f(a)$.

3. $\Rightarrow$ 2.: Wenn 2. nicht gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$ gilt: $f(U_\delta(a)) \not\subset U_\varepsilon(f(a))$. Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$.

$U_\varepsilon(f(a))$. Das bedeutet: $\lim x_n = a$, aber $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$, im Widerspruch zur Annahme.

2. $\Rightarrow$ 1.: Es sei U eine Umgebung von $f(a)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(a)) \subset U$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$. Dann folgt $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$, und wir schließen, dass $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a ist. $\square$

Satz 1.53 — Es seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen von topologischen Räumen. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis. Es sei U eine beliebige offene Menge in Z . Dann ist wegen der Stetigkeit von g auch $g^{-1}(U)$ offen in Y . Wegen der Stetigkeit von f ist $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X . Da U beliebig war, bedeutet das nach Satz 1.51, dass $g \circ f$ stetig ist. $\square$

Satz 1.54 — Es sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subset X$ ein Teilraum. Dann ist auch die Einschränkung $f|_A : A \rightarrow Y$ stetig.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für jede offene Menge $U \subset Y$ die Menge $(f|_A)^{-1}(U)$ offen in A ist. Nun gilt offenbar

$$(f|_A)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A.$$

Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen in X , und der Durchschnitt mit A ist nach Definition der Teilraumtopologie (in Beispiel 1.40) offen in A . $\square$

Satz 1.55 — Es sei X ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit Komponentenfunktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig sind.

Beweis. Die Projektion $pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, auf die i -te Komponente ist stetig. Ist nun f stetig, so folgt aus Satz 1.53, dass auch $f_i = pr_i \circ f$ stetig ist.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass alle f_i stetig sind. Es sei $x \in X$ und U eine Umgebung von $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Wir setzen $\eta := \varepsilon/\sqrt{n}$. Diese Wahl ist so getroffen, dass

$$U_\eta(f_1(x)) \times \dots \times U_\eta(f_n(x)) \subset U_\varepsilon(f(x)) \subset U.$$

Denn y liegt in dem Produkt auf der linken Seite, wenn $|y_i - f_i(x)| < \eta$ für alle i , und daraus folgt

$$\|y - f(x)\|^2 = \sum_i |y_i - f_i(x)|^2 < n\eta^2 = \varepsilon^2.$$

Aus der Stetigkeit von f_i folgt: Es gibt eine Umgebung W_i von x in X derart, dass $f_i(W_i) \subset U_\eta(f_i(x))$. Dann ist $W = W_1 \cap \dots \cap W_n$ eine Umgebung von x mit $f_i(W) \subset U_\eta(f_i(x))$ für alle i , und das bedeutet:

$$f(W) \subset U_\eta(f_1(x)) \times \dots \times U_\eta(f_n(x)) \subset U.$$

Das war zu zeigen. □

Beispiele 1.56 — 1. Die Funktionen $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

2. Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so auch $f + g$ und $f \cdot g$. Denn nach dem vorigen Satz ist zunächst die Abbildung $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ stetig, und $f + g$ bzw. $f \cdot g$ erhält man aus (f, g) durch Komposition mit den stetigen Abbildungen $+$ und $\cdot$.

3. Die Funktion $i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{-1}$, ist stetig.

4. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \neq 0$ für alle x , so ist auch die Funktion $x \mapsto 1/f(x)$ stetig, denn sie entsteht aus f durch Komposition mit der stetigen Funktion i aus 3.

Beispiel 1.57 — Alle Polynomabbildungen

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto p(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$$

sind stetig. Dabei ist $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, und die Summe läuft über eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0^n$. Man nennt $x^{\nu} := x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$ ein Monom vom Multigrad ν und Totalgrad $|\nu| := \nu_1 + \dots + \nu_n$. Die Stetigkeit von p folgt durch zweifache Induktion über die Anzahl der Summanden in p und den Totalgrad der einzelnen Monome.

1.6 Kompakte Räume

Definition 1.58 — Ein topologischer Raum X heißt Hausdorffraum, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten x und x' in X disjunkte Umgebungen U von x und U' von x' gibt.

Beispiel 1.59 — Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch: Denn sind x und x' verschieden und ist $r := d(x, x')$ ihr Abstand, so sind die offenen Bälle $U = U_{r/2}(x)$ und $U' = U_{r/2}(x')$ disjunkt, wie aus der Dreiecksungleichung folgt: Läge $y \in U \cap U'$ so hätte man den Widerspruch

$$r = d(x, x') \leq d(x, y) + d(y, x') < r/2 + r/2 = r.$$

Beispiele 1.60 — 1. Ist X Hausdorffsch und ist $A \subset X$ ein Teilraum, so ist auch A Hausdorffsch.

2. Ist X eine unendliche Menge mit koendlicher Topologie, so ist X nicht Hausdorffsch. Denn sind x und x' verschiedene Punkte und sind U und U' beliebige Umgebungen von x bzw. x' , so sind die Komplemente von U und U' endlich. Also ist auch $X \setminus (U \cap U') = (X \setminus U) \cup (X \setminus U')$ endlich. Da aber X nach Annahme eine unendliche Menge ist, muss $U \cap U'$ unendlich sein. Insbesondere können U und U' nicht disjunkt gewählt werden.

Satz 1.61 — In einem Hausdorffraum sind alle endlichen Mengen abgeschlossen.

Beweis. Es sei X ein Hausdorffraum, $a \in X$. Wir betrachten zunächst die einelementige Menge $\{a\} \subset X$. Es sei $b \in X \setminus \{a\}$. Nach Annahme gibt es disjunkte Umgebungen U von a und U' von b . Dann liegt U' ganz in $X \setminus \{a\}$. Da b beliebig war, ist die Menge $X \setminus \{a\}$ Umgebung aller ihrer Punkte und damit offen. Folglich ist $\{a\}$ abgeschlossen. Schließlich sind endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Daher sind alle endlichen Teilmengen von X abgeschlossen. $\square$

Definition 1.62 — Es sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ heißt Überdeckung von $A \subset X$, wenn $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Ist $I' \subset I$ und ist $\mathcal{U}' = \{U_i\}_{i \in I'}$ auch eine Überdeckung, so heißt $\mathcal{U}'$ eine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$. Man nennt $\mathcal{U}$ offen, wenn alle U_i offen sind, und endlich bzw. abzählbar, wenn I endlich bzw. abzählbar ist.

Definition 1.63 — Ein topologischer Raum X heißt kompakt, wenn

1. X Hausdorffsch ist, und
2. jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Ist nur 2. erfüllt, so nennt man X quasikompakt.

Beispiel 1.64 — Die offenen Intervalle $\{(n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, aber keine echte Teilfamilie überdeckt $\mathbb{R}$, denn man würde mindestens eine ganze Zahl $n \in \mathbb{R}$ verpassen. Dann kann also erst recht keine endliche Teilfamilie $\mathbb{R}$ überdecken. $\mathbb{R}$ ist *nicht* kompakt.

Beispiel 1.65 — $\{(\frac{1}{n}, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$. Aber offenbar existiert keine endliche Teilüberdeckung. Denn ist $I \subset \mathbb{N}$ endlich und $N = \max I$, so gilt

$$\bigcup_{n \in I} (1/n, 1) = (1/N, 1) \neq (0, 1).$$

Das Intervall $(0, 1)$ ist nicht kompakt.

Lemma 1.66 — 1. Ist X kompakt und $A \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum, so ist A kompakt.

2. Ist X Hausdorffsch und $A \subset X$ kompakt, so ist A abgeschlossen.

Beweis. Ad 1.: Als Teilraum eines Hausdorffraumes ist A zunächst einmal selbst wieder Hausdorffsch. Es sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von A durch offene Mengen $U_i \subset X$. Da A abgeschlossen ist, ist $U_0 := X \setminus A$ offen, und $\mathcal{U}' := \{U_i\}_{i \in I'}$ mit $I' = I \cup \{0\}$ ist eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, genügen endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}'$, um X zu überdecken. Dieselben Mengen genügen erst recht, um A zu überdecken. Falls die Menge U_0 unter diesen endlich vielen Mengen ist, können wir sie einfach weglassen, weil sie mit A einen leeren Schnitt hat. Es gibt also eine endliche Teilfamilie nicht nur von $\mathcal{U}'$, sondern von $\mathcal{U}$, die A überdeckt.

Ad 2.: Es sei jetzt A kompakt und X Hausdorffsch. Wir müssen zeigen, dass das Komplement $U := X \setminus A$ offen ist. Es sei $x \in U$ beliebig. Da X Hausdorffsch ist, gibt es zu jedem Punkt $a \in A$ disjunkte offene Umgebungen V_a von a und W_a von x . Offenbar gilt $A \subset \bigcup_{a \in A} V_a$. Endliche viele dieser Umgebungen genügen, um A zu überdecken, etwa

$$A \subset V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_\ell} =: V$$

für Punkte $a_1, \dots, a_\ell \in A$. Als Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist $W := W_{a_1} \cap \dots \cap W_{a_\ell}$ eine offene Umgebung von x . Außerdem gilt $V \cap W = \emptyset$. Aus $A \subset V$ folgt $W \subset U$. Da $x \in U$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass U Umgebung aller Punkte $x \in U$ ist. Folglich ist U offen und $A = X \setminus U$ abgeschlossen. $\square$

Satz 1.67 — Ist X kompakt, so besitzt jede Folge in X einen Häufungspunkt.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, kein Punkt in X sei Häufungspunkt der Folge (x_n) . Es sei

$$U_k := X \setminus \{x_n \mid n \geq k\}.$$

Wir zeigen, dass die Mengen U_k die folgenden Eigenschaften haben:

1. $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Überdeckung von X .
2. U_k ist offen für jedes k .

Ad 1. Es sei $p \in X$ beliebig. Da p kein Häufungspunkt ist, gibt es eine offene Umgebung U und ein $n(p) \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \notin U$ für alle $n \geq n(p)$. Das bedeutet $p \in U \subset U_{n(p)}$. Es folgt $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Ad 2. Es sei $p \in U_m$, und U und $n(p)$ mögen dieselbe Bedeutung wie in 1. haben. Die Menge $J = \{x_j \mid m \leq j < n(p)\}$ ist endlich (oder leer). Da X Hausdorffsch ist, ist J

abgeschlossen, also $U' = U \setminus J$ eine offene Umgebung von p mit $U' \subset U_{n(p)} \setminus J \subset U_m$. Da $p \in U_m$ beliebig war, ist U_m offen.

Jetzt können wir die Behauptung zeigen: Nach 1. und 2. ist $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung, und endlich viele Mengen, etwa $U_{m_1}, \dots, U_{m_\ell}$, genügen, um X zu überdecken. Es sei $M = \max\{m_1, \dots, m_\ell\}$. Wir erhalten den Widerspruch

$$X = \bigcup_{i=1}^{\ell} U_{m_i} = U_M \subsetneq X.$$

□

Satz 1.68 — Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. A ist kompakt.
2. Jede Folge in A besitzt einen Häufungspunkt in A .
3. A ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Haben wir gerade allgemein bewiesen.

2. $\Rightarrow$ 3. Ist $a \in \partial A$, so gibt es eine Folge (a_n) in A mit $a_n \rightarrow a$. Nach Annahme hat (a_n) einen Häufungspunkt in A . Da a der Grenzwert ist, ist a der einzige Häufungspunkt und liegt deshalb in A . D.h. $\partial A \subset A$. Somit ist A abgeschlossen. Wäre A nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge (a_n) in A mit $\|a_n\| \rightarrow \infty$. Diese Folge hat keinen Häufungspunkt, im Widerspruch zu 2.

3. $\Rightarrow$ 2. Ist (a_n) eine Folge in A , so ist sie beschränkt, denn A ist beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt a in $\mathbb{R}^n$. Da in jeder Umgebung von a Punkte aus A liegen, gehört a zu A oder ∂A . Nach Annahme ist A abgeschlossen. Es folgt $a \in A$.

2. $\Rightarrow$ 1. Als Teilraum eines Hausdorffraums ist A selbst Hausdorffsch. Wir müssen zeigen, dass A quasikompakt ist. Es sei also $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Es ist zu zeigen, dass es eine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir tun das in zwei Schritten und behandeln zunächst den Fall einer abzählbaren Überdeckung:

1. Fall: I ist abzählbar. Ohne Einschränkung ist $I = \mathbb{N}$. Ist X nicht kompakt, so gilt $X \not\subset U_1 \cup \dots \cup U_n$ für alle n . Wir wählen also

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$$

Nach Voraussetzung hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_ℓ}) mit Grenzwert x . Nun bilden die $\{U_n\}$ eine Überdeckung. Daher existiert ein m mit $x \in U_m$ und ein ℓ_0 mit

$x_{n_\ell} \in U_m$ für alle $\ell \geq \ell_0$. Man kann $\ell \geq \ell_0$ so wählen, dass $n_\ell \geq m$. Dann haben wir den Widerspruch $x_{n_\ell} \in U_m$ und zugleich

$$x_{n_\ell} \notin U_1 \cup \dots \cup U_m \cup \dots \cup U_{n_\ell}.$$

2. Fall: I beliebig. Wir betrachten die Familie

$$\mathfrak{V} = \{U_r(q)\}_{(r,q) \in I},$$

wobei

$$I = \{(r, q) \in \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{Q}^n \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ so, dass } U_r(q) \subset U_i\}.$$

Dann ist $\mathfrak{V}$ eine abzählbare Familie von offenen Mengen: Die Abzählbarkeit ergibt sich daraus, dass die Menge $\mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{Q}^n$ abzählbar ist.

$\mathfrak{V}$ ist eine offene Überdeckung von A : Denn zu jedem $a \in A$ gibt es ein $i \in I$ mit $a \in U_i$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $a \in U_\varepsilon(a) \subset U_i$. Wir wählen eine natürliche Zahl $m > \frac{2}{\varepsilon}$ und einen Punkt $q \in \mathbb{Q} \cap U_{\frac{1}{m}}(a)$. Dann gilt

$$a \in U_{\frac{1}{m}}(q) \subset U_{\frac{2}{m}}(a) \subset U_\varepsilon(a) \subset U_i.$$

Damit gehört die Menge $U_{\frac{1}{m}}(q)$ zur Familie $\mathfrak{V}$, die sich damit als Überdeckung erweist.

Nach dem Ergebnis aus Fall 1 genügen endlich viele Mengen aus $\mathfrak{V}$, um A zu überdecken, etwa

$$A \subset U_{r_1}(q_1) \cup \dots \cup U_{r_\ell}(q_\ell).$$

Nach Definition von $\mathfrak{V}$ können wir Indizes $i_1, \dots, i_\ell \in I$ mit der Eigenschaft $U_{r_j}(q_j) \subset U_{i_j}$ für $j = 1, \dots, \ell$ wählen. Es folgt: $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_\ell$.

Das war zu zeigen. $\square$

Bemerkung 1.69 — Die Äquivalenz der Aussagen 1. und 2. im Satz gelten allgemeiner für beliebige metrische Räume.

Beispiel 1.70 — 1. Alle abgeschlossenen Quader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ sind kompakt.

2. Die Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt.

Folgerung 1.71 — Ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so gilt $\inf K, \sup K \in K$.

Beweis. $\inf K$ und $\sup K$ existieren, weil K beschränkt ist, und liegen in K , weil K abgeschlossen ist. $\square$

Satz 1.72 — Ist $f : K \rightarrow X$ stetig, K kompakt und X Hausdorffsch, so ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. Es sei $Y := f(K) \subset X$. Da X Hausdorffsch ist, ist auch Y Hausdorffsch. Es sei $\{U_i\}_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von Y . Dann ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, genügen endlich viele der $f^{-1}(U_i)$, um K zu überdecken, etwa die mit den Indizes $i_1, \dots, i_\ell$, d.h. $K = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_\ell)$. Es folgt $f(K) \subset U_1 \cup \dots \cup U_\ell$. Somit ist auch $f(K)$ quasikompakt. $\square$

Folgerung 1.73 — Ist K kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf K sein Maximum und Minimum an.

Beweis. $f(K)$ ist kompakt, also gehören $\sup f(K)$ und $\inf f(K)$ zu $f(K)$. $\square$

1.7 Äquivalenz von Normen

Wir haben gesehen, dass eine Norm $\| - \|$ auf einem Vektorraum V zunächst eine Metrik und damit auch eine Topologie liefert. Man spricht von der Normtopologie auf V . Verschiedene Normen liefern im allgemeinen verschiedene Topologien, aber nicht immer. Wir wollen der Vollständigkeit halber kurz auf diese Frage eingehen.

Definition 1.74 — Es sei V ein Vektorraum mit zwei Normen $\| - \|$ und $\| - \|'$. Die beiden Normen heißen äquivalent, wenn es Zahlen $c_1, c_2 > 0$ gibt so, dass für alle $x \in V, x \neq 0$, gilt

$$c_1 \leq \frac{\|x\|'}{\|x\|} \leq c_2.$$

Zunächst folgt aus dieser Definition, dass es sich hier um eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V handelt: Jede Norm ist zu sich selbst äquivalent, denn der Quotient ist dann konstant 1; die Relation ist symmetrisch, denn besteht die Ungleichung für $\| - \|'$ und $\| - \|$ für Konstanten c_1, c_2 , so besteht sie für $\| - \|$ und $\| - \|'$ mit Konstanten $1/c_2$ und $1/c_1$; und besteht die Ungleichung zusätzlich für $\| - \|'$ und $\| - \|''$ mit Konstanten d_1 und d_2 , so besteht sie für das Paar $\| - \|$ und $\| - \|''$ mit den Konstanten $c_1 d_1$ und $c_2 d_2$. Wir werden diese Tatsache allerdings gleich noch etwas konzeptioneller sehen.

Beispiel 1.75 — Die p -Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind alle äquivalent. Das sieht man so: Für jeden Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq n \cdot \|x\|_\infty.$$

Jede p -Norm ist also äquivalent zur ∞ -Norm. Also sind auch alle p -Normen untereinander äquivalent.

Der folgende Satz rechtfertigt die Einführung des Begriffs der Normäquivalenz und gibt zugleich eine konzeptionellere Erklärung dafür, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt:

Satz 1.76 — *Zwei Normen auf einem Vektorraum sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie liefern.*

Beweis. Es seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ Normen auf einem Vektorraum V . Wir bezeichnen die durch diese Normen definierten Topologien auf V mit T und T' und die entsprechenden ε -Umgebungen mit

$$U_\varepsilon(v) = \{x \in V \mid \|x - v\| < \varepsilon\}$$

und

$$U'_\varepsilon(v) = \{x \in V \mid \|x - v\|' < \varepsilon\}.$$

1. Schritt. Wir nehmen zunächst an, die Normen seien äquivalent. Wir müssen zeigen, dass jede T -offene Menge auch T' -offen ist und umgekehrt. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, dass die Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ offen bezüglich T' sind. Es sei also $b \in U_\varepsilon(a)$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, dass $\|v\| \leq c\|v\|'$ für alle $v \in V$. Wir wählen $\delta := (\varepsilon - \|b - a\|)/c$. Dann gilt für alle $x \in U'_\delta(b)$, dass

$$\|x - a\| \leq \|a - b\| + \|x - b\| \leq \|a - b\| + c\|x - b\|' < \|a - b\| + c\delta = \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $U'_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$. Da b beliebig war, folgt die Offenheit von $U_\varepsilon(a)$ bezüglich T' .

2. Schritt. Wir nehmen umgekehrt an, dass die beiden Topologien gleich sind. Die Umgebung $U_1(0)$ ist offen in T , also nach Voraussetzung auch offen in T' . Das bedeutet $U_1(0)$ ist eine Umgebung von 0 bezüglich T' . Das setzt voraus, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt so, dass $U'_\varepsilon(0) \subset U_1(0)$. Es sei nun $v \in V \setminus \{0\}$ ein beliebiger Vektor und $w := \varepsilon/2 \cdot v/\|v\|'$. Dann gilt $\|w\|' = \varepsilon/2$, also $w \in U'_\varepsilon(0) \subset U_1(0)$ und damit

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\|v\|}{\|v\|'} = \|w\| < 1.$$

Damit erhalten wir die obere Schranke

$$\frac{\|v\|}{\|v\|'} \leq c := \frac{2}{\varepsilon}.$$

Durch Rollentausch erhält man genauso eine Schranke

$$\frac{\|v\|'}{\|v\|} \leq c'.$$

Also sind die beiden Normen äquivalent. $\square$

Beispiel 1.77 — Wir vergleichen auf dem Raum $V = C^0([0, 1])$ die Supremumsnorm $\|f\|_{[0,1]} = \sup |f|([0, 1])$ und die durch das Skalarprodukt gegebene euklidische Norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Normen sind nicht äquivalent. Dazu betrachten wir die folgende Funktionenfolge, die schon im vergangenen Semester als Gegenbeispiel herhalten musste: Wir definieren $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = nx$ für $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = 2 - nx$ für $x \in [1/n, 2/n]$ und $f_n(x) = 0$ sonst. Man findet $\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3n}}$ und $\|f\|_{[0,1]} = 1$. Das bedeutet $f_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ bezüglich der euklidischen Norm, aber $f_n \not\rightarrow 0$ bezüglich der Supremumsnorm. Damit können die beiden Normtopologien nicht gleich und die Normen nicht äquivalent sein.

Der folgende Satz zeigt, dass nichtäquivalente Normen nur auf unendlichdimensionalen Vektorräumen vorkommen können.

Satz 1.78 — *Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis. Im folgenden sei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.

1. Schritt. Es sei $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Ferner bezeichne $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis und $C := \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$. Dann gilt für jeden Vektor $x = \sum x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ nach der Dreiecksungleichung

$$\|x\| \leq \sum_i |x_i| \|e_i\| \leq C \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\} \leq C \|x\|_2.$$

Mit dieser Abschätzung folgt für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mithilfe der Dreiecksungleichung:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C \|x - y\|_2.$$

Das bedeutet: Die Abbildung $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig (bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^n$).

2. Schritt. Es seien $\| \cdot \|$ und $\| \cdot \|'$ zwei beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\|x\|'}{\|x\|}.$$

Nach dem Ergebnis des ersten Schritts ist ψ als Quotient zweier stetiger Funktionen stetig. Die Einheitssphäre ist kompakt. Nach Folgerung 1.73 nimmt die Einschränkung von ψ auf S^{n-1} Maximum und Minimum an. Das bedeutet, es gibt Punkte $x_{\min}, x_{\max} \in S^{n-1}$ so, dass für beliebige Punkte $x \in S^{n-1}$ gilt:

$$c_1 := \psi(x_{\min}) \leq \psi(x) \leq \psi(x_{\max}) =: c_2.$$

3. Schritt. Es sei nun $x \in V$, $x \neq 0$, beliebig. Dann liegt $\tilde{x} = x/\|x\|_2$ auf der Einheitssphäre. Wegen der Homogenität der Norm gilt außerdem $\psi(x) = \psi(\tilde{x})$. Gemäß dem zweiten Schritt folgt:

$$c_1 \leq \psi(\tilde{x}) = \psi(x) = \frac{\|x\|'}{\|x\|} \leq c_2.$$

Damit ist gezeigt, dass $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|$ äquivalente Normen sind. □

2 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

2.1 Richtungsableitungen

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Ferner sei $v \in \mathbb{R}^n$. Die Abbildung

$$f_v(t) := f(a + t \cdot v)$$

ist für t aus einer kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ definiert.

Definition 2.1 1. Ist f_v in $t = 0$ differenzierbar, so sagt man, f sei in Richtung v differenzierbar und nennt

$$D_v f(a) := f'_v(0)$$

die Richtungsableitung von f im Punkt a und in Richtung v .

2. Speziell für den i -ten Einheitsvektor $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$D_i f(a) := D_{e_i} f(a)$$

die i -te partielle Ableitung von f in a .

3. f heißt in a partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren. f heißt stetig differenzierbar, wenn f in allen Punkten partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $D_i f$ stetig in U sind.

Bezeichnung 2.2 — Schreibt f in der Form $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$, so verwendet man in der Regel zur Bezeichnung der i -ten partiellen Ableitung an der Stelle a die suggestive Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := D_i f(a).$$

Lemma 2.3 — Sind $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ in a und in Richtung v differenzierbar, so auch $f + g, f \cdot g$, und es gilt:

$$\begin{aligned} D_v(f + g)(a) &= D_v f(a) + D_v g(a), \\ D_v(fg)(a) &= D_v f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot D_v g(a). \end{aligned}$$

Beweis. Beide Behauptungen lassen sich leicht auf die Differentiationsregeln für Funktionen einer Veränderlichen zurückführen:

$$(f + g)_v(t) = (f + g)(a + tv) = f(a + tv) + g(a + tv) = f_v(t) + g_v(t).$$

Also

$$D_v(f + g)(a) = (f + g)'_v(0) = f'_v(0) + g'_v(0) = D_v f(a) + D_v g(a).$$

Und analog für das Produkt. □

Beispiel 2.4 — Für jedes n -Tupel $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ist das Monom

$$X^\nu := X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

wo $X_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$, die Projektion auf die i -te Komponente bezeichnet, überall stetig differenzierbar. Es gilt:

$$D_i X^\nu = \nu_i \cdot X_1^{\nu_1} \cdots X_i^{\nu_i-1} \cdots X_n^{\nu_n}.$$

Das folgt durch Induktion über die Exponenten $\nu_1, \dots, \nu_n$ aus dem Lemma. Mit demselben Lemma erhält man Regeln für das Differenzieren allgemeiner Polynome, die durch Addition mehrerer Monome entstehen. Zum Beispiel ist $f = x_1^4 + 3x_2x_3^2$ stetig differenzierbar mit den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_3^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_2x_3.$$

Beispiel 2.5 — Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x_1, x_2) = (0, 0), \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar mit den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0.$$

Aber f ist in $(0, 0)$ nicht stetig, denn

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(0, 0)$$

wenn n gegen ∞ geht.

Definition 2.6 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt in $a \in U$ total differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt derart, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{\|x - a\|} = 0. \quad (2.1)$$

Bemerkung 2.7 — L ist eindeutig bestimmt, denn sind L, L' zwei lineare Abbildungen mit der Eigenschaft (2.1), so muss für die Differenz $M := L' - L$ gelten:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{Mv}{\|v\|} = 0.$$

Für festes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$ folgt:

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(tv)}{\|tv\|} = \frac{Mv}{\|v\|}$$

also $Mv = 0$. Das zeigt $L' - L = 0$.

Definition 2.8 — Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in a total differenzierbar, so heißt die lineare Abbildung $Df(a) := L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die totale Ableitung von f in a .

Satz 2.9 — Ist f in a total differenzierbar, so ist f in a stetig.

Beweis. Wir definieren $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{\|x-a\|} & , \text{ falls } x \neq a, \\ 0 & , \text{ falls } x = a. \end{cases}$$

Die totale Differenzierbarkeit von f besagt, dass $\hat{f}$ in a stetig ist. Also ist auch

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \|x-a\| \cdot \hat{f}(x)$$

in a stetig. □

Satz 2.10 — Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in U$ total differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen, und für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i.$$

Beweis. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für kleine t :

$$\left| \frac{f_v(t) - f_v(0)}{t} - Df(a)(v) \right| = \frac{|f(a+tv) - f(a) - Df(a)(tv)|}{\|tv\|} \cdot \|v\|.$$

Ist f total differenzierbar, so geht für $t \rightarrow 0$ die rechte Seite gegen 0, also auch die linke. Damit ist f_v bei 0 differenzierbar, und es gilt:

$$D_v f(a) = f'_v(0) = Df(a)(v) = \sum_{j=1}^n D_j f(a) \cdot v_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot v_j.$$

□

Satz 2.11 — $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $a \in U$ total differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, in a total differenzierbar sind. In diesem Falle sind die totalen Ableitungen $Df_i(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ genau die Komponentenfunktionen von $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Beweis. Es sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung mit Komponentenfunktionen L_i . Für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ folgt:

$$\left\| \frac{f(a+v) - f(a) - Lv}{\|v\|} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{f_i(a+v) - f_i(a) - L_i v}{\|v\|} \right|^2.$$

Ist f total differenzierbar mit $L = Df(a)$, so geht die linke Seite mit $v \rightarrow 0$ gegen 0, also auch jeder einzelne Summand rechts. Also ist f_i total differenzierbar mit Ableitung L_i , d.h. $D(f_i)(a) = (Df(a))_i$.

Sind umgekehrt alle f_i total differenzierbar mit Ableitungen L_i und ist L aus den L_i zusammengestellt, so geht mit $v \rightarrow 0$ die rechte Seite gegen 0, also auch die linke. D.h. f ist total differenzierbar mit Ableitung L . $\square$

Folgerung 2.12 — Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $a \in U$ total differenzierbar mit Komponentenfunktionen $f_i, i = 1, \dots, m$, so ist die Matrix der linearen Abbildung $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezüglich der Standardbasen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gegeben durch:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} =: Jf(a).$$

Diese Matrix heißt die *Jacobimatrix*¹² von f in a .

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 2.10 und 2.11. $\square$

Der Unterschied zwischen der totalen Ableitung $Df(a)$ und der Jacobimatrix $Jf(a)$ ist also nur der, dass $Df(a)$ eine lineare Abbildung ist und die Jacobimatrix die Darstellung dieser linearen Abbildung bezüglich der Standardbasen.

Beispiel 2.13 — Die Jacobimatrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (xe^y, \sin(xy))$$

ist gegeben durch

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.14 — Der Fall $n = 1, m$ beliebig: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Man nennt f eine parametrisierte Kurve. f ist total

¹²Carl Gustav Jacob Jacobi, * 10.12.1804 † 18.2.1851.

differenzierbar genau dann, wenn für jedes $i = 1, \dots, m$ die Komponentenfunktion f_i differenzierbar ist. Es gilt

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_m(a) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt häufig in der Notation Newtons $\dot{f}(a)$ für diesen Vektor und nennt ihn den Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt a . Hier ist ein konkretes Beispiel: Die Abbildung

$$f(t) = \begin{pmatrix} r \cos 2\pi t \\ r \sin 2\pi t \\ ht \end{pmatrix}$$

mit $r, h \in \mathbb{R}$, $r > 0$ beschreibt eine Schraubenlinie um einen Zylinder mit Radius r . Der Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$\dot{f}(t) = \begin{pmatrix} -2\pi r \cdot \sin 2\pi t \\ 2\pi r \cdot \cos 2\pi t \\ h \end{pmatrix}$$

und der Absolutbetrag der Geschwindigkeit ist die Norm dieses Vektors, also

$$\|\dot{f}(t)\| = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 r^2}.$$

In diesem Beispiel ist die Geschwindigkeit dem Betrage nach zeitunabhängig.

Beispiel 2.15 — Der Fall n beliebig und $m = 1$: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in a total differenzierbar. Die Jacobimatrix hat das Format einer $1 \times n$ -Matrix:

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Der dazu transponierte Vektor

$$\text{grad} f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient von f in a . Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ kann man die Richtungsableitung $D_v f(a)$ als Skalarprodukt von v und dem Gradienten schreiben

$$D_v f(a) = Df(a) \cdot v = \langle \text{grad} f(a), v \rangle.$$

Ist $\text{grad} f(a) \neq 0$ und $v \neq 0$, so ist der von diesen beiden Vektoren eingeschlossene Winkel α definiert und wir können weiter schreiben:

$$D_v f(a) = \|\text{grad} f(a)\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha).$$

Die Richtungsableitung wird am größten, wenn $\alpha = 0$, wenn also v ein positives Vielfaches von $\text{grad}f(a)$ ist. Dies kann man in geometrischer Sprechweise so formulieren: Der Gradient von f gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von f an. Die Norm des Gradienten ist ein Maß für die Steilheit des Anstiegs.

Satz 2.16 (Kettenregel) — Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ Abbildungen, die in $a \in U$ bzw. $f(a) \in V$ total differenzierbar sind. Dann ist $g \circ f$ in a total differenzierbar, und es gilt

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktionen

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{\|x-a\|} & , \text{ falls } x \neq a, \\ 0 & , \text{ falls } x = a, \end{cases}$$

und

$$\hat{g}(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(a)) - Dg(f(a))(y-f(a))}{\|y-f(a)\|} & , \text{ falls } y \neq f(a), \\ 0 & , \text{ falls } y = f(a). \end{cases}$$

Die totale Differenzierbarkeit von f bzw. von g ist äquivalent zur Stetigkeit von $\hat{f}$ bzw. $\hat{g}$. Mit diesen Bezeichnungen können wir schreiben

$$f(x) - f(a) = Df(a)(x-a) + \hat{f}(x) \cdot \|x-a\|$$

und

$$g(y) - g(f(a)) = Dg(f(a))(y-f(a)) + \hat{g}(y) \cdot \|y-f(a)\|.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= Dg(f(a))(f(x) - f(a)) + \hat{g}(f(x)) \cdot \|f(x) - f(a)\| \\ &= Dg(f(a))(Df(a)(x-a) + \hat{f}(x) \cdot \|x-a\|) \\ &\quad + \hat{g}(f(x)) \cdot \|Df(a)(x-a) + \hat{f}(x) \cdot \|x-a\|\|. \end{aligned}$$

Das schreiben wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (Dg(f(a)) \circ Df(a))(x-a) \\ = Dg(f(a))\hat{f}(x) \|x-a\| + \hat{g}(f(x)) \cdot \|Df(a)(x-a) + \hat{f}(x) \cdot \|x-a\|\|. \end{aligned}$$

Wir schätzen die rechte Seite mit der Dreiecksungleichung ab und benutzen, dass sich die euklidische Norm für Matrizen multiplikativ verhält, d.h. dass $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ gilt. Damit ergibt sich für alle $x \neq a$:

$$\begin{aligned} \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (Dg(f(a)) \circ Df(a))(x-a)\|}{\|x-a\|} \\ \leq \|Jg(f(a))\| \cdot \|\hat{f}(x)\| + \|\hat{g}(f(x))\| \cdot (\|Jf(a)\| + \|\hat{f}(x)\|) \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow a$ geht $f(x) \rightarrow f(a)$, also $\hat{f}(x) \rightarrow 0$ und $\hat{g}(f(x)) \rightarrow 0$. Die rechte Seite geht also mit $x \rightarrow a$ insgesamt gegen 0. Das bedeutet, dass $g \circ f$ in a total differenzierbar ist und die Ableitung

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

hat. □

Bemerkung 2.17 — Die Jacobimatrix der Verknüpfung ist also einfach das Matrixprodukt der Jacobimatrizen:

$$J(gf)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a).$$

Komponentenweise ausgeschrieben heißt das:

$$\frac{\partial(gf)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

für alle $i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, n$.

Beispiel 2.18 — Wir betrachten zwei Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} xe^y \\ y + x^2 \end{pmatrix},$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x \cdot y,$$

und die Ableitung der zusammengesetzten Abbildung gf im Punkte $a = (\alpha, \beta)$. Die Jacobimatrizen von f und g sind gegeben durch

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} e^\beta & \alpha e^\beta \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Jg(x, y) = (y \quad x).$$

Man beachte, dass wir Jg an der Stelle $f(a)$ benötigen. Die relevante Matrix ist dann

$$Jg(f(a)) = (\beta + \alpha^2 \quad \alpha e^\beta).$$

Durch Multiplikation der Jacobimatrizen erhält man

$$\begin{aligned} Jg(f(a)) \circ Jf(a) &= \begin{pmatrix} (\beta + \alpha^2)e^\beta & + & 2\alpha^2 e^\beta \\ (\beta + \alpha^2)\alpha e^\beta & + & \alpha e^\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\beta + 3\alpha^2)e^\beta \\ (\beta\alpha + \alpha + \alpha^3)e^\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zum Vergleich können wir $(g \circ f)(x, y) = x(y + x^2)e^y$ auch direkt differenzieren. Das gibt dasselbe, wie es nach dem Satz auch sein muss:

$$J(g \circ f)(a) = \begin{pmatrix} (\beta + 3\alpha^2)e^\beta \\ (\alpha + \alpha\beta + \alpha^3)e^\beta \end{pmatrix}.$$

Satz 2.19 — Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, so ist f auch total differenzierbar.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $m = 1$, und betrachten also eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_\varepsilon(a) \subset U$. Es sei v ein Vektor mit $\|v\| < \varepsilon$. Für jedes $i = 0, \dots, n$ benötigen wir auch die sozusagen abgeschnittenen Vektoren $v^{(i)} = (v_1, \dots, v_i, 0, \dots, 0)$. Die Bezeichnungen sind so gewählt, dass $v^{(0)} = 0$ und $v^{(n)} = v$. Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist die Funktion

$$g_i : t \mapsto f(a + v^{(i-1)} + tv_i e_i)$$

stetig differenzierbar, und wir können auf g_i den Mittelwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen anwenden. Danach gibt es ein $t_i \in (0, 1)$ mit

$$f(a + v^{(i)}) - f(a + v^{(i-1)}) = g_i(1) - g_i(0) = g'_i(t_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i)v_i,$$

wobei wir zur Abkürzung $b_i = a + v^{(i-1)} + t_i v_i e_i$ gesetzt haben. Wir addieren diese Gleichungen und erhalten:

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i) \cdot v_i.$$

Wir müssen die folgende Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| f(a + v) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) v_i \right| \\ &\leq \|v\| \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass $v \neq 0$ ist, und dividieren durch $\|v\|$:

$$\left| \frac{f(a + v) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i}{\|v\|} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|.$$

Für $v \rightarrow 0$ geht $b_i \rightarrow a$, und wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von f geht $\frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Das beweist

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a + v) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i}{\|v\|} = 0.$$

Nichts anderes war zu zeigen. □

Wir können die verschiedenen Differenzierbarkeitsbegriffe in die folgende Rangordnung bringen:

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig differenzierbar} &\Rightarrow f \text{ ist total differenzierbar} \\ &\Rightarrow \text{Alle Richtungsableitungen von } f \text{ existieren} \\ &\Rightarrow f \text{ ist partiell differenzierbar.} \end{aligned}$$

2.2 Höhere Ableitungen

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, X ein topologischer Raum und $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $x \in X$ ist die Funktion

$$[a, b] \ni t \longmapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$$

stetig, und wir können integrieren:

$$F(x) := \int_a^b f(t, x) dt$$

Satz 2.20 — Die Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. Es sei $x_0 \in X$. Zu zeigen ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U von x_0 mit $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in U$.

1. Es sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Die Funktion f ist in jedem Punkt

$$(t_0, x_0) \in [a, b] \times X$$

stetig. Daher gibt es offene Umgebungen W_{t_0} von t_0 in $[a, b]$ und U_{t_0} von x_0 in X mit der Eigenschaft

$$f(W_{t_0} \times U_{t_0}) \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(t_0, x_0)).$$

Für alle $x \in U_{t_0}$ und $t \in W_{t_0}$ folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, x_0)| &\leq |f(t, x) - f(t_0, x_0)| + |f(t_0, x_0) - f(t, x_0)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Wir lassen jetzt t_0 in $[a, b]$ laufen. Die Mengen $\{W_{t_0}\}_{t_0 \in [a, b]}$ bilden eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Dieses abgeschlossene Intervall ist aber kompakt. Es gibt daher endlich viele Punkte $t_i, i = 1, \dots, N$, derart, dass

$$[a, b] = W_{t_1} \cup \dots \cup W_{t_N}.$$

Wir setzen

$$U := U_{t_1} \cap \dots \cap U_{t_N}.$$

Es sei nun $x \in U$ und $t \in [a, b]$. Nach Konstruktion gibt es ein $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $t \in W_{t_i}$. Da $x \in U \subset U_{t_i}$ bekommen wir mit Hilfe von Teil 1:

$$|f(t, x) - f(t, x_0)| < \varepsilon.$$

3. Jetzt können wir die Integrale $F(x)$ und $F(x_0)$ vergleichen:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b (f(t, x) - f(t, x_0)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq (b - a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Das genügt für die Stetigkeit von F . □

Satz 2.21 — Es sei $X \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes $x \in X$ ist $t \mapsto f(t, x)$ stetig.
2. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x} = D_2 f$ existiert auf $[a, b] \times X$ und ist stetig.

Dann ist die Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

auf X stetig differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Beweis. Es sei $x_0 \in X$. Wir definieren eine Funktion $\Delta : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Delta(t, x) = \begin{cases} \frac{f(t, x) - f(t, x_0)}{x - x_0} & , \text{ falls } x \neq x_0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) & , \text{ falls } x = x_0, \end{cases}$$

und zeigen zunächst, dass Δ stetig ist. Für jedes Paar (t, x) existiert nach dem Mittelwertsatz ein Punkt $x' = x'(t, x)$ zwischen x_0 und x mit

$$\Delta(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x').$$

Mit $(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)$ geht auch $(t, x') \rightarrow (t_0, x_0)$. Aus der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$ folgt:

$$\lim_{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} \Delta(t, x) = \Delta(t_0, x_0).$$

Das beweist die Stetigkeit von Δ .

Für $x \neq x_0$ können wir den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \int_a^b \frac{f(t, x) - f(t, x_0)}{x - x_0} dt \\ &= \int_a^b \Delta(t, x) dt\end{aligned}$$

betrachten. Nach Satz 2.20 existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b \Delta(t, x) dt = \int_a^b \Delta(t, x_0) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt.$$

Das bedeutet, dass F im Punkt x_0 differenzierbar ist und dass die Ableitung wie folgt gegeben ist:

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt.$$

Wenden wir Satz 2.20 auf die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}$ an, so sehen wir, dass die Ableitung F' stetig ist. $\square$

Satz 2.22 — Es sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_c^d \int_a^b f(t, x) dt dx = \int_a^b \int_c^d f(t, x) dx dt$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$G(t, y) = \int_c^y f(t, x) dx$$

für $(t, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Dann gilt:

1. Nach Satz 2.20 ist die Abbildung $t \mapsto G(t, y)$ bei festem y stetig.
2. $\frac{\partial G}{\partial y}(t, y) = f(t, y)$ ist stetig.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.21 erfüllt, und wir schließen, dass die Funktion

$$H(x) := \int_a^b G(t, x) dt$$

differenzierbar mit der Ableitung

$$H'(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

ist. Nun gilt

$$H(c) = \int_a^b G(t, c) dt = \int_a^b \int_c^c f(t, x) dx dt = 0.$$

Wir berechnen $H(d)$ auf zwei Weisen: Einerseits gilt nach Definition

$$H(d) = \int_a^b G(t, d) dt = \int_a^b \int_c^d f(t, x) dx dt.$$

Andererseits gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$H(d) = H(d) - H(c) = \int_c^d H'(x) dx = \int_c^d \int_a^b f(t, x) dt dx.$$

Der Vergleich beider Ausdrücke beendet den Beweis. $\square$

Wir kommen zu dem wichtigen Satz von Schwarz, dass es auf die Reihenfolge höherer partieller Ableitungen nicht ankommt, wenn die entsprechenden partiellen Ableitungen stetig sind. Man beachte aber die in den Übungen diskutierten Gegenbeispiele, die zeigen, dass die Aussage falsch werden kann, wenn man auf diese Voraussetzung verzichtet.

Bezeichnungen 2.23 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist stetig}\}$$

und

$$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}.$$

Allgemeiner heißt für $k \geq 2$ eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ k -mal stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen $D_i f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ existieren und selbst $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar sind.

$$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

In der Leibnizschen Schreibweise schreibt man iterierte partielle Ableitungen so:

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(a) := D_{i_1} \dots D_{i_\ell} f(a).$$

Satz 2.24 (Schwarz) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

für alle $p \in U$, $i, j = 1, \dots, n$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $n = 2$ und $i = 1, j = 2$.

Es sei $p = (t_0, x_0) \in U$. Für (t, x) in einer kleinen Umgebung von (t_0, x_0) gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(t, x) - f(t, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) d\xi.$$

Wir schließen mit Hilfe von Satz (2.21), dass wir nach t differenzieren dürfen, weil $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig differenzierbar ist. Das liefert für $t = t_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, \xi) d\xi.$$

Nun erhalten wir durch Differenzieren nach x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0).$$

Das war zu zeigen. □

Bezeichnungen 2.25 — Der Satz von Schwarz erlaubt es, die Bezeichnungen der höheren partiellen Ableitungen zu vereinfachen: Wir können nämlich, wenn die fragliche Abbildung f wenigstens k -mal stetig differenzierbar ist, in dem Ausdruck

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)$$

die Reihenfolge der Ableitungen beliebig wählen und also insbesondere zuerst alle Ableitungen $\partial/\partial x_n$ ausführen, danach alle Ableitungen $\partial/\partial x_{n-1}$ etc.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: Für jeden Multiindex

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

nennen wir

$$|\nu| := \nu_1 + \dots + \nu_n$$

den Totalgrad von ν . Wir definieren den Differentialoperator

$$D^\nu := D_1^{\nu_1} \dots D_n^{\nu_n}$$

in Analogie zu dem Monom

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\nu_n}.$$

Für spätere Zwecke vereinbaren wir noch

$$\nu! := \nu_1! \cdot \dots \cdot \nu_n!.$$

Bezeichnung 2.26 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ wenigstens zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix

$$Hf(a) := (D_i D_j f(a))_{i,j=1,\dots,n} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

heißt Hessematrix¹³ von f im Punkt $a \in U$. Nach dem Satz von Schwarz ist Hf eine symmetrische Matrix. Die Spur von $Hf(a)$ ist der Laplaceoperator¹⁴, angewendet auf f :

$$\Delta(f)(a) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \text{Spur}(Hf(a)).$$

2.3 Taylorformel und Anwendung

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, a ein Punkt in U und $v \in \mathbb{R}^n$ so klein, dass noch die ganze Strecke $\{a + tv \mid t \in [0, 1]\}$ in U liegt. Wie schon früher betrachten wir für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ die nur noch von einer Variablen t abhängige Funktion

$$f_v(t) := f(a + tv).$$

Dann gilt

$$D_v f(a + tv) = f'_v(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tv) \cdot v_i.$$

Für $k \geq 2$ können wir dieses Vorgehen iterieren und erhalten für die k -te Ableitung von f_v :

$$f_v^{(k)}(t) = D_v^k f(a + tv) = \sum_{i_k=1}^n \cdots \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a + tv) v_{i_k} \cdots v_{i_1}.$$

Der Satz von Schwarz gestattet uns, die rechte Seite zu sortieren.

Lemma 2.27 — Für $k \geq 0$, $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ und $w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{1}{k!} D_w^k f(a) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^n \\ |\nu|=k}} \frac{1}{\nu!} D^\nu f(a) w^\nu.$$

Beweis. Der Fall $k = 0$ ist trivial. Im Fall $k = 1$ steht links

$$D_w f(a) = \sum_{i=1}^n D_i f(a) \cdot w_i.$$

Die Summation über $i = 1, \dots, n$ auf der linken Seite entspricht rechts der Summation über alle Multiindizes vom Totalgrad 1; das sind genau die Multiindizes

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1).$$

¹³Ludwig Otto Hesse, * 22.4.1811 † 4.8.1874.

¹⁴Pierre-Simon Laplace, * 23.3.1749 † 5.3.1827.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach k , nehmen also an, die Behauptung sei für $\ell \leq k-1$ schon gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}D_w^k f &= \frac{1}{k}D_w \left(\frac{1}{(k-1)!}D_w^{k-1} f \right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n w_i D_i \left(\sum_{|\nu|=k-1} \frac{1}{\nu!} D^\nu f \cdot w^\nu \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{|\nu|=k-1} \frac{1}{k \cdot \nu!} D^{\nu+e_i} f \cdot w^{\nu+e_i}.\end{aligned}$$

Hier haben wir e_i für den Multiindex $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ mit der 1 an der i -ten Stelle geschrieben. Mit dieser Bezeichnung gilt dann in der Tat

$$w^\nu \cdot w_i = w^{\nu+e_i} \quad \text{und} \quad D_i D^\nu f = D^{\nu+e_i} f.$$

Wir können die Summe weiter umformen und schreiben:

$$\frac{1}{k!}D_w^k f = \sum_{\mu} a_{\mu} \cdot D^{\mu} f \cdot w^{\mu},$$

wobei die Summe über alle Multiindizes μ vom Totalgrad k läuft und der Koeffizient a_{μ} wie folgt gegeben ist:

$$a_{\mu} = \sum_{(i,\nu) \text{ mit } \nu+e_i=\mu} \frac{1}{k \cdot \nu!}.$$

Für ein Paar (i, ν) mit $\nu + e_i = \mu$ gilt: $\mu! = \nu! \cdot \mu_i$. Daraus folgt:

$$a_{\mu} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{\mu_i}{\mu!} = \frac{1}{\mu!} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{k} = \frac{1}{\mu!}.$$

Damit bleibt am Ende:

$$\frac{1}{k!}D_w^k f = \sum_{|\mu|=k} \frac{1}{\mu!} D^{\mu} f \cdot w^{\mu}.$$

□

Beispiel 2.28 — Es gibt genau 10 Multiindizes $\nu \in \mathbb{N}_0^3$ vom Totalgrad $|\nu| = 3$. Ihre Beiträge zur dritten Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sind:

$$\begin{aligned}D_w^3 f &= D_1^3 f w_1^3 + 3D_1^2 D_2 f w_1^2 w_2 + 3D_1 D_2^2 f w_1 w_2^2 + D_2^3 f w_2^3 \\ &\quad + 3D_1^2 D_3 f w_1^2 w_3 + 6D_1 D_2 D_3 f w_1 w_2 w_3 + 3D_2^2 D_3 f w_2^2 w_3 \\ &\quad + 3D_1 D_3^2 f w_1 w_3^2 + 3D_2 D_3^2 f w_2 w_3^2 \\ &\quad + D_3^3 f w_3^3.\end{aligned}$$

Satz 2.29 (Taylorformel) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, a ein Punkt in U und $w \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor so, dass $\{a + tw \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Ist $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$, dann existiert ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(a + w) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^n \\ |\nu| < k}} \frac{1}{\nu!} D^\nu f(a) \cdot w^\nu + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^n \\ |\nu| = k}} \frac{1}{\nu!} D^\nu f(a + \tau w) \cdot w^\nu$$

Beweis. Nach dem Satz über die Taylorentwicklung einer Funktion einer Veränderlichen mit der Lagrangeschen Form des Restglieds gibt es für die Funktion

$$t \mapsto f_w(t) = f(a + tw)$$

ein $\tau \in (0, 1)$ derart, dass

$$f_w(1) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{\ell!} f_w^{(\ell)}(0) + \frac{1}{k!} f_w^{(k)}(\tau).$$

In dieser Formel ersetzen wir jetzt überall

$$\frac{1}{\ell!} f_w^{(\ell)}(t) = \sum_{|\nu|=\ell} \frac{1}{\nu!} D^\nu f(a + tw) w^\nu$$

gemäß Lemma 2.27. □

Satz 2.30 (Mittelwertsatz) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, a und b zwei Punkte in U derart, dass $\{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Ist $f \in \mathcal{C}^1(U)$, so existiert ein $\tau \in (0, 1)$ so, dass mit den Bezeichnungen $c = (1-\tau)a + \tau b$ und $w = b - a$ gilt

$$f(b) - f(a) = D_w f(c) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) D_i f(c) = Df(c)(b - a).$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall der Taylorformel mit $k = 1$. □

Bemerkung 2.31 — Es ist wichtig zu bemerken, dass ein solcher Satz für vektorwertige Funktionen, also Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > 1$ nicht gilt. Ein einfaches Gegenbeispiel ist die Abbildung

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

An den Endpunkten ist f gleich, d.h. $f(2\pi) = f(0)$. Für einen Punkt $t \in [0, 2\pi]$ mit $f(2\pi) - f(0) = f'(t)(2\pi - 0)$ müsste folglich $f'(t) = 0$ gelten, während doch $\|f'(t)\| = 1$ für alle t ist. Wohl aber gilt der Satz komponentenweise, nämlich

$$0 = f_1(2\pi) - f_1(0) = 2\pi f_1'(t^{(1)}) = 2\pi \sin(t^{(1)})$$

und

$$0 = f_2(2\pi) - f_2(0) = 2\pi f'_2(t^{(2)}) = 2\pi \cos(t^{(1)})$$

mit den Zwischenstellen $t^{(1)} = \pi$ und $t^{(2)} = \pi/2$. Das Problem ist, dass man diese Stellen nicht so wählen kann, dass $t^{(1)} = t^{(2)}$. Im folgenden werden wir den Mittelwertsatz sehr häufig anwenden, aber eben immer für jede Komponente einer vektorwertigen Funktion separat.

2.4 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Definition 2.32 — Es sei X ein topologischer Raum.

1. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $a \in X$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), wenn es eine Umgebung U von $a \in X$ gibt derart, dass $f(x) \leq f(a)$ (bzw. $f(x) \geq f(a)$) für alle $x \in U$.
2. a ist ein isoliertes Maximum (bzw. Minimum), wenn sogar $f(x) < f(a)$ (bzw. $f(x) < f(a)$) für alle $x \in U \setminus \{a\}$ gilt.
3. f hat in a ein lokales Extremum, wenn f in a ein lokales Maximum oder Minimum hat.

Satz 2.33 — (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Hat f in $a \in U$ ein lokales Extremum, so gilt $D_w f(a) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Hat f in a ein lokales Extremum, so auch die Funktion $t \mapsto f_w(t) = f(a + tw)$ bei $t = 0$. Aus der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen folgt, dass dann

$$D_w f(a) = f'_w(a) = 0$$

gelten muss. □

Definition 2.34 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Ein Punkt $a \in U$ heißt kritische Stelle von f , wenn $D_w f(a) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$. In diesem Falle heißt $f(a)$ ein kritischer Wert.

Beispiel 2.35 — Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin x \cdot \sin y$ nimmt Werte nur zwischen -1 und 1 an. Daraus ergibt sich sofort, dass f in (x, y) ein globales Maximum annimmt, wenn $\sin x = 1 = \sin y = 1$ bzw. wenn $\sin x = \sin y = -1$. Die Menge der globalen Maxima ist

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) + k \cdot (\pi, \pi) + \ell(\pi, -\pi) \mid k, \ell \in \mathbb{Z} \right\},$$

und entsprechend ist

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \right) + k \cdot (\pi, \pi) + \ell(\pi, -\pi) \mid k, \ell \in \mathbb{Z} \right\}$$

die Menge der globalen Minima.

Gibt es andere lokale Extrema? Wir berechnen dazu die kritischen Stellen:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x \cdot \sin y = 0 \\ \text{und} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin x \cdot \cos y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \sin y = 0 \\ \text{oder} \\ \cos x = \cos y = 0. \end{array} \right.$$

Die Punkte mit $\cos x = \cos y = 0$ entsprechen genau den bereits gefundenen globalen Extrema. Die Stellen mit $\sin x = \sin y = 0$ bilden die Menge $\{(k\pi, \ell\pi) \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\}$. Die Funktion f hat auf dieser Menge den Wert 0, und ein Blick auf den Graphen zeigt, dass f dort keine lokalen Extrema, sondern Sattelpunkte hat.

Satz 2.36 (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$, $k \geq 2$. Für $a \in U$ gelte

$$D_w f(a) = \dots = D_w^{k-1} f(a) = 0 \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R}^n.$$

1. Gilt $D_w^k f(a) > 0$ (bzw. $D_w^k f(a) < 0$) für alle $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so hat f bei a ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum).
2. Existieren $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $D_w^k f(a) < 0 < D_v^k f(a)$, so hat f bei a kein lokales Extremum.
3. Ist k ungerade und existiert ein $w \in \mathbb{R}^n$ mit $D_w^k f(a) \neq 0$, so liegt bei a kein lokales Extremum vor.

Beweis. Ad 1.: Wir nehmen zunächst an, dass $D_w^k f(a) > 0$ für alle $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wegen der Beziehung $D_{-w}^k f(a) = (-1)^k D_w^k f(a)$ kann dieser Fall übrigens nur für gerades k eintreten.

Die Funktion $h : S^{n-1} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$h(w, x) := D_w f(x) = \sum_{i=1}^n D_i f(x) \cdot w_i$$

definiert ist, hat die folgenden Eigenschaften:

- i) h ist stetig, weil $f \in \mathcal{C}^1(U)$.
- ii) Für alle $w \in S^{n-1}$ gilt $h(w, a) > 0$ nach Voraussetzung.

Für jedes $w \in S^{n-1}$ existieren demnach offene Umgebungen V'_w von w in S^{n-1} und V''_w von a in U so, dass $h|_{V'_w \times V''_w} > 0$. Nun ist S^{n-1} kompakt. Deshalb gibt es $w_1, \dots, w_\ell \in S^{n-1}$ derart, dass

$$S^{n-1} = V'_{w_1} \cup \dots \cup V'_{w_\ell}.$$

Dann ist $V'' := V''_{w_1} \cap \dots \cap V''_{w_\ell}$ eine offene Umgebung von a in U und es gilt

$$h|_{S^{n-1} \times V''} > 0.$$

Indem wir V'' gegebenenfalls verkleinern, können wir noch zusätzlich erreichen, dass V'' konvex ist ($\Leftrightarrow$ für je zwei Punkte $u, v \in V''$ gilt auch $tu + (1-t)v \in V''$ für alle $t \in [0, 1]$). Für jeden Punkt $b \in V'' \setminus \{a\}$ können wir die Taylorformel anwenden: Es gibt ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{k!} D_{b-a}^k f(a + \tau(b-a)).$$

Ist

$$w := \frac{b-a}{\|b-a\|} \in S^{n-1},$$

so gilt

$$D_{b-a}^k = \|b-a\|^k \cdot D_w^k,$$

also

$$f(b) - f(a) = \frac{\|b-a\|^k}{k!} D_w^k f(a + \tau(b-a)).$$

Nach Wahl von V'' ist die rechte Seite > 0 , also $f(b) > f(a)$.

Den Fall $D_w^k f(a) < 0$ behandelt man analog.

Ad 2.: Ist k gerade, so bedeutet $D_w^k f(a) > 0$ nach der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen, dass $t \mapsto f(a + tw)$ ein isoliertes lokales Minimum bei $t = 0$ hat, und $D_w^k f(a) < 0$, dass $t \mapsto f(a + tw)$ ein isoliertes lokales Maximum bei $t = 0$ hat. Dann kann f kein lokales Extremum an der Stelle a haben.

Ad 3.: Ist $D_w^k f(a) \neq 0$ für ungerades k , so hat die Funktion $t \mapsto f(a + wt)$ bei $t = 0$ nach der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen kein lokales Extremum, also f erst recht nicht. $\square$

Folgerung 2.37 — Es sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $Df(a) = 0$.

1. Ist $Hf(a)$ positiv definit, so hat f bei a ein lokales Minimum.
2. Ist $Hf(a)$ negativ definit, so hat f bei a ein lokales Maximum.
3. Ist $Hf(a)$ indefinit, so liegt kein Extremum vor.

Beweis. $Hf(a)$ ist genau dann positiv definit, wenn für alle $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $w^t Hf(a)w > 0$. Wegen

$$\begin{aligned} D_w^2 f(a) &= \sum D_i D_j f(a) w_i w_j \\ &= w^t Hf(a)w \end{aligned}$$

impliziert dies gemäß Satz 2.36, dass f bei a ein lokales Minimum hat. Analog schließt man, wenn $Hf(a)$ negativ definit ist. $Hf(a)$ ist indefinit, wenn es Vektoren v, w mit $v^t Hf(a)v > 0$ und $w^t Hf(a)w < 0$ gibt. Wieder folgt mit dem vorigen Satz die Behauptung. $\square$

Beispiel 2.38 — Die für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definierte Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy^2$ hat kritische Stellen, wenn beide partiellen Ableitungen verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y(1 + x). \end{aligned}$$

Also ist (x, y) ist genau dann kritisch, wenn $2x + y^2 = 0$ und $2y(1 + x) = 0$. Dieses nichtlineare Gleichungssystem hat drei Lösungen:

Entweder ist $y = 0$ und damit auch $x = 0$, oder $x = -1$ und $y = \pm\sqrt{2}$. Es gibt damit drei kritische Stellen:

$$(0, 0) \quad , \quad (-1, \sqrt{2}) \quad , \quad (-1, -\sqrt{2}).$$

Die Hessematrix an der Stelle (x, y) ist

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2 + 2x \end{pmatrix}.$$

An den drei kritischen Stellen bedeutet das

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hf(-1, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist klar, dass $Hf(0, 0)$ positiv definit ist. Daher hat f bei $(0, 0)$ ein lokales Minimum. Andererseits ist die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ indefinit: Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 2\lambda - 8$ und hat die Nullstellen -2 und 4 . Die Hessematrix hat zwei Eigenwerte entgegengesetzten Vorzeichens und ist damit indefinit.

3 Implizite Funktionen

3.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir hatten einen metrischen Raum vollständig genannt, wenn jede Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert. Vollständige normierte Räume heißen Banachräume.

Beispiele 3.1 — 1. Der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm ist ein Banachraum nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß und den daraus gezogenen Folgerungen.

2. Ist X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist auch A vollständig: Jede Cauchyfolge (a_n) in A besitzt in X einen Grenzwert a , und a muss in A liegen, weil A abgeschlossen ist.

3. Ein Spezialfall davon ist der folgende: Ist $(V, \| \cdot \|_V)$ ein Banachraum, $v_0 \in V$ und $r > 0$, so ist der abgeschlossene Ball $\{v \in V \mid \|v - v_0\|_V \leq r\}$ vom Radius r mit Mittelpunkt v_0 vollständig.

Es sei nun E ein normierter Raum mit Norm $\| \cdot \|_E$ und X eine beliebige Menge. Wir definieren die Supremumsnorm einer Abbildung $f : X \rightarrow E$ durch

$$\|f\|_X := \sup \{ \|f(x)\|_E \mid x \in X \} \in \overline{\mathbb{R}},$$

und nennen f beschränkt, wenn $\|f\|_X < \infty$. Nach Definition konvergiert eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \rightarrow E$ gleichmäßig gegen $f : X \rightarrow E$, wenn $\|f_n - f\|_X \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

für alle $x \in X$, denn für alle $x \in X$ gilt

$$\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \|f_n - f\|_X.$$

Satz 3.2 — Es sei X ein topologischer Raum, E ein Banachraum. Dann ist

$$V = \{f : X \rightarrow E \mid f \text{ stetig beschränkt}\}$$

ein Vektorraum, Die Supremumsnorm $\| \cdot \|_X$ ist eine Norm auf V , und V versehen mit dieser Norm ist ein Banachraum.

Beweis. Man zeigt leicht, dass V ein Vektorraum und $\| \cdot \|_X$ eine Norm auf V ist. Wir beweisen die Vollständigkeit.

Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in V . Das bedeutet, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass für alle $m \geq n$ und alle $x \in X$ gilt:

$$\|f_m(x) - f_n(x)\|_E \leq \|f_m - f_n\|_X < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Für jedes $x \in X$ ist $f_n(x)$ eine Cauchyfolge und konvergiert in E . Wir definieren $f : X \rightarrow E$ durch $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Aus (3.1) folgt im Übergang $m \rightarrow \infty$, dass $\|f(x) - f_n(x)\|_E < \varepsilon$ für alle $x \in X$, also $\|f - f_n\|_X < \varepsilon$. Das zeigt, dass f_n bezüglich der Norm $\|\cdot\|_X$ gegen f konvergiert. Insbesondere gilt auch

$$\|f\|_X \leq \|f_n\|_X + \varepsilon < \infty,$$

d.h. f ist beschränkt. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ vorgegeben. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f - f_n\|_X < \varepsilon/3$, und eine Umgebung U von x so, dass $\|f_n(x) - f_n(y)\|_E < \varepsilon/3$ für alle $y \in U$. Für solche y folgt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|_E &\leq \|f(y) - f_n(y)\|_E + \|f_n(y) - f_n(x)\|_E + \|f_n(x) - f(x)\|_E \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Das zeigt $f(U) \subset U_\varepsilon(f(x))$. Folglich ist f stetig. $\square$

Definition 3.3 — Eine Abbildung $\phi : M \rightarrow M$ auf einem metrischen Raum M heißt Kontraktion, wenn es eine Konstante $c \in [0, 1)$ mit der Eigenschaft

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$ gibt. $x \in M$ heißt Fixpunkt von ϕ , wenn $\phi(x) = x$.

Satz 3.4 (Banachscher Fixpunktsatz) — Es sei M ein vollständiger metrischer Raum und $\phi : M \rightarrow M$ eine Kontraktion.

1. ϕ besitzt genau einen Fixpunkt x auf M .
2. Für jedes $x_0 \in M$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x_0) = x$.

Beweis. 1. Eindeutigkeit: Sind x und x' Fixpunkte, so folgt

$$d(x, x') = d(\phi(x), \phi(x')) \leq c \cdot d(x, x').$$

Da $c < 1$, ist dies nur für $d(x, x') = 0$, also $x = x'$, möglich.

2. Existenz. Es sei $x_0 \in M$ beliebig und $x_n := \phi^n(x_0)$. Dann gilt induktiv:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq c^n d(x_1, x_0)$$

und

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{i=1}^m d(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \leq \sum_{i=1}^m c^{n+i-1} d(x_1, x_0) \leq c^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - c}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Folglich ist (x_n) eine Cauchyfolge in M . Da M vollständig ist, existiert der Grenzwert

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Da ϕ eine Kontraktion ist, gilt

$$d(\phi(x), x_{n+1}) = d(\phi(x), \phi(x_n)) \leq c \cdot d(x, x_n).$$

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ folgt also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \phi(x)$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes erhält man $\phi(x) = x$. $\square$

3.2 Fixpunktgleichungen

Bevor wir den Satz über implizite Funktionen formulieren und beweisen, möchte ich ein paar allgemeine Worte über die Methode vorwegschicken.

Die allgemeinste Form einer Gleichung sieht wohl so aus: Man hat zwei Mengen A und B , eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ und ein ausgezeichnetes Element, sagen wir: $0 \in B$, und gesucht wird ein Punkt $x \in A$ mit

$$f(x) = 0.$$

Eine Fixpunktgleichung hat dagegen die folgende Form: Gegeben ist eine Menge M und eine Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$, und gesucht ist ein Punkt $x \in M$ mit

$$\Phi(x) = x.$$

Fixpunktgleichungen laden sofort dazu ein, eine Lösung iterativ zu suchen. Man beginnt mit einem beliebigen (oder besser: gut gewählten) Startpunkt x_0 und konstruiert rekursiv die Folge

$$x_1 = \Phi(x_0), \quad x_2 = \Phi(x_1), \dots$$

oder allgemeiner $x_n = \Phi^n(x)$. Wenn nun M eine Topologie besitzt, und wenn die Problemstellung gut genug ist, um sicherzustellen, dass diese Folge (x_n) konvergiert, so ist $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ein guter Kandidat für einen Fixpunkt.

Aus dieser Überlegung ergeben sich die folgenden allgemeinen Aufgaben:

1. Man formuliere allgemein brauchbare Sätze, die Bedingungen benennen, unter denen eine Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$ einen Fixpunkt besitzt.

Ein Beispiel für einen solchen Satz haben wir gerade kennengelernt: Den Banachschen Fixpunktsatz.

Hier ist ein anderes, sehr einfaches Beispiel:

Satz 3.5 — *Es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Dann hat jede stetige Abbildung $f : I \rightarrow I$ einen Fixpunkt.*

Beweis. Die Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$ ist stetig. Für die Werte an den Randpunkten des Intervalls gilt:

$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0 = b - b \geq f(b) - b = g(b).$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x \in [a, b]$ mit $g(x) = 0$, also $f(x) = x$. $\square$

Der folgende Satz verallgemeinert dieses eindimensionale Beispiel. Sein Beweis ist nicht so einfach und wird am leichtesten in der Algebraischen Topologie geführt.

Satz 3.6 (Brouwerscher¹⁵ Fixpunktsatz) — Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe kompakte Teilmenge. Dann hat jede stetige Abbildung $f : B \rightarrow B$ einen Fixpunkt.

2. Man formuliere eine gegebene Gleichung so um, dass ein Fixpunktproblem daraus wird.

Hier kann man keine allgemeinen Sätze erwarten, sondern muss sich im Einzelfall etwas einfallen lassen. Man kann sich natürlich an typischen Fällen inspirieren lassen. Ein klassischer Fall ist das Newtonsche Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen:

Gegen sei eine differenzierbare Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen der Einfachheit halber an, es gelte $f(a) < 0 < f(b)$ und $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Die Funktion ist also konvex und streng monoton wachsend. Wir suchen eine Nullstelle von f , d.h. wollen die Gleichung $f(x) = 0$ lösen. Unter den gegebenen Annahmen gibt es offenbar genau eine Lösung.

Es sei nun x_0 ein Punkt, der größer als die zu suchende Nullstelle ist, was unter den gemachten Annahmen äquivalent zu $f(x_0) > 0$ ist. Wir approximieren die Funktion in erster Näherung durch die Tangente an den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und bestimmen deren Nullstellen. Explizit: Die Tangentengleichung lautet

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

und die Tangente schneidet die x -Achse im Punkt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nur in der gesuchten Nullstelle x gilt $x = x - f(x)/f'(x)$. Wir haben also die Gleichung

$$f(x) = 0$$

durch die Fixpunktgleichung

$$\Phi(x) = x$$

¹⁵Luitzen Egbertus Jan Brouwer, * 27.2.1881 † 2.12.1966

ersetzt, wobei ich $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ gesetzt habe. In dieser Situation kann man beweisen, dass die iterativen Näherungslösungen $x_n = \Phi^n(x_0)$ tatsächlich gegen die Nullstelle konvergieren.

Beispiel: Wir wollen $\sqrt{5}$ berechnen, also eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 5$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ finden. Da $f' = 2x$, lautet die Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Mit einem beliebigen Startwert $x_0 > 0$ konvergiert diese Folge rasch gegen $\sqrt{5}$.

3.3 Satz über implizite Funktionen

Wir betrachten eine auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^p$ definierte differenzierbare Abbildung

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Man nennt das Urbild

$$N_c := F^{-1}(c) = \{x \in U \mid f(x) = c\}$$

die Niveaumenge zum Wert c .

Ein vertrautes Bild ist der Fall $p = 2$ und $m = 1$. Das Höhenrelief einer Landschaft definiert eine $\mathbb{R}$ -wertige Funktion F auf einem Teil U der Ebene. Für eine vorgegebene Höhe $h \in \mathbb{R}$, ist $F^{-1}(h) \subset U$ eine Kurve in der Ebene: eine Höhenlinie.

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Antwort auf die folgende Frage geben: Wann kann man die Niveaumengen

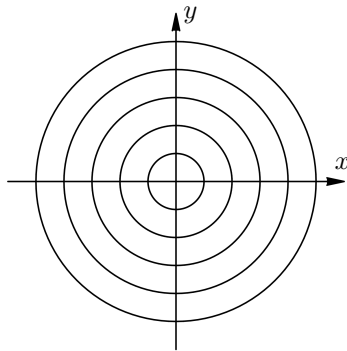
$$N_c \subset U$$

als Graph einer auf Teilbereichen definierten Funktion auffassen?

Beispiel 3.7 — Auf $U = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Funktion $F(x, y) = x^2 + y^2$. Die Niveaumengen sind also

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = c\}.$$

Offenbar ist N_c leer, falls $c < 0$, und N_0 besteht nur aus dem Ursprung. Für $c > 0$ ist N_c ein Kreis vom Radius $\sqrt{c}$.

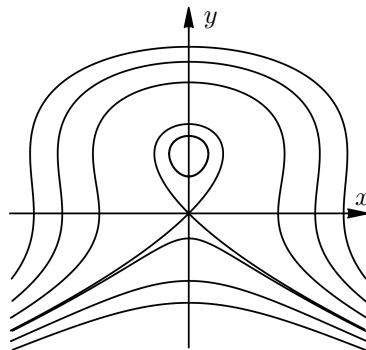


Eine Darstellung des Kreises N_c als Graph ist lokal möglich: Für $y > 0$ gibt es die Darstellung $y = \sqrt{c - x^2}$, ebenso für $y < 0$ die Darstellung $y = -\sqrt{c - x^2}$. Dagegen kann man in der Nähe der Punkte $(\pm\sqrt{c}, 0)$ die Variable y nicht als Funktion von x schreiben. Wohl aber umgekehrt x als Funktion von y : $x = \sqrt{c - y^2}$, falls $x > 0$, und $x = -\sqrt{c - y^2}$, falls $x < 0$.

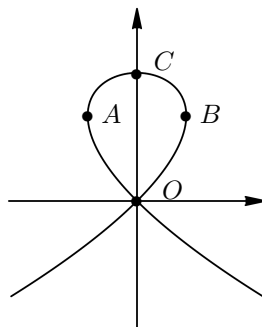
Beispiel 3.8 — Komplizierter ist der Fall der Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y^3 - y^2 + x^2.$$

Die Nivaumengen sehen so aus:



Speziell hat die Menge $X = \{(x, y) \mid y^3 - y^2 + x^2 = 0\}$ die folgende Gestalt:



Die Punkte O , A , und B ausgenommen, kann man in der Nähe aller Punkte, y als Funktion von x auffassen. In der Nähe aller Punkte, ausgenommen die Punkte O und C kann man x als Funktion von y auffassen. Lediglich im Punkte O geht weder das eine noch das andere. Man nennt O einen singulären Punkt der Kurve X .

Die Gleichung $y^3 - y^2 + x^2 = 0$ bestimmt also auf *implizite* Weise eine Abhängigkeit von y von der Variablen x und umgekehrt. Wir suchen nach Bedingungen, unter denen diese Abhängigkeit *explizit* gemacht werden kann, d.h. wir wollen $y = f(x)$ schreiben dürfen. Das Beispiel zeigt, dass wir dies zumindest nicht immer oder nicht überall machen können.

Bezeichnungen 3.9 — Im folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Wir schreiben Punkte in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ in der Form (x, y) mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$. Die lineare Abbildung

$$DF(x, y) : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

können wir auf den linken und den rechten linearen Unterraum einschränken und erhalten so lineare Abbildungen

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto DF(x, y)(v, 0)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad w \mapsto DF(x, y)(0, w).$$

Wir wollen Niveaumengen

$$N_c = \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = c\}$$

lokal als Graph einer Funktion $y = g(x)$ beschreiben. Indem wir F nötigenfalls durch $\tilde{F} = F - c$ ersetzen, können wir uns auf den Fall $c = 0$ beschränken.

Satz 3.10 (Satz über implizite Funktionen) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $(a, b) \in U$ ein Punkt mit $F(a, b) = 0$. Ferner sei die lineare Abbildung $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen V von a in $\mathbb{R}^n$ und W von b in $\mathbb{R}^m$ und eine stetige Abbildung $g : V \rightarrow W$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $V \times W \subset U$,
2. Für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt: $F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $a = 0$ und $b = 0$, indem wir gegebenenfalls F durch die Funktion $(x, y) \mapsto F(x + a, y + b)$ ersetzen.

Nach Voraussetzung ist $B := \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$ invertierbar. Wir definieren eine Abbildung $G : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$G(x, y) := y - B^{-1} \cdot F(x, y)$$

und stellen fest, dass

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = I_m - B^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y),$$

wobei $I_m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ die identische Abbildung bezeichnet. Insbesondere gilt $G(0, 0) = 0 \in \mathbb{R}^m$ und $\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 0 \in M_m(\mathbb{R})$.

Außerdem gilt $F(x, y) = 0$ genau dann, wenn $G(x, y) = y$. Wir können also die Frage nach der Lösung der Gleichung $F(x, g(x))$ durch die Frage nach einem Fixpunkt der Abbildung $g \mapsto \Phi(g)$ ersetzen, wobei

$$\Phi(g)(x) := G(x, g(x)).$$

Dazu brauchen wir einen vollständigen metrischen Raum M von geeigneten Abbildungen f , auf dem Φ definiert und eine Kontraktion ist.

1. Wegen der Offenheit von U und der Stetigkeit von $\frac{\partial G}{\partial y}$ und G gibt es $\varepsilon > 0$ und $\eta > 0$ so, dass für alle $x \in V := U_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $y \in W := U_{2\eta}(0) \subset \mathbb{R}^m$ gilt:

- (i) $(x, y) \in U$,
- (ii) $\left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right\| \leq \frac{1}{2\eta}$,
- (iii) $\|G(x, 0)\| < \frac{1}{2}\eta$.

(Man wählt zuerst ε und η so, dass (i) und (ii) erfüllt sind, und muss dann eventuell ε noch einmal verkleinern, um auch noch (iii) zu erreichen.)

2. Wir betrachten den Banachraum

$$E = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

und die abgeschlossene und daher vollständige Teilmenge $M := \{f \mid \|f\|_V \leq \eta\}$. Für alle $f \in M$ gilt offenbar $f(V) \subset W$. Deshalb ist die Abbildung

$$\Phi : M \rightarrow E, \quad \Phi(f)(x) := G(x, f(x))$$

wohldefiniert.

3. Behauptung: Für alle $f_1, f_2 \in M$ gilt

$$\|\phi(f_1) - \phi(f_2)\|_V \leq \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|.$$

Beweis: Zu jedem $x \in V$ und jedem Index $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz einen Punkt $t_i \in [0, 1]$ so, dass mit der Bezeichnung

$$y_i := t_i \cdot k(x) + (1 - t_i) \cdot f(x)$$

die Gleichung

$$G_i(x, f_1(x)) - G_i(x, f_2(x)) = \frac{\partial G_i}{\partial y}(x, y_i) \cdot (f_1(x) - f_2(x))$$

besteht. Es folgt:

$$\begin{aligned} \|G(x, f_1(x)) - G(x, f_2(x))\| &\leq \sum_{i=1}^m |G_i(x, f_1(x)) - G_i(x, f_2(x))| \\ &= \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial G_i}{\partial y}(x, y_i) \cdot (f_1(x) - f_2(x)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial G_i}{\partial y}(x, y_i) \right\| \cdot \|f_1(x) - f_2(x)\| \end{aligned}$$

nach Cauchy-Schwarz. Wir erhalten:

$$\|\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\|_V \leq m \cdot \frac{1}{2m} \cdot \|f_1 - f_2\|_V = \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|_V.$$

4. Behauptung: $\Phi(M) \subset M$.

Beweis: Trivialerweise liegt nämlich auch die Nullfunktion in M . Für $f \in M$ folgt dann aus Schritt 3 und mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)\|_V &\leq \|\Phi(f) - \Phi(0)\|_V + \|\Phi(0)\|_V \\ &\leq \frac{1}{2} \|f - 0\|_V + \|\Phi(0)\|_V \\ &\leq \frac{1}{2} \eta + \sup \{ \|G(x, 0)\| \mid x \in V \} \\ &\leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta, \end{aligned}$$

wegen Eigenschaft (iii). Damit ist gezeigt, dass $\Phi(f) \in M$ für alle $f \in M$.

5. Aus Schritt 3 und Schritt 4 folgt nun mit dem Banachschen Fixpunktsatz: Es gibt genau eine stetige Abbildung $g \in M$ mit $\phi(g) = g$, also $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V$.

6. Es sei nun $(x, y) \in V \times W$ mit $F(x, y) = 0$. Wie in Schritt 3 gibt es y_i zwischen y und $g(x)$ für alle $i = 1, \dots, m$ so, dass

$$\begin{aligned} \|y - g(x)\| &= \|G(x, y) - G(x, g(x))\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |G_i(x, y) - G_i(x, g(x))| \\ &= \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial G_i}{\partial y}(x, y_i) \cdot (y - g(x)) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|y - g(x)\|. \end{aligned}$$

Es folgt $\|y - g(x)\| = 0$ und somit $y = g(x)$. $\square$

Satz 3.11 — Es seien $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $F : V \times W \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion, $k \geq 1$. Ferner sei $g : V \rightarrow W$ stetig mit $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V$. Ist $\frac{\partial F}{\partial y}(a, g(a)) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ für ein $a \in V$ invertierbar, so ist g in einer Umgebung von $a \in V$ k -mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$Dg(a) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, g(a)) \right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a)) \right). \quad (3.2)$$

Beweis. 1. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung: Ist $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^m)$, so folgt aus der Gleichung

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V$$

durch Differenzieren mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a)) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, g(a)) \cdot Dg(a) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist die lineare Abbildung $\frac{\partial F}{\partial y}(a, g(a))$ invertierbar. So ergibt sich die Formel (3.2). Wenn g also überhaupt differenzierbar ist, so ist die Ableitung auf jeden Fall durch (3.2) gegeben.

2. Wir wählen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $U_\varepsilon(g(a)) \subset W$ und $U_\delta(a) \subset V$, sowie $g(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(g(a))$. Das ist wegen der Stetigkeit von g möglich. Indem wir V und W nötigenfalls verkleinern, können wir also annehmen, dass $V = U_\delta(a)$ und $W = U_\varepsilon(g(a))$. Durch diese Wahl stellen wir sicher, dass für jedes $x \in V$ die Strecke $\{(1-t) \cdot g(a) + t \cdot g(x) \mid t \in [0, 1]\}$ noch ganz in W liegt.

3. Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jedes $x \in V$ und jeden Index $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $t_i \in [0, 1]$ so, dass für $y^{(i)}(x) := (1-t_i) \cdot g(a) + t_i \cdot g(x)$ gilt

$$F_i(x, g(x)) - F_i(x, g(a)) = \frac{\partial F_i}{\partial y}(x, y^{(i)}(x)) \cdot (g(x) - g(a)).$$

Wir setzen die $(1 \times m)$ -Matrizen

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y^{(i)}(x)) \right)_{j=1, \dots, m}$$

zu einer $m \times m$ -Matrix

$$B(x) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y^{(i)}(x)) \right)_{i,j=1, \dots, m}$$

zusammen. Dann gilt im Grenzübergang $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \rightarrow g(a)$ und deshalb auch $\lim_{x \rightarrow a} y^{(i)}(x) = g(a)$. Da F stetig partiell differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} B(x) = B(a) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, g(a)).$$

Für x aus einer geeigneten Umgebung $\tilde{V}$ von a ist daher auch $B(x)$ invertierbar.

4. Wir haben die Matrix $B(x)$ so konstruiert, dass

$$-F(x, g(a)) = F(x, g(x)) - F(x, g(a)) = B(x) \cdot (g(x) - g(a)).$$

Wir nutzen die Invertierbarkeit von $B(x)$ für x nahe bei a aus und schreiben

$$g(x) - g(a) = -B(x)^{-1} \cdot F(x, g(a)). \quad (3.3)$$

Ich erinnere daran, dass unser Kandidat für die Ableitung von g an der Stelle a der Ausdruck $-B(a)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a))$. Um zu zeigen, dass dies wirklich die Ableitung ist, müssen wir den Term

$$g(x) - g(a) + B(a)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a))(x - a) \quad (3.4)$$

abschätzen. Wir setzen dazu die rechte Seite von (3.3) in (3.4) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & g(x) - g(a) + B(a)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a))(x - a) \\ &= -B(x)^{-1} F(x, g(a)) + B(a)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a))(x - a) \\ &= (B(a)^{-1} - B(x)^{-1}) \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a))(x - a) + \\ & \quad B(x)^{-1} \left(F(x, g(a)) - \underbrace{F(a, g(a))}_{=0!} - \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a))(x - a) \right). \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung $D := -B(a)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a))$, so folgt für alle $x \in \tilde{V}$, $x \neq a$:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{g(x) - g(a) - D(x - a)}{\|x - a\|} \right\| \\ & \leq \|B(a)^{-1} - B(x)^{-1}\| \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a)) \right\| \cdot \left\| \frac{x - a}{\|x - a\|} \right\| \\ & \quad + \|B(x)^{-1}\| \cdot \left\| \frac{F(x, g(a)) - F(a, g(a)) - \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a)) \cdot (x - a)}{\|x - a\|} \right\|. \end{aligned}$$

Im ersten Summanden auf der rechten Seite sind die beiden letzten Faktoren konstant und der erste Faktor $\|B(a)^{-1} - B(x)^{-1}\|$ geht für $x \rightarrow a$ gegen 0. Im zweiten Summanden geht aus dem gleichen Grund der erste Faktor gegen $\|B(a)^{-1}\|$. Der zweite Faktor geht nach Definition der Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x}$ gegen 0.

Damit ist gezeigt: g ist bei a total differenzierbar mit Ableitung

$$D = -B(a)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(a, g(a)).$$

Aus der Invertierbarkeit von $\frac{\partial F}{\partial y}(a, g(a))$ folgt die Invertierbarkeit von $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))$ für alle x aus einer Umgebung von a . Demnach ist g auch in dieser Umgebung g differenzierbar.

Wir müssen noch zeigen, dass g k -mal stetig differenzierbar ist. Die Formel

$$Dg(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \right) \quad (3.5)$$

zeigt, dass Dg stetig ist. Damit ist $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^m)$. Angenommen, $F \in \mathcal{C}^k$, und angenommen weiterhin, wir hätten bereits durch Induktion gezeigt, dass $g \in \mathcal{C}^{k-1}$. Dann folgt aus (3.5), und der Kettenregel, dass auch $Dg \in \mathcal{C}^{k-1}$. Aber das bedeutet eben genau: $g \in \mathcal{C}^k$. $\square$

Beispiel 3.12 — Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^3$ die Funktion $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ mit $r > 0$. Die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ beschreibt eine Sphäre vom Radius r . Ist (x_0, y_0, z_0) ein Punkt der Sphäre mit $z_0 \neq 0$, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0,$$

also invertierbar. Es gibt also eine Umgebung U von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 + g(x, y)^2 = r^2$ für alle $(x, y) \in U$. Gemäß Satz 3.11 ist g auf U unendlich oft differenzierbar, und

$$Dg(x_0, y_0) = -(2z_0)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_0}{z_0} & -\frac{y_0}{z_0} \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Wir wissen, dass für $z_0 > 0$ die Funktion g durch

$$g(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

gegeben ist. Es ist leicht, die partiellen Ableitungen von g direkt auszurechnen:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{g(x, y)}$$

und analog

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{g(x, y)}.$$

Beispiel 3.13 — Wir betrachten die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion

$$F(x, y) = y - xe^{xy}.$$

Die partielle Ableitung nach y ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1 - x^2 \cdot e^{xy}.$$

Für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in F^{-1}(0) = \{(x, y) \in U \mid y = xe^{xy}\}$ mit $1 \neq x_0^2 e^{x_0 y_0}$ existiert nach dem Satz über implizite Funktionen 3.10 eine kleine Umgebung V von

x_0 und eine C^∞ -Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$ und $g(x) = xe^{xg(x)}$. Nach Satz 3.11 berechnet sich die Ableitung von g auf die folgende Weise:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} = -\frac{-(1+x^2) \cdot e^{xy}}{1-x^2 \cdot e^{xy}} = \frac{1+x^2}{e^{-xy}-x^2}.$$

Bemerkung: Die Bedingungen $0 = F(x, y)$ und $0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, also $0 = y - xe^{xy}$ und $0 = 1 - x^2e^{xy}$ sind gleichzeitig nur dann erfüllt, wenn $y = \frac{1}{x}$, also $y = e \cdot x$, $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $y = \sqrt{e}$. D.h. nur im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right)$ lässt sich $y = xe^{xy}$ nicht nach y auflösen.

3.4 Satz von der lokalen Umkehrbarkeit

Definition 3.14 — Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt Homöomorphismus, wenn gilt:

1. f ist bijektiv,
2. f und f^{-1} sind stetig.

In diesem Falle heißen X und Y homöomorph. In Zeichen: $X \approx Y$.

Bemerkung 3.15 — 1. In der Analysis I haben wir bewiesen: Sind $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und ist $f : I \rightarrow J$ stetig und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : J \rightarrow I$ stetig. Demnach ist f automatisch ein Homöomorphismus.

2. Im allgemeinen reichen die Annahmen „ f stetig und bijektiv“ nicht aus, um zu schließen, dass auch f^{-1} stetig ist. Hier ist ein Gegenbeispiel:

Es sei $X = \{(0, 1)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in (0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ und $Y = [0, 1]$.

Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$, $(x, y) \mapsto x$, ist bijektiv und stetig. Aber die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ist nicht stetig: die Folge $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, hat in y den Grenzwert 0, aber

$$f^{-1}(x_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \rightarrow (0, 0) \neq (0, 1) = f^{-1}(0).$$

3. Eine der wenigen allgemeinen Situation, wo der Schluss

$$\text{„stetig + bijektiv} \Rightarrow \text{homöomorph“}$$

doch gilt, ist durch den folgenden Satz beschrieben:

Satz 3.16 — Es sei X kompakt, Y Hausdorffsch und $f : X \rightarrow Y$ bijektiv und stetig. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Es sei $U \subset X$ offen. Dann ist $A = X - U$ abgeschlossen, also nach Lemma 1.66 kompakt. Wir haben früher gezeigt, dass Bilder kompakter Räume in Hausdorffräumen kompakt (Satz 1.72) und abgeschlossen

(Lemma 1.66) sind. Insbesondere ist $f(A) \subset Y$ kompakt und abgeschlossen. Da f bijektiv ist, folgt, dass

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) = f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$$

offen in Y ist. Da $U \subset X$ eine beliebige offene Menge war, ist f^{-1} stetig. $\square$

Der folgende Satz ist von fundamentaler Bedeutung:

Satz 3.17 (Invarianz der Dimension) — Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene nicht-leere Teilmengen. Dann gilt:

$$U \approx V \quad \Rightarrow \quad n = m.$$

Bemerkung 3.18 — Der Beweis dieser einleuchtenden Behauptung ist erstaunlich schwierig und wird gewöhnlich im Rahmen der Algebraischen Topologie geführt. Sind die Abbildungen

$$f : U \rightarrow V, \quad g : V \rightarrow U$$

dagegen nicht nur stetig, sondern auch noch differenzierbar, so ist der Beweis leicht:

Es sei $a \in U$ und $b = f(a) \in V$. Aus der Beziehung $g(f(x)) = x$ für alle $x \in U$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in V$ folgt mit der Kettenregel

$$Dg(b) \circ Df(a) = I_n, \quad Df(a) \circ Dg(b) = I_m.$$

D.h. $Dg(b)$ und $Df(a)$ sind zueinander inverse lineare Abbildungen. Ein einfaches Argument der Linearen Algebra zeigt, dass dies nur möglich ist, wenn $n = m$.

Das motiviert die folgende Definition:

Definition 3.19 —

1. Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $f : U \rightarrow V$ stetig differenzierbar. f heißt Diffeomorphismus, wenn f bijektiv und f^{-1} stetig differenzierbar ist.
2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. f heißt lokaler Diffeomorphismus, wenn es zu jedem Punkt $b \in U$ offene Umgebungen W von b in U und V von $a := f(b)$ in $\mathbb{R}^n$ gibt derart, dass $f|_W : W \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.

Satz 3.20 (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $b \in U$ ein Punkt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es gibt eine offene Umgebung W von b in U so, dass

$$f|_W : W \rightarrow V := f(W) \subset \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus ist.

2. $Df(b) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist invertierbar.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Ist $g := (f|_W)^{-1} : V \rightarrow W$ die Umkehrabbildung, so folgt mit der Bezeichnung $a := f(b)$, dass

$$Dg(a) \circ Df(b) = I_n = Df(b) \circ Dg(a).$$

Also ist $Df(b)$ invertierbar.

2. $\Rightarrow$ 1.: Wir betrachten die C^1 -Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto x - f(y).$$

Mit $a := f(b)$ folgt:

$$(i) \quad F(a, b) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = -Df(a) \text{ ist invertierbar.}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Umgebungen V von a in $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{W}$ von b in U und eine C^1 -Abbildung $g : V \rightarrow \tilde{W}$ derart, dass für alle $x \in V$ und $y \in \tilde{W}$ gilt:

$$y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y).$$

Nun ist f stetig, also $W = f^{-1}(V) \cap \tilde{W}$ offen. Es folgt: $g(V) \subset W$, $f(W) \subset V$ und $g \circ f|_W = \text{id}_W$, $f|_W \circ g = \text{id}_V$. Das war zu zeigen. $\square$

Folgerung 3.21 — Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und ist $Df(b)$ invertierbar für alle $b \in U$, so ist $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow f(U)$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Definition 3.22 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Für jedes $b \in U$ heißt

$$\det Jf(b) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b) \right)$$

die Jacobi- oder Funktionaldeterminante von f in b .

Beispiel 3.23 (Polarkoordinaten) — Es sei

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\longmapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

Die Jacobimatrix ist

$$J\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und die Funktionaldeterminante

$$\det J\Phi(r, \varphi) = r \neq 0.$$

Demnach ist Φ ein lokaler Diffeomorphismus. Das Bild von Φ ist die offene Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Die Abbildung Φ ist aber weit davon entfernt ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ zu sein, denn Φ ist 2π -periodisch in der Variablen φ , also nicht injektiv.

3.5 Extrema mit Nebenbedingungen

Satz 3.24 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ und $X = F^{-1}(0) \subset U$. Ferner sei $c \in X$ ein Punkt, in dem die Jacobimatrix JF maximalen Rang k hat. Schließlich sei $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Besitzt $f|_X$ in c ein lokales Extremum, so existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\text{grad} f(c) = \lambda_1 \text{grad} F_1(c) + \dots + \lambda_k \text{grad} F_k(c).$$

Die Koeffizienten λ_i heißen Lagrangemultiplikatoren¹⁶.

Die transponierten Zeilen der Jacobimatrix sind genau die Gradienten

$$\text{grad} F_1(c), \dots, \text{grad} F_k(c)$$

der Komponentenfunktionen von F . Die Maximalitätsbedingung an den Rang von JF ist also äquivalent zu der Forderung, dass die Vektoren $\text{grad} F_i(c)$, $i = 1, \dots, k$, linear unabhängig sind.

Beweis. Nach Voraussetzung hat die Matrix $JF(c)$ Rang k . Daher existieren Indizes $j_1 < \dots < j_k$ so, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{j_\ell}}(c) \right)_{i, \ell=1, \dots, k}$$

invertierbar ist. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass dies die k letzten Koordinaten $n - k + 1, \dots, n$ sind. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Umgebungen V von $(c_1, \dots, c_{n-k})$ und W von $(c_{n-k+1}, \dots, c_n)$ und eine differenzierbare Abbildung $g : V \rightarrow W$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $V \times W \subset U$

(ii) Für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt: $F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$

¹⁶Joseph de Lagrange, * 25. Januar 1736 in Turin, † 10. April 1813 in Paris

$$(iii) \quad Dg(x) = - \left(DF''(x, g(x)) \right)^{-1} \cdot DF'(x, g(x)),$$

wobei $DF' = DF|_{\mathbb{R}^{n-k} \oplus 0}$ und $DF'' = DF|_{0 \oplus \mathbb{R}^k}$.

Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} h : V &\rightarrow X \cap (V \times W) \\ x &\mapsto (x, g(x)) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus. Daraus folgt: Ist $c = (a, b)$ ein lokales Extremum von $f|_X$, so ist a ein lokales Extremum von $f \circ h$. Aus dem üblichen Kriterium für kritische Stellen und mit Hilfe der Kettenregel erhält man das folgende notwendige Kriterium:

$$\begin{aligned} 0 &= D(f \circ h)(a) = Df(a, b) \cdot Dh(b) \\ &= Df(a, b) \circ \begin{pmatrix} I_k \\ Dg(b) \end{pmatrix} \\ &= D'f(a, b) + D''f(a, b) \circ Dg(b) \\ &= D'f(a, b) - D''f(a, b) \circ (D''F(a, b))^{-1} \circ D'F(a, b). \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

Diesen etwas unhandlichen Ausdruck kann etwas vereinfachen. Dazu setzen wir

$$D''f(a, b) \cdot (D''F(a, b))^{-1} =: (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{1 \times k} \quad (3.8)$$

Indem wir von rechts mit $D''F(a, b)$ multiplizieren, erhalten wir

$$D''f(a, b) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \cdot D''F(a, b), \quad (3.9)$$

und indem wir (3.8) in (3.6) einsetzen, auch noch

$$D'f(a, b) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \cdot D'F(a, b). \quad (3.10)$$

Wir können nun (3.9) und (3.10) so zusammenfassen:

$$Df(a, b) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \cdot DF(a, b).$$

Wir können auf beiden Seiten transponieren. Dann liest sich diese Gleichung als eine Aussage über die Gradienten:

$$\text{grad} f(c) = \lambda_1 \text{grad} F_1(c) + \dots + \lambda_k \text{grad} F_k(c).$$

□

Beispiel 3.25 — Wir betrachten die Funktion

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1$$

auf $\mathbb{R}^n$. Die Niveaumenge $X = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist die Hyperebene, die durch alle Einheitsvektoren geht. Es sei $U = (\mathbb{R}_{>0})^n$. Weiter sei

$$f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Dann gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \overline{U}$, und $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x_i = 0$ für ein $i = 1, \dots, n$.

Insbesondere nimmt die Funktion f auf $\Delta := X \cap \overline{U}$ ihr Maximum an, und zwar irgendwo in $\Delta \cap U$. Es sei $c \in \Delta \cap U$ eine Maximalstelle für $f|_{\Delta}$. Nach der Multiplikatorenregel existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad} f(c) = \lambda \text{grad} F(c).$$

Nun errechnet sich der Gradient von f wie folgt:

$$\text{grad} f(c) = (c_2 \dots c_n, c_1 c_3 \dots c_n, \dots, c_1 \dots c_{n-1}),$$

während der Gradient von F sehr einfach ist:

$$\text{grad} F(c) = (1, 1, \dots, 1).$$

Das ergibt die Bedingung

$$\frac{c_0 \dots c_n}{c_i} = \lambda$$

für alle i , d.h.

$$c_1 = \dots = c_n = \frac{c_0 \dots c_n}{\lambda}.$$

Da für c auch $0 = F(c) = \sum c_i - 1$ gelten muss, folgt $c_1 = \dots = c_n = 1/n$.

Für einen beliebigen Punkt $(x_1, \dots, x_n) \in X$ ergibt sich zwangsläufig:

$$x_1 \dots x_n = f(x) \leq f(c) = c_1 \dots c_n = \frac{1}{n^n}.$$

Ist nun $y \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, $y \neq 0$, beliebig und $s = \sum y_i > 0$, so ist $\frac{1}{s}y$ ein Punkt in X . Es folgt:

$$\frac{y_1}{s} \dots \frac{y_n}{s} \leq \frac{1}{n^n}$$

und hieraus:

$$\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{s}{n} = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n).$$

Das ist die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel.

Satz 3.26 (Hauptachsentransformationssatz) — Es sei $B \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann existieren Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für alle i, j gilt: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. D.h. die Vektoren bilden eine Orthonormalbasis.

2. Für alle i ist v_i ein Eigenvektor von B zu einem Eigenwert λ_i , d.h. es gilt $Bv_i = \lambda_i v_i$.

Beweis. Wir konstruieren die (v_i, λ_i) induktiv. Wir nehmen also an, es sei $k \in \{0, \dots, n-1\}$ und es seien schon Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften gefunden:

$$(i) \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \leq k.$$

$$(ii) \quad Bv_i = \lambda_i v_i.$$

Falls $k = 0$, sind diese Bedingungen leer, also aus trivialen Gründen erfüllt.

Die Beweisidee besteht darin, die Funktion

$$b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x) = x^t B x$$

unter den Nebenbedingungen

$$0 = F(x) := \|x\|^2 - 1$$

und

$$0 = F_i(x) := \langle x, v_i \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

zu maximieren.

Nach Induktionsvoraussetzung sind die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig, also so

$$H := \ker F_1 \cap \dots \cap \ker F_k$$

ein Untervektorraum der Dimension $n - k > 0$. Die Menge S aller Punkte im $\mathbb{R}^n$, die alle Nebenbedingungen erfüllen, ist eine Sphäre der Dimension $n - k - 1 \geq 0$:

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = F_1(x) = \dots = F_k(x) = 0\} = S^{n-1} \cap H.$$

Insbesondere ist S nicht leer, abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die Funktion $b|_S$ nimmt darum ihr Maximum in einem Punkt an, etwa in z .

Wir verifizieren zunächst, dass die Bedingung für die Anwendung des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen, d.h. die Multiplikatorenregel, erfüllt sind. Dazu müssen wir die Gradienten von F und der F_i in z bestimmen.

Man rechnet leicht nach, dass

$$\text{grad } b(z) = 2Bz, \quad \text{grad } F(z) = 2z, \quad \text{grad } F_i(z) = v_i.$$

Nach Konstruktion stehen die Vektoren $v_1, \dots, v_k, 2z$ paarweise senkrecht aufeinander, sind also insbesondere linear unabhängig.

Die Multiplikatorenregel ist demnach anwendbar und spendiert uns Zahlen $\mu, \mu_1, \dots, \mu_k$ mit der Eigenschaft, dass

$$\text{grad } b(z) = \mu \text{grad } F(z) + \mu_1 \text{grad } F_1(z) + \dots + \mu_k \text{grad } F_k(z),$$

oder ausgewertet:

$$2Bz = \mu z + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k.$$

Wir bilden das Skalarprodukt mit v_i . Da z und $v_j, j \neq i$, auf v_i senkrecht stehen, bleibt wenig übrig:

$$2\langle Bz, v_i \rangle = \mu_i \langle v_i, v_i \rangle = \mu_i.$$

Wegen der Symmetrie von B und weil v_i ein Eigenvektor von B ist, weiß man außerdem noch, dass

$$\langle Bz, v_i \rangle = \langle z, B^t v_i \rangle = \langle z, Bv_i \rangle = \langle z, \lambda_i v_i \rangle = \lambda_i \langle z, v_i \rangle = 0.$$

Daraus ergibt sich $\mu_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. Wir können folgern, dass

$$2Bz = \mu z.$$

Setzen wir jetzt noch $v_{k+1} = z$ und $\lambda_{k+1} = \frac{1}{2}\mu$, so haben wir den Induktionsschritt erfolgreich abgeschlossen. $\square$

4 Differentialgleichungen

4.1 Elementare Lösungsmethoden

Definition 4.1 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$ eine offene Menge und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n versteht man eine Gleichung der Form

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine n -mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, I ein Intervall, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Für alle $t \in I$ ist $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) \in U$,
2. und für alle $t \in I$ gilt $F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$.

Manchmal kann man F nach $y^{(n)}$ auflösen: Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit stetigem f heißt explizite Differentialgleichung der Ordnung n .

Wir betrachten im folgenden nur explizite Differentialgleichungen.

Beispiele 4.2 — 1. $y' + 2ty = 0$ ist eine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\varphi(t) = c e^{-t^2}$ eine Lösung, wie man durch Einsetzen verifiziert.

2. Die Lösungen der Differentialgleichung $y' - f(t) = 0$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sind genau die Stammfunktion von f : $\varphi(t) = c + \int_a^t f(s) ds$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Differentialgleichungen treten bei der Beschreibung dynamischer Größen auf. Es ist hilfreich, sich unter dem Parameter t die Zeit vorzustellen. Die Funktion $y(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung einer Messgröße y , die vom Wert der Größe selbst zum Zeitpunkt t wie von äußeren Einflüssen abhängt. Typische Beispiele sind etwa die Temperatur T eines heißen Körpers in einer kühleren Umgebung der Temperatur $\tilde{T}$, der um so langsamer abkühlt, je kleiner die noch bestehende Temperaturdifferenz ist:

$$T'(t) = -\gamma \cdot (T(t) - \tilde{T}(t)),$$

oder die Mächtigkeit z einer Tierpopulation, deren Vermehrungsrate von der Zahl der bereits vorhandenen Tiere ebenso abhängt wie von äußeren Dingen, wie etwa vorhandenen Räubern $x(t)$:

$$z'(t) = z(t) (\alpha - \beta x(t)).$$

In anderen Fällen beschreiben die Naturgesetze nicht unmittelbar die Änderungsgeschwindigkeit einer Größe, sondern die Beschleunigung, etwa wenn s die Auslenkung eines Pendels der Fadenlänge ℓ bei Erdbeschleunigung g_0 bezeichnet:

$$s''(t) = -\frac{g_0}{\ell}s(t).$$

In allen diesen Fällen ist die zeitabhängige Funktion nicht allein durch die Differentialgleichung bestimmt, sondern eine Lösung wird erst durch die Wahl von Anfangsbedingungen festgelegt. In diesen Beispielen etwa die Temperatur oder die Population zu einem festen Zeitpunkt. Im Falle des Pendels müssen wir die Auslenkung *und* die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 angeben. In den Beispielen 4.2 war die Lösung bestimmt bis auf eine Konstante c , die einmal als Faktor und einmal als Summand auftrat. Durch geeignete Wahl der Konstanten wird die allgemeine Lösung an eine bestimmte Anfangsbedingung angepasst.

Beispiel 4.3 — Die lineare Differentialgleichung $y' + a(t)y + b(t) = 0$.

Eine Differentialgleichung heißt linear, wenn

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)})$$

nur linear von $y, y', \dots, y^{(n)}$ abhängt, d.h. wenn es stetige Funktionen $a_0, \dots, a_n$ gibt darart, dass

$$F = a_0(t)y + \dots + a_n(t)y^{(n)}.$$

Wir werden später den allgemeinen Fall eingehender studieren und betrachten hier zum Aufwärmen erst einmal den Fall der Ordnung $n = 1$.

Es seien also $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Gleichung

$$y' + a(t)y + b(t) = 0$$

heißt homogen, wenn $b(t) = 0$ für alle $t \in I$, und andernfalls inhomogen.

1. Der homogene Fall. Angenommen, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' + a(t)y = 0. \tag{4.1}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann gilt:

$$-a(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = (\log \circ \varphi)'(t).$$

Wir wählen einen Anfangswert $t_0 \in I$. Durch Integrieren dieser Gleichung erhalten

wir

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^t a(s) ds &= \int_{t_0}^t (\log \varphi)'(s) ds \\ &= \log(\varphi(t)) - \log(\varphi(t_0)) \\ &= \log\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}\right) \end{aligned}$$

und

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Wir hatten bei der Herleitung dieser Gleichung angenommen, dass φ eine Lösung ist. Wir drehen den Spieß um und definieren uns eine Funktion durch

$$\varphi_0(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right). \quad (4.2)$$

Satz 4.4 — 1. Die durch (4.2) definierte Funktion φ_0 ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (4.1).

2. Jede Lösung von (4.1) hat die Gestalt $\varphi = c\varphi_0$ für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Dass φ_0 eine Lösung ist, rechnet man durch Differenzieren und Einsetzen in die Differentialgleichung leicht nach.

Offenbar hat diese Lösung die Eigenschaft, dass $\varphi_0(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Angenommen, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine beliebige andere Lösung. Wir setzen $\psi(t) := \varphi(t)/\varphi_0(t)$. Wir differenzieren ψ nach der Quotientenregel und verwenden, dass sowohl φ wie auch φ_0 Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$\begin{aligned} \psi'(t) = \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)'(t) &= \frac{\varphi'(t)\varphi_0(t) - \varphi(t)\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)^2} \\ &= \frac{a(t)\varphi(t)\varphi_0(t) - \varphi(t)a(t)\varphi_0(t)}{\varphi_0(t)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Rechnung zeigt, dass $\psi(t)$ konstant ist, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $\varphi(t) = c\varphi_0(t)$. □

2. *Der inhomogene Fall.* Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y' + a(t)y(t) = -b(t). \quad (4.3)$$

Man löst diese Differentialgleichung mit der etwas paradox klingenden Methode der „Variation der Konstanten“.

Ist $\varphi_0(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$ und ψ eine Lösung von (4.3), so ist

$$c(t) := \psi(t)/\varphi_0(t)$$

eine C^1 -Funktion auf I . Wir machen also den Ansatz

$$\psi(t) = c(t) \cdot \varphi_0(t).$$

Differenzieren ergibt:

$$\psi'(t) = c'(t) \cdot \varphi_0(t) + c(t) \cdot \varphi_0'(t).$$

Wenn ψ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sein soll, so muss gelten:

$$\begin{aligned} -b &= \psi' + a\psi = c' \varphi_0 + c \varphi_0' + a c \varphi_0 \\ &= c' \varphi_0 + c(\varphi_0' + a \varphi_0) = c' \varphi_0. \end{aligned}$$

Das bedeutet:

$$c'(t) = \frac{-b(t)}{\varphi_0(t)}.$$

Wir finden c durch Integrieren:

$$c(t) = c(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi_0(s)} ds.$$

Wählen wir $c(t_0) = 0$, so erhalten wir eine Lösung

$$\psi_0(t) := -\varphi_0(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi_0(s)} ds \quad (4.4)$$

der inhomogenen Gleichung. Zusammengefasst erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 4.5 — Bezeichnen φ_0 und ψ_0 die in (4.2) und (4.4) definierten Funktionen, so ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\psi_o(t) + c \varphi_0(t)$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.3), und jede Lösung hat diese Form.

Beweis. Zunächst rechnet man nach, dass Funktionen der angegebenen Form die inhomogene Differentialgleichung tatsächlich lösen. Ist umgekehrt $u(t)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, so ist $u(t) - \psi_0(t)$ eine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung. Es existiert daher nach Satz 4.4 ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$u(t) - \psi_0(t) = c \varphi_0(t).$$

Das war zu zeigen. □

Der folgende Sprachgebrauch ist üblich: Man bezeichnet die Funktion ψ_0 als eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Dabei ist an ψ_0 nichts Spezielles, jede andere Lösung der inhomogenen Differentialgleichung würde denselben Zweck erfüllen. Jede Wahl einer speziellen Lösung ψ_0 zusammen mit einer allgemeinen Lösung $c\varphi_0$, $c \in \mathbb{R}$, der homogenen Differentialgleichung liefert eine allgemeine Lösung $\psi_0 + c\varphi_0$ der inhomogenen Differentialgleichung.

Beispiel 4.6 — Wir betrachten die inhomogene Differentialgleichung

$$y' + y \sin(t) - \sin^3(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Das homogene System $y' + y \sin(t) = 0$ hat die Lösung

$$\varphi_0(t) := \exp \left(- \int_{\pi/2}^t \sin(s) ds \right) = e^{\cos(t)}.$$

Variation der Konstanten verlangt die Berechnung des Integrals

$$\begin{aligned} c_0(t) &:= - \int_{t_0}^t \frac{\sin^3(s)}{e^{\cos(s)}} ds = \int_{t_0}^t \frac{1 - \cos^2(s)}{e^{\cos(s)}} \sin(s) ds \\ (\text{Substitution } x = \cos(s)) &= - \int_{\cos(t_0)}^{\cos(t)} (1 - x^2) e^{-x} dx \\ (\text{partielle Integration}) &= -(x + 1)^2 e^{-x} \Big|_{\cos(t_0)}^{\cos(t)} \\ (\text{mit } t_0 = \pi) &= -(1 + \cos(t))^2 e^{-\cos(t)}. \end{aligned}$$

Es ist also $c_0(t)\varphi_0(t) = -(1 + \cos(t))^2$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und

$$-(1 + \cos(t))^2 + c e^{-\cos(t)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Beispiel 4.7 — Exakte Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung

$$g(t, y) \cdot y' + f(t, y) = 0, \tag{4.5}$$

mit stetigen Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, heißt exakt, wenn es eine C^1 -Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = g(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = f(t, y) \tag{4.6}$$

gibt.

Satz 4.8 — Ist (4.5) eine exakte Differentialgleichung und ist F eine Funktion mit der Eigenschaft (4.6), so ist jede Lösung von (4.5) eine Lösung der impliziten Gleichung

$$F(t, \varphi(t)) = C \quad (4.7)$$

für eine bestimmte Konstante C und umgekehrt.

Beweis. Löst $\varphi : I \rightarrow U$ die Gleichung (4.7), so folgt durch Differenzieren nach der Kettenregel, dass

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'(t) = 0,$$

und das bedeutet gerade, dass φ die Differentialgleichung löst.

Löst umgekehrt φ die Differentialgleichung, so zeigt die gleiche Rechnung, dass die Ableitung der Funktion $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ in jedem Punkt verschwindet, also $F(t, \varphi(t))$ konstant sein muss. $\square$

Bemerkung 4.9 — Damit ist die (exakte) Differentialgleichung in eine implizite (gewöhnliche) Gleichung überführt worden. Sie ist damit noch nicht wirklich gelöst. Ob man die Lösung im üblichen Sinne *hinschreiben* kann, hängt von der Gestalt der impliziten Gleichung ab, die dabei herauskommt. Über die grundsätzliche Lösbarkeit impliziter Gleichungen, haben wir im letzten Abschnitt der Vorlesung Sätze bewiesen.

Es bleibt außerdem noch das folgende Problem. Wie kann man einer Gleichung ansehen, ob sie exakt ist, und wie findet man in diesem Falle eine Funktion F mit den verlangten Eigenschaften? Zumindest ist diese Funktion, wenn sie existiert, lokal eindeutig bis auf eine additive Konstante: Denn angenommen, F_1 und F_2 wären zwei auf U definierte Funktionen mit (4.6). Dann verschwinden alle partiellen Ableitungen der Differenz $F_1 - F_2$. Die Differenz ist daher lokal konstant.

Lemma 4.10 — Eine notwendige Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung

$$g(t, y) \cdot y' + f(t, y) = 0$$

mit Funktionen $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^2$, exakt ist, ist die Identität

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$$

für alle $(t, y) \in U$.

Beweis. Angenommen, F erfüllt (4.6). Da f und g stetig differenzierbar sind, ist F zweimal stetig differenzierbar, und nach dem Satz von Schwarz gilt

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial y}.$$

□

Wir nehmen im folgenden an, $U \subset \mathbb{R}^2$ sei eine offene Menge, und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen, die der notwendigen Bedingung

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \quad (4.8)$$

für alle $(t, y) \in U$ genügen. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ ein Punkt und es seien $\varepsilon, \eta > 0$ so gewählt, dass das offene Quadrat $V := U_\varepsilon(t_0) \times U_\eta(y_0)$ noch ganz in U liegt. Wir definieren auf V die Funktion

$$F(t, y) = \int_{t_0}^t f(\tau, y) d\tau + \int_{y_0}^y g(t_0, v) dv. \quad (4.9)$$

Wir finden durch Differenzieren nach t gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = f(t, y),$$

und durch Differenzieren nach y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(\tau, y) d\tau + g(t_0, y) \\ \text{Substitution von (4.8)} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial g}{\partial t}(\tau, y) d\tau + g(t_0, y) \\ &= g(t, y). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die notwendige Bedingung (4.8) auch hinreichend für die Exaktheit der Differentialgleichung ist, zumindest auf der unter Umständen kleineren Menge $V \subset U$, und dass durch (4.9) eine Funktion F mit der Eigenschaft (4.6) gegeben ist.

Beispiel 4.11 — Die Koeffizientenfunktionen der auf $\mathbb{R}^2$ definierten Differentialgleichung

$$2yt y' + (y^2 + 4t^3) = 0 \quad (4.10)$$

erfüllen die notwendige Bedingung (4.8), denn

$$\frac{\partial}{\partial t}(2yt) = 2y = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 4t^3).$$

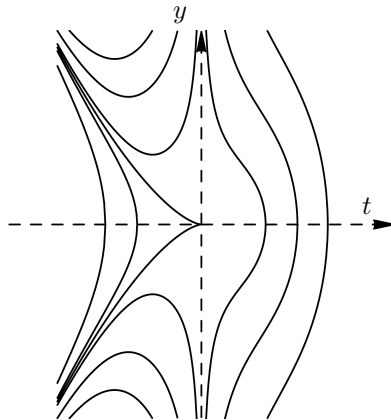
Die Funktion

$$\begin{aligned} F(t, y) &= \int_{t_0}^t (y^2 + 4\tau^3) d\tau + \int_{y_0}^y 2t_0 v dv \\ &= y^2(t - t_0) + (t^4 - t_0^4) + t_0(y^2 - y_0)^2 \\ &= y^2 t + t^4 - (y_0^2 t_0 + t_0^4) \end{aligned}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Die Lösungen der Differentialgleichung (4.10) zum Anfangswert (t_0, y_0) entsprechen also den Lösungen der impliziten Gleichung

$$y^2 t + t^4 = C,$$

mit der Konstanten $C = y_0^2 t_0 + t_0^4$. Ich überlasse es jedem Hörer zur Übung, sich klarzumachen, auf welchen Teilintervallen von $\mathbb{R}$ Lösungen in Abhängigkeit von C definiert sind. Hier ist ein Bild einer Schar von Lösungskurven:



Bemerkung 4.12 — Wir haben die Funktion F in der oben beschriebenen Weise nur für ein eventuell kleines Quadrat angegeben. Wenn man etwas genauer argumentiert, kann man solche Funktionen auch auf Mengen von anderer Gestalt konstruieren. Tatsächlich hängt es nur von der topologischen Gestalt der Menge U ab, ob man ein F auf ganz U finden kann oder nicht. Wir werden diese Frage im Detail im dritten Semester studieren. Grob gesprochen, darf U keine Löcher enthalten. Wir betrachten hier nur ein Beispiel, nämlich die Differentialgleichung

$$\frac{x}{x^2 + y^2} y' - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Die Funktionen $g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ und $f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ sind auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} =: U$ definiert, aber haben im Ursprung einen Pol. Man überzeugt sich durch Differenzieren, dass f und g die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

erfüllen. Es gibt aber kein F , das auf ganz U definiert ist und die Eigenschaft

$$\frac{\partial F}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f \tag{4.11}$$

hat. Das kann man so sehen: Es sei $V = \{(x, y) \mid y \neq 0 \text{ oder } x > 0\}$, d.h. V entsteht aus U durch Entfernen der Punkte auf dem negativen Teil der x -Achse. Für

jeden Punkt (x, y) in V definieren wir $\tilde{F}(x, y) := \varphi$, wobei φ die eindeutig bestimmte Zahl in $(-\pi, \pi)$ ist mit $x + iy = |x + iy| \exp(i\varphi)$. Die geometrische Bedeutung von $\tilde{F}$ ist also der Winkel zum positiven Teil der x -Achse. Für $x > 0$ gilt $\tilde{F}(x, y) = \arctan(y/x)$, für $y > 0$ hat man $\tilde{F}(x, y) = \pi/2 + \arctan(-x/y)$, und für $y < 0$ schließlich $\tilde{F}(x, y) = -\pi/2 - \arctan(x/y)$. Man kann nachrechnen, dass diese auf V definierte Funktion (4.11) erfüllt. Eine auf ganz U definierte Funktion F mit (4.11) kann sich auf V nur durch eine Konstante von $\tilde{F}$ unterscheiden. Aber die Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{F}(-1, \varepsilon)$ und $\lim_{\varepsilon \nearrow 0} \tilde{F}(-1, \varepsilon)$ unterscheiden sich um 2π , während dieselben Grenzwerte für F gleich sein müssen, weil F nach Annahme stetig in $(-1, 0)$ ist. Dann können sich F und $\tilde{F}$ nicht um eine Konstante unterscheiden.

Das Problem ist, dass U im Ursprung ein Loch hat.

4.1.1 Trennung der Variablen

Eine Differentialgleichung der Form

$$g(y)y' + f(t) = 0 \quad (4.12)$$

mit stetigen Funktionen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ für offene Intervalle $V, W \subset \mathbb{R}$ nennt man eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Es handelt sich um einen Spezialfall einer exakten Differentialgleichung. Für $t_0 \in V$ und $y_0 \in W$ setzen wir

$$F(t, y) := \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \int_{y_0}^y g(v) dv$$

für $t \in V$ und $y \in W$. Dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(t), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g(y).$$

Nach den obigen Überlegungen ist die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ äquivalent zu der impliziten Gleichung

$$\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \int_{y_0}^y g(v) dv = 0.$$

Bemerkung 4.13 — Diese Beziehung lässt sich leicht merken, wenn man die Leibnizsche Schreibweise $y' = \frac{dy}{dt}$ benutzt und in (4.12) mit dt (?) multipliziert. (Achtung: Wir können einer solchen Rechnung formal bisher keinen Sinn geben. Ich beschreibe hier nur eine Merkgel!) Es entsteht:

$$f(t)dt + g(y)dy = 0.$$

Wir integrieren und erhalten

$$\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \int_{y_0}^y g(v) dv = 0.$$

Beispiel 4.14 — Herr Galilei lässt auf einem Turm der Höhe y_0 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen Stein fallen. Ist $y(t)$ die Höhe des Steins über dem Erdboden, so genügt y , wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen, der Differentialgleichung

$$y'' = -g_0.$$

Dabei ist g_0 die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche. (Die Turmhöhe ist vernachlässigbar gegenüber dem Erdradius.) Wir gewinnen y durch zweifaches Integrieren:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g_0}{2} t^2.$$

Die Integrationskonstanten sind bestimmt durch die Anfangshöhe, also die Turmhöhe y_0 , und einer möglichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 , die Herr Galilei dem Stein im Augenblick des Loslassens noch mitgibt. Er könnte den Stein zum Beispiel nach oben werfen, statt einfach loszulassen.

Wir verbessern unser Modell, indem wir den Luftwiderstand berücksichtigen und dabei annehmen, dass der Luftwiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit entgegen gerichtet ist. Um mit dem Vorzeichen keine Probleme zu bekommen, nehmen wir an, die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$. Der Stein beginnt also zu fallen, und es gilt $v_t < 0$ für alle $t > t_0$. Die modifizierte Differentialgleichung lautet nun

$$y'' = \gamma(y')^2 - g_0$$

mit einer Konstanten $\gamma > 0$. Wir überführen diese Differentialgleichung zweiter Ordnung für y in eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Geschwindigkeit $v = y'$. Haben wir diese gelöst, gewinnen wir y durch Integration von v . Die Differentialgleichung

$$v' = \gamma v^2 - g_0$$

hat die triviale Lösung

$$v(t) = \text{const.} = v_\infty := -\sqrt{g_0/\gamma}.$$

Dabei ist v_∞ die Grenzgeschwindigkeit, bei der die Erdbeschleunigung und die Luftreibung gleich groß sind und sich gegenseitig aufheben. Falls $v \neq \pm v_\infty$, können wir die Variablen in der Differentialgleichung durch Division von $v^2 - g_0$ trennen. $v(t)$ genügt der impliziten Gleichung (Anfangsbedingung $v(0) = 0$!)

$$\int_0^v \frac{dw}{\gamma w^2 - g_0} = \int_0^t d\tau = t.$$

Mit den Substitution $\beta = \sqrt{\gamma/g_0}$ und $x = \beta w$, und erhält man hieraus:

$$t = \frac{1}{\sqrt{g_0\gamma}} \int_{\beta v}^0 \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{g_0\gamma}} \log \frac{1 - \beta v}{1 + \beta v} = -\frac{1}{\sqrt{g_0\gamma}} \text{artanh}(\beta v).$$

Diese Gleichung kann man nach v auflösen und erhält

$$v(t) = -\sqrt{\frac{g_0}{\gamma}} \tanh(\sqrt{g_0 \gamma} t). \quad (4.13)$$

Für $t \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen die Grenzggeschwindigkeit $v_\infty := -\sqrt{\frac{g_0}{\gamma}}$. Schneller kann man nicht fallen. Bei kleiner Reibung γ ist das aber ziemlich schnell.

Beispiel 4.15 — Herr Verne schießt seine Romanhelden mit einer Kanone auf den Mond. Wie groß muss die Abschussgeschwindigkeit sein, damit das Projektil die Erdanziehung überwindet, und was ist die Flugbahn des Projektils? Wir machen die vereinfachende Annahme, dass die Kanone senkrecht über Florida nach oben abgeschossen wird. Wir bezeichnen die erreichte Höhe, gemessen vom Erdmittelpunkt mit x . Die Anfangshöhe zum Zeitpunkt $t = 0$ ist somit der Erdradius R . Die Erdbeschleunigung nimmt nach dem Newtonschen Gesetz mit der Entfernung umgekehrt quadratisch ab und beträgt somit in der Höhe x gerade

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g_0 R^2}{x^2}. \quad (4.14)$$

Uns interessiert nur der aufsteigende Teil der Bahn. Für diesen ist $x(t)$ als Funktion der Zeit monoton wachsend und die Geschwindigkeit $v(t)$ monoton fallend. Wir können also v als Funktion von x schreiben: $v = f(x)$. Dann gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f'(x) \frac{dx}{dt} = f'(x) v(t) = f'(x) f(x). \quad (4.15)$$

Der Vergleich von (4.14) und (4.15) liefert die Differentialgleichung

$$f f' = -\frac{g_0 R^2}{x^2}.$$

mit getrennten Variablen. Einmaliges Integrieren liefert:

$$\int_{v_0}^v f df = -g_0 R^2 \int_R^x \frac{d\xi}{\xi^2},$$

also explizit:

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = g_0 R^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right).$$

Diese Gleichung hat eine einfache physikalische Interpretation: Nach Multiplikation mit der Masse des Projektils steht links die Differenz der kinetischen Energien zum Zeitpunkt t und zum Zeitpunkt 0 und rechts die Differenz der potentiellen Energien im Schwerfeld der Erde. Nach dem Energieerhaltungssatz müssen diese Differenzen gleich sein. Wir lösen nach v^2 auf:

$$v(t)^2 = v_0^2 + 2g_0 R^2 \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{R} \right).$$

Hieraus sieht man zunächst einmal: Ist die Anfangsgeschwindigkeit kleiner als $v_{\min} := \sqrt{2g_0 R} (\approx 11, 2 \frac{\text{km}}{\text{s}})$, so wird $v(t)$ nach einer gewissen Zeit $t < \infty$ Null, d.h. das Projektil bleibt stehen und beginnt zurückzufallen. Die Geschwindigkeit $v_{\min}$ ist die Fluchtgeschwindigkeit.

Wir nehmen für die weitere Rechnung der Einfachheit halber an, es sei $v_0 = v_{\min}$. Dann gilt

$$\frac{dx}{dt}(t) = v(t) = \frac{\sqrt{2g_0 R}}{\sqrt{x(t)}}.$$

Diese Differentialgleichung führt auf die implizite Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_R^x \sqrt{s} ds - \sqrt{2g_0 R} \int_0^t d\tau \\ &= \frac{2}{3}(x^{3/2} - R^{3/2}) - \sqrt{2g_0 R} t. \end{aligned}$$

Nach einfachen Umformungen bleibt

$$x(t) = R \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2g_0}{R}} t \right)^{\frac{2}{3}}$$

übrig.

4.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Definition 4.16 — Ein explizites Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in n Variablen ist eine Gleichung der Form

$$y' = f(t, y),$$

wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist. Eine Lösung dieses Systems zum Anfangswert $(t_0, y_0) \in U$ ist eine differenzierbare Abbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei I ein Intervall mit $t_0 \in I$ ist, derart, dass für alle $t \in I$ gilt: $(t, \varphi(t)) \in U$ und $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Definition 4.17 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein C^k -Vektorfeld auf U ist eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Integralkurve für X ist eine Abbildung $c : I \rightarrow U$, I ein Intervall, mit $c'(t) = X(c(t))$ für alle $t \in I$.

Bemerkung 4.18 — Vektorfelder lassen sich, zumindest in zwei oder drei Dimensionen, schön graphisch darstellen: Wir zeichnen zu einem Punkt $y \in U$ einen Vektorpfeil $X(y)$, der in y beginnt. Auf diese Weise entsteht ein Feld von Richtungen, dem man den Verlauf der Integralkurven beinahe schon ansieht.

Das wird am folgenden Beispiel der sogenannten Lotka-Volterra-Differentialgleichung deutlich, die die zeitliche Entwicklung zweier Tierpopulationen modellieren

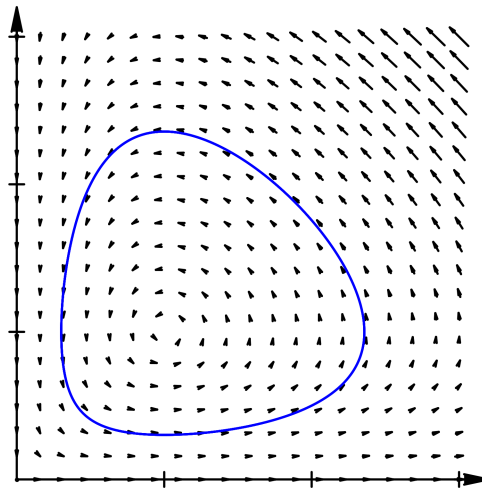
soll, und zwar einer Räuber- und einer Beutepopulation. Es bezeichne $y_1(t)$ die Größe der Beutepopulation zum Zeitpunkt t und $y_2(t)$ die der Räuberpopulation. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned}y_1' &= \alpha y_1 - \gamma y_1 y_2 \\y_2' &= -\beta y_2 + \delta y_1 y_2\end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Die Interpretation dieses Modells ist etwa so: Das natürliche Wachstum der sich schnell vermehrenden Beutepopulation y_1 ist proportional zur bereits vorhandenen Menge und wird gebremst nur durch die vorhandenen Räuber. Umgekehrt hängt die Vermehrung der Räuber stark von der zur Verfügung stehenden Nahrung ab und wird gebremst durch die natürliche Sterblichkeit der Räuber. Die rechte Seite des Differentialgleichungssystems hängt von der Zeit nicht explizit ab. Wenn wir der Einfachheit halber alle Konstanten gleich 1 setzen, so erhalten wir das Vektorfeld

$$X(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1(1 - y_2) \\ y_2(y_1 - 1) \end{pmatrix}.$$

Graphisch sieht dieses Vektorfeld wie folgt aus: Es sind für alle Punkte in einem Gitter im rechten oberen Quadranten von $\mathbb{R}^2$ zunächst der Punkt selbst eingezeichnet und dann der an diesem Punkt angeheftete Vektor als einfache Strecke. Um eine gewisse Übersichtlichkeit zu erhalten, habe ich die Vektoren gegenüber ihrer natürlichen Größe gestaucht:



Man sieht deutlich den Fixpunkt $(y_1, y_2) = (1, 1)$. Wenn beide Populationen zu irgendeinem Zeitpunkt t genau die Größe 1 haben, so wird das auch für alle Zukunft so sein, sofern keine Störungen oder zufällige Schwankungen auftreten. Wenn man andererseits mit einem Punkt $(y_1, y_2) \neq (1, 1)$ startet, so sieht man der Graphik an,

dass eine Bewegung gegen den Uhrzeigersinn um den Fixpunkt herum beginnt. Die durchgezogene Kurve ist eine Integralkurve.

Bemerkung 4.19 — Das Lösen eines Differentialgleichungssystems und das Finden von Integralkurven sind im wesentlichen äquivalente Probleme:

1. Ist $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so ist $c'(t) = X(c(t))$ einfach ein Differentialgleichungssystem, bei dem die Funktion $f(t, y) := X(y)$ nicht explizit vom Parameter t abhängt, sozusagen „zeitunabhängig“ ist. Ist umgekehrt $f(t, y)$ eine Funktion, die von t gar nicht wirklich abhängt, sich also in der Form $f(t, y) = X(y)$ schreiben lässt, so sind Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ dasselbe, wie Integralkurven zum Vektorfeld $X(y)$.

2. Aber auch, wenn $f(t, y)$ von t abhängt, kann man die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ umschreiben: Dazu führen wir eine zusätzliche Variable s ein und betrachten das Differentialgleichungssystem in $(n + 1)$ -Variablen

$$\begin{pmatrix} y' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s, y) \\ 1 \end{pmatrix} =: X(s, y) \quad (4.16)$$

Die rechte Seite hängt jetzt nicht mehr von t explizit ab und definiert ein Vektorfeld $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$. Ist $\varphi(t)$ eine Lösung der Gleichung $y' = f(t, y)$, so ist

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (4.16), und ist umgekehrt $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ eine Lösung von (4.16), so ist $\varphi(t)$ mit $\varphi(t)_i = \psi(t)_i$ für $i = 1, \dots, n$, eine Lösung von $y' = f(t, y)$.

4.2.1 Vorbereitungen

Satz 4.20 — Es sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Beweis. Es sei $v := \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^n$. Falls $v = 0$, ist nichts zu zeigen. Andernfalls sei $e := v/\|v\|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| &= \|v\| = \langle v, e \rangle = \left\langle \int_a^b f(t) dt, e \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(t) e_i dt = \int_a^b \langle f(t), e \rangle dt \\ (\text{Cauchy-Schwarz}) \quad &\leq \int_a^b \|f(t)\| \cdot \|e\| dt = \int_a^b \|f(t)\| dt. \end{aligned}$$

□

Satz 4.21 (Mittelwertungleichung) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ferner seien y_0 und y_1 Punkte mit der Eigenschaft, dass $y_t := ty_1 + (1-t)y_0 \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann existiert ein $t \in [0, 1]$ so, dass

$$\|f(y_1) - f(y_0)\| \leq \|Df(y_t)\| \cdot \|y_1 - y_0\|.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g(t) = f(y_t)$ für $t \in [0, 1]$. Mit dieser Bezeichnung gilt offenbar

$$f(y_1) - f(y_0) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$$

und $g'(t) = Df(y_t)(y_1 - y_0)$. Mit Satz 4.20 folgt

$$\begin{aligned} \|f(y_1) - f(y_0)\| &\leq \int_0^1 \|g'(t)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|Df(y_t)\| \cdot \|y_1 - y_0\| dt \\ &\leq \|y_1 - y_0\| \cdot \sup\{\|Df(y_t)\| \mid t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

Das Maximum der Funktion $t \mapsto \|Df(y_t)\|$ wird irgendwo in $[0, 1]$ angenommen, etwa in t . Für diesen Wert gilt somit

$$\|f(y_1) - f(y_0)\| \leq \|Df(y_t)\| \cdot \|y_1 - y_0\|.$$

□

Definition 4.22 — Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen.

1. f heißt Lipschitz¹⁷-stetig, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt derart, dass

$$d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x')$$

für alle $x, x' \in X$. L heißt Lipschitz-Konstante für f .

2. f heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt derart, dass die Einschränkung $f|_U : U \rightarrow Y$ Lipschitz-stetig ist.

Bemerkung 4.23 — Es ist klar, dass jede Lipschitz-stetige Abbildung auch lokal Lipschitz-stetig ist und dass jede lokal Lipschitz-stetige Abbildung stetig ist. Beide Umkehrungen sind falsch:

1. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung $f(x) = x^2$. Für jedes $R > 0$ ist die Einschränkung von f auf die offene Menge $U_R(0)$ Lipschitz-stetig mit Konstante $2R$, denn für x, x' mit $|x|, |x'| < R$ gilt:

$$|f(x) - f(x')| = |x + x'| \cdot |x - x'| < 2R |x - x'|.$$

¹⁷Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, * 14.5.1832 † 7.10.1903.

Andererseits ist f sicherlich nicht (global) Lipschitz-stetig, denn ist $L > 0$ irgendeine Konstante, so gilt für $x > L$, dass

$$|f(x) - f(0)| = |x|^2 > L|x - 0|.$$

2. Die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = \sqrt{|y|}$ ist stetig, aber in keiner Umgebung von 0 Lipschitz-stetig, denn für eine Nullfolge positiver Zahlen (y_n) gilt

$$\frac{|f(y_n)|}{|y_n|} = \frac{1}{\sqrt{|y_n|}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Beispiel 4.24 — Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. f ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn

$$L := \sup \{ |f'(x)| \mid x \in \mathbb{R} \} < \infty.$$

Denn für beliebige $x, x' \in \mathbb{R}$, $x \neq x'$, existiert nach dem Mittelwertsatz ein Punkt y zwischen x und x' derart, dass

$$\frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|} = |f'(y)| \leq L.$$

Falls $L < \infty$, so ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L . Ist umgekehrt $L = \infty$, so gibt es zu jeder Konstanten $\tilde{L} > 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| > 2\tilde{L}$. Nach Definition des Differentialquotienten existiert ein Punkt x' mit

$$\left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} - f'(x) \right| \leq \tilde{L}.$$

Es folgt, dass

$$\left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \geq \tilde{L}.$$

Im Falle $L = \infty$ ist f also nicht Lipschitz-stetig.

Definition 4.25 — Es seien X, Y metrische Räume und Z ein topologischer Raum. Ferner sei $U \subset Z \times X$ offen und $f : U \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. f heißt Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen, wenn es ein $L \geq 0$ gibt derart, dass für alle $(z, x), (z, x') \in U$ gilt

$$d(f(z, x), f(z, x')) \leq L \cdot d(x, x').$$

2. f heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen, wenn es zu jedem Punkt $(z, x) \in U$ eine Umgebung V gibt derart, dass $f|_V$ Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen ist.

Beispiel 4.26 — Es sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x, y) = h(x)y$. Dann ist f auf jedem Streifen $I \times \mathbb{R}^n$, wobei I ein beschränktes Intervall ist, Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen mit Lipschitz-Konstante

$$L_I := \sup\{|h(t)| \mid t \in \bar{I}\}.$$

Man beachte, dass das Supremum $< \infty$ ist, weil das abgeschlossene Intervall $\bar{I}$ kompakt ist. Die Funktion f ist aber nur dann (global) Lipschitz-stetig, wenn h beschränkt ist.

Satz 4.27 — Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei $f_t := f|_{U_t}$ stetig differenzierbar, $U_t := U \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^n)$, und die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y} : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad (t, y) \mapsto Df_t(y)$$

sei stetig. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y .

Beweis. Es sei ein Punkt (t_0, y_0) vorgegeben. Dann existiert ein $\eta > 0$ so, dass die kompakte Menge

$$K := \overline{U_\eta}(t_0) \times \overline{U_\eta}(y_0)$$

in U liegt. Da K kompakt und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig ist, nimmt die Funktion $\|\frac{\partial f}{\partial y}\|$ auf K ihr Maximum an. Wir setzen

$$L := 1 + \max \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\| \mid (t, y) \in K \right\}.$$

Für alle (t, y) und (t, y') existiert nach der Mittelwertungleichung für f_t ein $\tilde{y} = sy + (1-s)y'$, $s \in [0, 1]$ mit

$$\|f(t, y') - f(t, y)\| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \tilde{y}) \right\| \cdot \|y' - y\| \leq L \cdot \|y' - y\|.$$

Demnach ist f_t Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L . □

4.2.2 Das Iterationsverfahren

Wir wollen in diesem Abschnitt Existenz- und Eindeigkeitssätze für Lösungen eines Differentialgleichungssystem

$$y' = f(t, y) \tag{4.17}$$

mit Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \tag{4.18}$$

geben. Wir machen über die Ausgangsdaten die folgenden Annahmen:

1. $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist eine offene Menge, $(t_0, y_0) \in U$,
2. und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion, die in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetig ist.

Die Methode für das Auffinden einer Lösung ist konstruktiv und geschieht nach dem Iterationsverfahren von Picard¹⁸-Lindelöf¹⁹. Die Grundidee besteht darin, dass φ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung mit den gegebenen Anfangsbedingungen ist, wenn φ der Integralgleichung

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

genügt. Diese Gleichung hat die Form einer Fixpunktgleichung, kann also iterativ angegangen werden: Ist ψ bereits eine Näherungslösung, so sollte

$$\Phi(\psi)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds$$

eine bessere Lösung als ψ sein. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung wird letztlich durch eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes garantiert. Wir beginnen mit einem Beispiel, dass die Konstruktion illustrieren soll:

Beispiel 4.28 — Es sei die Differentialgleichung

$$y' = -2ty$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ vorgelegt. Wir definieren rekursiv Funktionen $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\psi_0(t) = 1, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und

$$\psi_{n+1}(t) = 1 - \int_0^t 2s\psi_n(s) ds$$

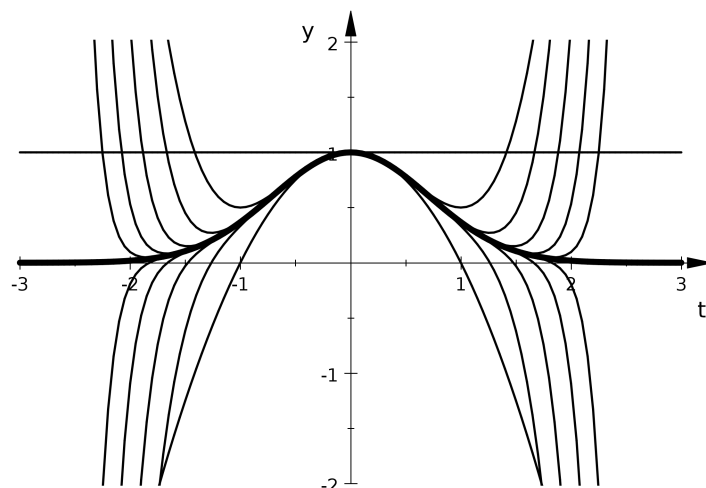
für $n \in \mathbb{N}_0$. Man rechnet leicht nach, dass die ersten fünf Funktionen wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= 1, \\ \psi_1(t) &= 1 - t^2, \\ \psi_2(t) &= 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4, \\ \psi_3(t) &= 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6, \\ \psi_4(t) &= 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8. \end{aligned}$$

¹⁸Charles Emile Picard, * 24.7.1856 † 11.12.1941.

¹⁹Ernst Leonard Lindelöf, * 7.3.1870 † 4.6.1946.

Diese Funktionenfolge konvergiert auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen die Lösung $\psi(t) = \exp(-t^2)$. Das folgende Bild zeigt die Lösungsfunktion und die ersten elf Approximationen.



Man beachte, dass die Funktion $f(t, y) = -2ty$ auf jedem Streifen $J \times \mathbb{R}$, wo J ein beschränktes Intervall ist, Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen ist, aber nicht auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Das heißt, f ist lokal Lipschitz-stetig, aber nicht global.

Ich stelle im folgenden die Beweisargumentation der Formulierung der Sätze von Picard-Lindelöf ausnahmsweise voran, weil ich die Beweismethode mit kleinen Änderungen für mehrere Sätze brauche.

Es sei ein Punkt $(t_0, y_0) \in U$ gegeben. Indem wir U gegebenenfalls durch eine kleinere Umgebung von (t_0, y_0) ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass f auf U Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$ ist.

Wir wählen r und R mit $0 < r < \infty$ und $0 < R \leq \infty$ so, dass die Menge

$$K := \{(t, y) \in U \mid \|t - t_0\| \leq r, \|y - y_0\| \leq R\}$$

noch ganz in U liegt. Dann ist entweder $R = \infty$, und wir definieren eine Konstante $\ell_0 := \min\{r, \frac{1}{2L}\}$, oder $R < \infty$. Im letzteren Fall ist K abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^{1+n}$, also kompakt, und die Funktion f ist auf K beschränkt. Wir setzen dann

$$C := \sup\{\|f(t, y)\| \mid (t, y) \in K\} + 1$$

und $\ell_0 := \min\{r, \frac{1}{2L}, \frac{R}{2C}\}$.

Es sei nun $(t_1, y_1) \in K$ ein Punkt mit $\|y_1 - y_0\| \leq \frac{1}{2}R$, und $J \subset [t_0 - r, t_0 + r]$ ein Intervall der Länge $\ell \leq \ell_0$ mit $t_1 \in J$.

Der Einfachheit halber notieren wir für einen festen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ die konstante Funktion $t \mapsto y$ wieder mit y . Die Menge

$$M := M_J := \left\{ \psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \psi \text{ stetig, } \|\psi - y_1\|_J \leq \frac{1}{2}R \right\},$$

versehen mit der von der Supremumsnorm $\|\cdot\|_J$ induzierten Metrik ist vollständig.

Für alle $\psi \in M$ und $t \in J$ gilt $\|\psi(t) - y_0\| \leq \|\psi(t) - y_1\| + \|y_1 - y_0\| \leq R$, d.h. $(t, \psi(t)) \in K$. Deshalb können wir die Voraussetzungen über die Lipschitz-Stetigkeit und die Beschränktheit von F verwenden.

Für jedes $\psi \in M$ ist die Abbildung

$$\Phi(\psi)(t) := y_1 + \int_{t_1}^t f(s, \psi(s)) ds$$

auf J definiert.

Wir zeigen zunächst, dass $\Phi(\psi)$ wieder in M liegt:

Falls $R = \infty$, so ist dies klar, denn die einzige Bedingung an $\Phi(\psi)$ ist die Stetigkeit, und $\Phi(\psi)$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sogar differenzierbar.

Falls $R < \infty$, so haben wir die Abschätzung $\|f(t, y)\| \leq C$ für alle $(t, y) \in K$. Es folgt für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\psi)(t) - y_1\| &\leq \left| \int_{t_1}^t \|f(s, \psi(s))\| ds \right| \\ &\leq |t - t_1| C \leq \ell C \leq \ell_0 C \\ &\leq \frac{1}{2}R. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber gerade, dass $\|\Phi(\psi) - y_1\|_J \leq \frac{1}{2}R$, also $\Phi(\psi) \in M$.

Wir zeigen weiter, dass die Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$ eine Kontraktion ist:

Es seien dazu zwei Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in M$ vorgegeben und $t \in J$. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\psi_1)(t) - \Phi(\psi_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_1}^t (f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^t \|f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| L \int_{t_1}^t \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| ds \right| \\ &\leq L |t - t_1| \|\psi_1 - \psi_2\|_J \\ &\leq L \ell_0 \|\psi_1 - \psi_2\|_J \\ &\leq \frac{1}{2} \|\psi_1 - \psi_2\|_J. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|\Phi(\psi_1) - \Phi(\psi_2)\|_J \leq \frac{1}{2} \|\psi_1 - \psi_2\|_J.$$

Damit ist gezeigt, dass Φ eine Kontraktion auf M ist. Wir schließen mit dem Banachschen Fixpunktsatz:

Es gibt genau eine Funktion $\varphi \in M_J$ mit $\Phi(\varphi) = \varphi$.

Satz 4.29 (Picard-Lindelöf, Teil I) — *Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal in der zweiten Variablen Lipschitz-stetig. Dann existiert zu jedem Anfangspunkt $(t_0, y_0) \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine auf $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ definierte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit $\varphi(t_0) = y_0$.*

Beweis. Wir wählen in der obigen Konstruktion $(t_1, y_1) = (t_0, y_0)$ und $\varepsilon = \ell_0/2$ und erhalten die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung auf $J = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. $\square$

Bemerkung 4.30 — Eine Existenzaussage gilt bereits unter schwächeren Voraussetzungen: Es genügt die Stetigkeit von f . Das ist der Existenzsatz von Peano. Allerdings geht dabei im allgemeinen die Eindeutigkeit der Lösung verloren. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}.$$

Sie hat zum Anfangswert $y(0) = 0$ zwei gänzlich verschiedene Lösungen: Zum einen die konstante Funktion $y(t) = 0$, zum anderen die Funktion

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{für } t \geq 0, \\ -\frac{1}{4}t^2 & \text{für } t \leq 0, \end{cases}$$

(und noch unendlich viele andere Lösungen! Welche?). Die Funktion $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ ist nicht Lipschitz-stetig bezüglich y . Wir zeigen nun, dass Lipschitz-Stetigkeit die Eindeutigkeit der Lösung garantiert.

Satz 4.31 (Picard-Lindelöf, Teil II) — *Es gelten die Annahmen von Satz 4.29. Sind $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ und gilt $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ für einen Punkt $t_0 \in I_{12} := I_1 \cap I_2$, so gilt $\varphi_1|_{I_{12}} = \varphi_2|_{I_{12}}$, und es gibt eine Lösung $\varphi : I := I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi|_{I_i} = \varphi_i$ für $i = 1, 2$.*

Beweis. Wir betrachten die Teilmenge

$$A := \{t \in I_1 \cap I_2 \mid \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$$

des Intervalls I_{12} . Wir beweisen über diese Menge der Reihe nach die folgenden Aussagen:

1. A nicht leer.
2. A ist abgeschlossen in I_{12} .
3. A ist offen in I_{12} .

Es folgt dann aus dem später formulierten und bewiesenen Satz 4.35, dass $A = I_{12}$ sein muss. Aber das bedeutet gerade, dass $\varphi_1|_{I_{12}} = \varphi_2|_{I_{12}}$. Definieren wir nun $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(t) := \varphi_i(t)$, falls $t \in I_i$ für $i = 1, 2$, so ist φ wohldefiniert, weil $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ falls t zugleich in I_1 und in I_2 liegt. Wir müssen also nur noch die Aussagen 1 bis 3 beweisen (und später Satz 4.35).

Ad 1: Dies ist klar, denn nach Voraussetzung des Satzes liegt $t_0 \in A$.

Ad 2: Die Funktionen $\varphi_1|_{I_{12}}$ und $\varphi_2|_{I_{12}}$ sind stetig. Sie stimmen genau dann in einem Punkt t überein, wenn die Differenz der Werte in t gleich Null ist. Folglich ist

$$A = (\varphi_1|_{I_{12}} - \varphi_2|_{I_{12}})^{-1}(0)$$

als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ abgeschlossen in I_{12} .

Ad 3: Hier müssen wir ein bisschen mehr argumentieren: Es sei also $t \in A$ ein beliebiger Punkt. Nach Definition von A gilt $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Wir müssen zeigen, dass eine offene Umgebung von t in I_{12} noch ganz in A liegt. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $t = t_0$ ist.

Es seien nun r, R, L, K, ℓ_0 etc. wie auf Seite 90 gewählt. Da φ_1 und φ_2 stetig sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\|\varphi_i(t) - y_0\| \leq \frac{1}{2}R$ für alle $t \in V := U_\varepsilon(t_0) \cap I_{12}$ und $i = 1, 2$. Es sei $\ell = \min\{\ell_0, \varepsilon\}$. Das Intervall $J := (t_0 - \ell/2, t_0 + \ell/2)$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\psi(t_0) = y_0$.
2. Auf $J_i := J \cap I_i$ stimmen ψ und φ_i überein, weil beide Funktionen in M_{J_i} liegen und es in M_{J_i} nur eine eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert (t_0, y_0) gibt. Insbesondere gilt $J|_{I_{12}} = \varphi_i|_{I_{12}}$ für $i = 1, 2$. D.h. $J \cap I_{12} \subset A$.
3. $J \cap I_{12}$ ist eine offene Umgebung von t_0 in I_{12} .

Demnach ist A offen. Bis auf den Satz 4.35 sind wir fertig. □

4.2.3 Exkurs über Zusammenhangsbegriffe

Definition 4.32 — Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn jede nicht leere, offene und abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ mit X zusammenfällt.

Beispiel 4.33 — Die Menge $X = (-2, -1) \cup (1, 2) \subset \mathbb{R}$, versehen mit der Teilraumtopologie, ist nicht zusammenhängend, denn die Mengen $A = (-2, -1)$ und $B = (1, 2)$ sind offen in X . Da $A = X \setminus B$, ist A auch abgeschlossen in X .

Lemma 4.34 — Ein topologischer Raum X ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(X) = \{0, 1\}$ gibt.

Beweis. Ist eine solche Funktion f gegeben, so gilt $X = A \cup B$ mit den nicht leeren Mengen $A = f^{-1}(0)$ und $B = f^{-1}(1)$. Die Mengen A und B sind wegen der Stetigkeit von f abgeschlossen und wegen $A = X \setminus B$ und $B = X \setminus A$ auch offen. Nach Definition ist X nicht zusammenhängend.

Ist X umgekehrt nicht zusammenhängend, so gibt es eine nicht leere, offene, abgeschlossene und von X verschiedene Teilmenge $A \subset X$. Wir definieren $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = 0$ bzw. $f(x) = 1$ je nachdem, ob $x \in A$ oder $x \in X \setminus A$. Da A und $X \setminus A$ offen in X sind, ist f stetig. $\square$

Satz 4.35 — Jedes Intervall ist zusammenhängend.

Beweis. Es sei I ein Intervall. Angenommen, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit $f(I) = \{0, 1\}$. Nach dem Zwischenwertsatz müsste aber das ganze Intervall $[0, 1]$ im Bild liegen. Widerspruch. $\square$

Definition 4.36 — Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten x_0, x_1 einen Weg, d.h. eine stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$ gibt.

Satz 4.37 — 1. Intervalle sind wegzusammenhängend.

2. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung topologischer Räume und ist X zusammenhängend oder wegzusammenhängend, so auch Y .

3. Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist auch zusammenhängend.

Beweis. Ad 1: Klar.

Ad 2: Es sei zunächst X zusammenhängend. Ist $A \subset Y$ nicht leer, ungleich Y und offen und abgeschlossen in Y , so ist $B := f^{-1}(Y)$ nicht leer, ungleich X und offen und abgeschlossen in X , im Widerspruch zum Zusammenhang von X . Also muss auch Y zusammenhängend sein. Angenommen, X ist wegzusammenhängend. Es seien y_0, y_1 beliebige Punkte in Y . Da f surjektiv ist, gibt es Punkte x_0, x_1 mit $f(x_j) = y_j$, $j = 0, 1$. Nach Annahme gibt es einen Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(j) = x_j$, $j = 0, 1$.

Dann ist $f \circ \alpha$ ein Weg in Y von y_0 nach y_1 .

Ad 3: Angenommen, X ist wegzusammenhängend, aber nicht zusammenhängend. Dann existiert eine Teilmenge $A \subset X$ derart, dass A und $B := X \setminus A$ nicht leer, offen und abgeschlossen sind. Wir wählen Punkte $x_0 \in A$ und $x_1 \in B$ und einen Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(j) = x_j$, $j = 0, 1$. Dann sind $A' := \alpha^{-1}(A)$ und $B' := \alpha^{-1}(B)$ nicht leere, offen und abgeschlossene Teilmengen von $[0, 1]$, im Widerspruch zum Zusammenhang von $[0, 1]$. $\square$

Beispiel 4.38 — Die Menge

$$X := \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(t, \sin(1/t)) \mid t \in (0, \pi]\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Skizze? Beweis?

4.2.4 Maximale Lösungen

Definition 4.39 — Eine Lösung $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems $y' = f(t, y)$ heißt maximal, wenn für jede andere Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi|_{I \cap \tilde{I}} = \tilde{\varphi}|_{I \cap \tilde{I}}$ gilt $I \subset \tilde{I}$.

Satz 4.40 — Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.29 gilt:

1. Zu jedem Punkt $(t_0, y_0) \in U$ gibt es eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $t_0 \in \tilde{I}$ und $\tilde{\varphi}(t_0) = y_0$.
2. Die maximale Lösung läuft von Rand zu Rand in U , d.h. $\tilde{I}$ ist ein offenes Intervall, $\tilde{I} = (a, b)$, mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, und ist (t_n) eine Folge in $\tilde{I}$ mit $\lim t_n = b$ (bzw. a), so hat $(t_n, \tilde{\varphi}(t_n))$ keine Häufungspunkte in U .

Beweis. Ad 1.: Wir betrachten die Familie

$$\mathcal{X} = \{(I_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

aller Lösungen $\varphi_\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, die den Punkt t_0 im Definitionsintervall I_α enthalten und dort den Wert $\varphi_\alpha(t_0) = y_0$ annehmen. Wir definieren das Intervall $\tilde{I}$ als die Vereinigung aller I_α ,

$$\tilde{I} := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{X}} I_\alpha,$$

und definieren eine Funktion $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie folgt: Zu jedem t existiert ein α mit $t \in I_\alpha$. Wir setzen nun

$$\tilde{\varphi}(t) := \varphi_\alpha(t).$$

Wenn es einen weiteren Index β mit $t \in I_\beta$ gibt, so stimmen nach Satz 4.31 die Lösungen φ_α und φ_β auf $I_\alpha \cap I_\beta$ überein, also auch in t . Damit ist

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_\alpha(t) = \varphi_\beta(t)$$

wohldefiniert. Man sieht leicht, dass $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Daher liegt $(\tilde{I}, \tilde{\varphi})$ selbst auch in $\mathcal{X}$ und ist nach Konstruktion eine maximale Lösung.

Ad 2.: Angenommen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\tilde{I}$ derart, dass $(t_n, \varphi(t_n))$ einen Häufungspunkt in U besitzt. Indem wir nötigenfalls (t_n) durch eine Teilfolge ersetzen, können wir davon ausgehen, dass dieser Punkt sogar der Grenzwert der Folge ist. Wir bezeichnen den Punkt mit (t_0, y_0) , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, \tilde{\varphi}(t_n)) = (t_0, y_0). \quad (4.19)$$

Da der Grenzwert nach Voraussetzung in U liegt, können wir die Konstruktion des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens auf Seite 90 anwenden und übernehmen alle dortigen Bezeichnungen. Wegen (4.19) gibt es einen Index N derart, dass $|t_N - t_0| \leq \ell_0/4$ und $|\tilde{\varphi}(t_N) - y_0| \leq \frac{1}{2}R$. Wir verwenden den Punkt $(t_N, \tilde{\varphi}(t_N))$ anstelle des Punktes (t_1, y_1) in der Konstruktion von Seite 90. Wir hatten als Ergebnis der dortigen Diskussion gesehen, dass es eine Lösung $\psi : [t_N - \ell/2, t_N + \ell/2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung mit $\psi(t_N) = \tilde{\varphi}(t_N)$ gibt. Wegen der Maximalität von $(\tilde{I}, \tilde{\varphi})$ folgt, dass das Intervall $[t_N - \ell_0/2, t_N + \ell_0/2]$ ganz in $\tilde{I}$ enthalten sein muss. Da außerdem $|t_0 - t_N| \leq \ell_0/4$ ist, ist $[t_N - \ell_0/2, t_N + \ell_0/2]$ eine offene Umgebung von t_0 in $\tilde{I}$.

Es ist also ausgeschlossen, dass wir eine solche Folge (t_n) finden, die eigentlich oder uneigentlich gegen $\sup(\tilde{I})$ oder $\inf(\tilde{I})$ konvergiert und für die $(t_n, \tilde{\varphi}(t_n))$ einen Häufungspunkt in U hat.

Würde $\max(\tilde{I})$ existieren, so hätte aber jede Folge (t_n) die dagegen konvergiert, genau diese Eigenschaft. Darum kann $\max(\tilde{I})$ nicht existieren. Ebenso schließt man für $\min(\tilde{I})$. Das zeigt, dass $\tilde{I}$ offen ist.

Damit ist alles gezeigt. □

Satz 4.41 — Ist $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U := I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen, so existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in U$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t_0) = y_0$.

Beweis. Es sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante so. Nach Satz 4.40 existiert eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t_0) = y_0$. Wir müssen zeigen, dass $J = I$.

Angenommen, $b := \sup J < \sup I$. Es sei $\ell := \frac{1}{2L}$. Wähle $t_1 \in J$ mit $t_1 > b - \ell/4$. Es existiert eine Lösung ψ auf $[t_1 - \ell/2, t_1 + \ell/2] \cap I$ mit $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Aus der

Maximalität von φ folgt $[t_1 - \ell/2, t_1 + \ell/2] \cap I \subset J$, also $\min\{t_1 + \ell/2, \sup(I)\} \leq b$, im Widerspruch zu $b < \sup(I)$ und $b < t_1 + \ell/4$. $\square$

Folgerung 4.42 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X \cdot U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Dann gibt es zu jedem $y \in U$ eine eindeutig bestimmte maximale Integralkurve $c : I \rightarrow U$ mit $0 \in I$ und $c(0) = y$ und $c(t)' = X(c(t))$ für alle $t \in I$. Dabei ist I ein offenes Intervall und die Integralkurve läuft von Rand zu Rand in U , d.h. falls (t_n) eine Folge in I ist, die (eigentlich oder uneigentlich) gegen $\sup(I)$ oder $\inf(I)$ konvergiert, so hat die Folge $(c(t_n))$ keinen Häufungspunkt in U .

4.3 Komplexe Differentialgleichungen

Bei der Untersuchung linearer Gleichungssysteme kommt es auf die Nullstellen gewisser Polynome an. Bekanntlich zerfällt ein Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren, braucht aber über den reellen Zahlen gar keine Nullstellen zu haben. Die Darstellung der Theorie wird stark erleichtert, wenn wir Differentialgleichungen für Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ zulassen.

Wir identifizieren $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ und entsprechend $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $(z_1, \dots, z_n) = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ hat also n komplexe Komponenten $f_i : I \rightarrow \mathbb{C}$ und $2n$ reelle Komponenten

$$\operatorname{Re} f_1, \operatorname{Im} f_1, \dots, \operatorname{Re} f_n, \operatorname{Im} f_n.$$

Auf $\mathbb{C}^n$ gibt es ein hermitesches Skalarprodukt

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i} \right) = \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re} z_i \operatorname{Re} w_i + \operatorname{Im} z_i \operatorname{Im} w_i).$$

Dieses stimmt mit dem üblichen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2n}$ überein. Daher stimmt auch die zugehörige komplexe Norm

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

mit der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^{2n}$ überein. Definiert man analog für Matrizen $A \in M_n(\mathbb{C})$ die Norm

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2},$$

so gilt wie im Reellen die Abschätzung

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Eine Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ist differenzierbar, wenn sie komponentenweise differenzierbar ist.

$$f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i(\operatorname{Im} f)'(t).$$

Ebenso ist das Integral einer $\mathbb{C}$ -wertigen Funktion komponentenweise definiert: f ist integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind, und wir setzen

$$\int_a^b f(s) ds := \int_a^b \operatorname{Re} f(s) ds + i \int_a^b \operatorname{Im} f(s) ds.$$

Alle früher bewiesenen Sätze gelten nun, richtig interpretiert, auch für komplexe Differentialgleichungssysteme,

$$z' = f(t, z).$$

Dabei ist $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen.

Ich verzichte darauf, die Sätze neu zu formulieren.

4.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Ein explizite Differentialgleichung n -Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4.20)$$

wobei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist, die auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ definiert ist. Solche Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich durch einen einfachen Trick auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in n komplexen Variablen zurückführen.

Wir führen eine neue Variable $z = (z_1, \dots, z_n)$ und betrachten das folgende Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_{n-1}' \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} =: F(t, z). \quad (4.21)$$

Dabei hat F denselben Definitionsbereich wie f , also U , und ist eine stetige Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{C}^n$. Weiterhin ist F genau dann (lokal) Lipschitz-stetig in der Variablen z , wenn dies für f gilt.

Satz 4.43 — 1. Ist die Abbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung (4.20) zu den Anfangswerten $\varphi^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$, $k = 0, \dots, n-1$, so

ist die Abbildung $\hat{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit den Komponenten $\hat{\varphi}_k := \varphi^{(k-1)}$ für $k = 1, \dots, n$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems 1. Ordnung (4.21) zum Anfangswert $\hat{\varphi}(t_0)_k = y_0^{(k-1)}$, $k = 1, \dots, n$.

2. Ist umgekehrt $\hat{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung von (4.21) zu diesem Anfangswert, so ist die erste Komponente $\varphi := \hat{\varphi}_1$ eine Lösung des Systems (4.20) zum entsprechenden Anfangswert.

Beweis. Das sieht man leicht durch Einsetzen. □

Um die Situation für kleine Ordnungen zu illustrieren: Wir behandeln eine Differentialgleichung

$$y'' = f(t, y, y'),$$

indem wir die „Geschwindigkeit“ v als unabhängige Variable einführen und das System erster Ordnung

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= f(t, y, v) \end{aligned}$$

aufstellen. Die erste Zeile sagt dann nichts weiteres aus, als dass v die Geschwindigkeit y' ist, und wenn man $v' = (y')' = y''$ berücksichtigt, so sagt die zweite Zeile dasselbe, wie die ursprüngliche Differentialgleichung. Der Trick besteht in gewissem Sinne darin, dass wir, indem wir das Differentialgleichungssystem mit y und v hinschreiben, so tun, als wären y und v gänzlich unabhängige Variablen. Aber sobald die vektorwertige Funktion $t \mapsto (y(t), v(t))$ die Differentialgleichung löst, werden die beiden wieder durch $y' = v$ miteinander verknüpft.

Eine Konsequenz dieser einfachen Entsprechung von Lösungen der Differentialgleichung n -ter Ordnung und der Lösungen des Differentialgleichungssystems ist, dass sich alle Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen 1 zu 1 übertragen:

Satz 4.44 — Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Variable. Zu jedem Punkt $(t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in U$ gibt es ein offenes Intervall I und eine n -mal stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$ für alle $k = 0, \dots, n-1$,
2. $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ für alle $t \in I$.
3. Die Lösung (I, φ) ist maximal und auf jedem Teilstück eindeutig.

4.5 Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Differentialgleichungssysteme sind Spezialfälle der in Abschnitt 4.2 untersuchten Systeme: Es sei I ein Intervall, und es seien

$$b : I \rightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{und} \quad A : I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$$

stetige Abbildungen. Eine Gleichung der Form

$$z' + Az = b$$

heißt lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Die Gleichung heißt homogen, falls $b(t) = 0$ für alle $t \in I$, und andernfalls inhomogen. Eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : J \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $\varphi'(t) + A(t)\varphi(t) = b(t)$ für alle $t \in J$ für ein Intervall $J \subset I$.

Satz 4.45 — Zu jedem $(t_0, z_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte, auf ganz I definierte Lösung φ des linearen Differentialgleichungssystems mit Anfangswert $\varphi(t_0) = z_0$.

Beweis. Auf jedem kompakten Teilintervall $J \subset I$ sind die stetigen Funktionen b und A der Norm nach beschränkt. Deshalb ist die Funktion $(t, z) \mapsto b(t) - A(t)z$ auf $J \times \mathbb{C}^n$ in der Variablen z (global!) Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L := \max\{\|A(t)\| \mid t \in J\}$. Nach Satz 4.41 ist jede maximale Lösung auf ganz J definiert. Wir schöpfen I mit kompakten Intervallen aus. $\square$

Satz 4.46 (Superpositionsprinzip) — Sind ψ_1, ψ_2 Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems

$$z' + Az = 0,$$

so auch alle Linearkombinationen $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Mit anderen Worten:

$$V := \{\psi : I \rightarrow \mathbb{C}^n \mid \psi'(t) + A(t)\psi(t) = 0 \quad \forall t \in I\}$$

ist ein Vektorraum. Genauer ist für jedes $t_0 \in I$ die Auswertungsabbildung

$$a : V \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \psi \mapsto \psi(t_0)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Wir betrachten die Auswertungsabbildung $a : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ im Punkt t_0 . Die Abbildung a ist sicherlich linear. a ist surjektiv wegen der Existenz einer Lösung ψ mit vorgegebenem Anfangswert $\psi(t_0) = z_0 \in \mathbb{C}^n$. Aber a ist auch injektiv wegen der Eindeutigkeit dieser Lösung. $\square$

Es sei nun $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V$ eine Basis von V . Eine solche Basis nennt man auch ein Fundamentalsystem von Lösungen. Aus dem Satz folgt, dass dann für jedes t die Vektoren $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig sind und umgekehrt. Insbesondere gilt: Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen der Differentialgleichung, die für ein $t \in I$ an dieser Stelle linear unabhängig sind, so gilt dies für alle $t \in I$.

Wir setzen ein Fundamentalsystem von Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ zu einer matrixwertigen Funktion $\Phi : I \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ zusammen. D.h. Φ ist eine Matrix mit Einträgen

$$(\Phi(t))_{ij} = (\varphi_j(t))_i \quad \text{für alle } i, j,$$

und genügt der folgenden Matrixgleichung

$$\Phi'(t) + A(t) \cdot \Phi(t) = 0$$

für alle $t \in I$. Dass die φ_i eine Basis bilden, bedeutet nach dem Satz, dass die Matrix $\Phi(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist.

Wir wollen das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$z' + Az = b$$

lösen und machen dazu einen Ansatz mit Variation der Konstanten: Von der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t)$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ gehen wir zu der Funktion

$$\psi(t) := \varphi_1(t) \cdot c_1(t) + \dots + \varphi_n(t) \cdot c_n(t)$$

mit Abbildungen $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{C}$, die wir zu $c : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ zusammenfassen, über. Der Ansatz lautet in Matrixschreibweise

$$\psi = \Phi \cdot c.$$

Daraus ergibt sich nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \psi' + A\psi &= (\Phi c)' + A\Phi c \\ &= \Phi' c + \Phi c' + A\Phi c \\ &= -A\Phi c + \Phi c' + A\Phi c \\ &= \Phi c' \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\psi' + A\psi = b$$

äquivalent zu $\Phi c' = b$ oder

$$c'(t) = \Phi(t)^{-1} \cdot b(t), \quad \forall t \in I.$$

Jetzt finden wir c durch Integration:

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.47 (Variation der Konstanten) — Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungsraum des homogenen Differentialgleichungssystems

$$z' + Az = 0,$$

so ist die Lösung des inhomogenen Systems

$$z' + Az = b$$

zum Anfangswert $(t_0, z_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ gegeben durch

$$\psi(t) = z_0 + \Phi(t) \cdot \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds.$$

4.6 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Wir spezialisieren die im vorigen Abschnitt betrachteten Differentialgleichungen weiter und nehmen an, dass die Koeffizientenmatrix A konstant ist, d.h. nicht mehr explizit von t abhängt. Wir können dann ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung direkt angeben.

Dazu betrachten wir die Reihe

$$\exp(A) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell$$

für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$. Für alle $m \geq m_0$ gilt:

$$\left\| \sum_{\ell=m_0}^m \frac{1}{\ell!} A^\ell \right\| \leq \sum_{\ell=m_0}^m \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell.$$

Da die Reihe

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \|A\|^\ell$$

absolut konvergiert, ist

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell$$

eine Cauchyfolge in $M_n(\mathbb{C})$ und konvergiert nachdem Satz von Bolzano-Weierstraß.

Lemma 4.48 — 1. Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C}), t \mapsto \exp(tA)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$(\exp(tA))' = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

2. Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\exp((s+t)A) = \exp(sA) \cdot \exp(tA)$.

3. $\exp(A)$ ist invertierbar.

Beweis. Ad 1: Die Reihe $\exp(tA)$ konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$. Für jedes Paar (i, j) , $1 \leq i, j \leq n$, ist die (i, j) -te Komponente von $\exp(tA)$ eine Potenzreihe

$$(\exp(tA))_{i,j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (A^\ell)_{i,j} t^\ell$$

vom Konvergenzradius ∞ und darf komponentenweise differenziert werden. Es folgt

$$\exp(tA)' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^{\ell+1} t^\ell = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

Ad 2: Es sei $s \in \mathbb{R}$ fest. Die Abbildungen

$$t \mapsto \exp((s+t)A)$$

und

$$t \mapsto \exp(sA) \exp(tA)$$

ergeben ausgewertet in $t = 0$ beide $\exp(sA)$ und erfüllen beide die Differentialgleichung

$$X' = AX.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenen Anfangswert folgt die Behauptung.

Ad 3: Wendet man die Teilaussage 2 für $s = -t$ an, so folgt

$$\exp(-tA) \cdot \exp(tA) = \exp(0) = I_n$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei I_n die Einheitsmatrix vom Rang n bezeichnet. Folglich ist $\exp(A)$ invertierbar mit Inverser Matrix $\exp(-A)$. $\square$

Satz 4.49 — Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Das homogene Differentialgleichungssystem

$$z' + Az = 0 \tag{4.22}$$

hat die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Matrixlösung $\Phi(t) = e^{-At}$. Die Spalten von Φ bilden eine Basis für die Lösungen von (4.22).

Beweis. Man erhält durch Differenzieren von A :

$$\Phi'(t) = A \cdot e^{-At} = A \cdot \Phi(t).$$

Demnach ist jede Spalte von A eine Lösung. Diese bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems (4.22), da $\exp(-tA)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist. $\square$

Es bleibt die Frage nach der Berechnung von $\exp(tA)$. Hier hilft die Lineare Algebra: Wir wissen, dass es zu jeder Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix S gibt derart, dass $SAS^{-1} = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix ist, N eine nilpotente Matrix und D und N miteinander kommutieren. (Das ist eine schwache Form des Satzes über die Jordansche Normalform.) Weil D und N kommutieren, gilt $\exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$. Deshalb darf man wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp(tS^{-1}(D + N)S) \\ &= S^{-1} \exp(tD) \exp(tN) S\end{aligned}$$

Die Matrizen $\exp(tD)$ und $\exp(tN)$ kann man hinschreiben:

$$\text{Für } D = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{pmatrix} \text{ gilt } \exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{tD_1} & & & \\ & e^{tD_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tD_n} \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist N nilpotent, d.h. $N^n = 0$. Daher ist die Reihe $\exp(tN)$ nur ein matrixwertiges Polynom:

$$\exp(tN) = I_n + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}N^{n-1}.$$

Damit lässt sich $\exp(tA)$ im Einzelfall explizit hinschreiben: Man berechnet die Jordansche Normalform samt Basiswechselmatrizen S , etc.

4.7 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Lineare Differentialgleichungen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t)$$

können mit dem früher beschriebenen Trick in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt werden. Aus dieser Korrespondenz folgt:

Satz 4.50 (*Superpositionsprinzip*) — Es seien $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen.

1. Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0 \quad (4.23)$$

bilden einen n -dimensionalen komplexen Vektorraum V .

2. Zwei Lösungen ψ_1, ψ_2 der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \quad (4.24)$$

unterscheiden sich um eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

3. Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung, d.h. eine Basis von V , genau dann, wenn die Wronski-Determinante

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n; t) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

in einem Punkt $t \in I$ (und damit in allen Punkten $t \in I$) ungleich 0 ist.

Beweis. Ad 3.: Die Übersetzung zwischen einer Differentialgleichung n -ter Ordnung und einem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung geschieht so, dass einer Lösung φ der homogenen Differentialgleichung (4.23) eine Lösung

$$\hat{\varphi}(t) := \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eines Differentialgleichungssystems

$$\hat{\varphi}'(t) + \hat{A}(t)\varphi(t) = 0 \quad (4.25)$$

entspricht. Nun sind $\hat{\varphi}_1(t), \dots, \hat{\varphi}_n(t)$ linear unabhängig (also $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n$ eine Basis des Lösungsraums $\hat{V}$ des Systems (4.25)) genau dann, wenn

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n; t) \neq 0.$$

□

Wir spezialisieren zu Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = b(t) \quad (4.26)$$

mit $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Für die homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0 \quad (4.27)$$

machen wir den Ansatz

$$y = e^{\lambda t} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Iteriertes Ableiten liefert

$$y^{(k)}(t) = \lambda^k \cdot e^{\lambda t}$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erweist sich (4.27) als äquivalent zu

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda t} = 0,$$

also

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Definition 4.51 — Das Polynom

$$\chi(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$$

heißt charakteristisches Polynom der Differentialgleichung (4.26).

Wenn wir unseren Ansatz weiterverfolgen, so müssen wir nach Nullstellen von χ suchen. Angenommen, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sind verschiedene Nullstellen, dann sind $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$ unabhängige Lösungen. Wir halten als Zwischenergebnis fest: Hat das charakteristische Polynom $\chi(X)$ paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bilden die Funktionen $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Schwieriger wird die Sache, wenn χ mehrfache Nullstellen hat. In diesem Falle gehen wir so vor:

Es bezeichne $D = \frac{d}{dt}$ den Ableitungsoperator, der jede N -mal stetig differenzierbare Funktion f auf ihre (nur noch $N - 1$ -mal stetig differenzierbare) Ableitung schickt:

$$D : \mathcal{C}^N(I, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{N-1}(I, \mathbb{C}), f \mapsto f'.$$

Ist $F(X) = F_n X^n + \dots + F_0$ ein Polynom, so können wir den Operator

$$F(D) : \mathcal{C}^N(I, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{N-n}(I, \mathbb{C}), \quad f \mapsto F_n f^{(n)} + \dots + F_1 f' + F_0 f$$

bilden. Mit dieser Bezeichnung kann man die Differentialgleichung ziemlich kurz so schreiben:

$$\chi(D)(y) = 0.$$

Man rechnet leicht nach, dass das folgende Lemma gilt:

Lemma 4.52 — Für beliebige Polynome F und G gilt

$$(FG)(D) = F(D) \circ G(D).$$

Beispiel 4.53 — Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(D - \lambda)t^m e^{\lambda t} = (mt^{m-1}e^{\lambda t} + \lambda t^m e^{\lambda t}) - \lambda t^m e^{\lambda t} = mt^{m-1}e^{\lambda t}.$$

Iteriert man die Anwendung von $(D - \lambda)$ auf $t^m e^{\lambda t}$, so sinkt bei jedem Schritt der Exponent von t um 1. Nach $m + 1$ Schritte bleibt nichts übrig. D.h. es gilt $(D - \lambda)^p(t^m e^{\lambda t}) = 0$ für alle $p > m$.

Satz 4.54 — Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ und $n_1, \dots, n_k$ ihre Vielfachheiten, d.h.

$$\chi(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_k)^{n_k}.$$

Dann bilden die Funktionen

$$f_{j,\nu} = t^\nu e^{\lambda_j t}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad 0 \leq \nu < n_j \quad (4.28)$$

eine Basis für den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung

$$\chi(D)(y) = 0.$$

Beweis. Aus der Beispielrechnung folgt

$$\chi(D)t^\nu e^{\lambda_j t} = \prod_{i \neq j} (D - \lambda_i)^{n_i} \cdot \underbrace{(D - \lambda_j)^{n_j} t^\nu e^{\lambda_j t}}_{=0} = 0,$$

weil $n_j > \nu$ nach Voraussetzung. Demnach sind alle n Funktionen vom Typ (4.28) Lösungen der Differentialgleichung. Es bleibt zu zeigen, dass die Funktionen $f_{j,\nu}$ linear unabhängig sind. Angenommen, es gibt $\lambda_{j,\nu} \in \mathbb{C}$ mit

$$0 = \sum_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} f_{j,\nu} = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{\nu=0}^{n_j-1} \lambda_{j,\nu} t^\nu \right) =: \sum_{j=1}^k g_j(t) e^{\lambda_j t}$$

mit Polynomen $g_j(t) = \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \lambda_{j,\nu} t^\nu$. Wir wollen zeigen, dass eine solche Relation nur für Nullpolynome bestehen kann.

Es sei $k \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft, dass es paarweise verschiedene komplexe Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und von Null verschiedene Polynome $g_1, \dots, g_k$ gibt mit

$$g_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + g_k(t) e^{\lambda_k t} = 0.$$

Offenbar kann k nicht gleich 1 sein. Wenden wir hierauf $(D - \lambda_k)$ an, so erhalten wir

$$h_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + h_{k-1}(t) e^{\lambda_{k-1} t} + g'_k(t) e^{\lambda_k t} = 0,$$

wobei $h_i = (\lambda_i - \lambda_j)g_i + g'_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, k-1$. Wiederholen wir den Vorgang g_k -mal, so entsteht eine Relation

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_{k-1}(t)e^{\lambda_{k-1} t} = 0,$$

im Widerspruch zur Minimalität von k . □

4.7.1 Die gedämpfte harmonische Schwingung

Ein physikalisches System, dass sich in einem stabilen Gleichgewicht befindet, wird nach einer kleinen Störung in die Ausgangslage zurückzukehren. Solche Systeme werden häufig durch eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{4.29}$$

für eine Konstante $\omega > 0$, die Kreisfrequenz, beschrieben. Das charakteristische Polynom $X^2 + \omega^2$ hat die beiden verschiedenen komplexen Nullstellen $i\omega$ und $-i\omega$. Die Funktionen $e^{i\omega t}$ und $e^{-i\omega t}$ bilden ein Fundamentalsystem für den komplexen Lösungsraum. Die Funktionen

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{1}{2}(\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)) = \cos(\omega t) \\ \psi_2(t) &= \frac{1}{2i}(\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)) = \sin(\omega t) \end{aligned}$$

bilden ein Fundamentalsystem für den reellen Lösungsraum. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.29) hat die Form

$$\psi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme können wir dies in die Form

$$\psi(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

bringen, wobei die Amplitude A und die Phase α so gewählt sind, dass $A^2 = c_1^2 + c_2^2$ und $c_1 = A \sin(\alpha)$, $c_2 = A \cos(\alpha)$. Die Lösung $\psi(t)$ beschreibt eine harmonische Schwingung.

Wir erweitern das Modell, indem wir einen zur Geschwindigkeit proportionalen Dämpfungsterm hinzufügen:

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0,$$

mit $\gamma > 0$ und $\omega > 0$. Das charakteristische Polynom

$$\chi(X) = X^2 + 2\gamma X + \omega^2$$

hat entweder zwei zueinander komplex konjugierte Nullstellen, eine doppelte reelle Nullstelle, oder zwei negative reelle Nullstellen.

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

1. Schwingfall: $0 < \gamma < \omega$. Es sei $\omega' := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. Das charakteristische Polynom hat die beiden verschiedenen komplexen Nullstellen $-\gamma + \omega'i$ und $-\gamma - \omega'i$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{(-\gamma + \omega'i)t} \\ \varphi_2(t) &= e^{(-\gamma - \omega'i)t}\end{aligned}$$

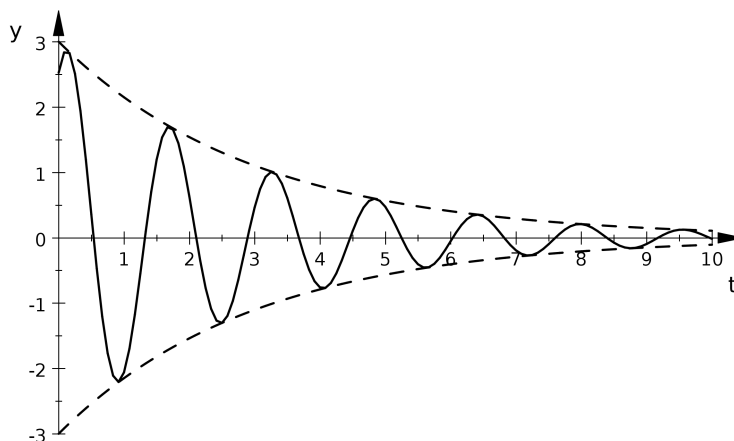
bilden eine komplexe Basis des Lösungsraums und

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \frac{1}{2}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = e^{-\gamma t} \cos(\omega' t) \\ \psi_2(t) &= \frac{1}{2i}(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = e^{-\gamma t} \sin(\omega' t)\end{aligned}\tag{4.30}$$

eine Basis des reellen Lösungsraumes. Ähnlich wie oben können wir eine allgemeine Lösung in der Form

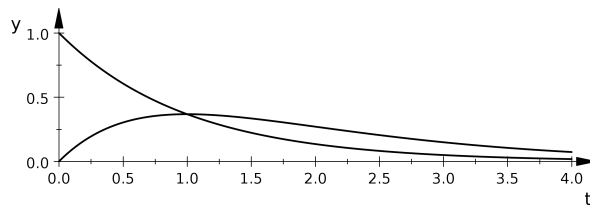
$$\psi(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \alpha)$$

schreiben. Die Amplitude $Ae^{-\gamma t}$ von ψ klingt exponentiell ab. Typische Lösungen sehen so aus:

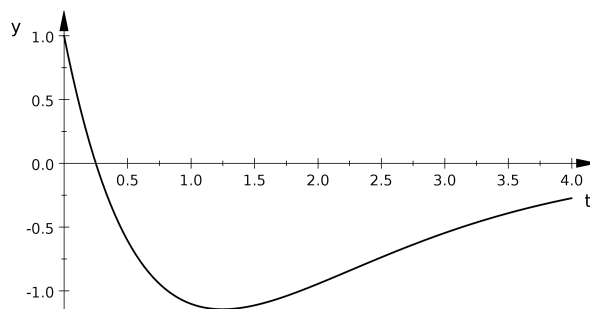


Mit zunehmender Dämpfung γ wird die Wellenlänge $\frac{2\pi}{\omega'}$ immer größer und geht für $\gamma \rightarrow \omega$ gegen ∞ .

2. Der aperiodische Grenzfall: $\gamma = \omega$. Die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms fallen zusammen und sind reell. Der Lösungsraum wird aufgespannt von den Funktionen $e^{-\gamma t}$ und $te^{-\gamma t}$:



Durch geeignete Linearkombination der beiden Lösungen findet man Lösungen zu vorgegebenem Anfangswert, z.B.



3. Der Kriechfall: $\gamma > \omega$.

In diesem Fall sind $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ reell. Der Lösungsraum wird aufgespannt von $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$. Das System schwingt wie schon im aperiodischen Grenzfall nicht mehr.

Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = \sin(\alpha t).$$

Die rechte Seite beschreibt den einfachsten Fall einer periodischen Anregung des Systems.

Der systematische Weg zur Auffindung einer speziellen Lösung geht über eine Variation der Konstanten. Das überlasse ich dem Leser zur Übung. Stattdessen begnügen wir uns mit einer heuristischen Überlegung: Nach einer Einschwingphase wird das System im wesentlichen der Anregung folgen. Deshalb machen wir den folgenden Ansatz:

$$\varphi = u \cdot \sin(\alpha t) + v \cdot \cos(\alpha t)$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten u und v . (Dieser Ansatz wird nur durch den Erfolg gerechtfertigt.) Wir finden durch Differenzieren

$$\varphi'(t) = \alpha u \cos(\alpha t) - v \alpha \sin(\alpha t)$$

$$\varphi''(t) = -\alpha^2 u \sin(\alpha t) - \alpha^2 \cos(\alpha t).$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung führt dies auf die Bedingung

$$[(-\alpha^2 + \omega^2)u - 2\gamma\alpha v] \sin(\alpha t) + [(-\alpha^2 + \omega^2)v + 2\gamma\alpha u] \cos(\alpha t) = \sin(\alpha t).$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \alpha^2 & -2\gamma\alpha \\ 2\gamma\alpha & \omega^2 - \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat eine eindeutige Lösung, wenn $\Delta := (\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2 \neq 0$, nämlich

$$u = \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\Delta}, \quad v = \frac{-2\gamma\alpha}{\Delta}$$

Wir setzen $A := \Delta^{-\frac{1}{2}}$ und wählen $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass

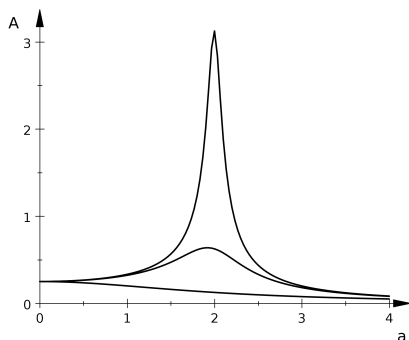
$$u = A \cdot \cos \beta, \quad v = A \cdot \sin \beta.$$

Dann ist

$$A \cdot \sin(\alpha t + \beta)$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Interessant ist die Abhängigkeit der Amplitude $A = \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}$ von der Anregungsfrequenz α :



Solange die Dämpfung γ klein gegenüber ω ist, genauer: wenn $\gamma < \omega/\sqrt{2}$, hat $A(\alpha)$ ein Maximum an der Stelle $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$: es tritt Resonanz ein. Dieses Maximum

ist um so schärfer, je kleiner γ ist. Das Bild zeigt die Amplitude für $\omega = 2$ und die Dämpfungen $\gamma = 0,08, 0,4$ und 2 . Wenn die Dämpfung γ verschwindet, bekommt $A(\alpha)$ einen Pol bei $\alpha = \omega$. Allerdings ist in diesem Falle die Anfangsannahme $\Delta \neq 0$ hinfällig. Man überzeugt sich durch Differenzieren, dass

$$-\frac{t}{2\omega} \cdot \cos(\omega t) \tag{4.31}$$

eine spezielle Lösung der ungedämpften, angeregten Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 y = \sin(\omega t)$$

ist. Man beachte, dass die Lösung (4.31) unbeschränkt ist.

5 Vervollständigungen

Wir haben zu Beginn der Vorlesung Analysis I ein Axiomensystem für die reellen Zahlen aufgestellt und im Anschluss daran zwei Semester lang unter der Hypothese gearbeitet, dass es tatsächlich einen Körper $\mathbb{R}$ gibt, der alle diese Axiome erfüllt. In diesem Kapitel wollen wir diese logische Hypothek zurückzahlen, und indem wir zumindest die rationalen Zahlen als gegeben voraussetzen, die reellen Zahlen aus den rationalen konstruieren.

Dabei formalisieren wir die anschauliche Vorstellung von einer reellen Zahl als unendlichem Dezimalbruch. Ein unendlicher Dezimalbruch ist eigentlich eine Folge von endlichen Dezimalbrüchen, also eine Folge rationaler Zahlen, und genauer: einer Cauchy-Folge rationaler Zahlen. Der Grundansatz wird sein: Eine reelle Zahl ist eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen, wobei zwei Cauchy-Folgen äquivalent sind, wenn sie in zu präzisierendem Sinne „gegen den denselben Grenzwert konvergieren würden“.

Wir setzen im Abschnitt 5.1 die Existenz der reellen Zahl noch voraus.

5.1 Vervollständigungen metrischer Räume

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X ist bekanntlich eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Die folgende Formulierung ist dazu äquivalent: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $n \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Wir hatten ferner X vollständig genannt, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert. Wir wollen in diesem Abschnitt zu jedem metrischen Raum einen vollständigen metrischen Raum $(\overline{X}, \overline{d})$ konstruieren, in den (X, d) isometrisch einbettet.

Dabei nennen wir eine Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ eine Isometrie, wenn $d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$ für alle $a, b \in X$. Isometrien sind notwendigerweise injektiv.

Die Konstruktionsidee für $\overline{X}$ imitiert die Konstruktion der reellen Zahlen: Wir beginnen mit dem Raum aller Cauchy-Folgen und teilen nach einer Äquivalenzrelation aus.

Wir betrachten auf der Menge

$$CF := \{(x_n) \mid (x_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge in } X\}.$$

die Relation

$$(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Lemma 5.1 — $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf CF .

Beweis. Symmetrie und Reflexivität sind klar. Transitivität folgt aus der Dreiecksungleichung für d . $\square$

Definition 5.2 — Es sei $\overline{X} := CF / \sim$. Wir bezeichnen mit $[(x_n)]$ die Äquivalenzklasse der Cauchy-Folge (x_n) . Ferner sei (x) die konstante Folge für $x \in X$ und $i : X \rightarrow \overline{X}$ die Abbildung $x \mapsto [(x)]$.

Satz 5.3 — 1. Für je zwei Cauchy-Folgen $(x_n), (y_n) \in CF$ existiert der Grenzwert

$$\overline{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

und hängt nur von den Äquivalenzklassen von (x_n) und (y_n) ab.

2. $\overline{d}$ ist eine Metrik auf $\overline{X}$.

3. Die Abbildung $i : X \rightarrow \overline{X}$ ist eine Isometrie.

Beweis. Ad 1. Wir zeigen zunächst, dass $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist und folglich konvergiert. Es sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein n_1 so, dass für alle $n, m \geq n_1$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$, und ebenso ein n_2 so, dass für alle $n, m \geq n_2$ gilt $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$. Für alle $n, m \geq \max\{n_1, n_2\}$ folgt

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x_m) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Angenommen $[(x_n)] = [(\tilde{x}_n)]$ und $[(y_n)] = [(\tilde{y}_n)]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, \tilde{y}_n)| + |d(x_n, \tilde{y}_n) - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \\ &\leq d(y_n, \tilde{y}_n) + d(x_n, \tilde{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n).$$

Insbesondere ist die Abbildung $\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\overline{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

wohldefiniert.

Ad 2. Es ist klar, dass $\overline{d} \geq 0$. Andererseits bedeutet $0 = \overline{d}([(x_n)], [(y_n)])$ nach Definition gerade $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$, also $(x_n) \sim (y_n)$. Das zeigt, dass $\overline{d}$ Punkte in $\overline{X}$ trennt. Ferner ist die Symmetrie von $\overline{d}$ klar. Es bleibt die Dreiecksungleichung zu zeigen: Sind nun $(x_n), (y_n)$ und (z_n) Cauchy-Folgen in X , so gilt wegen der Dreiecksungleichung für d :

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n).$$

Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir die gewünschte Ungleichung

$$\bar{d}([(x_n)], [(z_n)]) \leq d([(x_n)], [(y_n)]) + d([(y_n)], [(z_n)]).$$

Ad 3. Für zwei Punkte $x, y \in X$ und die zugehörigen konstanten Cauchy-Folgen (x) und (y) gilt trivialerweise

$$\bar{d}([(x)], [(y)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y),$$

d.h. $i : X \rightarrow \bar{X}$ ist eine Isometrie. □

Lemma 5.4 — $i(X)$ ist dicht in $\bar{X}$.

Beweis. Es sei $z \in \bar{X}$ vorgegeben. z wird durch eine Cauchy-Folge (z_n) in X repräsentiert. Wir zeigen, dass die Folge $(i(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\bar{X}$ gegen z konvergiert. (Hieraus folgt, dass jeder Punkt in $\bar{X}$ ein Randpunkt von $i(X)$ ist).

Da (z_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein n derart, dass $d(z_n, z_m) < \varepsilon$ für alle $m \geq n$.

Die Punkte z und $i(z_n)$ in $\bar{X}$ werden durch die Cauchy-Folge $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise die konstante (!) Folge $(z_n)_{m \in \mathbb{N}}$ [sic !] repräsentiert. Deshalb gilt

$$\bar{d}(z, i(z_n)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(z_m, z_n).$$

Die rechte Seite wird $< \varepsilon$, sobald $m \geq n$. Daraus folgt:

$$\bar{d}(z, i(z_n)) < \varepsilon.$$

Das bedeutet: $i(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$. □

Satz 5.5 — $(\bar{X}, \bar{d})$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchy-Folge in $\bar{X}$ konvergiert.

Es sei dazu (z_n) eine Cauchy-Folge in $\bar{X}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist z_n ein Punkt in $\bar{X}$ und wird repräsentiert durch eine Cauchy-Folge $(z_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in X . Daher existiert für jedes n ein Index $k(n)$ derart, dass $d(z_{n,k}, z_{n,\ell}) < \frac{1}{2^n}$ für alle $k, \ell \geq k(n)$. Wir definieren

$$x_n := z_{n,k(n)}$$

und zeigen

1. (x_n) ist eine Cauchy-Folge in X .
2. Bezeichnet $x := [(x_n)]$ die Klasse von (x_n) in $\bar{X}$, so gilt $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Ad 1: Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein N mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $1/2^N < \varepsilon$,
- (ii) Für alle $n, m \geq N$ gilt $\bar{d}(z_n, z_m) < \varepsilon$,

was sicher möglich ist, da (z_n) eine Cauchy-Folge in $\bar{X}$ ist. Für $n, m \geq N$ und $k \geq \max\{k(n), k(m)\}$ gilt nun:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(z_{n,k(n)}, z_{m,k(m)}) \\ &\leq d(z_{n,k(n)}, z_{n,k}) + d(z_{n,k}, z_{m,k}) + d(z_{m,k}, z_{m,k(m)}). \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Summand auf der rechten Seite lassen sich durch $1/2^n \leq \varepsilon$ beziehungsweise $1/2^m \leq \varepsilon$ abschätzen. Der mittlere Summand geht für $k \rightarrow \infty$ gegen $\bar{d}(z_n, z_m) < \varepsilon$. Hieraus folgt insgesamt: Für alle $n, m \geq N$ gilt $d(x_n, x_m) < 3\varepsilon$. Das zeigt, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Ad 2: Für gegebenes n sei $\ell \geq k(n)$, und $k \geq \max\{\ell, k(\ell)\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(z_{n,\ell}, x_\ell) &= d(z_{n,\ell}, z_{\ell,k(\ell)}) \\ &\leq d(z_{n,\ell}, z_{n,k}) + d(z_{n,k}, z_{\ell,k}) + d(z_{\ell,k}, z_{\ell,k(\ell)}). \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Summand auf der rechten Seite sind durch $1/2^n$ beziehungsweise $1/2^\ell$ beschränkt. Der mittlere Summand geht für $k \rightarrow \infty$ gegen $\bar{d}(z_n, z_\ell)$.

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und N wie oben gewählt, so folgt für $n \geq N$ und $\ell \geq n, k(n)$, dass

$$\begin{aligned} d(z_{n,\ell}, x_\ell) &\leq \frac{1}{2^n} + \bar{d}(z_n, z_\ell) + \frac{1}{2^\ell} \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\ell \rightarrow \infty$ folgt $\bar{d}(z_n, x) < 3\varepsilon$. Da ε beliebig war, bedeutet dies: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$. □

Definition 5.6 — Der vollständige metrische Raum $(\bar{X}, \bar{d})$ zusammen mit der Isometrie $i : X \rightarrow \bar{X}$ heißt Vervollständigung (oder Kompletierung) von (X, d) .

Satz 5.7 — Ist (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum und ist $f : X \rightarrow Y$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante L , so existiert genau eine stetige Abbildung $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow Y$ derart, dass $\bar{f} \circ i = f$. Diese Abbildung $\bar{f}$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L .

Beweis. Falls $\bar{f}$ existiert, ist die Abbildung jedenfalls eindeutig bestimmt: Ist nämlich $z = [(z_n)]$ ein Punkt in $\bar{X}$, so gilt $\lim i(z_n) = z$, und wegen der Stetigkeit von $\bar{f}$ muss gelten

$$\bar{f}(z) = \lim \bar{f}(i(z_n)) = \lim f(z_n).$$

Damit liegt $\bar{f}$ in der Tat fest.

Wir drehen den Spieß um: Es sei $z = [(z_n)]$ ein Punkt in $\bar{X}$. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f ist $(f(z_n))$ eine Cauchy-Folge in Y und muss konvergieren. Wir definieren $\bar{f}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$. Zunächst einmal ist $\bar{f}$ wohldefiniert, denn wird z von zwei Folgen (z_n) und (z'_n) repräsentiert, so ist $d(z_n, z'_n)$ eine Nullfolge, und wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f auch $d(f(z_n), f(z'_n))$. Deshalb haben die Folgen $(f(z_n))$ und $(f(z'_n))$ denselben Grenzwert. Weiter gilt offensichtlich $\bar{f}(i(z)) = f(z)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{f}$ Lipschitz-stetig mit Konstante L ist.

Es seien dazu Punkte $z, z' \in \bar{X}$ vorgegeben und (z_n) beziehungsweise (z'_n) Cauchy-Folgen in X , die diese Punkte repräsentieren. Dann gilt:

$$d_Y(\bar{f}(z), \bar{f}(z')) \leq d_Y(\bar{f}(z), f(z_n)) + d_Y(f(z_n), f(z'_n)) + d_Y(f(z'_n), \bar{f}(z')).$$

Für $n \rightarrow \infty$ gehen der erste und der letzte Term auf der rechten Seite nach Definition von $\bar{f}$ gegen 0. Der mittlere Term lässt sich wegen der Lipschitz-Stetigkeit von L durch $Ld(z_n, z'_n)$ abschätzen, und für $n \rightarrow \infty$ geht dieser Term gegen $L\bar{d}(z, z')$. Insgesamt ergibt sich

$$d_Y(\bar{f}(z), \bar{f}(z')) \leq L\bar{d}(z, z'),$$

wie zu zeigen war. □

Satz 5.8 — Die Vervollständigung $i : (X, d) \rightarrow (\bar{X}, \bar{d})$ ist durch die im vorigen Satz beschriebene Eigenschaft vollständig charakterisiert, d.h. ist $i' : (X, d) \rightarrow (X', d')$ eine Isometrie in einen vollständigen metrischen Raum derart, dass die analoge Aussage des Satzes 5.7 für i' erfüllt ist, so gibt es eine eindeutig bestimmte bijektive Isometrie $\Phi : \bar{X} \rightarrow X'$ mit $i' = \Phi \circ i$.

Beweis. Nach Annahme ist i' eine Isometrie, d.h. Lipschitz-stetig mit Konstante 1. Dann existiert nach Satz 5.7, angewendet auf i , eine eindeutig bestimmte, Lipschitz-stetige Abbildung $\Phi : \bar{X} \rightarrow X'$ mit $i' = \Phi \circ i$.

In gleicher Weise ist aber auch i Lipschitz-stetig, und Satz 5.7, angewendet auf i' , liefert eine Abbildung $\Psi : X' \rightarrow \bar{X}$ mit $i = \Psi \circ i'$.

Die Komposition $A := \Psi \circ \Phi : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ ist Lipschitz-stetig und hat die Eigenschaft $A \circ i = i$. Aber diese Eigenschaft hat auch die identische Abbildung $\text{id}_{\bar{X}}$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.7, folgt $A = \Psi \circ \Phi = \text{id}_{\bar{X}}$.

Mit demselben Argument, folgt $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{X'}$. Demnach sind Φ und Ψ zueinander inverse Bijektionen, die Lipschitz-stetig mit Konstante 1 sind. Daraus folgt leicht, dass Φ und Ψ Isometrien sind. □

5.2 Vervollständigungen normierter Räume

Jeder normierte Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist insbesondere ein metrischer Raum mit der von der Norm induzierten Metrik $d(v, w) = \|v - w\|$. Wir können also auf E die Konstruktion aus dem letzten Abschnitt anwenden.

Es sei $\overline{E}$ die Vervollständigung von E bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik und $i : E \rightarrow \overline{E}$ die kanonische isometrische Einbettung.

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und sind $x, x' \in \overline{E}$ Punkte, die durch Cauchy-Folgen (x_n) und $(x'_n) \in X$ repräsentiert sind, so sind auch (λx_n) und $(x_n + x'_n)$ Cauchy-Folgen, deren Klassen nur von der Klasse von (x_n) beziehungsweise den Klassen von (x_n) und (x'_n) abhängen. Daher ist sind die Verknüpfungen

$$\lambda \cdot x := [(\lambda x_n)]$$

und

$$x + x' := [(x_n + x'_n)]$$

wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, dass $\overline{E}$ mit diesen Verknüpfungen ein reeller Vektorraum ist und dass die Einbettung $i : E \rightarrow \overline{E}$ linear ist.

Ebenso lässt sich zeigen, dass $\|x\| := \overline{d}(x, 0)$ eine Norm auf $\overline{E}$ ist, die die Metrik $\overline{d}$ induziert. Hieraus folgt, dass $(\overline{E}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Satz 5.9 — Ist $f : E \rightarrow B$ eine stetige lineare Abbildung in einen Banachraum B , so existiert genau eine stetige lineare Abbildung $\overline{f} : \overline{E} \rightarrow B$ derart, dass $\overline{f} \circ i = f$. Dabei ist die Operatornorm von $\overline{f}$ gleich der Operatornorm von f .

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit von $\overline{f}$ folgt aus Satz 5.7, sobald man sich daran erinnert, dass für lineare Abbildungen die Eigenschaften stetig und beschränkt gleichbedeutend sind. Insbesondere ist jede stetige lineare Abbildung auch Lipschitz-stetig. Schließlich ist die Operatornorm einer linearen stetigen Abbildung genau das Infimum aller möglichen Lipschitz-Konstanten für diese Abbildung. $\square$

5.3 Vervollständigungen bewerteter Körper

Definition 5.10 — Es sei L ein Körper und K ein angeordneter Körper. Eine Bewertung von L mit Werten in K ist eine Abbildung $|\cdot| : L \rightarrow K$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $|x| \geq 0$ für alle $x \in L$, und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in L$.
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$ für alle $x, y \in L$.

Beispiele 5.11 1. Das einfachste und vertrauteste Beispiel ist der gewöhnliche Betrag $|\cdot|_\infty : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, den ich in diesem Abschnitt ausnahmsweise zur Unterscheidung von anderen Bewertungen mit dem Index ∞ versehen werde.

2. Jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lässt sich in der folgenden Weise darstellen:

$$x = \varepsilon \prod_{p \text{ prim}} p^{\nu_p(n)}.$$

Dabei ist $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, das Produkt läuft über alle Primzahlen, die Exponenten $\nu_p(n)$ sind ganze Zahlen, und bei festem n ist $\nu_p(n) = 0$ bis auf endlich viele Primzahlen p .

Es sei nun eine Primzahl p fest gewählt.

Definition 5.12 (p -adische Bewertung) — Die Abbildung

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

gegeben durch $|0|_p = 0$ und $|x|_p := p^{-\nu_p(n)}$ für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, heißt p -adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$.

Ich überlasse es dem Hörer zur Übung nachzurechnen, dass $|\cdot|_p$ tatsächlich eine Bewertung ist.

3. Es sei M ein Körper und $L := M(X)$ der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in M , d.h. die Elemente in L sind Funktionen $r(X) := \frac{f(X)}{g(X)}$, wobei f und g Polynome in X sind. Ferner sei $m \in M$ ein beliebiges Element. Wir definieren $|0|_m := 0$, und $|r|_m = 2^{-n}$, wenn $r = f/g$ eine nichttriviale rationale Funktion und $n \in \mathbb{Z}$ die Differenz der Nullstellenordnungen der Polynome f und g in $X = m$ ist. Man rechne nach, dass $|\cdot|_m : L \rightarrow \mathbb{Q}$ eine Bewertung auf L ist.

Man überzeugt sich leicht, dass der Begriff der Bewertung alles ist, was man braucht, um in L viele Konstruktion zu wiederholen, die wir in $\mathbb{R}$ durchgeführt haben:

Definition 5.13 — Es sei L Körper mit einer Bewertung $|\cdot| : L \rightarrow K$.

1. Eine Folge (x_n) konvergiert gegen x , wenn es zu jedem $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, ein n gibt derart, dass $|x_m - x| < \varepsilon$ für alle $m \geq n$.
2. Eine Folge (x_n) ist eine Nullfolge, wenn x_n gegen 0 konvergiert.
3. Eine Folge (x_n) ist eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, ein n gibt derart, dass $|x_m - x_n| < \varepsilon$ für alle $m \geq n$.
4. Eine Folge (x_n) ist beschränkt, wenn es ein $c \in K$ gibt derart, dass $|x_n| < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ebenso beweist man in gewohnter Manier die folgenden Aussagen:

1. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
2. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
3. Die Summe oder Differenz zweier konvergenter Folgen (Nullfolgen, Cauchy-Folgen, beschränkter Folgen) ist wieder konvergent (eine Nullfolge, eine Cauchy-Folge, eine beschränkte Folge).
4. Das Produkt zweier Cauchy-Folgen ist eine Cauchy-Folge.
5. Das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge.

Daraus können wir aber rasch Gewinn ziehen:

Lemma 5.14 — Es sei CF die Menge der Cauchy-Folgen im bewerteten Körper L , und NF die Menge der Nullfolgen. Die obigen Aussagen 1-5 implizieren:

1. CF ist ein kommutativer Ring. Nullelement und Einselement sind durch die konstanten Folgen (0) und (1) gegeben.
2. NF ist ein Ideal in CF .

Wir bezeichnen mit $\bar{L} := CF/NF$ den Faktorring (oder Quotientenring). Die Abbildung $i : L \rightarrow \bar{L}$, die jedes Element $x \in L$ auf die Restklasse der konstanten Folge (x) schickt, ist injektiv.

Satz 5.15 — $\bar{L}$ ist ein Körper.

Beweis. Ein Element $x \in \bar{L}$, repräsentiert durch eine Cauchy-Folge (x_n) in L , ist genau dann nicht 0, wenn (x_n) keine Nullfolge ist. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ in K und unendlich viele Indizes n derart, dass $|x_n| > 2\varepsilon$. Da (x_n) eine Cauchy-Folge ist, gibt andererseits einen Index n_0 derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Ist also $n \geq n_0$ irgendein Index mit $|x_n| > 2\varepsilon$, so folgt für alle $m \geq n_0$, dass

$$|x_m| \geq |x_n| - |x_n - x_m| \geq \varepsilon.$$

Wir definieren eine Folge (y_n) in X wie folgt:

$$y_m := \begin{cases} 0, & \text{falls } m < n_0 \\ \frac{1}{x_m}, & \text{falls } m \geq n_0 \end{cases}$$

Dann ist (y_m) eine Cauchy-Folge (Übung). Wir bezeichnen die Restklasse von (y_m) in $\bar{L}$ mit y . Weiter gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m y_m = 1$, also $xy = 1$ in $\bar{L}$. Insbesondere ist x invertierbar. $\square$

Definition 5.16 — $\bar{L}$ heißt die Vervollständigung von L bezüglich der Bewertung $|\cdot| : L \rightarrow K$.

5.3.1 Die reellen Zahlen

Wir fixieren auf $\mathbb{Q}$ den gewöhnlichen Betrag $|\cdot|_\infty$ und definieren die reellen Zahlen $\mathbb{R} := \overline{\mathbb{Q}}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_\infty$. Nach Konstruktion ist $\mathbb{R}$ ein Körper und enthält die rationalen Zahlen vermöge der Einbettung $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ als Unterkörper.

Wir definieren auf $\mathbb{R}$ eine Anordnung wie folgt: Ist $x \in \mathbb{R}$ durch die Cauchy-Folge (x_n) repräsentiert, so ist $x > 0$ per definitionem genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{Q}$ einen Index n gibt, so dass $x_m > -\varepsilon$ für alle $m \geq n$.

Damit sind alle relevanten Strukturen auf $\mathbb{R}$ definiert: Die algebraischen Verknüpfungen und die Anordnung. Es ist jetzt eine Fleißaufgabe nachzurechnen, dass alle Axiome, die wir für die reellen Zahlen aufgestellt haben, wirklich erfüllt sind.

Es gibt andere Möglichkeiten, die reellen Zahlen zu konstruieren: Als Menge von Äquivalenzklassen von Dedekindschen Schnitten in $\mathbb{Q}$ oder als Menge von Äquivalenzklassen von Intervallschachtelungen usw. Ich verweise auf die zahlreiche Literatur.

5.3.2 Die p -adischen Zahlen

Etwas spannender, als Axiome nachzurechnen, sind ein paar Experimente in den p -adischen Zahlen. Wir fixieren eine Primzahl p und betrachten die im Beispiel 5.11 definierte p -adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$.

Definition 5.17 — Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$ wird mit $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet und heißt der Körper der p -adischen Zahlen.

Das systematische Studium der Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$ gehört in die Algebra oder Zahlentheorie. Am Ende der Vorlesung will ich mich damit begnügen, ein paar überraschende Rechnungen zu machen. Da es uns nur um die Illustration gewisser Effekte geht, fixieren wir im Folgenden die Primzahl $p = 3$, rechnen also in $\mathbb{Q}_3$.

Um uns an das Rechnen in $\mathbb{Q}_3$ langsam zu gewöhnen, weise ich als erstes darauf hin, dass die Folge

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots,$$

bezüglich $|\cdot|_3$ keineswegs unbeschränkt ist, sondern im Gegenteil eine Nullfolge ist. Aus dem gleichen Grund besteht die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3^n) = 1.$$

Weiter konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = -\frac{1}{2}.$$

Denn die n -Partialsumme ist

$$s_n = \frac{3^n - 1}{3 - 1}.$$

Für alle $m \geq n$ folgt daher:

$$|s_n - s_m|_3 \leq 3^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. die Reihe konvergiert. Außerdem gilt

$$(-2)s_n = 1 - 3^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Weiter behaupte ich, dass zwar $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}_3$, dass aber dafür die Gleichung $x^2 + 2 = 0$ eine Lösung in $\mathbb{Q}_3$ hat: Wir konstruieren eine solche Lösung rekursiv:

Lemma 5.18 — *Es gibt eine Folge x_n von natürlichen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $x_{n+1} = x_n + a_n 3^n$ für eine Zahl $a_n \in \{0, 1, 2\}$.
2. $|x_n^2 + 2|_3 \leq 3^{-n}$.

Aus 1. folgt, dass x_n in $\mathbb{Q}_3$ konvergiert. Aus 2. folgt dann, dass für $x := \lim x_n$ gilt $x^2 = -2$.

Beweis. Wir beginnen mit $x_1 := 1$. Wegen $x_1^2 + 2 = 3$ ist die Bedingung 2 erfüllt. Wir nehmen nun induktiv an, wir hätten bereits $x_1, \dots, x_n$ konstruiert und machen für x_{n+1} den Ansatz

$$x_{n+1} = x_n + a_n 3^n$$

mit einer noch zu bestimmenden Zahl $a_n \in \{0, 1, 2\}$. Nach Induktionsannahme gilt $|x_n^2 + 2|_3 \leq 3^{-n}$. Das bedeutet ausgeschrieben, dass 3^n ein Teiler der natürlichen Zahl $x_n^2 + 2$ ist, etwas $x_n^2 + 2 = 3^n b$ mit $b \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$x_{n+1}^2 + 2 = (x_n^2 + 2) + 2x_n a_n 3^n + a_n^2 3^{2n} = (2a_n + b)3^n + R3^{n+1}$$

mit $R \in \mathbb{N}$. Diese Zahl ist genau dann durch 3^{n+1} teilbar (was die Bedingung 2 für $n + 1$ impliziert), wenn $2a_n + b$ durch 3 teilbar ist. Aber für jedes b kann a_n stets passend gewählt werden, nämlich einfach als der Rest von b bei ganzzahliger Division durch 3. $\square$

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ liegen bekanntlich diskret in $\mathbb{R}$ und sind daher eine in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Teilmenge. Für die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ ist dies nicht wahr. Der Abschluss $\mathbb{Z}_p := \overline{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}_p$ heißt Ring der ganzen p -adischen Zahlen. Man hat eine Darstellung

$$\mathbb{Z}_p := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \mid a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\} \right\}.$$

Man zeige:

$\mathbb{Z}_p$ ist kompakt!