

Analysis III

Vorlesung im Wintersemester 2003/2004

Manfred Lehn

Mainz, 21. Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Lebesguesche Integrationstheorie	5
1 Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$	5
1.1 Riemannsche Integration	5
1.2 Integration nach Lebesgue	6
1.3 Das Maß- und das Inhaltsproblem	6
2 Das äußere Lebesguesche Maß	8
3 Das Lebesguesche Maß	15
3.1 Die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen	15
3.2 Zusammenhang mit der Topologie des $\mathbb{R}^n$	18
3.3 Zusammenhang mit der affinen Struktur des $\mathbb{R}^n$	19
4 Das Lebesgue-Integral	23
4.1 Lebesgue-messbare Funktionen	23
4.2 Das Lebesgue-Integral für Treppenfunktionen	24
4.3 Das Lebesgue-Integral für nichtnegative Funktionen	26
4.4 Das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen	28
4.5 Fast überall	30
4.6 Vergleich mit dem Riemann-Integral	31
5 Konvergenzsätze	33
5.1 Die Sätze von Levi, Fatou und Lebesgue	33
5.2 Die L^p -Räume	35
5.3 Vollständigkeit	38
5.4 Parameterabhängige Integrale	39
6 Der Satz von Fubini	45
7 Transformationsformel und Anwendungen	51
7.1 Die Transformationsformel für das Lebesgueintegral	51
7.2 Anwendungen	55
8 Das Hausdorff-Paradoxon	60
9 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	65
9.1 Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen	65
9.2 Tangentialräume	70
9.3 Teilung der Eins	75
10 Äußere Algebra	78
10.1 Alternierende Formen	78
10.2 Das äußere Produkt (Dachprodukt)	80
10.3 Orientierungen	84

11 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$	86
11.1 Differentialformen	86
11.2 Äußere Ableitung	88
11.3 Verhalten bei Abbildungen	89
11.4 Divergenz und Rotation	91
12 Integration auf Mannigfaltigkeiten I	94
12.1 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	94
12.2 Orientierte Mannigfaltigkeiten	97
12.3 Integration von Differentialformen	103
13 Der Satz von Stokes	108
13.1 Der Satz von Stokes für Quader	108
13.2 Das Differential von Formen auf Mannigfaltigkeiten	110
13.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand	110
13.4 Der Satz von Stokes	113
14 Integration auf Mannigfaltigkeiten II	114
14.1 Die Gramsche Determinante	114
14.2 Bogenlängen	120
15 Der Gaußsche Integralsatz	123
15.1 Die Integralsätze von Gauß und Green	123
15.2 Harmonische Funktionen	125
16 De Rham-Kohomologie und Poincaré-Lemma	129
16.1 Das Poincaré-Lemma	129
16.2 De Rham-Kohomologie	132

1 Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$

Ein Ziel der Maß- und Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$ besteht darin, einer möglichst großen Teilmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ von Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Volumen

$$\mu(A) \in \overline{\mathbb{R}}$$

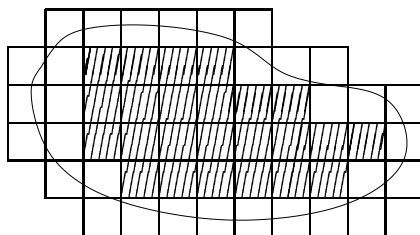
zuzuordnen. Dabei soll μ verschiedene Bedingungen erfüllen, die wir von einem sinnvollen Volumenbegriff erwarten. So soll sicherlich $\mu(A)$ stets größer oder gleich null sein. Für die leere Menge soll $\mu(\emptyset) = 0$ gelten. Weiter verlangen wir für einen Quader Q , dass

$$\mu(Q) := \text{vol}(Q) := \text{Produkt der Kantenlängen.}$$

Schließlich werden wir auch erwarten, dass das Volumen eines zusammengesetzten Körpers die Summe seiner Teile ist. Wir werden sehen müssen, ob sich all diese Erwartungen tatsächlich erfüllen lassen.

1.1 Riemannsche Integration

Die Grundidee der Riemannschen¹ Integration besteht darin, eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ zum einen mit endlich vielen Quadern zu überdecken und zum anderen von innen mit Quadern auszuschöpfen.



Durch Verwendung immer kleinerer Quader und Grenzübergang erhalten wir ein äußeres Volumen

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i \right\}$$

und ein inneres Volumen

$$\mu_*(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \text{vol}(Q_i) \mid \bigcup_{i=1}^m Q_i \subset A, Q_i \text{ disjunkt} \right\}$$

Das ergibt ein sinnvolles Maß für A , wenn $\mu^*(A) = \mu_*(A)$. Wir sagen dann, A sei Riemann-messbar.

Beispiel 1.1 — Die Menge $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist nicht Riemann-messbar. Es gilt nämlich $\mu^*(A) = 1$ und $\mu_*(A) = 0$.

¹Bernhard Riemann * 17.9.1826 † 20.7.1866.

1.2 Integration nach Lebesgue

Der wichtigste Unterschied zwischen den Theorien von Riemann und Lebesgue² besteht darin, dass wir bei der Lebesgueschen Integrationstheorie auch Überdeckungen mit abzählbar vielen Quadern zulassen:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\}.$$

Man nennt eine Menge A Lebesgue-messbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von A mit $\mu^*(U \setminus A) < \varepsilon$ gibt.

Beispiel 1.2 — Die Menge $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ aus Beispiel 1.1 ist abzählbar, etwa $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Intervall

$$Q_n := (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}).$$

Die Länge dieses Intervalls ist $\text{vol}(Q_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}$. Außerdem gilt $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Daraus ergibt sich nach Definition

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $\mu^*(A) = 0$. Solche Mengen heißen μ^* -Nullmengen.

1.3 Das Maß- und das Inhaltsproblem

Das Beispiel 1.2 zeigt, dass wir je nach Methode verschiedene Begriffe von Messbarkeit und vielleicht auch verschiedene Inhalte für dieselbe Menge A bekommen können. Das allgemeine Maßproblem lautet nun:

1.3. Maßproblem — Gibt es eine Abbildung $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften?

1. Normiertheit: $\mu([0, 1]^n) = 1$.
2. σ – Additivität: Für jede Folge (A_n) disjunkter Mengen gilt

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

3. Bewegungsinvarianz: Für jede Bewegung $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(gA) = \mu(A)$.

Unter einer Bewegung verstehen wir dabei eine Bijektion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die abstandstreu ist, d.h. für alle Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$. Wir wissen, dass alle Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ die Form $g(x) = Ax + b$ haben, wobei A eine orthogonale Matrix ist und $b \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor.

Satz 1.4 (Vitali³ 1905) — Das Maßproblem ist für alle $n \geq 1$ unlösbar.

²Henri Lebesgue * 28.6.1875 † 26.7.1941.

³Giuseppe Vitali * 26.8.1875 † 29.2.1932

Wir werden den Satz von Vitali später beweisen (Beispiel 3.16). Dabei spielen Konstruktionen mit Vereinigungsmengen von abzählbare vielen Mengen eine Rolle. Man kann sich fragen, ob das Problem zugänglich wird, wenn man statt der σ -Additivität nur endliche Vereinigungen betrachtet. Das führt auf das sogenannte Inhaltsproblem:

1.5. Inhaltsproblem — Gibt es eine Abbildung $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften?

1. Normiertheit: $\mu([0, 1]^n) = 1$.
2. Endliche Additivität: Für $A, B \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

3. Bewegungsinvarianz: Für jede Bewegung $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(gA) = \mu(A)$.

Hausdorff hat gezeigt, dass die Antwort auf diese Frage merkwürdigerweise von der Dimension abhängt:

Satz 1.6 (Hausdorff⁴ 1914) — *Das Inhaltsproblem ist unlösbar für $n \geq 3$.*

Hausdorffs Beweis fußt auf dem sogenannten Hausdorffparadoxon. Wir werden das Hausdorffparadoxon im Kapitel 8 beweisen und zeigen, wie daraus der Beweis von Satz 1.6 folgt.

Später wurde der Satz von Hausdorff durch Banach ergänzt:

Satz 1.7 (Banach⁵) — *Das Inhaltsproblem ist für $n = 1, 2$ lösbar, aber nicht eindeutig.*

⁴Felix Hausdorff * 8.11.1868 † 26.1.1942.

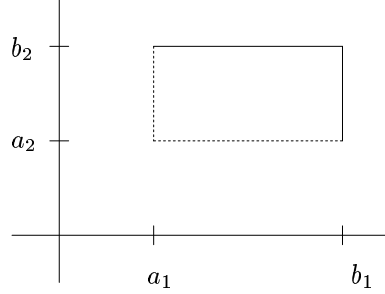
⁵Stefan Banach * 30.3.1892 † 31.8.1945.

2 Das äußere Lebesguesche Maß

Wir schreiben $a \leq b$ für Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$, wenn $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, n$, und analog $a < b$, wenn $a_i < b_i$ für $i = 1, \dots, n$. Mengen der Form

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < x \leq b\} = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i]$$

heißen n-dimensionale halboffene Quader.



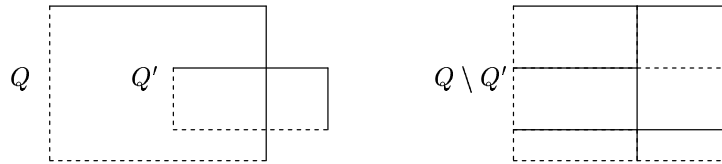
Der topologische Abschluss von $(a, b]$ ist der abgeschlossene Quader $[a, b] = \prod_i [a_i, b_i]$, und das Innere von $(a, b]$ ist der offene Quader $(a, b) = \prod_i (a_i, b_i)$.

Es sei $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ der Form $A = \bigcup_{i=1}^{\ell} Q_i$ mit disjunkten halboffenen Quadern Q_i .

Lemma 2.1 — *Es seien Q, Q' halboffene Quader.*

1. $Q \cap Q'$ ist ein halboffener Quader.
2. Es gibt disjunkte halboffene Quader $Q^{(1)}, \dots, Q^{(\ell)}$ mit $Q \setminus Q' = \bigcup_{i=1}^{\ell} Q^{(i)}$.

Beweis. Es seien halboffene Quader $Q = (a, b]$ und $Q' = (a', b']$ gegeben. Dann gilt $Q \cap Q' = (\max(a, a'), \min(b, b')] =: Q''$. Da weiter $Q \setminus Q' = Q \setminus Q''$, können wir für Aussage 2 ohne Einschränkung annehmen, dass $Q' \subset Q$, d.h. dass $a \leq a' < b' \leq b$. Es sei $\{Q_{\nu}\}$ die Menge aller Quader $Q_{\nu} = (a'_{\nu}, b'_{\nu}]$, für die für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt: a'_{ν}, b'_{ν} sind zwei aufeinander folgende Zahlen aus der Folge a_i, a'_i, b'_i, b_i . Dann sind alle Q_{ν} paarweise disjunkt, für einen Index ν_0 gilt $Q_{\nu_0} = Q'$, und $Q = \bigcup_{\nu} Q_{\nu}$.



Es folgt $Q \setminus Q' = \bigcup_{\nu \neq \nu_0} Q_{\nu}$. □

Satz 2.2 — $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$,
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

Beweis. Aussage 1 ist klar.

Zu 2: Es gelte $A = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ und $B = \bigcup_{j=1}^m Q'_j$ mit jeweils disjunkten Quadern Q_i bzw. Q'_j . Dann hat man

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n (\dots ((Q_i \setminus Q'_1) \setminus Q'_2) \setminus \dots Q'_m).$$

Induktiv genügt es also, den Fall $m = 1$ und $n = 1$ zu betrachten. Aber $Q \setminus Q' \in \mathcal{F}$ nach Lemma 2.1.

Zu 3: Sind A, B disjunkt, so ist die Behauptung klar, und im Allgemeinen folgt die Behauptung wegen $A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} B$ aus 2. $\square$

Bemerkung 2.3 — Ist X eine beliebige Menge und $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein Mengensystem, das die Eigenschaften 1 – 3 des Satzes besitzt, so heißt $\mathfrak{R}$ ein Ring auf X . In diesem Sinne ist also $\mathcal{F}$ ein Ring auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.4 — Ist $Q = (a, b]$ ein halboffener Quader, $a \leq b$, so heißt

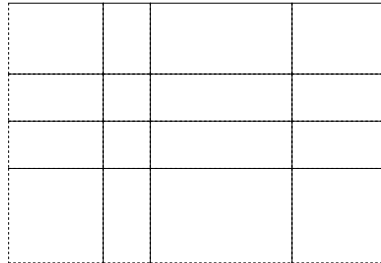
$$\mu(Q) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

der Inhalt von Q .

Satz 2.5 — Ist Q ein halboffener Quader mit einer Zerlegung $Q = \bigcup_{j=1}^{\ell} Q^{(j)}$ in disjunkte halboffene Quader $Q^{(1)}, \dots, Q^{(\ell)}$, so gilt $\mu(Q) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(Q^{(j)})$.

Beweis. Es sei $Q = (a, b]$.

1. Fall. Wir betrachten eine spezielle Zerlegung von Q der folgenden Form: Für jeden Index i sei eine Zerlegung $a_i = c_{i,0} < c_{i,1} < \dots < c_{i,m_i} = b_i$ des Intervalls $(a_i, b_i]$ gewählt. Es sei $N = \{\nu \in \mathbb{N}_0^3 \mid 0 \leq \nu_i < m_i\}$ und $Q_\nu := (a^\nu, b^\nu]$ mit $a_i^\nu = c_{i,\nu_i}$, $b_i^\nu = c_{i,\nu_i+1}$.



Dann gilt $Q = \bigcup_{\nu \in N} Q_\nu$, und

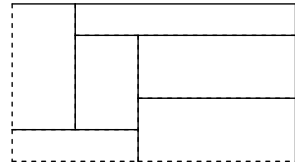
$$\begin{aligned}\mu(Q) &= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \prod_{i=1}^n \sum_{\nu_i=0}^{m_i-1} (c_{i\nu_i+1} - c_{i\nu_i}) \\ &= \sum_{\nu \in N} \prod_{i=1}^n (c_{i\nu_i+1} - c_{i\nu_i}) = \sum_{\nu \in N} \mu(Q_\nu).\end{aligned}$$

2. Fall. Wir betrachten eine beliebige Zerlegung $Q = Q^{(1)} \cup \dots \cup Q^{(\ell)}$ mit disjunkten Quadern $Q^{(\ell)} = (a^{(\ell)}, b^{(\ell)}]$ sowie $Q = (a, b]$. Wir wollen diese Zerlegung so verfeinern, dass wir zu einer Zerlegung wie im ersten Fall gelangen. Dazu betrachten wir für jedes i die Zerlegung von $(a_i, b_i]$, die durch die Menge aller Intervallgrenzen $a_i^{(j)}, b_i^{(j)}, j = 1, \dots, \ell$, gegeben ist. Es sei $Q_\nu, \nu \in N$, die Menge aller zugehörigen Quader. Wie im Fall 1 gilt:

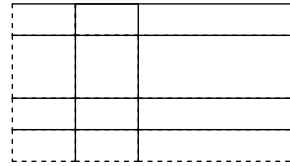
$$\mu(Q^{(j)}) = \sum_{Q_\nu \subset Q^{(j)}} \mu(Q_\nu), \quad \mu(Q) = \sum_{\nu} \mu(Q_\nu).$$

Da jedes Q_ν zu genau einem $Q^{(j)}$ gehört, folgt

$$\mu(Q) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(Q^{(j)}).$$



Q mit Unterquadern $Q^{(i)}$



Q mit Unterquadern Q_ν

□

Satz und Definition 2.6 — Es sei $A \in \mathcal{F}$ und $A = \bigcup_{j=1}^{\ell} Q_j$ eine Zerlegung in disjunkte halboffene Quader Q_j . Dann hängt $\mu(A) := \sum_{j=1}^{\ell} \mu(Q_j)$ nicht von der gewählten Zerlegung ab. $\mu(A)$ heißt der Inhalt von A .

Beweis. Angenommen, es gilt $\bigcup_{j=1}^{\ell} Q_j = \bigcup_{i=1}^k Q'_i$ für jeweils disjunkte Folgen Q_j bzw. Q'_i von halboffenen Quadern. Dann gilt

$$Q'_i = \bigcup_{j=1}^{\ell} Q'_i \cap Q_j \quad \text{und} \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^k Q_j \cap Q'_i.$$

Aus dem obigen Satz folgt:

$$\sum_{i=1}^k \mu(Q'_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \mu(Q'_i \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k \mu(Q_j \cap Q'_i) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(Q_j).$$

□

Satz 2.7 — Der Inhalt $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Endliche Additivität: Sind $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$ disjunkt, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

3. Monotonie: $A, B \in \mathcal{F}, \quad A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$.

4. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

5. Für beliebige $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

6. Ist $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{F}$ und ist $B \in \mathcal{F}$, so gilt

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset B \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu(B).$$

Beweis. Zu 2: Zu jedem j gibt es disjunkte Quader $Q_{ij}, j = 1, \dots, n_i$, mit $A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} Q_{ij}$. Dann ist $\{Q_{ij}\}$ eine Zerlegung von A in disjunkte Quader und es gilt:

$$\mu(A) = \sum_{i,j} \mu(Q_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \mu(Q_{ij}) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i).$$

Zu 3: $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) \stackrel{(2)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Zu 4:

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &\stackrel{(2)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

Zu 5: Wegen 4 gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

und induktiv folgt

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) &\leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) + \mu(A_n) \\ (\text{Induktion}) &\leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{n-1}) + \mu(A_n). \end{aligned}$$

Zu 6: Für jedes k gilt $\bigcup_{j=1}^k A_j \subset B$, also nach 2 und 3:

$$\sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \leq \mu(B).$$

Im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. □

Satz 2.8 (Lebesgue) — Sind Q und $Q^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, halboffene Quader mit $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^{(n)}$, so gilt

$$\mu(Q) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q^{(n)})$$

Beweis. Falls die linke Seite 0 oder die rechte Seite ∞ ist, ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also ohne Einschränkung an, dass $\mu(Q) > 0$, dass $\mu(Q^{(n)}) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q^{(n)})$ konvergiert. Wir schreiben $Q = (a, b]$ mit $a < b$ und $Q^{(n)} = (a^{(n)}, b^{(n)}]$ mit $a^{(n)} < b^{(n)}$.

Die Idee besteht nun darin, den Quader Q so zu einem Quader Q_- zu verkleinern und die Quader $Q^{(n)}$ so zu Quadern $Q_+^{(n)}$ zu vergrößern, dass der Abschluss $\overline{Q_-}$ noch von den offenen Quadern $(Q_+^{(n)})^o$ überdeckt wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen neue Eckpunkte $a < a_+ < b_- < b$ und $a_-^{(n)} < a^{(n)} < b^{(n)} < b_+^{(n)}$ so, dass für die Quader $Q_- = (a_+, b_-]$ und $Q_+^{(n)} = (a_-^{(n)}, b_+^{(n)}]$ gilt

$$\mu(Q) > \mu(Q_-) > \mu(Q) - \varepsilon$$

und

$$\mu(Q^{(n)}) < \mu(Q_+^{(n)}) < \mu(Q^{(n)}) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Es besteht die Inklusionskette

$$Q_- \subset \overline{Q_-} \subset Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^{(n)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_+^{(n)})^o \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_+^{(n)}.$$

Die Quader $(Q_+^{(n)})^o$ bilden eine offene Überdeckung des kompakten Quaders $\overline{Q_-}$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$Q_- \subset \overline{Q_-} \subset \bigcup_{n=1}^N (Q_+^{(n)})^o \subset \bigcup_{n=1}^N Q_+^{(n)}$$

Es folgt nach 3 und 5 von Satz 2.7, dass

$$\mu(Q) - \varepsilon < \mu(Q_-) \leq \sum_{n=1}^N \mu(Q_+^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(Q^{(n)}) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q^{(n)}) + \varepsilon.$$

Im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man die Behauptung. $\square$

Definition 2.9 — Das äußere Lebesguesche Maß $\mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ist durch

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) \mid Q_j \text{ disjunkte halboffene Quader, } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}$$

gegeben.

Satz 2.10 — μ^* hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

2. Monotonie: $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

3. σ -Subadditivität: Für jede Folge (A_i) von Mengen gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Beweis. Zu 2: Jede Überdeckung von B ist auch eine Überdeckung von A .

Zu 3: Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \infty$, denn andernfalls ist nichts zu zeigen. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es Quaderüberdeckungen $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{ij}$ mit

$$\mu^*(A_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_{ij}) - \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Dann ist $\{Q_{ij}\}_{i,j}$ eine Quaderüberdeckung von $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, und es folgt

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leq \sum_{i,j} \mu(Q_{ij}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.11 — 1. Für jeden halboffenen Quader gilt $\mu^*(Q) = \mu(Q)$.

2. Für jedes $X \subset \mathbb{R}^n$ und jeden halboffenen Quader Q gilt

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \setminus Q) + \mu^*(X \cap Q).$$

Beweis. $\mu^*(Q) \leq \mu(Q)$ ist trivial, und $\mu(Q) \leq \mu^*(Q)$ ist die Aussage des Satzes von Lebesgue.

Ist X ein halboffener Quader, so wählen wir eine Zerlegung $X = \bigcup_{\nu=1}^N Q_{\nu}$ in disjunkte halboffene Quader mit $Q_1 = X \cap Q$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu(X) = \sum_{\nu=1}^N \mu(Q_{\nu}) \\ &= \mu(X \cap Q) + \sum_{\nu=2}^N \mu(Q_{\nu}) \\ &\geq \mu(X \cap Q) + \mu^*(X \setminus Q) \\ &= \mu^*(X \cap Q) + \mu^*(X \setminus Q) \geq \mu^*(X) \end{aligned}$$

wegen der Subadditivität von μ^* . Also gilt überall Gleichheit.

Ist X beliebig und $\{Q_i\}$ eine Quaderüberdeckung von X , so folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q_i \cap Q) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q_i \setminus Q) \\ &\geq \mu^*(X \cap Q) + \mu^*(X \setminus Q). \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum:

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \cap Q) + \mu^*(X \setminus Q) \geq \mu^*(X).$$

□

3 Das Lebesguesche Maß

3.1 Die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen

Definition 3.1 (Carathéodory⁶) — $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-messbar, wenn für jede Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Es sei $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen. Wir schreiben $\mu(A) := \mu^*(A)$ für $A \in \mathfrak{M}$ und nennen $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ das n -dimensionale Lebesguesche Maß.

Nach Satz 2.11 sind alle halboffenen Quader Q Lebesgue-messbar, und es gilt $\mu^*(Q) = \mu(Q) :=$ Produkt der Kantenlängen. Außerdem sind offensichtlich $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar.

Satz 3.2 — Die Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}$.
2. $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{M}$.
3. Ist (A_i) eine Folge in $\mathfrak{M}$, so gilt auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{M}$.

Bemerkung 3.3 — Ein allgemeines Mengensystem $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit den Eigenschaften 1 – 3 des Satzes heißt σ -Algebra auf X . Mengen $Y \in \mathfrak{A}$ heißen $\mathfrak{A}$ -messbar. Der Satz sagt also, dass die Menge $\mathfrak{M}$ eine σ -Algebra auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Wir beweisen den Satz in einer Folge von Lemmata 3.4 – 3.7.

Lemma 3.4 — $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{M}$.

Beweis. Wenn A messbar ist, gilt

$$\mu^*(X \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)) + \mu^*(X \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) = \mu^*(X \setminus A) + \mu^*(X \cap A) = \mu^*(X).$$

Demnach ist auch das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ messbar. □

Lemma 3.5 — $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

Beweis. Es sei X beliebig, A, B messbar. Es folgt:

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(X \setminus A) + \mu^*(X \cap A) \\ &= \mu^*((X \setminus A) \setminus B) + \mu^*((X \setminus A) \cap B) + \mu^*(X \cap A) \\ &= \mu^*(X \setminus (A \cup B)) + \mu^*((X \cap (A \cup B)) \setminus A) \\ &\quad + \mu^*((X \cap (A \cup B)) \cap A) \\ &= \mu^*(X \setminus (A \cup B)) + \mu^*(X \cap (A \cup B)) \end{aligned}$$

Das bedeutet: $A \cup B$ ist messbar.

⁶Constantin Carathéodory * 1873 † 1950.

Die beiden anderen Aussagen folgen daraus formal, indem wir sie auf die messbaren Komplemente von A und B anwenden:

$$A \cap B = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus B))$$

und

$$A \setminus B = A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B).$$

□

Lemma 3.6 — *Es sei (A_i) eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{M}$. Dann ist $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$. Außerdem gilt für alle $X \subset \mathbb{R}^n$:*

$$\mu^*(X \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap A_i).$$

Beweis. Für beliebiges X gilt wegen der Messbarkeit von A_1 :

$$\begin{aligned} \mu^*(X \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(X \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(X \cap (A_1 \cup A_2) \setminus A_1) \\ &= \mu^*(X \cap A_1) + \mu^*(X \cap A_2). \end{aligned}$$

Induktiv folgt für alle k :

$$\mu^*(X \cap (A_1 \cup \dots \cup A_k)) = \mu^*(X \cap A_1) + \dots + \mu^*(X \cap A_k). \quad (3.1)$$

Aus Monotoniegründen folgt hieraus

$$\mu^*(X \cap A) \geq \mu^*(X \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu^*(X \cap A_i),$$

und im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$:

$$\mu^*(X \cap A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap A_i).$$

Andererseits folgt aus der σ -Subadditivität, dass

$$\mu^*(X \cap A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap A_i).$$

Zusammengenommen erhält man die behauptete Identität

$$\mu^*(X \cap A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap A_i).$$

Wegen der Messbarkeit von $A_1 \cup \dots \cup A_k$ gilt weiter:

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(X \cap (A_1 \cup \dots \cup A_k)) + \mu^*(X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)) \\ &\geq \sum_{i=1}^k \mu^*(X \cap A_i) + \mu^*(X \setminus A), \end{aligned}$$

wegen (3.1) und Monotonie. Für $k \rightarrow \infty$ folgt

$$\mu^*(X) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(X \cap A_i) + \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A) \geq \mu^*(X).$$

□

Lemma 3.7 — (A_i) Folge in $\mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

Beweis. Definiere rekursiv: $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{i-1})$. Die Mengen B_i sind messbar und disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

nach Lemma 3.6. □

Damit ist Satz 3.2 beweisen.

Satz 3.8 — Das Lebesguesche Maß $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. σ -Additivität: Ist (A_i) eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{M}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Beweis. Aussage 1 ist klar und Aussage 2 ist ein Spezialfall von Lemma 3.6 für die Wahl $X = \mathbb{R}^n$. □

Bemerkung 3.9 — Es sei $\mathfrak{A}$ eine σ -Algebra auf einer beliebigen Menge X . Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften 1 und 2 des Satzes heißt Maß auf $\mathfrak{A}$.

Definition 3.10 — Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-Nullmenge, wenn $\mu^*(N) = 0$.

Satz 3.11 — 1. Jede Nullmenge N ist Lebesgue-messbar.

2. (N_i) Folge von Nullmengen $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ Nullmenge.

3. Abzählbare Mengen sind Nullmengen.

4. Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.

Beweis. Zu 1: Es sei N eine Nullmenge und X beliebig. Dann gilt

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \setminus N), \quad \mu^*(N) \geq \mu^*(X \cap N)$$

wegen Monotonie, und somit:

$$\mu^*(X) = \mu^*(X) + \mu^*(N) \geq \mu^*(X \setminus N) + \mu^*(X \cap N) \geq \mu^*(X)$$

d.h. N ist messbar.

Zu 2: Mithilfe der σ -Subadditivität folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(N_i) = 0.$$

Zu 3: Einpunktige Mengen sind Nullmengen, also folgt 3 aus 2. Der letzte Punkt ist klar. $\square$

3.2 Zusammenhang mit der Topologie des $\mathbb{R}^n$

Satz 3.12 — *Alle offenen und abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sind messbar.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\prod_{i=1}^n (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \subset U$. Wähle $a, b \in \mathbb{Q}^n$ so, dass $x_i - \varepsilon_i < a_i < x_i < b_i < x_i + \varepsilon$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt $x \in (a, b] \subset U$. Insbesondere ist U die Vereinigung aller Quader aus der abzählbaren Menge $\{(a, b] \subset U \mid a, b \in \mathbb{Q}^n\}$. Nach Satz 3.2 ist U messbar. Als Komplemente von offenen und damit messbaren Mengen sind auch abgeschlossene Mengen messbar. $\square$

Satz 3.13 — *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $X \in \mathfrak{M}$.
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge U mit $X \subset U$ und $\mu^*(U \setminus X) < \varepsilon$.
3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge A mit $A \subset X$ und $\mu^*(X \setminus A) < \varepsilon$.

Beweis. $2 \Rightarrow 1$: Es sei $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige vorgegebene Menge, ebenso $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es nach Annahme eine offene Menge U mit $X \subset U$ und $\mu^*(U \setminus X) < \varepsilon$. Wegen $Z \setminus X = (Z \setminus U) \cup (U \setminus X)$ folgt $\mu^*(Z \setminus X) \leq \mu^*(Z \setminus U) + \mu^*(U \setminus X) < \mu^*(Z \setminus U) + \varepsilon$. Da U messbar ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(Z \setminus U) + \mu^*(Z \cap U) \\ &\geq \mu^*(Z \setminus X) - \varepsilon + \mu^*(Z \cap U) \\ &\geq \mu^*(Z \setminus X) - \varepsilon + \mu^*(Z \cap X) \end{aligned}$$

Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt $\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \setminus X) + \mu^*(Z \cap X)$, und die umgekehrte Ungleichung folgt wie immer direkt aus der Subadditivität des äußeren Maßes. Demnach ist X messbar.

$1 \Rightarrow 2$: Es sei $X \in \mathfrak{M}$, und $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben.

1. Fall: $\mu^*(X) < \infty$. Es gibt Quader Q_i , $i \in \mathbb{N}$, mit $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\mu^*(X) > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) - \frac{\varepsilon}{2}$. Zu jedem Q_i wähle einen offenen Quader Q'_i mit $Q_i \subset Q'_i$ und $\mu(Q'_i) < \mu(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Es folgt $X \subset U := \bigcup_{i=1}^{\infty} Q'_i$ und

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &> \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu(Q'_i) - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \mu^*(U) - \varepsilon = \mu^*(U \setminus X) + \mu^*(X) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Das impliziert $\mu^*(U \setminus X) < \varepsilon$.

2. Fall: $\mu^*(X) = \infty$. In diesem Falle sei $X_m := X \cap U_m(0)$. Nach Fall 1 existieren offene Mengen $V_m \supset X_m$ mit $\mu(V_m \setminus X_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$. Die Menge $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ ist offen, und es gilt $X \subset U$ und $U \setminus X \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m \setminus X_m$, also $\mu^*(U \setminus X) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(V_m \setminus X_m) \leq \varepsilon$.

Schließlich folgt die Äquivalenz von 1 und 3 aus der Äquivalenz von 1 und 2, indem man sie auf die Menge $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ anwendet: Ist X messbar, so ist auch Y messbar. Daher gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \supset Y$ und $\mu^*(Y \setminus U) < \varepsilon$. Setze $A := \mathbb{R}^n \setminus U$. Dann ist A abgeschlossen, $A \subset X$, und $X \setminus A = U \setminus Y$. Ähnlich zeigt man die umgekehrte Richtung. $\square$

Der Durchschnitt von beliebig vielen σ -Algebren auf einer Menge X ist wieder eine σ -Algebra. Ist darum $S \subset \mathfrak{P}(X)$ eine beliebige Menge von Teilmengen von X , so gibt es eine kleinste σ -Algebra auf X , die S enthält, nämlich

$$\mathfrak{A}(S) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \\ S \subset \mathfrak{A}}} \mathfrak{A}$$

$\mathfrak{A}(S)$ heißt die von S erzeugte σ -Algebra.

Ist X ein topologischer Raum und $T \subset \mathfrak{P}(X)$ die Topologie von X , so heißt $B(X) := \mathfrak{A}(T)$ die σ -Algebra der Borelschen Mengen von X . Mengen in $B(X)$ heißen Borel-messbar. $B(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen Mengen, die sich durch Wiederholung der folgenden Vorgänge aus den offenen Mengen gewinnen lassen:

- Übergang zum Komplement in $\mathbb{R}^n$.
- Bildung abzählbarer Vereinigungen.

(Der Vorgang ist allerdings etwas subtil, weil es nicht genügt, dies endlich oft zu tun. Ich verweise auf das Buch von Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, I §4 1.) Es gilt

$$\begin{aligned} B(\mathbb{R}^n) &= \mathfrak{A}(\text{offene Mengen}) \\ &= \mathfrak{A}(\text{abgeschlossene Mengen}) \\ &= \mathfrak{A}(\text{kompakte Mengen}). \end{aligned}$$

Satz 3.14 — $X \in \mathfrak{M}$ genau dann, wenn es eine Borelmenge B und eine Nullmenge N mit der Eigenschaft $X = B \dot{\cup} N$ gibt.

Beweis. Es sei X messbar. Nach Satz 3.13 gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Menge $A_k \subset X$ mit $\mu^*(X \setminus A_k) < \frac{1}{k}$. Es sei $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist B eine Borelmenge, die ganz in X liegt, und es gilt $N := X \setminus B \subset X \setminus A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\mu^*(N) \leq \inf\{\mu^*(X \setminus A_k)\} = 0$. Damit haben wir eine disjunkte Zerlegung $X = B \dot{\cup} N$ mit einer Borelmenge B und einer Nullmenge N konstruiert. Die umgekehrte Richtung ist offensichtlich. $\square$

3.3 Zusammenhang mit der affinen Struktur des $\mathbb{R}^n$

Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $T_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + b$, die Translation um b . Die Translationen bilden eine zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$ isomorphe Gruppe mit dem Gruppengesetz $T_b \circ T_{b'} = T_{b+b'}$. Jede Matrix $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ beschreibt einen linearen Automorphismus $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$. Die invertierbaren

Matrizen und die Translationen erzeugen zusammen die Gruppe der affinen Automorphismen

$$\text{Aff}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{(T_b, A) \mid b \in \mathbb{R}^n, A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})\}.$$

Satz 3.15 — Für jede Translation T_b und jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu^*(T_b X) = \mu^*(X).$$

Insbesondere ist X genau dann Lebesgue-messbar, wenn dies für $T_b(X)$ gilt.

Beweis. Ist Q ein Quader, so ist auch $T_b Q$ ein Quader, und zwar von gleichem Inhalt. Ist nun $X \subset \bigcup Q_i$ eine Quaderüberdeckung, so folgt

$$\mu^*(T_b X) \leq \sum_j \mu^*(T_b Q_j) = \sum_j \mu^*(Q_j),$$

und durch Übergang zum Infimum über alle Quaderüberdeckungen erhält man:

$$\mu^*(T_b X) \leq \mu^*(X)$$

Wendet man diese Ungleichung für die Translation T_{-b} und die Menge $T_b(X)$ an, so erhält man die umgekehrte Ungleichung:

$$\mu^*(X) = \mu^*(T_{-b}(T_b X)) \leq \mu^*(T_b X).$$

Das beweist die erste Aussage. Die zweite folgt hieraus leicht. $\square$

Beispiel 3.16 — Es sei $R \subset \mathbb{R}$ ein Repräsentantensystem für die Faktorgruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, d.h. jede reelle Zahl x hat eine eindeutige Darstellung der Form $x = r + q$ mit $r \in R$ und $q \in \mathbb{Q}$. Es bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$. Indem wir nötigenfalls jedes $r \in R$ durch $r - [r]$ ersetzen, können wir außerdem erreichen, dass $R \subset [0, 1)$. Dann gilt:

R ist nicht Lebesgue-messbar.

Wir nehmen an, R sei messbar. Dann sind auch die Mengen $R' := R \cap [0, 1/2)$ und $R'' := R \cap [1/2, 1)$ messbar, und es gilt $\mu(R) = \mu(R') + \mu(R'')$. Nach Konstruktion von R als Repräsentantensystem von $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ sind R' und die verschobene Menge $T_{-1/2}(R'')$ disjunkt. Dann ist $R_1 := R' \cup T_{-1/2}(R'')$ ebenfalls ein Repräsentantensystem von $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ und messbar, und es gilt wegen der Translationsinvarianz des Maßes:

$$\mu(R_1) = \mu(R') + \mu(T_{-1/2}(R'')) = \mu(R') + \mu(R'') = \mu(R).$$

Die Menge R_1 ist in $[0, 1/2)$ enthalten. Indem man dasselbe Verfahren auf R_1 anwendet, können wir rekursiv eine Folge R_n von messbaren Mengen mit den Eigenschaften $R_n \subset [0, 2^{-n})$ und $\mu(R_n) = \mu(R)$ konstruieren. Die Monotonie des Maßes liefert die Abschätzung

$$\mu(R) = \mu(R_n) \leq \mu([0, 2^{-n})) = 2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Demnach hat $\mu(R)$ das Maß 0. Andererseits ist $\mathbb{R}$ die disjunkte Vereinigung der abzählbar vielen Mengen $T_q(R)$, $q \in \mathbb{Q}$. Es folgt:

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(T_q(R)) = 0.$$

Widerspruch.

Es ist klar, wie man dieses Argument auf höhere Dimensionen verallgemeinert. Dabei haben wir nur ausgenutzt, dass μ ein translationsinvariantes Maß ist. Das Argument ist also insbesondere für beliebige bewegungsinvariante Maße auf dem $\mathbb{R}^n$ gültig. Damit haben wir auch den Satz von Vitali 1.4 bewiesen.

Satz 3.17 — Für jedes $A \in M_n \mathbb{R}$ und jedes $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu^*(A(X)) = |\det A| \cdot \mu^*(X).$$

Beweis. 1. Schritt: Angenommen, es gilt $\det(A) = 0$. In diesem Falle liegt $A(X)$ in dem höchstens $(n-1)$ -dimensionalen linearen Unterraum $\text{im}(A) \subset \mathbb{R}^n$ und hat daher Maß 0.

Es genügt also, sich im weiteren auf invertierbare Matrizen $A \in \text{GL}(n)$ zu beschränken.

2. Schritt. Es genügt zu zeigen, dass für jeden Quader Q die Ungleichung

$$\mu^*(A(Q)) \leq |\det(A)| \mu(Q) \tag{3.2}$$

gilt. Mit dieser Abschätzung argumentieren wir nämlich wie folgt: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $\{Q_i\}$ eine Überdeckung von X durch Quader, so gilt $A(X) \subset \bigcup_i A(Q_i)$ und wegen der Subadditivität des äußeren Maßes

$$\mu^*(A(X)) \leq \sum_i \mu^*(A(Q_i)) \leq |\det(A)| \sum_i \mu(Q_i).$$

Der Übergang zum Infimum auf der rechten Seite liefert die Ungleichung

$$\mu^*(A(X)) \leq |\det(A)| \cdot \mu^*(X).$$

Wendet man schließlich diese Ungleichung auf die inverse Operation A^{-1} und die Menge $A(X)$ an, so findet man die umgekehrte Ungleichung

$$\mu^*(X) = \mu^*(A^{-1}(A(X))) \leq |\det(A)|^{-1} \mu^*(A(X)).$$

Daraus ergibt sich Behauptung.

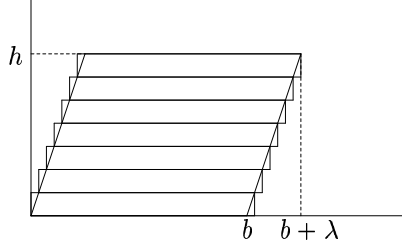
3. Schritt: Ist $A = A_1 \cdot A_2$ ein Produkt von invertierbaren Matrizen, so folgt aus der Gültigkeit der Ungleichung (3.2) für A_1 und A_2 die Gültigkeit für A . Wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, kann man jede invertierbare Matrix als ein Produkt der Form $A = E_1 \dots E_\ell \cdot D \cdot E'_1 \dots E'_k$ mit einer Diagonalmatrix D und elementaren Scherungen E_i, E'_j schreiben. Es genügt, daher die Ungleichung (3.2) für Diagonalmatrizen und für Scherungen zu beweisen.

4. Schritt: Wir zeigen (3.2) für eine Diagonalmatrizen $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ mit $d_1 \cdots d_n \neq 0$. Offensichtlich ist $A(Q)$ ein Quader (wenn auch nicht mehr halboffen im üblichen Sinne, falls ein $d_i < 0$) mit

$$\mu(A(Q)) = |d_1| \dots |d_n| \cdot \mu(Q) = |\det A| \cdot \mu(Q).$$

5. Schritt: Wir zeigen (3.2) für eine elementare Scherung $A = E_{ij}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichne $E_{ij}(\lambda)$ die Matrix, die in der k -ten Zeile und ℓ -ten Spalte den Eintrag $\delta_{k\ell} + \lambda\delta_{ik}\delta_{j\ell}$ hat. Dabei können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $i = 1$ und $j = 2$.

Es sei $n = 2$. Wegen der Translationsinvarianz können wir außerdem annehmen, dass $Q = ((0, 0), (b, h)]$. Dann ist $A(Q)$ ein halboffenes Parallelogramm mit den Ecken $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(b + \lambda, h)$ und (λ, h) . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\lambda > 0$. (Der Fall $\lambda < 0$ unterscheidet sich unwesentlich.) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei $Q_N := ((0, 0), (b + N/\lambda, h/\lambda)]$. Dann wird $A(Q)$ von den halboffenen Quadern $Q_i = T_{\frac{i-1}{N}}(\lambda, h)(Q_N)$, $i = 1, \dots, N$, überdeckt.



Das liefert die Abschätzung

$$\mu^*(A(Q)) \leq N \cdot \mu(Q_N) = N \cdot (b + \lambda/N) \cdot h/N = bh + (h\lambda)/N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} bh = \mu(Q).$$

Ist $n \geq 2$, so zerlegen wir den Quader $Q = Q' \times Q''$ mit Quadern $Q' \subset \mathbb{R}^2$ und $Q'' \subset \mathbb{R}^{n-2}$. Dann gilt $A(Q) = A'(Q') \times Q''$ mit der Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist $\{Q_i\}$ irgendeine Quaderüberdeckung von $A'(Q')$ in $\mathbb{R}^2$, so ist $\{Q_i \times Q''\}$ eine Quaderüberdeckung von A in $\mathbb{R}^n$. Man sieht, dass

$$\mu^*(A(Q)) \leq \mu^*(A'(Q')) \cdot \mu(Q'') \leq \mu(Q') \cdot \mu(Q'') = \mu(Q).$$

□

Folgerung 3.18 — $\mathfrak{M}$ ist invariant unter affinen Abbildungen. Das Lebesguemaß ist bewegungsinvariant. Genauer gilt für jede messbare Menge X und $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$:

$$\mu(T_b(X)) = \mu(X) \quad \text{und} \quad \mu(A(X)) = |\det A| \cdot \mu(X).$$

4 Das Lebesgue-Integral

4.1 Lebesgue-messbare Funktionen

Im folgenden sei $X \subset \mathbb{R}^n$ stets eine Lebesgue-messbare Menge.

Definition 4.1 — Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt Lebesgue-messbar, wenn für jede Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ das Urbild $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar ist.

Wenn es aus dem Kontext heraus klar ist, dass von Lebesgue-messbaren Funktionen die Rede ist, werde ich kurz von messbaren Funktionen sprechen.

Lemma 4.2 — Die folgenden Aussagen über $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ sind äquivalent:

1. f ist Lebesgue-messbar.
2. Für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^k$ ist $f^{-1}(U)$ Lebesgue-messbar.
3. Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}^k$ ist $f^{-1}(A)$ Lebesgue-messbar.
4. Für alle halboffenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^k$ ist $f^{-1}(Q)$ Lebesgue-messbar.

Beweis. $1 \Rightarrow 2, 3, 4$, denn U, A und Q sind Borelmengen.

Umgekehrt erzeugt jede der Mengen $\{U \subset \mathbb{R}^k \text{ offen}\}$, $\{A \subset \mathbb{R}^k \text{ abgeschlossen}\}$ bzw. $\{Q \subset \mathbb{R}^k \text{ halboffener Quader}\}$ die σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, und die Abbildung $f^{-1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist mit allen mengentheoretischen Operationen $\cup, \cap$ und $\setminus$ verträglich. $\square$

Beispiel 4.3 — 1. Stetige Funktionen sind messbar.

2. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann messbar, wenn ihre charakteristische Funktion $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ messbar ist. Dabei ist χ_A durch die Eigenschaft $\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ charakterisiert.

Lemma 4.4 — 1. Ist $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^k$ messbar und $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ stetig, so ist $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ messbar.

2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist genau dann messbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, messbar sind.

Beweis. Zu 1: Es sei $U \subset \mathbb{R}^\ell$ offen. Dann ist $g^{-1}(U)$ offen in Y , d.h. es gibt eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ mit $g^{-1}(U) = Y \cap W$. Nun ergibt sich, dass $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(Y \cap W) = f^{-1}(W)$ messbar ist. Also ist $(g \circ f)$ messbar.

Zu 2: Ist zunächst f messbar, so ist nach Aussage 1 auch jede Komponente $f_i = pr_i \circ f$ messbar, da die Projektionen $pr_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Es sei umgekehrt jede Komponente f_i messbar. Wir betrachten einen halboffenen Quader $Q = \prod_{i=1}^k (a_i, b_i]$ im $\mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$f^{-1}(Q) = \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}((a_i, b_i]),$$

Insbesondere ist $f^{-1}(Q)$ messbar und somit f messbar. $\square$

Folgerung 4.5 — Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so sind auch die Funktionen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ messbar. Ist $g : X \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ messbar, so ist auch f/g messbar.

Beweis. Die Abbildung $F = (f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist gemäß Lemma 4.4 messbar. Alle Funktionen in der Folgerung entstehen durch Komposition der messbaren Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aus der Liste $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $|x|$, $\min\{x, y\}$, $\max\{x, y\}$. Für f/g argumentiert man analog. $\square$

Satz 4.6 — Es sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Ist (f_i) punktweise nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, so ist $\sup f_i$ (bzw. $\inf f_i$) messbar.
2. Ist (f_i) punktweise beschränkt, so sind $\underline{\lim}(f_i)$ und $\overline{\lim}(f_i)$ messbare Funktionen.

Beweis. 1. Es sei (f_i) punktweise nach oben beschränkt und $f := \sup f_i$. Wir betrachten ein beliebiges halboffenes Intervall $(a, b]$ und sein Urbild $f^{-1}((a, b])$. Dann gilt $a < f(x)$ genau dann, wenn es ein i mit $a < f_i(x)$, und es gilt $f(x) \leq b$ genau dann, wenn für alle i gilt: $f_i(x) \leq b$. Das zeigt, dass

$$f^{-1}((a, b]) = \bigcup_i f_i^{-1}((a, \infty)) \cap \bigcap_j f_j^{-1}((-\infty, b])$$

messbar ist. Also ist f messbar. Für das Infimum: $\inf f_i = -\sup(-f_i)$.

2. Nach Teil 1 ist $g_k = \inf(f_i)_{i \geq k}$ messbar, und erneute Anwendung von Teil 1 zeigt, dass $\underline{\lim}(f_i) = \sup(g_k)$ messbar ist. Analog: $\overline{\lim}(f_i) = \inf_k(\sup_{i \geq k}(f_i))$. $\square$

Bezeichnungen 4.7 — Es sei $\mathfrak{M}(X, \mathbb{R}^k)$ die Menge der Lebesgue-messbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nach den obigen Bemerkungen ist $\mathfrak{M}(X, \mathbb{R}^k)$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, und $\mathfrak{M}(X, \mathbb{R})$ sogar eine $\mathbb{R}$ -Algebra mit Eins. Wenn wir $\mathbb{C}$ in gewohnter Weise mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, so ist eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann messbar, wenn Real- und Imaginärteil von f messbar sind. Entsprechend bezeichne $\mathfrak{M}(X, \mathbb{C})$ die Menge der komplexwertigen messbaren Funktionen auf X . Schließlich sei noch $\mathfrak{M}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$ die Teilmenge der messbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$.

4.2 Das Lebesgue-Integral für Treppenfunktionen

Definition 4.8 — Eine messbare Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn f nur endlich viele Werte annimmt. Es bezeichne $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}(X, \mathbb{R})$ die Menge der Treppenfunktionen auf X und $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$ die Teilmenge der nicht-negativen Treppenfunktionen.

Bemerkung 4.9 — Treppenfunktionen bilden einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum (warum?). Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit Bild $f(X) = \{c_1, \dots, c_\ell\}$, so gilt $f =$

$\sum_{i=1}^{\ell} c_i \chi_{A_i}$ mit disjunkten Mengen $A_i := f^{-1}(c_i)$. Umgekehrt ist für beliebige messbare Mengen $A_1, \dots, A_{\ell}$ und Zahlen $c_1, \dots, c_{\ell} \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \chi_{A_i}$$

eine Treppenfunktion. Eine solche Summendarstellung heißt Normaldarstellung, wenn alle A_i disjunkt sind.

Lemma 4.10 — *Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Treppenfunktion mit Normaldarstellungen*

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^k c'_j \chi_{A'_j}.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^k c'_j \mu(A'_j) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}.$$

Beweis. Es sei $B_{ij} = A_i \cap A'_j$. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \sum_{j=1}^k \chi_{B_{ij}} = \sum_{i,j} c_i \chi_{B_{ij}}$$

und ebenso $f = \sum_{i,j} c'_j \chi_{B_{ij}}$. Insbesondere ist B_{ij} leer oder es gilt $c_i = c'_j$. Nun folgt:

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^k c_i \mu(B_{ij}) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^k c'_j \mu(B_{ij}) = \sum_{j=1}^k c'_j \mu(A'_j).$$

□

Satz und Definition 4.11 — *Es sei $f = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \chi_{A_i}$ eine nichtnegative Treppenfunktion in Normaldarstellung. Dann hängt*

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{i=1}^{\ell} c_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

nicht von der Normaldarstellung ab und heißt das Lebesgue-Integral von f .

Beweis. Die Unabhängigkeit von der Normaldarstellung ist gerade die Aussage von Lemma 4.10. □

Satz 4.12 — *Es seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegative Treppenfunktionen.*

1. Für jede messbare Teilmenge $A \subset X$ gilt $\int_X \chi_A \, d\mu = \mu(A)$.
2. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$.
3. $\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$.

4. Falls $f \leq g$, so folgt $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

Beweis. Die Aussagen 1 und 2 folgen direkt aus der Definition. Es seien $f = \sum c_i \chi_{A_i}$ und $g = \sum d_j \chi_{B_j}$ Normaldarstellungen. Indem man jedes A_i und B_j nach den Mengen $D_{ij} = A_i \cap B_j$ zerlegt und die A_i und B_j jeweils durch die Mengen D_{ij} ersetzt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass wir Normaldarstellungen

$$f = \sum c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum d_i \chi_{A_i}$$

Normaldarstellungen mit denselben Mengen A_i für f und g gegeben haben. Dann ist $(f + g) = \sum_i (c_i + d_i) \chi_{A_i}$ eine Normaldarstellung von $f + g$, woraus sich sofort die Aussage 3 ergibt. Und schließlich ist $f \leq g$ in einer solchen Darstellung äquivalent zu $c_i \leq d_i$ für alle i . Daraus ergibt sich

$$\sum c_i \mu(A_i) \leq \sum d_i \mu(A_i).$$

Das ist die Aussage 4. □

4.3 Das Lebesgue-Integral für nichtnegative Funktionen

Bezeichnungen 4.13 — Eine Funktionenfolge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt isotone, wenn $f_1 \leq f_2 \leq \dots$, und antitone, wenn $f_1 \geq f_2 \geq \dots$. Wenn (f_i) punktweise gegen f konvergiert, so schreiben wir $f_i \uparrow f$, falls (f_i) isotone ist, und $f_i \downarrow f$, falls (f_i) antitone ist.

Lemma 4.14 — Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar, so existiert eine Folge (f_k) von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $f_k \uparrow f$.

Beweis. Wir definieren für jedes $k \in \mathbb{N}$ Mengen

$$A_{ik} = \begin{cases} f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right)\right), & \text{für } 0 \leq i < k2^k \\ f^{-1}\left([k, \infty)\right), & \text{für } i = k2^k. \end{cases}$$

und eine nichtnegative Treppenfunktion

$$f_k := \sum_{i=0}^{k \cdot 2^k} \frac{i}{2^k} \cdot \chi_{A_{ik}}.$$

Auf der Menge

$$A_{ik} = A_{2i, k+1} \dot{\cup} A_{2i+1, k+1}, \quad i < k2^k$$

nimmt f_k den Wert $\frac{i}{2^k}$ und f_{k+1} die Werte $\frac{i}{2^k}$ und $\frac{i}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$ an. Und auf der Menge

$$A_{k2^k, k} = A_{k \cdot 2^{k+1}, k+1} \cup A_{k2^{k+1}+1, k+1} \cup \dots \cup A_{(k+1)2^{k+1}, k+1}$$

nimmt f_k den Wert k und f_{k+1} die Werte $k, k + \frac{1}{2^{k+1}}, \dots, k+1$ an.

In jedem Falle gilt also $f_k \leq f_{k+1}$. Die Folge (f_k) ist deshalb isotone. Es sei nun $x \in X$ beliebig und $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $k > f(x)$. Dann gilt $f_k(x) \leq f(x) \leq f_k(x) + \frac{1}{2^k}$. Insbesondere folgt $f_k \xrightarrow{p.k.} f$, also $f_k \uparrow f$. □

Lemma 4.15 — Es sei (f_k) eine isotone Folge in $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$ und f eine nicht-negative Treppenfunktion mit $f \leq \lim f_k$. Dann gilt

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Beweis. 1. Fall: $f = \chi_A$. Es sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $A_k = \{x \in A \mid f_k(x) \geq 1 - \varepsilon\}$.

1. Weil $f \leq \lim f_k$ und weil die Folge (f_k) isoton ist, gilt $A_k \uparrow A$, d. h. $A_k \subset A_{k+1} \subset \dots$ und $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Insbesondere ist $\mu(A) = \sup \mu(A_k)$.
2. Nach Konstruktion ist $f_k \geq (1 - \varepsilon) \cdot \chi_{A_k}$, also

$$\int_X f_k \, d\mu \geq (1 - \varepsilon) \int_X \chi_{A_k} = (1 - \varepsilon) \cdot \mu(A_k).$$

Im Grenzübergang folgt

$$\lim_k \int_X f_k \, d\mu \geq (1 - \varepsilon) \cdot \mu(A),$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

2. Fall: Es sei $f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$ beliebig und $f = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \chi_{A_i}$ eine Normaldarstellung. Nach dem obigen gilt:

$$c_i \mu(A_i) \leq \lim_k \int_X f_k \chi_{A_i} \, d\mu$$

Durch Aufsummieren folgt die Behauptung. □

Satz und Definition 4.16 — Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar und (f_k) eine Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $f_k \uparrow f$. Dann ist

$$\int_X f \, d\mu := \lim_k \int_X f_k \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

unabhängig von der Wahl der Folge (f_k) und heißt das Integral von f . Die Funktion f heißt integrierbar, wenn $\int_X f \, d\mu < \infty$.

Beweis. Es gibt stets eine Folge (f_k) in $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$ mit $f_k \uparrow f$. Angenommen, $(f_k), (g_k)$ sind zwei solche Folgen. Dann gilt $g_i \leq f = \lim f_k$ für alle i und somit

$$\int_X g_i \, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k \, d\mu.$$

Durch Übergang zum Supremum folgt

$$\lim_i \int_X g_i \, d\mu \leq \lim_k \int_X f_k \, d\mu.$$

Aus Symmetriegründen gilt auch die umgekehrte Ungleichung und somit die behauptete Gleichheit. □

Satz 4.17 (Eigenschaften des Integrals) — Es seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbare Funktionen.

1. $\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X (f + g) \, d\mu$.
2. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\int_X (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$.
(Dabei vereinbaren wir, dass $0 \cdot \infty = 0$.)
3. Aus $f \leq g$ folgt $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.
4. Ist $Y \subset X$ messbar, so folgt $\int_Y f|_Y \, d\mu = \int_X f \chi_Y \, d\mu$.

Beweis. Wir wählen Folgen nichtnegativer Treppenfunktionen mit $f_k \uparrow f$ und $g_k \uparrow g$. Zu 1: Es gilt $(f_k + g_k) \uparrow (f + g)$, also

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) \, d\mu &= \lim_k \int_X (f_k + g_k) \, d\mu = \lim_k \left(\int_X f_k \, d\mu + \int_X g_k \, d\mu \right) \\ &= \lim_k \int_X f_k \, d\mu + \lim_k \int_X g_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

Zu 2: Aus $(\alpha f_k) \uparrow (\alpha f)$ folgt

$$\int_X (\alpha f) \, d\mu = \lim_k \int_X \alpha f_k \, d\mu = \alpha \lim_k \int_X f_k \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu.$$

Zu 3: $f \leq g \Rightarrow f_k \leq \lim_j g_j \Rightarrow \int_X f_k \, d\mu \leq \lim_j \int_X g_j \, d\mu$.

Übergang zum Grenzwert $k \rightarrow \infty$:

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Zu 4: $f_k \cdot \chi_Y$ ist eine Treppenfunktion, und

$$\int_X f_k \chi_Y \, d\mu = \int_Y f_k|_Y \, d\mu.$$

Da $f_k|_Y \uparrow f|_Y$ und $f_k \chi_Y \uparrow f \chi_Y$, folgt die Behauptung. $\square$

4.4 Das Lebesgue-Integral für messbare Funktionen

Bezeichnungen 4.18 — Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Wir setzen $f_+ = \max\{f, 0\}$ und $f_- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\}$. Dann sind f_+ und f_- nichtnegative messbare Funktionen, und es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

Definition 4.19 — Eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn f_+ und f_- integrierbar sind. In diesem Falle heißt

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$$

das Lebesgueintegral von f über X .

Satz 4.20 — Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. f ist integrierbar.
2. Es gibt integrierbare Funktionen $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f = u - v$.
3. Es gibt eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $|f| \leq g$.
4. $|f|$ ist integrierbar.

Außerdem gilt in der Situation von Aussage 2: $\int_X f \, d\mu = \int_X u \, d\mu - \int_X v \, d\mu$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Wähle $u = f_+$, $v = f_-$.

$2 \Rightarrow 3$: Aus $f = u - v$ folgt $|f| \leq u + v =: g$, und g ist integrierbar.

$3 \Rightarrow 4$: $|f|$ ist jedenfalls messbar, und $|f| \leq g$ impliziert

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty$$

$4 \Rightarrow 1$: $f_+, f_- \leq |f|$, also $\int_X f_{\pm} \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu < \infty$, und man sieht, dass f integrierbar ist.

Falls $f = f_+ - f_- = u - v$ mit integrierbaren Funktionen $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$, so folgt aus $f_+ + v = f_- + u$, dass

$$\int_X f_+ \, d\mu + \int_X v \, d\mu = \int_X f_- \, d\mu + \int_X u \, d\mu.$$

Alle Integrale sind $< \infty$. Daraus ergibt sich

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu = \int_X u \, d\mu - \int_X v \, d\mu.$$

□

Definition 4.21 — $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind. In diesem Falle heißt

$$\int_X f \, d\mu := \int_X \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f \, d\mu$$

das Lebesgueintegral von f .

Satz 4.22 — Die folgenden Aussagen über eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. f ist integrierbar.
2. Es gibt eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $|f| \leq g$.
3. $|f|$ ist integrierbar.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: $|f| \leq g := |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

$2 \Rightarrow 3$: Klar.

$3 \Rightarrow 1$: Wegen $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f|$ sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar.

□

Satz 4.23 — Es seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen, $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $f + g$ ist integrierbar, und $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.
2. αf ist integrierbar, und $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$.
3. Sind f und g reellwertig und gilt $f \leq g$, so folgt $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
4. Es gilt $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$.
5. Ist $Y \subset X$ messbar, so ist auch $f|_Y$ integrierbar und

$$\int_Y f|_Y d\mu = \int_X f \cdot \chi_Y d\mu.$$

Beweis. Zu 1: $f + g = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$. Es folgt mit Satz 4.20, dass $f + g$ integrierbar ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \int_X (f_+ + g_+) d\mu - \int_X (f_- + g_-) d\mu \\ &= \int_X f_+ d\mu + \int_X g_+ d\mu - \int_X f_- d\mu - \int_X g_- d\mu \\ &= \left(\int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu \right) + \left(\int_X g_+ d\mu - \int_X g_- d\mu \right) \\ &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Zu 2: Analog.

Zu 3: Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $f_- \geq g_-$ und somit

$$\int_X f_+ d\mu \leq \int_X g_+ d\mu, \quad - \int_X f_- d\mu \leq - \int_X g_- d\mu.$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, so folgt die Behauptung.

Zu 4: Wegen $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ folgt die Behauptung aus 3.

Zu 5: Trivial. □

4.5 Fast überall

Definition 4.24 — Eine Eigenschaft E gilt *fast überall*, abgekürzt: f.ü., auf einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$, wenn die Menge $\{x \in X \mid x \text{ hat nicht die Eigenschaft } E\}$ eine Nullmenge ist.

Sind zum Beispiel f und f_k , $k \in \mathbb{N}$, Funktion auf X , so bedeutet $f_k \rightarrow f$ f.ü., dass die Menge $\{x \in X \mid f_k(x) \text{ konvergiert nicht gegen } f(x)\}$ das Maß Null hat.

Satz 4.25 — 1. Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f = 0$ f.ü. Dann ist f messbar und $\int_X f d\mu = 0$.

2. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine messbare Funktion mit $\int_X f d\mu = 0$, so ist $f = 0$ f.ü.

Beweis. Zu 1: Nach Voraussetzung ist $N := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge. Ist nun $A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, so ist $f^{-1}(A) \subset N$ eine Nullmenge, also messbar. Andererseits ist auch $f^{-1}(0) = X \setminus N$ messbar. Daher ist f messbar. Indem man f in f_- und f_+ zerlegt, genügt es, die Behauptung $\int_X f d\mu$ für nichtnegative f zu zeigen. Konstruiert man eine Folge von Treppenfunktionen $f_k \uparrow f$, so folgt für jede Normaldarstellung $f_k = \sum_i c_i \chi_{A_i}$, dass $c_i = 0$ oder $A_i \subset N$ und damit $\mu(A_i) = 0$. Hieraus folgt $\int_X f_k d\mu = 0$ für jedes k und somit $\int_X f d\mu = 0$.

Zu 2: Es sei $N := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ und $A_k := \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{k}\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt offenbar $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $N = \bigcup_k A_k$. Weiter gilt $f \geq \frac{1}{k} \chi_{A_k}$ und wegen Monotonie

$$0 = \int_X f d\mu \geq \frac{1}{k} \mu(A_k) \geq 0.$$

Daraus ergibt sich $\mu(A_k) = 0$, also $\mu(N) = 0$ und somit $f = 0$ f.ü. $\square$

Folgerung 4.26 — Es seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen mit $f = g$ f.ü.

1. f ist genau dann messbar, wenn g messbar ist.
2. f ist genau dann integrierbar, wenn g integrierbar ist, und in diesem Falle gilt $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Beweis. Es gilt $f - g = 0$ f.ü. Die Aussagen folgen alle aus dem vorigen Satz, angewendet auf $f - g$. $\square$

4.6 Vergleich mit dem Riemann-Integral

Satz 4.27 — Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist auch Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass f reellwertig ist. Wir betrachten eine Folge von Zerlegungen $\mathcal{Z}_k = \{a = t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \dots, t_{s_k}^{(k)} = b\}$ mit den Eigenschaften, dass $\mathcal{Z}_{k+1}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_k$ ist und dass

$$O(f, \mathcal{Z}_k) - U(f, \mathcal{Z}_k) < \frac{1}{k}.$$

Wir definieren für jedes k zwei Treppenfunktionen f^k und f_k durch

$$f_k(x) := \inf f|_{[t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}]}$$

und

$$f^k(x) := \sup f|_{[t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}]}$$

für alle $x \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)})$, und $f^k(b) := f_k(b) := f(b)$. Dann gilt:

$$1. \int_X f^k d\mu = O(f, \mathcal{Z}_k), \quad \int_X f_k d\mu = U(f, \mathcal{Z}_k).$$

2. $f_k \leq f \leq f^k$.

3. Die Folgen (f_k) und (f^k) sind isoton bzw. antiton.

Da die Folgen (f_k) und (f^k) isoton bzw. antiton und außerdem beschränkt sind, konvergieren sie punktweise gegen Funktionen $\underline{f}$ bzw. $\overline{f}$. Satz 4.16 ist auf $(f_k - f_0) \uparrow (\underline{f} - f_0)$ und auf $(f^0 - f^k) \uparrow (f^0 - \overline{f})$ anwendbar. Es folgt, dass

$$\lim_k \int_X f_k d\mu = \int_X \underline{f} d\mu \leq \int_X \overline{f} d\mu = \lim_k \int_X f^k d\mu.$$

Die linke und die rechte Seite sind aber gerade die Grenzwerte der Folge der Unter- bzw. Obersummen und stimmen nach Konstruktion mit dem Riemann-Integral von f überein. Daraus folgt zunächst, dass

$$\int_X (\overline{f} - \underline{f}) d\mu = 0.$$

Nach Satz 4.25 gilt $\overline{f} = \underline{f}$ f.ü. Wegen $\overline{f} \geq f \geq \underline{f}$ gilt daher auch $f = \overline{f}$ f.ü. Gemäß Folgerung 4.26 ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_X f d\mu = \int_X \overline{f} d\mu = \int_a^b f(x) dx.$$

□

5 Konvergenzsätze

5.1 Die Sätze von Levi, Fatou und Lebesgue

Satz 5.1 (B. Levi⁷, Satz von der monotonen Konvergenz) — Es seien $f, f_k \in \mathfrak{M}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f_k \uparrow f \Rightarrow \int f_k d\mu \uparrow \int f d\mu.$$

Beweis. Aus $f_k \leq f$ folgt $\int f_k d\mu \leq \int f d\mu$ und im Limes $k \rightarrow \infty$ die Ungleichung $\sup_k \int f_k d\mu \leq \int f d\mu$. Wir müssen die umgekehrte Inklusion zeigen.

Zu jedem f_k wählen wir eine Folge $(g_{k\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $g_{k\ell} \uparrow f_k$ und setzen $h_\ell := \sup\{g_{1\ell}, \dots, g_{\ell\ell}\}$. Dann gilt:

1. Für jedes $k \leq \ell$ ist $g_{k\ell} \leq g_{k, \ell+1}$, also auch $h_\ell \leq h_{\ell+1}$, d. h. die Folge (h_ℓ) ist isoton.
2. Für $i \leq \ell$ gilt $g_{i\ell} \leq f_i \leq f_\ell$, also auch $h_\ell \leq f_\ell \leq f$. Andererseits folgt aus 2 im Limes $\ell \rightarrow \infty$, dass $\sup_\ell h_\ell \leq f$.
3. Aus $g_{k\ell} \leq h_\ell$ für $k \leq \ell$ folgt im Limes $\ell \rightarrow \infty$, dass $f_k \leq \sup_\ell h_\ell$, und im Limes $k \rightarrow \infty$, dass $f \leq \sup_\ell h_\ell$.

Nach Definition des Integrals bedeutet dies:

$$\int f d\mu = \lim_\ell \int h_\ell d\mu \stackrel{(2)}{\leq} \lim_\ell \int f_\ell d\mu.$$

□

Satz 5.2 (Lemma von Fatou⁸) — Es seien $f, f_k \in \mathfrak{M}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f \leq \underline{\lim}_k f_k \Rightarrow \int f d\mu \leq \underline{\lim}_k \int f_k d\mu.$$

Beweis. Es sei $g_\ell = \inf_{k \geq \ell} f_k$. Dann gilt

$$\int g_\ell d\mu \leq \inf_{k \geq \ell} \int f_k d\mu,$$

also

$$\sup_\ell \int g_\ell d\mu \leq \underline{\lim}_k \int f_k d\mu.$$

Nach Voraussetzung gilt $f \leq \underline{\lim}_k f_k = \sup_\ell g_\ell$. Mit $h_\ell = \min\{f, g_\ell\}$ folgt $f = \sup h_\ell$, und mit B. Levi:

$$\int f d\mu = \sup_\ell \int h_\ell d\mu \leq \sup_\ell \int g_\ell d\mu \leq \underline{\lim}_k \int f_k d\mu.$$

□

⁷Beppo Levi * 1875 † 1961.

⁸Pierre Joseph Louis Fatou, * 28.2.1878 † 10.8.1929

Satz 5.3 (Lebesguescher Konvergenzsatz, majorisierte Konvergenz) — Es sei $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $f, f_k \in \mathfrak{M}(X, \mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$, mit den Eigenschaften

1. $|f_k| \leq g$ f.ü.
2. $f_k \rightarrow f$ punktweise f.ü.

Dann ist f integrierbar, und es gilt

$$\int_X |f - f_k| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \int_X f_k d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

Beweis. Es sei $N \subset X$ eine Nullmenge derart, dass $|f_k(x)| \leq |g(x)|$ und $f_k(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Indem wir alle Funktionen f, g, f_k so abändern, dass $f|_N = 0$ etc., ändern wir weder Messbarkeit, noch Integrierbarkeit, noch den Wert von Integralen. Wir können dann ohne Einschränkung davon ausgehen, dass die Eigenschaften 1 und 2 im Satz nicht nur fast überall, sondern überall bestehen. Wegen 2 ist f messbar, wegen 1 gilt $|f| \leq g$, und darum ist f integrierbar. Die Funktionen $g_k := 2g - |f - f_k|$ sind messbar, nichtnegativ und es gilt $g_k \rightarrow 2g$. Mit dem Lemma von Fatou folgt:

$$\int 2g d\mu \leq \underline{\lim} \int g_k d\mu = \int 2g d\mu - \overline{\lim} \int |f - f_k| d\mu,$$

also $\overline{\lim} \int |f - f_k| d\mu \leq 0$. Das impliziert:

$$0 \leq \left| \int f d\mu - \int f_k d\mu \right| \leq \int |f - f_k| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

und somit die Behauptung

$$\int f_k d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

□

Satz 5.4 — Es sei f_k eine isotone Folge nichtnegativer integrierbarer Funktionen auf X , und es gebe eine Schranke

$$\int_X f_k d\mu \leq C < \infty$$

für alle k . Dann konvergiert (f_k) fast überall auf X gegen eine integrierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Da die Folge (f_k) isoton ist, konvergiert für jedes $x \in X$ die Folge $f_k(x)$ entweder gegen eine reelle Zahl oder gegen $+\infty$. Es sei $N := \{x \in X \mid \lim f_k(x) = \infty\}$. Wir definieren $f(x) = 0$, falls $x \in N$, und $f(x) = \lim f_k(x)$, falls $x \in X \setminus N$. Es genügt zu zeigen, dass N eine Nullmenge ist. Dann gilt $f_k \uparrow f$ f.ü. und die Integrierbarkeit folgt aus dem Satz von B. Levi.

Dazu betrachten wir die Mengen $M_{k,\alpha} := \{x \in X \mid f_k(x) \geq \alpha\}$ und $M_\alpha := \{x \in X \mid \lim f_k(x) \geq \alpha\}$. Wie schließen so: Für jedes k und α gilt $f_k \geq \alpha \chi_{M_{k,\alpha}}$ und wegen der Monotonie des Integrals

$$C \geq \int_X f_k d\mu \geq \int_X \alpha \chi_{M_{k,\alpha}} d\mu \geq \alpha \mu(M_{k,\alpha}),$$

also $\mu(M_{k,\alpha}) \leq \frac{1}{\alpha}C$. Weiter folgt aus der Isotonie der Folge (f_k) , dass $M_{1,\alpha} \subset M_{2,\alpha} \subset M_{3,\alpha} \subset \dots$ und $M_\alpha = \bigcup_k M_{k,\alpha}$, also $\mu(M_\alpha) = \sup_k \mu(M_{k,\alpha}) \leq \frac{1}{\alpha}C$. Schließlich ist $N = \bigcap_\alpha M_\alpha$, also $\mu(N) \leq \mu(M_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}C$ für alle $\alpha > 0$. Im Grenzübergang $\alpha \rightarrow \infty$ erhält man $\mu(N) = 0$, wie behauptet. $\square$

5.2 Die L^p -Räume

Bezeichnungen 5.5 — Es sei $p > 0$. Dann sei

$$\mathcal{L}^p(X, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(X, \mathbb{C}) \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

und

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

für $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$.

Lemma 5.6 — 1. Für alle $p > 0$ ist $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ ein komplexer Vektorraum.

2. Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ gilt: $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ und $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$.

3. Für alle $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ gilt $\|f\|_p \geq 0$, und es gilt $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ f.ü.

Beweis. Die Aussagen 2 und 3 sind klar. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ abgeschlossen unter Addition ist. Dazu seien $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ gegeben. Wegen

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max\{|f|, |g|\}^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

folgt

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right) < \infty.$$

$\square$

Im folgenden Satz wird gezeigt werden, dass die Abbildung $\|\cdot\|_p$ für $p \geq 1$ die Dreiecksungleichung erfüllt. Damit ist $\|\cdot\|_p$ aber noch keine Norm, sondern wegen der Aussage 3 des Lemmas nur eine Halbnorm.

Dieser unangenehme Umstand kann dadurch repariert werden, dass wir alle Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, miteinander identifizieren.

Definition 5.7 — Für jedes $p > 0$ ist $\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} \mid f = 0 \text{ f.ü.}\}$ ein Untervektorraum in $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$. Wir definieren

$$L^p(X, \mathbb{C}) := \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C}) / \mathcal{N}.$$

Elemente in $L^p(X, \mathbb{C})$ sind also Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich paarweise höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden. Da sich Fragen der Messbarkeit, der Integrierbarkeit und die Werte von Integralen für Funktionen derselben Äquivalenzklasse nicht unterscheiden, kann man meist den Unterschied zwischen einer Funktion $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ und ihrer Äquivalenzklasse

$[f] \in L^p(X, \mathbb{C})$ ignorieren und vereinfacht von der Funktion $f \in L^p(X, \mathbb{C})$ sprechen. Vorsichtig muss man nur in einer Hinsicht sein: Solange man nur eine Klasse $[f] \in L^p(X, \mathbb{C})$ gegeben hat, hat es keinen Sinn, von dem Wert von f an einer bestimmten Stelle zu reden.

Satz 5.8 — 1. Es sei $p \geq 1$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$. Dann gilt die **Minkowskische Ungleichung**

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (5.1)$$

2. Es seien $p, q > 1$ konjugierte Exponenten, d. h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ und $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathbb{C})$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ und es gelten die **Youngsche Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q. \quad (5.2)$$

und die **Höldersche Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (5.3)$$

Insbesondere ist $\| \cdot \|_p$ für $p \geq 1$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$.

Beweis. Die Minkowskische Ungleichung folgt für $p = 1$ aus $|f+g| \leq |f|+|g|$ und der Monotonie des Integrals. Im folgenden sei also stets $p > 1$. Weiter sei $p' > 1$ eine reelle Zahl, die wir unten entweder zu $p' = p$ oder zu $p' = q$ spezialisieren.

Nach Definition gilt außerdem $f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^p$, und in diesem Falle ist $\|f\|_p = \| |f| \|_p$. Da ferner $|f+g| \leq |f|+|g|$ und $|fg| = |f| \cdot |g|$, können wir überall ohne Einschränkung f durch $|f|$ ersetzen und deshalb davon ausgehen, dass $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{C})$ und $g \in \mathcal{L}^{p'}(X, \mathbb{C})$ reellwertige und nichtnegative Funktionen sind.

Wir wählen isotone Folgen (f_k) und (g_k) in $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}_{\geq 0})$ mit $f_k \uparrow f$ und $g_k \uparrow g$. Dann sind auch $f_k + g_k$ und $f_k \cdot g_k$ nichtnegative Treppenfunktionen, und es gilt $f_k + g_k \uparrow f + g$ und $f_k g_k \uparrow fg$. Wir können im Beweis von (5.1), (5.2) und (5.3) also ohne Einschränkung annehmen, dass f und g nichtnegative Treppenfunktionen sind.

Es gibt disjunkte messbare Mengen $A_i \subset X$, $i = 1, \dots, \ell$ derart, dass

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{\ell} d_i \chi_{A_i}.$$

Da f und g integrierbar sind, kann $\mu(A_i) = \infty$ nur vorkommen, wenn $c_i = 0$ und $d_i = 0$. Wir können solche Summanden einfach weglassen und ohne Einschränkung annehmen, dass $\mu(A_i) < \infty$ für alle i . Wir ordnen f und g Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^{\ell}$ mit Koordinaten $v_i = c_i \mu(A_i)^{\frac{1}{p}}$, $w_i = d_i \mu(A_i)^{\frac{1}{p'}}$ zu. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\ell} c_i^p \mu(A_i) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\ell} v_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|v\|_p,$$

wo jetzt ganz rechts $\|v\|_p$ die p -Norm auf dem $\mathbb{R}^{\ell}$ bezeichnet. Analog gilt $\|g\|_{p'} = \|w\|_{p'}$.

Beweis der Minkowskischen Ungleichung: Wähle $p' = p$. Es folgt:

$$\|f + g\|_p = \|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$$

nach der Dreiecksungleichung für die p -Norm auf dem $\mathbb{R}^\ell$.

Beweis der Youngschen und der Hölderschen Ungleichung: Wähle $p' = q$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|fg\|_1 = \int_X fg \, d\mu &= \sum_{i=1}^{\ell} c_i d_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i d_i \mu(A_i)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} (c_i \mu(A_i)^{\frac{1}{p}}) (d_i \mu(A_i)^{\frac{1}{q}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} v_i w_i = \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

Nach den Ungleichungen von Hölder und Young für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^\ell$ folgt einerseits

$$\|fg\|_1 = \langle v, w \rangle \leq \frac{1}{p} \|v\|_p^p + \frac{1}{q} \|w\|_q^q = \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q,$$

und andererseits

$$\|fg\|_1 = \langle v, w \rangle \leq \|v\|_p \cdot \|w\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Das war zu zeigen. $\square$

Folgerung 5.9 — Für $p \geq 1$ ist die Abbildung $\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert und eine Norm.

Beweis. Die Minkowskische Ungleichung ist genau die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$. Außerdem ist $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall, wenn also f die Nullklasse in $L^p(X, \mathbb{C})$ repräsentiert. $\square$

Bemerkung 5.10 — Funktionen in $L^2(X, \mathbb{C})$ heißen quadratintegrabel. Für solche Funktionen kann man ein komplexes Skalarprodukt definieren:

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} \, d\mu.$$

Das Integral ist endlich, weil nach der Hölderschen Ungleichung

$$\|f\bar{g}\|_1 \leq \|f\|_2 \|\bar{g}\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$$

gilt. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist sesquilinear, d.h. komplex linear in der ersten und komplex antilinear in der zweiten Variablen, und hermitesch, d.h.

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

Außerdem gilt $\langle f, f \rangle = \int_X f \bar{f} \, d\mu = \|f\|_2^2 \geq 0$, und $\langle f, f \rangle = 0$ genau dann, wenn $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ fast überall, d.h. wenn f die Nullklasse in L^2 ist. Die Höldersche Ungleichung spezialisiert sich hier zur Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Versehen mit diesem Skalarprodukt ist $L^2(X, \mathbb{C})$ ein Prä-Hilbertraum. Wir werden gleich sehen, dass $L^2(X, \mathbb{C})$ sogar vollständig, also ein Hilbertraum ist.

Bezeichnung 5.11 — Konvergiert f_k gegen f in der p -Norm, so schreiben wir $f_k \xrightarrow{L^p} f$. Im Falle $p = 1$ spricht man auch von „Konvergenz im Mittel“.

5.3 Vollständigkeit

Satz 5.12 (Riesz⁹–Fischer¹⁰) — Es sei $p \geq 1$.

1. Jede Cauchy-Folge in $L^p(X, \mathbb{C})$ konvergiert, d.h. $L^p(X, \mathbb{C})$ ist ein Banachraum. Insbesondere ist $L^2(X, \mathbb{C})$ ein Hilbertraum.
2. Konvergiert f_k in L^p gegen f , so gibt es eine Teilfolge f_{k_ℓ} die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Beweis. Zu 1. Es sei (f_k) eine Cauchy-Folge in L^p . Dann gibt es Funktionen f_{k_ℓ} mit $\|f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}\|_p \leq 1/2^\ell$. Wir setzen $g_\ell := f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}$ für $\ell \geq 1$ und schließen $f_{k_{\ell+1}} := g_\ell + g_{\ell-1} + \dots + g_1 + f_{k_1}$. Ferner sei

$$h_\ell := |g_\ell| + |g_{\ell-1}| + \dots + |g_1| + |f_{k_1}|.$$

Dann ist h_ℓ^p integrierbar, und es gilt

$$\|h_\ell\|_p \leq \sum_{i=1}^{\ell} \|g_i\|_p + \|f_{k_1}\|_p \leq 1 + \|f_{k_1}\|_p.$$

Außerdem ist die Folge (h_ℓ) isoton. Nach Satz 5.4 gibt es eine Funktion $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass h^p integrierbar ist und dass $h_\ell \rightarrow h$ f.ü. Weiter gilt für $m > \ell$, dass $\|h_m - h_\ell\|_p \leq \|g_m\|_p + \dots + \|g_{\ell+1}\|_p \leq 1/2^\ell$. Die Folge $(h_m - h_\ell)_{m \geq \ell}$ konvergiert punktweise fast überall gegen $h - h_\ell$. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt $\|h - h_\ell\|_p \leq \lim \|h_m - h_\ell\|_p \leq 1/2^\ell$, so dass $h_\ell \xrightarrow{L^p} h$.

Aus der f.ü.-Konvergenz der Reihe $\sum_i |g_i| + |f_{k_1}|$ folgt, dass auch die Reihe $\sum_{i=1}^{\ell} g_i + f_{k_1} = f_{k_\ell}$ fast überall gegen eine Funktion f konvergiert, und dass $|f - f_{k_\ell}| \leq h - h_\ell$. Daher liegt f in L^p , und wegen der Monotonie des Integrals folgt

$$\|f - f_{k_\ell}\| \leq \|h - h_\ell\|_p = \frac{1}{2^\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0.$$

Das bedeutet gerade, dass f Grenzwert der Teilfolge (f_{k_ℓ}) und damit auch der ursprünglichen Folge (f_k) ist.

Zusätzlich haben wir aber gesehen, dass f_{k_ℓ} punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Zu 2: Es sei nun eine konvergente Folge $f_k \xrightarrow{L^p} f$ gegeben. Dann ist (f_k) sicher eine Cauchy-Folge in L^p , und nach Teil 1 gibt es eine Teilfolge (f_{k_ℓ}) , die punktweise f.ü. und in der p -Norm gegen eine Funktion $\tilde{f}$ konvergiert. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt, dass f und $\tilde{f}$ in L^p dieselbe Klasse repräsentieren, also f.ü. übereinstimmen. Daher konvergiert (f_{k_ℓ}) fast überall auch gegen f . $\square$

⁹Frigyès Riesz * 22.1.1880 † 28.2.1956

¹⁰Ernst Sigismund Fischer * 12.7.1875 † 14.11.1954

Beispiel 5.13 — Auf den Übergang zur Teilfolge im Teil 2 des Satzes kann nicht verzichtet werden. Dazu betrachten wir das folgende Gegenbeispiel. Für jede natürliche Zahl n gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$n = 2^h + r, \quad 0 \leq r < 2^h, \quad h, r \in \mathbb{N}_0.$$

Damit definieren wir Teilintervalle

$$A_n := [r2^{-h}, (r+1)2^{-h}]$$

von $[0, 1]$ und betrachten die Folge $f_n := \chi_{A_n}$. Diese Folge konvergiert in jeder p -Norm gegen 0, aber sie konvergiert nirgends punktweise. Erst durch den Übergang zur Teilfolge f_{2^h} erreichen wir die Konvergenz gegen die Nullfunktion f.ü., oder genauer auf dem Intervall $(0, 1]$.

5.4 Parameterabhängige Integrale

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ messbar, M eine Menge, $f : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Für einen festen Punkt $y \in M$ betrachten wir die eingeschränkte Funktion

$$f_y : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_y(x) = f(x, y).$$

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, wie das Integral

$$\int_X f(x, y) d\mu(x) := \int_X f_y d\mu$$

von $y \in M$ abhängt.

Satz 5.14 — *Es sei M ein metrischer Raum und $f : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Für fast alle $x \in X$ ist die Funktion $f_x : M \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ stetig.
2. Zu jedem $y \in M$ gibt es eine Umgebung U in M und eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ so, dass für alle $y \in U$ die Abschätzung $|f_y| \leq g$ gilt und f_y messbar ist.

Dann ist die Funktion

$$F(y) := \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

stetig auf M .

Beweis. Es sei $y_0 \in M$, und U und g seien wie in Voraussetzung 2 gewählt. Ferner sei y_k eine Folge in M mit $y_k \rightarrow y_0$. Wir müssen zeigen, dass $\int_X f_{y_k} d\mu \rightarrow \int_X f_{y_0} d\mu$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass alle y_k in U liegen.

Nach Voraussetzung 1 gilt $f_{y_k} \rightarrow f_{y_0}$ f.ü., und nach Voraussetzung 2 gilt $|f_{y_0}|, |f_{y_k}| \leq g$. Daher ist der Lebesguesche Konvergenzsatz anwendbar, und wir schließen, dass

$$F(y_k) = \int_X f_{y_k} d\mu \rightarrow \int_X f_{y_0} d\mu = F(y_0).$$

□

Satz 5.15 — Es sei I ein Intervall, $f : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für fast alle $x \in X$ ist $f_x : I \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar.
2. Für jedes $t \in I$ sind die Abbildungen $x \mapsto f(x, t)$ und $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ integrierbar.
3. Es gibt eine integrierbare Funktion g auf X so, dass $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ für alle $t \in I$.

Dann ist die Funktion $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x). \quad (5.4)$$

Der Integrand in der Gleichung (5.4) ist dabei so zu verstehen: Bei festem t existiert nach Voraussetzung die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$. Beim Integrieren kommt es aber auf Änderungen der Funktion auf Nullmengen nicht an. Insbesondere braucht die Funktion auf einer Nullmenge nicht definiert zu sein. Anders gesagt, wir könnten der partiellen Ableitung an den Stellen, wo sie nicht existiert, willkürlich einen Wert zuweisen, zum Beispiel 0, ohne dass dies die Integrierbarkeit oder den Wert des Integrals beeinflusst.

Beweis. Wir zerlegen f nach Real- und Imaginärteil und können ohne Einschränkung annehmen, dass f eine reelle Funktion ist.

Wir betrachten die Differenzenfunktion

$$h(x, t) := \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}, & \text{falls } t \neq t_0, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0), & \text{falls } t = t_0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \text{ existiert,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt nach Konstruktion:

1. Für fast alle $x \in X$ ist $t \mapsto h(x, t)$ stetig.
2. Für fast alle $x \in X$ existiert nach dem Mittelwertsatz zu jedem t ein (von x und t abhängiges) $\tilde{t}$ zwischen t und t_0 mit $h(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \tilde{t})$. Das bedeutet insbesondere $|h(x, t)| \leq g(x)$.

Aus dem vorigen Satz folgt, dass die Funktion

$$H(t) := \int_X h(x, t) d\mu(x)$$

stetig ist. Mit $t \neq t_0$ erhält man:

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_X \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} d\mu(x) = \int_X h(x, t) d\mu(x) = H(t)$$

Aus der Stetigkeit von H folgt:

$$H(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} H(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dt.$$

Daher ist F in t_0 differenzierbar und hat die angegebene Ableitung. $\square$

Folgerung 5.16 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, X messbar, und $f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung mit den Eigenschaften:

1. Für fast alle $x \in X$ ist $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(x, y)$ partiell differenzierbar.
2. Für alle $i = 1, \dots, m$ und $y \in U$ ist die Funktion $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)$ auf X integrierbar.
3. Es gibt eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)| \leq g(x)$ für alle $x \in X, y \in U, i = 1, \dots, m$.

Dann ist $F(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) d\mu(x).$$

Beispiel 5.17 (Die Gammafunktion) — Für $t > 0$ sei

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Gammafunktion. Wir zeigen der Reihe nach wichtige Eigenschaften von Γ :

- (1) Γ ist eine $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion.

Wir bezeichnen den Integranden mit

$$f(x, t) := x^{t-1} e^{-x}.$$

f ist selbst eine $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion und hat die folgenden Ableitungen in der t -Richtung:

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k} = \log(x)^k x^{1-t} e^{-x}.$$

Wir geben uns beliebige Werte $t_1 > t_0 > 0$ vor und schätzen $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ (bei festem k) gleichmäßig durch eine integrierbare Funktion $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ab.

- i. Auf dem Intervall $[1, \infty)$ gilt für alle $t, 0 < t \leq t_1$:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) \right| \leq (x^{k+t_1-1} e^{-x/2}) e^{-x/2}.$$

Der Faktor $x^{k+t_1-1} e^{-x/2}$ geht für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 und lässt sich daher auf $[1, \infty)$ durch eine Konstante $M = M(t_1 + k)$ nach oben abschätzen. Wir setzen $g(x) := M e^{-x/2}$ für alle $x \geq 1$.

- ii. Auf dem Intervall $(0, 1]$ gilt für alle $t \geq t_0$:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) \right| \leq (|\log(x)|^k x^{t_0/2}) x^{t_0/2-1}$$

Der Faktor $|\log(x)|^k x^{t_0/2}$ geht für $x \rightarrow 0$ gegen 0 und lässt sich daher auf $(0, 1]$ durch eine Konstante $m = m(k, t_0)$ nach oben abschätzen. Wir setzen $g(x) := m x^{t_0/2-1}$ für $x \in (0, 1)$.

Die Funktion $g(x)$ ist integrierbar und es gilt $g(x) \geq \left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) \right|$ für alle $t \in [t_0, t_1]$.

Jetzt folgt die Aussage (1) über die Gammafunktion aus den Sätzen 5.14 und 5.15.

(2) Für alle $t > 0$ gilt $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Dazu seien $0 < a < b < \infty$ beliebig gewählt. Partielle Integration ergibt

$$\int_a^b x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_a^b + \int_a^b t x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Durch Grenzübergang $a \rightarrow 0$ und $b \rightarrow \infty$ folgt

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

Trivialerweise ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Mit Formel (2) folgt induktiv Formel (3).

(4) Für alle $t > 0$ gilt die Gaußsche Produktformel

$$\Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^t}{t(t+1) \cdots (t+n)}.$$

Es sei m eine natürliche Zahl. Dann konvergiert für alle reellen Zahlen x , $0 < x \leq m$ und alle natürlichen Zahlen $n \geq m$ die Folge $(1 - x/n)^n$ für $n \rightarrow \infty$ monoton wachsend gegen e^{-x} . Daher konvergiert die Funktionenfolge

$$f_n(x) := x^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{(0,n]}(x)$$

isoton gegen $x^{t-1}e^{-x}$. Nach dem Satz von B. Levi folgt, dass

$$\int_0^n x^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_{(0,\infty)} f_n d\mu(x) \quad \uparrow \quad \int_{(0,\infty)} x^{t-1} e^{-x} d\mu(x) = \Gamma(t).$$

Für jede natürliche Zahl k folgt durch partielle Integration

$$\int_0^n x^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k dx = \frac{1}{t} x^t \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k \Big|_0^n + \frac{k}{tn} \int_0^n x^t \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{k-1} dx.$$

Induktiv ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \int_0^n x^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx &= \frac{n!}{n^n t(t+1) \cdots (t+n-1)} \int_0^n x^{t+n-1} dx \\ &= \frac{n! n^t}{t(t+1) \cdots (t+n)}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

(5) Es gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Wir berechnen $\Gamma(1/2)$ auf zwei Weisen: Für $0 < a < b$ ergibt sich durch die Substitution $x = y^2$

$$\int_a^b x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-y^2} dy.$$

Im Grenzübergang $a \rightarrow 0$ und $b \rightarrow \infty$ folgt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Andererseits findet man mit Hilfe der Gaußschen Produktdarstellung

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \sqrt{n}}{1/2 \cdot 3/2 \cdot \dots \cdot (2n+1)/2}$$

Da

$$\frac{n! \sqrt{n}}{1/2 \cdot 3/2 \cdot \dots \cdot (2n+1)/2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \cdot 2\sqrt{n}$$

folgt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{4n}{2n+1}.$$

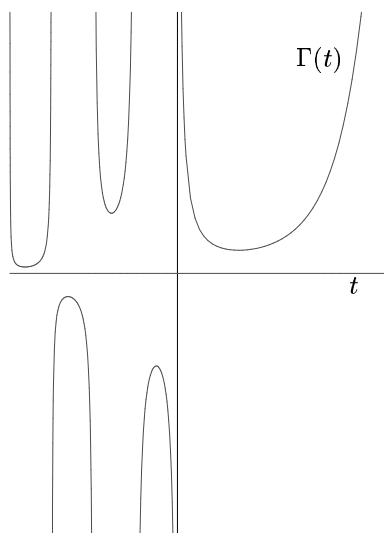
Nach der Formel von Wallis ist die rechte Seite gleich π .

Mit Hilfe der Eigenschaft (3) können wir die Gammafunktion auch für alle $t \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ definieren:

Ist $t \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ beliebig, so wählt man ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m+t > 0$ und setzt:

$$\Gamma(t) := \frac{1}{(t+m-1) \cdot \dots \cdot (t+1)t} \Gamma(t+m).$$

Nach Annahme ist keiner der Nenner 0, und wegen (3) hängt die Definition nicht von der Wahl von m ab. Die so definierte Funktion Γ hat einfache Pole bei allen ganzen Zahlen ≤ 0 .



Schließlich kann man noch in die Ausgangsdefinition zurückgehen und feststellen, dass

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

auch für komplexe t sinnvoll ist, solange nur $\operatorname{Re}(t) > 0$. Und wie oben kann man im letzten Schritt $\Gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ definieren. Die so erweiterte Gammafunktion ist auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ stetig und (komplex) differenzierbar. Sie hat einfache Pole bei allen ganzen Zahlen ≤ 0 . Die Eigenschaften der komplexen Gammafunktion werden in der Funktionentheorie näher untersucht.

6 Der Satz von Fubini

Wir schreiben Punkte im $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ in der Form (x, y) mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichne f_y bei festem $y \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $f_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x, y)$. Analog definieren wir f_x für $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 6.1 — Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ heißt doppelintegrierbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion f_x integrierbar. Wir setzen $F(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f_x d\mu(y)$, falls f_x integrierbar ist, und $F(x) := 0$ sonst.
2. Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist integrierbar. Wir setzen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} F(x) d\mu(x).$$

3. Dieselben Eigenschaften gelten für das andere Doppelintegral, das durch Integration in umgekehrter Reihenfolge entsteht.

Lemma 6.2 — Doppelintegrierbare Funktionen haben die folgenden Eigenschaften:

1. Sind f_1 und f_2 doppelintegrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, so ist auch $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ doppelintegrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f_1 d\mu(y) d\mu(x) + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f_2 d\mu(y) d\mu(x), \end{aligned}$$

und entsprechend für das andere Integral.

2. Es sei f_k eine Folge von nichtnegativen doppelintegrierbaren Funktionen mit Grenzfunktion $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Gilt dann entweder die Bedingung [A] $f_k \uparrow f$, und es gibt eine Schranke $C > 0$ so, dass für alle k gilt

$$\int \int f_k d\mu(x) d\mu(y), \int \int f_k d\mu(y) d\mu(x) < C,$$

oder die Bedingung

[B] $f_k \downarrow f$,

so ist f doppelintegrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f_k d\mu(y) d\mu(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f d\mu(y) d\mu(x),$$

und entsprechend für das andere Doppelintegral.

Beweis. Zu 2. Nach Voraussetzung gibt es für jedes k eine Nullmenge $N_k \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass $(f_k)_x$ für alle $x \notin N_k$ integrierbar ist. Dann ist auch $N = \bigcup_k N_k$ eine Nullmenge und für alle $x \notin N$ ist jede der Funktionen $(f_k)_x$ integrierbar. Wir

definieren $F_k(x) := \int_{\mathbb{R}^m} (f_k)_x d\mu(y)$ falls $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ und $F_k(x) = 0$ andernfalls. Nach Voraussetzung ist F_k im Falle A isoton, im Falle B antiton.

Im isotonen Fall A gilt außerdem $\int_{\mathbb{R}^n} F_k d\mu(x) \leq C$ für alle k . Nach Satz 5.4 konvergiert F_k fast überall gegen eine integrierbare Funktion F . Für fast alle x ist daher $F(x)$ eine obere Schranke für die Integrale aller Funktionen $(f_k)_x$. Eine erneute Anwendung des Satzes 5.4 garantiert, dass die Funktion f_x für fast alle x integrierbar ist und dass das Integral durch

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_x d\mu(y) = \lim_k \int_{\mathbb{R}^m} (f_k)_x d\mu(y) = \lim_k F_k(x) = F(x)$$

gegeben ist. Daher ist f doppelintegrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f d\mu(y) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F d\mu(x) = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f_k d\mu(y) d\mu(x).$$

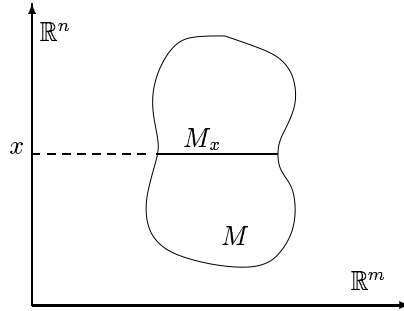
Den antitonen Falle B führt man durch die Betrachtung der Folge $f_1 - f_k$ auf den gerade behandelten Fall zurück. $\square$

Satz 6.3 (Prinzip von Cavalieri¹¹) — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine messbare Menge mit Maß $\mu(M) < \infty$. Dann ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Menge

$$M_x := \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in M\}$$

messbar mit endlichem Maß, die Funktion $x \mapsto \mu(M_x)$ ist messbar, und es gilt

$$\mu(M) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(M_x) d\mu(x).$$



Mit den obigen Bezeichnungen sagt der Satz nichts anderes, als dass die Funktion χ_M doppelintegrierbar ist, und dass beide Doppelintegrale mit $\mu(M)$ übereinstimmen. Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten.

Beweis. 1. Der Satz gilt für halboffene Quader $M = Q$. Wir schreiben Q als Produkt $Q = Q' \times Q''$ mit halboffenen Quadern $Q' \subset \mathbb{R}^n$ und $Q'' \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt $\mu(Q) = \mu(Q') \mu(Q'')$ und $\chi_Q(x, y) = \chi_{Q'}(x) \chi_{Q''}(y)$. Ferner ist $(\chi_Q)_x = \chi_{Q'}(x) \chi_{Q''}$. Daher ist $(\chi_Q)_x$ auf $\mathbb{R}^m$ integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\chi_Q)_x d\mu(y) = \chi_{Q'}(x) \mu(Q'').$$

¹¹Bonaventura Francesco Cavalieri * 1598 † 30.11.1647

Diese Funktion in x ist auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_Q d\mu(y) d\mu(x) = \mu(Q')\mu(Q'') = \mu(Q).$$

Dasselbe gilt bei Integration in umgekehrter Reihenfolge.

2. Der Satz gilt für endliche Vereinigungen von Quadern $M = Q_1 \cup \dots \cup Q_\ell$. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass die Quader paarweise disjunkt sind. Damit erreicht man $\chi_M = \chi_{Q_1} + \dots + \chi_{Q_\ell}$. Gemäß Lemma 6.2.1 ist χ_M doppelintegrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_M d\mu(y) d\mu(x) = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{Q_i} d\mu(y) d\mu(x) = \sum_i \mu(Q_i) = \mu(M).$$

3. Der Satz gilt für offene Mengen $M = U$. Dazu schreiben wir U als Vereinigung $U = \bigcup_k Q_k$ von höchstens abzählbar vielen Quadern Q_k . Für jedes ℓ sei $U_\ell := \bigcup_{k \leq \ell} Q_k$. Dann gilt

$$\chi_{U_\ell} \uparrow \chi_U.$$

Außerdem sind die Doppelintegrale gleichmäßig beschränkt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{U_\ell} d\mu(y) d\mu(x) = \mu(U_\ell) \leq \mu(U) < \infty.$$

Daher ist Lemma 6.2.2 Fall A anwendbar. Wir schließen, dass χ_U doppelintegrierbar ist, und dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_U d\mu(y) d\mu(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{U_\ell} d\mu(y) d\mu(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu(U_\ell) = \mu(U),$$

und ebenso schließt man für das andere Doppelintegral.

4. Es sei M eine beliebige messbare Menge mit $\mu(M) < \infty$. Dann finden wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine offene Menge U_k mit $M \subset U_k$ und $\mu(U_k \setminus M) < \frac{1}{k}$. Wir können ohne Einschränkung weiter annehmen, dass $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, und setzen $A := \bigcap U_k$. Nach Konstruktion gilt $A \supset M$ und $\mu(A) = \mu(M)$. Da $\chi_{U_k} \downarrow \chi_A$, ist Lemma 6.2.2 Fall B anwendbar. Es folgt, dass χ_A doppelintegrierbar ist, und dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_A d\mu(y) d\mu(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{U_k} d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\chi_{U_k}) = \mu(A) = \mu(M). \end{aligned}$$

5. Falls M eine Nullmenge ist, so ist mit den Bezeichnungen aus 4. auch A eine Nullmenge. Da χ_A doppelintegrierbar ist und die Doppelintegrale den Wert 0 haben, gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass $(\chi_A)_x = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^m$. Andererseits ist $\chi_M \leq \chi_A$. Daraus folgt, dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ auch $(\chi_M)_x = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^m$. Demnach ist χ_M doppelintegrierbar, und das Doppelintegral hat den Wert 0.

6. Gehen wir zurück in die Situation von 4. für eine beliebige messbare Menge M endlichen Maßes, so haben wir eine Zerlegung $M = A \setminus (A \setminus M)$ konstruiert, wo χ_A nach 4. doppelintegrierbar und $\chi_{A \setminus M}$ nach 5. doppelintegrierbar ist, weil $A \setminus M$ eine Nullmenge ist. Gemäß Lemma 6.2.1 ist χ_M doppelintegrierbar und die Doppelintegrale haben den Wert $\mu(A) = \mu(M)$. $\square$

Satz 6.4 (Fubini¹²) — Jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$ ist auch doppelintegrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Beweis. 1. Die Behauptung ist nach dem Prinzip des Cavalieri für charakteristische Funktionen messbarer Mengen endlichen Maßes richtig. Ist $f = \sum_i c_i \chi_{A_i}$ eine Treppenfunktion mit endlichem Integral, so folgt die Behauptung für f aus Lemma 6.2.1 und der Linearität der Doppelintegrale und des Integrals.

2. Es sei nun f eine nichtnegative integrierbare Funktion. Dann gibt es eine Folge nichtnegativer Treppenfunktionen $f_k \uparrow f$. Nach Lemma 6.2.2 Fall A folgt, dass f doppelintegrierbar ist, denn es bestehen die uniformen Abschätzungen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f_k d\mu(y) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_k d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\mu.$$

Außerdem konvergiert die linke Seite gegen das entsprechende Doppelintegral für f .

3. Ist f eine beliebige reelle integrierbare Funktion, so behandelt man f_+ und f_- wie in 2. Ist schließlich f eine beliebige komplexe integrierbare Funktion, so zerlegt man f nach Real- und Imaginärteil und wendet das vorige Argument an. $\square$

Beispiel 6.5 — Allein aus der Doppelintegrierbarkeit einer Funktion f folgt im Allgemeinen noch nicht, dass f auch integrierbar ist. Es brauchen nicht einmal die Werte der Doppelintegrale übereinzustimmen.

Dazu konstruieren wir uns eine Funktion wie folgt: Es sei $\delta_k = 1 - 1/k$ für $k \in \mathbb{N}$, und $g_k = \frac{1}{\delta_{k+1} - \delta_k} \chi_{(\delta_k, \delta_{k+1})}$. Der Vorfaktor ist so gewählt, dass $\int_{[0,1]} g_k d\mu = 1$. Die Summe

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) g_k(y)$$

ist wohldefiniert, weil die Summanden nur auf paarweise disjunkten Teilmengen $[\delta_k, \delta_{k+2}] \times [\delta_k, \delta_{k+1}]$ von Null verschieden sind. Nach Wahl der g_k folgt einerseits

$$\int_{[0,1]} f(x, y) d\mu(y) = g_1(x)$$

und

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x) = \int_{[0,1]} g_1(x) d\mu(x) = 1,$$

andererseits

$$\int_{[0,1]} f(x, y) d\mu(x) = 0, \quad \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = 0.$$

Die Doppelintegrale existieren also, sind aber verschieden. Tatsächlich ist die Funktion nicht integrierbar: Das Integral von $f_+(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) g_k(y)$ und $f_-(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1}(x) g_k(y)$ ist jeweils ∞ .

¹²Guido Fubini * 19.1.1879 † 6.6.1943

Satz 6.6 — Es sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine messbare Funktion. Dann gilt: f ist genau dann integrierbar, wenn f doppelintegrierbar ist.

Beweis. Wenn f integrierbar ist, so ist dies die Behauptung des Satzes von Fubini. Es sei also umgekehrt f doppelintegrierbar. Wir wählen eine isotone Folge $f_k \uparrow f$ von nichtnegativen Treppenfunktionen. Die einzelnen f_k brauchen zunächst nicht integrierbar zu sein. Das können wir aber erzwingen, indem wir f_k jenseits einer Kugel B_k vom Radius k um den Ursprung abschneiden: Wir setzen $g_k := f_k \cdot \chi_{B_k}$. Dann gilt noch immer $g_k \uparrow f$. Da g_k integrierbar und doppelintegrierbar ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} g_k(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} g_k d\mu.$$

Die linke Seite konvergiert isoton gegen $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) < \infty$. Die rechte Seite nach Definition (!) gegen $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\mu$. Insbesondere ist dieses Integral endlich und somit f integrierbar. $\square$

Beispiel 6.7 (Kugelvolumina) — Wir wollen als Anwendung des Satzes von Fubini das Volumen einer n -dimensionalen Kugel

$$B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq r\}$$

vom Radius r berechnen. Wir wissen, dass $\mu(B_r^1) = 2r$, und erwarten, dass das Volumen mit der Potenz r^n wächst. Wir machen deshalb den Ansatz

$$\mu(B_r^n) = \beta_n r^n,$$

den wir induktiv beweisen. Dabei bestimmen wir den Faktor β_n rekursiv.

Mit dem Prinzip des Cavalieri ergibt sich

$$\mu(B_r^n) = \int_{-r}^r \mu((B_r^n)_z) d\mu(z),$$

wobei

$$(B_r^n)_z = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid z^2 + \|y\|_2^2 \leq r^2\} = B_\rho^{n-1}, \quad \rho = \sqrt{r^2 - z^2}.$$

Wenn wir induktiv annehmen, dass $\mu(B_s^{n-1}) = \beta_{n-1} s^{n-1}$, folgt

$$\mu(B_r^n) = \beta_{n-1} \int_{-r}^r (r^2 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

Mit der Substitution $z = r \sin(t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, ergibt sich

$$\mu(B_r^n) = \beta_{n-1} r^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^n dt.$$

Damit ist der induktive Ansatz gerechtfertigt, und wir finden für den Faktor β_n die rekursive Formel

$$\beta_n = \beta_{n-1} I_n, \quad \text{mit} \quad I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^n dt$$

Für das Integral I_n findet man durch partielle Integration die Rekursion $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ mit den Anfangswerten $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$. Wir multiplizieren mit nI_{n-1} und sehen, dass der Ausdruck $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$ nicht mehr von n abhängt und daher den Wert 2π hat. Es folgt

$$\beta_n = I_n\beta_{n-1} = I_nI_{n-1}\beta_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\beta_{n-2}.$$

Wegen $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = \pi$ bedeutet das:

$$\beta_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad \beta_{2m+1} = \frac{2^{m+1}\pi^m}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m+1)}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Für kleine m ergeben sich die folgenden Werte:

	Inhalt
Intervall	$2r$
Kreisscheibe	πr^2
Kugel	$\frac{4\pi}{3}r^3$
4-Ball	$\frac{1}{2}\pi^2r^4$
5-Ball	$\frac{8}{15}\pi^2r^5$

7 Transformationsformel und Anwendungen

7.1 Die Transformationsformel für das Lebesgueintegral

Satz 7.1 — Es seien $U, U' \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\Phi : U \rightarrow U'$ ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Ist $X \subset U$ messbar, so ist auch $\Phi(X) \subset U'$ messbar, und es gilt

$$\mu(\Phi(X)) \leq \int_X |\det D\Phi| d\mu. \quad (7.1)$$

Beweis. 1. Schritt. Man darf ohne Einschränkung zusätzlich annehmen, dass die Abbildungen Φ , $D\Phi$ und $(D\Phi)^{-1}$ auf einer kompakten Menge $K \supset U$ definiert sind.

Dazu betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$U_k := \left\{ x \in U \mid \|x\| < k \text{ und } d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Dann ist jedes U_k offen, $\overline{U}_k$ kompakt, und es gilt

$$U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U_3 \subset \dots \subset U$$

mit $U = \bigcup U_k$. Die zusätzliche Annahme ist für jedes U_k erfüllt. Gilt nun der Satz für $X_k = X \cap U_k$, so folgt die Behauptung für X durch den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ aus dem Satz von Beppo Levi.

2. Schritt. Wir können gemäß Schritt 1 annehmen, dass Φ , $D\Phi$ und $(D\Phi)^{-1}$ auf einer kompakten Menge K mit $U \subset K \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind. Insbesondere gilt dann:

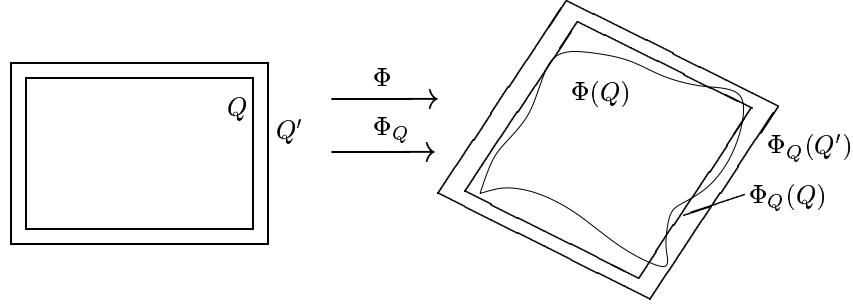
1. Die Abbildung $D\Phi : U \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ ist gleichmäßig stetig, d.h. zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass für alle $x, y \in U$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt: $\|D\Phi(x) - D\Phi(y)\| < \varepsilon$.
2. Die Abbildungen $\|(D\Phi)^{-1}\|$ und $|\det D\Phi|$ sind auf U nach oben durch eine Konstante M beschränkt.

3. Schritt. Der Satz gilt für Quader.

Wir verwenden die Konstanten M , ε und $\delta = \delta(\varepsilon)$ wie im Schritt 2.

Es sei $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ ein Vektor mit positiven Einträgen und $a := \min\{v_i\}$ und $b := \|v\|$. Wir betrachten den Quader $Q = (q - v, q + v]$ mit Mittelpunkt q , Innenradius a und Außenradius b . (Damit sind die Radien der kleinsten bzw. größten Kugel gemeint, die in Q enthalten sind bzw. Q enthalten.) Wir nehmen an, der Quader liege ganz in U . Und zwar nehmen wir zunächst genauer an, der Quader sei so klein, dass sein Außenradius b kleiner als δ ist.

Der Quader Q wird unter Φ verzerrt abgebildet. Die Idee ist nun die, dass die Abbildung Φ , eingeschränkt auf Q , fast linear ist, wenn nur der Quader klein genug ist. Oder anders gesagt, dass wir $\Phi|_Q$ in ausreichender Näherung durch eine lineare Abbildung ersetzen können.



Wir definieren daher die lineare Abbildung

$$\Phi_Q(x) := \Phi(q) + D\Phi(q)(x - q).$$

Mit der Bezeichnung $x_t = q + t(x - q)$ gilt für alle $x \in Q$:

$$\Phi(x) - \Phi(q) = \int_0^1 D\Phi(x_t)(x - q)dt.$$

Daraus gewinnen wir die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi_Q(x)\| \leq \int_0^1 \|D\Phi(x_t) - D\Phi(q)\| dt \cdot \|x - q\| \leq \varepsilon b.$$

gemäß unserer Annahmen über die gleichmäßige Stetigkeit von $D\Phi$ und der offensichtlichen Abschätzung $\|x - q\| \leq b$.

Mit der Bezeichnung $\xi = D\Phi(q)^{-1}(\Phi(x) - \Phi_Q(x))$ erhält man die Abschätzung

$$\|\xi\| \leq \|D\Phi(q)^{-1}\| \cdot \|\Phi(x) - \Phi_Q(x)\| \leq M\varepsilon b$$

und die Darstellung

$$\Phi(x) = \Phi(q) + D\Phi(q)(x - q + \xi).$$

Wenn x den Quader Q durchläuft, verbleibt $x - q + \xi$ noch ganz in dem Quader $Q' := (-v - e, v + e]$, wobei $e = \varepsilon Mb \cdot (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$. Der Quader Q' hat das Volumen

$$\mu(Q') = 2^n \prod_{i=1}^n (v^i + \varepsilon Mb) \leq \mu(Q) \cdot \left(1 + \varepsilon M \frac{b}{a}\right)^n.$$

Es folgt nach Satz 3.17, dass

$$\mu^*(\Phi(Q)) \leq |\det D\Phi(q)| \mu(Q') \leq |\det D\Phi(q)| \left(1 + \varepsilon M \frac{b}{a}\right)^n \mu(Q).$$

Die bisherige Rechnung war unter der Annahme durchgeführt, dass der Quader Q klein war, genauer: dass $b < \delta(\varepsilon)$ war.

Ist nun Q nicht klein in diesem Sinne, so können wir mit hinreichend groß Zahl gewähltem N den Quader Q in N^n gleichgroße Teilwürfel Q_i mit Mittelpunkten q_i zerlegen derart, dass der Außenradius b/N jedes Teilwürfels kleiner als $\delta(\varepsilon)$ ist. Für jeden dieser Teilwürfel gilt die Abschätzung (7.2). (Man beachte nämlich, dass sich das Verhältnis b/a von Außen- zu Innenradius bei der

Zerlegung in Teilquader nicht ändert!) Durch Summation über alle Teilwürfel erhält man

$$\begin{aligned}\mu^*(\Phi(Q)) &\leq \left(1 + \varepsilon M \frac{b}{a}\right)^n \sum_i |\det D\Phi(q_i)| \frac{\mu(Q)}{N^n} \\ &= \left(1 + \varepsilon M \frac{b}{a}\right)^n \int_Q g_N,\end{aligned}$$

wobei g_N die Treppenfunktion

$$g_N := \sum_i \chi_{Q_i} |\det D\Phi(q_i)|$$

bezeichnet. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\det D\Phi$ konvergiert die Folge g_N für $N \rightarrow \infty$ punktweise gegen die Funktion $\chi_Q |\det D\Phi|$, und alle diese Funktionen sind durch $M\chi_Q$ beschränkt. Nach dem Satz von Lebesgue folgt

$$\mu^*(\Phi(Q)) \leq \left(1 + \varepsilon M \frac{b}{a}\right)^n \int_Q |\det D\Phi| d\mu.$$

Jetzt lassen wir ε gegen 0 gehen und erhalten

$$\mu^*(\Phi(Q)) \leq \int_Q |\det D\Phi| d\mu.$$

Die Abbildung Φ ist ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus und daher insbesondere ein Homöomorphismus. Deshalb bildet Φ Borelmengen wieder in Borelmengen ab. Daraus ergibt sich, dass $\Phi(Q)$ eine Borelmenge und somit messbar ist und dass wir in der gerade gewonnenen Abschätzung das äußere Maß durch das Lebesgue-Maß ersetzen können. Damit ist der Satz für Quader bewiesen.

4. Schritt. Es sei $X \subset U$ eine beliebige messbare Menge. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\{Q_\nu\}$ eine Überdeckung von X durch disjunkte halboffene Quadern $Q_\nu \subset U$ mit der Eigenschaft, dass $\mu(V \setminus X) < \varepsilon$ für $V := \bigcup_{\nu=1}^\infty Q_\nu$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(\Phi(X)) &\leq \sum_{\nu=1}^\infty \mu(\Phi(Q_\nu)) \\ (\text{nach Schritt 3}) &\leq \sum_{\nu=1}^\infty \int_{Q_\nu} |\det D\Phi| d\mu \\ (\text{nach B. Levi}) &= \int_V |\det D\Phi| d\mu \\ &= \int_X |\det D\Phi| d\mu + \int_{V \setminus X} |\det D\Phi| d\mu \\ &\leq \int_X |\det D\Phi| d\mu + M \mu(V \setminus X) \\ &\leq \int_X |\det D\Phi| d\mu + M \varepsilon.\end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt

$$\mu^*(\Phi(X)) \leq \int_X |\det D\Phi| d\mu. \quad (7.2)$$

Jede messbare Menge X lässt sich in eine Borelmenge A und eine Nullmenge N zerlegen. Da Φ ein Homöomorphismus ist, ist $\Phi(A)$ wieder eine Borelmenge. Andererseits folgt aus der Abschätzung (7.2), angewendet auf N statt X , dass für eine Nullmenge N das Bild $\Phi(N)$ wieder eine Nullmenge ist. Daher ist $\Phi(X) = \Phi(A) \cup \Phi(N)$ messbar, und wir dürfen in der Ungleichung (7.2) das äußere Maß μ^* durch das Lebesgue-Maß μ ersetzen. $\square$

Satz 7.2 (Transformationsformel für das Lebesgueintegral) — Es seien $U, U' \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\Phi : U \rightarrow U'$ ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Ist $f : U' \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, so ist auch $f \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, und es gilt

$$\int_{U'} f \, d\mu = \int_U (f \circ \Phi) |\det D\Phi| \, d\mu.$$

Beweis. 1. Da $|\det D\Phi| > 0$ ist, genügt es, den Satz für nichtnegative reellwertige Funktionen f zu beweisen.

2. Es genügt, die Ungleichung

$$\int_{\Phi(U)} f \, d\mu \leq \int_U f\Phi \cdot |\det D\Phi| \, d\mu \quad (7.3)$$

zu beweisen. Denn wendet man diese Ungleichung auf den Diffeomorphismus $\Phi^{-1} : U' \rightarrow U$ und die Abbildung $g = (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ an, so folgt:

$$\begin{aligned} \int_U f\Phi \cdot |\det D\Phi| \, d\mu &= \int_{\Phi^{-1}(U')} g \, d\mu \\ (\text{nach (7.3)}) &\leq \int_{U'} g\Phi^{-1} \cdot |\det D\Phi^{-1}| \, d\mu \\ &= \int_{\Phi(U)} f\Phi\Phi^{-1} \cdot |\det D\Phi \circ \Phi^{-1}| \cdot |\det D\Phi^{-1}| \, d\mu \\ &= \int_{\Phi(U)} f \cdot |\det D(\Phi \circ \Phi^{-1})| \, d\mu \\ &= \int_{\Phi(U)} f \, d\mu, \end{aligned}$$

weil nach der Kettenregel $(D\Phi \circ \Phi^{-1}) \cdot D(\Phi^{-1}) = D(\Phi \circ \Phi^{-1}) = I_n$ gilt.

Das bedeutet: Es gilt auch die zu (7.3) umgekehrte Ungleichung.

3. Gemäß Satz 7.1 gilt die Ungleichung (7.3) für Funktionen der Form $f = \chi_A$, wo $A \subset U$ eine messbare Menge ist. Wegen der Additivität des Integrals gilt (7.3) dann auch für alle nichtnegativen Treppenfunktionen. Ist schließlich f eine beliebige messbare nichtnegative reellwertige Funktion, so approximieren wir f punktweise durch eine isotone Folge von Treppenfunktionen $f_k \uparrow f$. Dann gilt auch $f_k\Phi |\det D\Phi| \uparrow f\Phi |\det D\Phi|$. Mit dem Satz von B. Levi folgt (7.3) auch für die Funktion f . $\square$

7.2 Anwendungen

Beispiel 7.3 — Nach dem Satz von Fubini gilt:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\mu. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\Phi : U := (0, 2\pi) \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(\varphi, r) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ ist ein Diffeomorphismus von U auf die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{>0} \times \{0\})$ mit der Ableitung

$$D\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Deren Determinante ist r . Die Menge $(\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge und kann deshalb im Integrationsgebiet weggelassen werden. Mit der Transformationsregel folgt

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{>0} \times \{0\})} e^{-x^2-y^2} d\mu = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\mu = \int_U r e^{-r^2} d\mu,$$

und mit erneuter Anwendung des Satzes von Fubini:

$$\dots = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

Damit haben wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ein zweites Mal hergeleitet.

Beispiel 7.4 (Kugelkoordinaten) — Die Verallgemeinerung von ebenen Polarkoordinaten

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi)$$

sind entweder Zylinderkoordinaten (man nimmt zu r und φ einfach die z -Koordinate hinzu) oder Kugelkoordinaten

$$x = r \cos(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \cos(\theta) \sin(\varphi), \quad z = r \sin(\theta).$$

Welche Koordinaten man zur Bearbeitung eines Problems verwendet, also etwa kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten oder ganz andere Koordinatensysteme, hängt auch von den Symmetrien der Fragestellung ab. Kugelkoordinaten bieten sich bei rotationssymmetrischen Problemen an.

Für beliebige Dimensionen gibt es verallgemeinerte Kugelkoordinaten:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$\Phi(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) \cos(\varphi) \\ r \cos(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ \vdots \\ r \sin(\theta_{n-2}) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung Φ ist surjektiv, parametrisiert jeden Bildpunkt mehrfach, und ist an vielen Stellen auch kein lokaler Diffeomorphismus, d.h. $D\Phi$ ist nicht invertierbar. Das lässt sich verbessern, wenn wir Φ im Definitionsbereich und im Bildbereich einschränken. Mit der Bezeichnung

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$$

ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus C$$

ein Diffeomorphismus. Es ist leicht, die Umkehrabbildung anzugeben.

Wir berechnen die Funktionaldeterminante $\det D\Phi$ und beweisen induktiv die Formel

$$\det D\Phi(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = r^{n-1} \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)^2 \cdots \cos(\theta_{n-2})^{n-2}.$$

Die Formel ist richtig für Polarkoordinaten, d.h. den Fall $n = 2$ mit $\det D\Phi = r$. Wir nehmen also an, es sei $n \geq 2$ und die Behauptung sei für $n - 1$ und die $(n - 1)$ -dimensionalen Kugelkoordinaten

$$\Psi : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-3} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

schon gezeigt. Es gilt

$$\begin{aligned} D\Phi &= \left(\begin{array}{c|c} \cos(\theta_{n-2})D\Psi & \sin(\theta_{n-2})\Psi \\ \hline \sin(\theta_{n-2}) \ 0 \ \cdots \ 0 & r \cos(\theta_{n-2}) \end{array} \right) \\ &= \cos^n(\theta_{n-2}) \left(\begin{array}{c|c} D\Psi & \tan(\theta_{n-2})\Psi \\ \hline \tan(\theta_{n-2}) \ 0 \ \cdots \ 0 & r \end{array} \right) \end{aligned}$$

Für die Einträge in der ersten Spalte der Matrix $D\Psi$ gilt

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} = \frac{1}{r} \Psi_i.$$

Bei einer Spaltentransformation, bei der das $-\frac{1}{r} \tan(\theta_{n-2})$ -fache der letzten Spalte zur ersten addiert wird, wird also die erste Spalte von $D\Psi$ mit $1 +$

$\tan^2(\theta_{n-2}) = \cos(\theta_{n-2})^{-2}$ multipliziert. Wir ziehen diesen Faktor aus der Determinante

$$\det D\Phi = \cos(\theta_{n-2})^{n-2} \begin{vmatrix} D\Psi & \tan(\theta_{n-2})\Psi \\ 0 \cdots 0 & r \end{vmatrix}$$

und erhalten nach Induktion

$$\det D\Phi = r \cos(\theta_{n-2})^{n-2} \det D\Psi = r^n \cos(\theta_1) \cdots \cos(\theta_{n-2})^{n-2}.$$

Beispiel 7.5 (Gravitationspotential eines rotationssymmetrischen Körpers) — Das Potential eines Massenpunktes der Masse m im Abstand R vom Messpunkt ist

$$\Phi(R) = -G \frac{m}{R},$$

wo G die Gravitationskonstante bezeichnet, die wir hier der Einfachheit halber zu 1 normieren. Für eine ausgedehnte Masse, die im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ die Massendichte $m(x)$ hat und einen Messpunkt $P \in \mathbb{R}^3$ findet man das Potential durch Integration über den Raum:

$$\Phi(P) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m(x)}{\|x - P\|} d\mu(x). \quad (7.4)$$

Wir wollen das Potential für einen rotationssymmetrischen Körper berechnen. Für einen solchen hängt die Massendichte $m(x)$ nur vom Abstand $\|x\|$ vom Ursprung ab, d.h. $m(x) = \tilde{m}(\|x\|)$ für eine Funktion $\tilde{m} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$.

Für eine Kugelschale mit gleichmäßiger Massendichte m_0 und Innenradius R_0 und Außenradius R_1 heißt das etwa

$$\tilde{m}(r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r < R_0 \text{ oder } r > R_1, \\ m_0, & \text{falls } R_0 \leq r \leq R_1. \end{cases}$$

Wir berechnen das Integral (7.4) durch Einführung von Polarkoordinaten. Da das Problem rotationssymmetrisch ist, können wir den Messpunkt auf die z -Achse legen und somit annehmen, dass $P = (0, 0, p)$ mit $p \geq 0$. In Kugelkoordinaten gilt dann $\|x - P\| = \sqrt{r^2 + p^2 - 2rp \sin(\theta)}$, und wir müssen das folgende Integral auswerten:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= - \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tilde{m}(r) r^2 \cos(\theta)}{\sqrt{r^2 + p^2 - 2rp \sin(\theta)}} d\theta d\varphi dr. \\ &= -2\pi \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tilde{m}(r) r^2 \cos(\theta)}{\sqrt{r^2 + p^2 - 2rp \sin(\theta)}} d\theta dr. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = \sin(\theta)$, $dt = \cos(\theta) d\theta$ erhält man:

$$\Phi(P) = -2\pi \int_0^\infty \tilde{m}(r) r^2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{r^2 + p^2 - 2rpt}} dr.$$

Das innere Integral ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{r^2 + p^2 - 2rpt}} &= \frac{1}{rp} \sqrt{r^2 + p^2 - 2rpt} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{rp} (\sqrt{(r+p)^2} - \sqrt{(r-p)^2}) = \frac{2 \min\{r, p\}}{rp}.\end{aligned}$$

Das bedeutet:

$$\Phi(P) = -\frac{4\pi}{p} \int_0^\infty \tilde{m}(r) r \min\{r, p\} dr.$$

Wir unterscheiden drei Fälle je nachdem, ob $p < R_0$, $R_0 \leq p \leq R_1$ oder $R_1 < p$.

1. Fall: P liegt ganz innerhalb der Kugelschale, d.h. $p < R_0$. Dann gilt

$$\Phi(P) = -4\pi \int_{R_0}^{R_1} m_0 r dr = -2\pi m_0 (R_1^2 - R_0^2).$$

2. Fall: P liegt in der Schale selbst, d.h. $R_0 \leq p \leq R_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= -\frac{4\pi}{p} \int_{R_0}^p m_0 r^2 dr - 4\pi \int_p^{R_1} m_0 r dr \\ &= \frac{8\pi}{3} m_0 p^2 + \frac{4\pi}{3p} m_0 R_0^3 - 4\pi m_0 R_1^2.\end{aligned}$$

3. Fall: P liegt außerhalb der Kugelschale, d.h. $R_1 < p$. Dann gilt

$$\Phi(P) = -\frac{4\pi}{p} \int_{R_0}^{R_1} m_0 r^2 dr = -\frac{4\pi}{3p} (R_1^3 - R_0^3) = -\frac{M}{p},$$

wobei

$$M = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} m_0 r^2 dr = \frac{4\pi}{3} (R_1^3 - R_0^3)$$

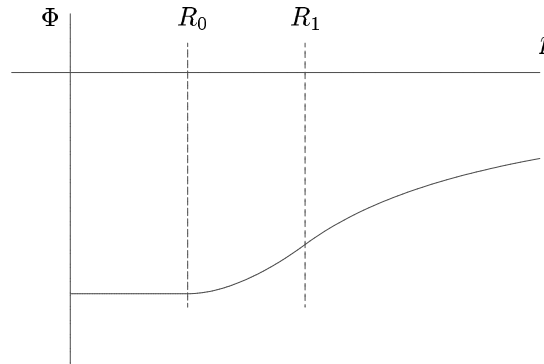
die Gesamtmasse der Kugelschale bezeichnet.

Zusammengefasst: *Außerhalb* der Kugelschale erzeugt diese dasselbe Potentialfeld wie ein einzelner Massenpunkt im Zentrum der Kugelschale, der die gesamte Masse auf sich vereinigt.

Ganz *innerhalb* der Kugelschale ist das Potential vom Messpunkt P gar nicht mehr abhängig, sondern konstant. Im Innern ist die Gravitationskraft also Null.

Diese Ergebnisse gehen auf Newton zurück.

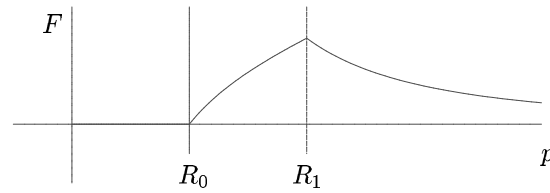
Das folgende Bild zeigt den Verlauf des Potentials im Abstand p vom Mittelpunkt der Kugelschale:



Die Gravitationskraft F ergibt aus der Masse μ des Messpartikels und dem Potential nach der Beziehung

$$F = -\mu \operatorname{grad} \Phi.$$

Sie ist in jedem Punkt zum Kugelschalenmittelpunkt gerichtet. Der Absolutbetrag der Kraft verläuft wie folgt:



Dieselben Formeln gelten bei Abänderung der Konstanten für alle Zentralkräfte, die quadratisch mit dem Abstand fallen, zum Beispiel für elektrostatische Kräfte. Im Innern einer gleichmäßig elektrisch geladenen Hohlkugel ist das Feld also Null.

8 Das Hausdorff-Paradoxon

Satz 8.1 (Hausdorff-Paradoxon) — Es gibt eine disjunkte Zerlegung der Sphäre $S^2 = P \cup R' \cup B' \cup G'$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. P ist abzählbar.
2. Die Mengen R' , B' , G' und $B' \cup G'$ sind bewegungsäquivalent, d.h. es gibt jeweils Drehungen, die die Mengen bijektiv aufeinander abbilden.

Der Beweis benutzt die folgende hübsche Konstruktion:

Es seien p_1 , p_2 und p_3 drei verschiedene Punkte auf der Einheitssphäre S^2 im $\mathbb{R}^3$, die ein gleichseitiges Kugeldreieck mit Kantenlänge $\theta \leq \pi/2$ aufspannen. Letzteres bedeutet, dass die p_i , als Vektoren aufgefasst, einen Winkel θ im Mittelpunkt der Kugel einschließen. Rechnerisch drückt sich das mit dem Skalarprodukt so aus:

$$\langle p_i, p_j \rangle = \cos(\theta)$$

für $i \neq j$.

Wir betrachten für jedes p_i , $i = 1, 2, 3$, die Drehung $d_i \in \text{SO}(3)$ um den Winkel π mit Drehachse $\mathbb{R}p_i$. Explizit ist diese Drehung durch die Formel

$$d_i(x) = -x + 2\langle p_i, x \rangle p_i \quad (8.1)$$

gegeben. Die Drehungen d_i haben nach Konstruktion die Ordnung 2.

Es bezeichne $H \subset \text{SO}(3)$ die Untergruppe, die von d_1 , d_2 und d_3 aufgespannt wird. H besteht aus allen Elementen der Form

$$g = s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell \quad (8.2)$$

mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $s_1, \dots, s_\ell \in \{d_1, d_2, d_3\}$. Dabei genügt es, nur Darstellungen (8.2) mit der Eigenschaft $s_i \neq s_{i+1}$ zu betrachten. Wir bezeichnen mit W die Menge aller endlichen Folgen $(s_1, \dots, s_\ell)$ mit $s_i \in \{d_1, d_2, d_3\}$ und $s_i \neq s_{i+1}$. Man spricht auch in anderem Kontext von der Menge der Wörter im Alphabet $\{d_1, d_2, d_3\}$ ohne direkte Wiederholungen. Zu W rechnen wir ausdrücklich auch das leere Wort w_0 , d.h. die Folge der Länge $\ell = 0$. Wir bekommen also eine surjektive Abbildung

$$\Phi : W \rightarrow H, (s_1, \dots, s_\ell) \mapsto s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell.$$

Wir können die Menge W auf die folgende Weise mit einer Gruppenstruktur versehen: Man multipliziert zwei Wörter w und w' , indem man die Folgen hintereinandersetzt und eventuelle Verdoppelungen von Symbolen d_i , die dabei auftreten, herauskürzt. Für diese Verknüpfung ist w_0 ein Neutralelement, und das Wort $(s_1, \dots, s_\ell)$ hat das Inverse $(s_\ell, \dots, s_1)$. Nicht ganz so offensichtlich ist die Assoziativität. Diese beweist man am besten durch Induktion und einige Fallunterscheidungen. In der Gruppentheorie sagt man, die Gruppe W sei durch die Erzeuger d_1, d_2, d_3 und die Relationen $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 1$ definiert und schreibt

$$W = \langle d_1, d_2, d_3 \mid d_1^2, d_2^2, d_3^2 \rangle.$$

Es ist ziemlich klar, dass die Abbildung Φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Im allgemeinen ist diese Abbildung nicht injektiv. Als Extremfall betrachten wir

ein Dreieck mit der Kantenlänge $\pi/2$. Dann stehen die Drehachsen senkrecht auf einander, und wenn wir die Koordinatenachsen durch die Punkte p_1, p_2 und p_3 legen, sind die entsprechenden Drehungen durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die davon erzeugte Gruppe hat nur vier Elemente: Einzig die Identität kommt noch hinzu. Offenbar kann Φ für die Wahl $\theta = \pi/2$ nicht injektiv sein, weil W unendlich ist. Andererseits ist plausibel, dass dieses Phänomen nur bei speziellen Winkeln θ auftreten wird. Das wird durch das folgende Lemma präzisiert:

Lemma 8.2 — *Ist $\cos(\theta)$ transzendent, so ist die Abbildung Φ injektiv.*

Zur Erinnerung: Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt algebraisch, wenn es ein nichttriviales Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = 0$ gibt, und andernfalls transzendent.

Beweis. Angenommen, Φ ist nicht injektiv. Dann gibt es in $\ker(\Phi)$ ein von w_0 verschiedenes Wort. Unter allen diesen Worten sei $w = (s_1, \dots, s_\ell)$ ein Wort von minimaler Länge ℓ . Dass w im Kern liegt, bedeutet $s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell = I$. Aber dann gilt auch $s_2 \cdot \dots \cdot s_\ell \cdot s_1 = I$. Wäre nun $s_\ell = s_1$, so läge nach dieser Überlegung auch $(s_2, \dots, s_{\ell-1})$ im Kern von Φ und würde der Minimalität von w widersprechen. Wir fassen zusammen:

Ist Φ nicht injektiv, so gibt es ein Wort $(s_1, \dots, s_\ell)$ mit $s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell = I$ und $s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_\ell \neq s_1$.

Es sei nun $q_i \in \{p_1, p_2, p_3\}$ ein Pol für die Drehung s_i . Wir können die Wirkung der zusammengesetzten linearen Abbildung $s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell$ mit Hilfe des Skalarproduktes explizit hinschreiben:

$$\begin{aligned} s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell(x) &= (-1)^\ell \left(x - 2 \sum_{i=1}^{\ell} \langle x, q_i \rangle q_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2}^{\ell} (-2)^k \sum_{j_1 < \dots < j_k} \langle x, q_{j_k} \rangle \langle q_{j_k}, q_{j_{k-1}} \rangle \cdots \langle q_{j_2}, q_{j_1} \rangle q_{j_1} \right), \end{aligned}$$

Das beweist man ausgehend von (8.1) durch Induktion nach ℓ .

Wir berechnen die Spur von $s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell$. Dabei benutzen wir das folgende einfache Lemma, dessen Beweis ich zur Übung lasse:

Lemma 8.3 — *Es seien $a, b \in V$ Vektoren in einem Vektorraum V mit Skalarprodukt. Der Endomorphismus $f(x) := \langle a, x \rangle b$ hat die Spur $\text{Sp}(f) = \langle a, b \rangle$.*

Wir wenden das Lemma auf den Endomorphismus $s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell$ an. Dabei kommen nur die Skalarprodukte $\langle q_i, q_i \rangle = 1$ und $\langle q_i, q_j \rangle = \cos(\theta)$ für $i \neq j$ vor. Nach Konstruktion gilt $q_1 \neq q_2 \neq \dots \neq q_m \neq q_1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell) &= (-1)^\ell \left(3 - 2\ell + \sum_{k=2}^{\ell} (-2)^k \binom{\ell}{k} \cos(\theta)^k \right) \\ &= (-1)^\ell \left(2 - 2\ell(1 - \cos(\theta)) + (1 - 2\cos(\theta))^\ell \right). \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Annahme $s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell = I$, also $\text{Sp}(s_1 \cdot \dots \cdot s_\ell) = \text{Sp}(I) = 3$. Diese Überlegung zeigt, dass $2 \cos(\theta)$ eine Nullstelle des Polynoms

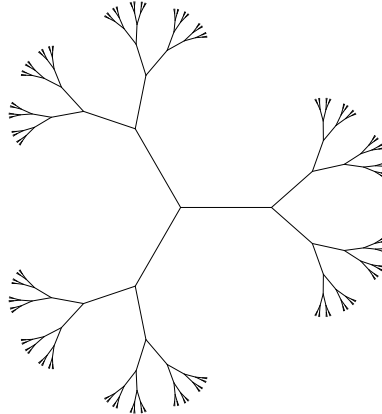
$$P_\ell(X) := (X - 1)^\ell - (-1)^\ell \ell X - (3 + 2(-1)^\ell(\ell - 1))$$

ist. Das ist aber unmöglich, weil wir vorausgesetzt hatten, dass $\cos(\theta)$ eine transzendente Zahl ist. $\square$

Der erste entscheidende Punkt in Hausdorffs Argument ist somit, dass bei geeigneter Wahl von θ die ziemlich große Gruppe W durch Φ isomorph auf eine Untergruppe H in $\text{SO}(3)$ abgebildet wird.

Eine Möglichkeit, sich die Gruppe H bildlich vorzustellen ist der sogenannte Cayleygraph Γ des Paares $(H, \{d_1, d_2, d_3\})$. Der Graph ist zu jedem Paar aus einer Gruppe und einer endlichen Erzeugermenge definiert.

Der Graph Γ hat eine Ecke e_g für jedes Gruppenelement $g \in H$, und eine Kante von e_g nach e_{sg} für jedes Gruppenelement $g \in H$ und jeden Erzeuger $s \in \{d_1, d_2, d_3\}$. In der speziellen Situation, in der wir hier sind, gibt es zwischen zwei Ecken entweder keine Kante oder gleich zwei, also eigentlich eine Doppelkante. Im folgenden spreche ich aber immer nur von einer Kante und zeichne auch im Bild immer nur eine Kante statt zwei. Zwischen e_g und e_h gibt es also genau dann eine Kante, wenn $gh^{-1} \in \{d_1, d_2, d_3\}$. Der Graph sieht ungefähr so aus:



Man beachte, dass der Graph keine Schleifen enthalten kann. Das ist eine unmittelbare Konsequenz des Lemmas. Man sagt, der Graph sei ein Baum.

Diese Baumeigenschaft machen wir uns wie folgt zunutze: Wir nennen eine Kante von e_g nach e_h eine i -Kante, wenn $gh^{-1} = hg^{-1} = d_i$. Man beachte, dass jede Kante entweder eine 1-, eine 2- oder eine 3-Kante ist. Außerdem kann man jeder Kante eine Richtung zuordnen, sie soll nämlich von der Ecke, die zum Neutralelement gehört, weg nach außen zeigen.

Wir färben die Ecke des Neutralelements Rot und alle anderen Ecken von innen nach außen nach den folgenden Regeln Rot, Blau und Gelb ein:

1. Eine 1-Kante verbindet R mit B , B mit R und G mit G .
2. Eine 2-Kante verbindet R mit G , G mit R und B mit B .
3. Eine 3-Kante verbindet B mit R , G mit R und R mit B .

(Man beachte, dass die Regel für 3-Kanten sich wesentlich von den beiden anderen Regeln unterscheidet!) Eine solche Färbung ist sicher möglich und sogar eindeutig.

Wir bezeichnen mit $R, B, G \subset H$ die durch die Färbung entstandenen Teilmengen. Diese Teilmengen sind disjunkt, und es gilt $H = R \cup B \cup G$. Die Linksmultiplikation mit einem der Elemente d_i liefert nach Konstruktion Bijektionen

$$d_1 : B \rightarrow R, \quad d_2 : G \rightarrow R, \quad \text{und} \quad d_3 : B \cup G \rightarrow R.$$

Wir kommen zur Sphäre zurück. Zu einem Element $p \in S^2$ gibt es genau dann eine Drehung $h \in H \setminus \{I\}$ mit $h(p) = p$, wenn p ein Pol der Drehachse von h ist. Die Gruppe H ist abzählbar. Daher ist auch die Menge

$$P := \{p \in S^2 \mid \text{es gibt ein } h \in H, h \neq I, \text{ mit } h(p) = p\}$$

abzählbar, denn jedes $h \in H \setminus \{I\}$ hat genau zwei Pole. Auf dem Komplement $X := S^2 \setminus P$ operiert die Gruppe H frei. Es sei

$Q \subset S^2$ ein Repräsentantensystem für die Operation von H auf X , d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es genau ein $q \in Q$ und genau ein $h \in H$ mit $x = h(q)$. Wir färben x genauso wie h und bezeichnen mit $R', B', G' \subset X$ die so entstandenen einfarbigen Mengen. Damit haben wir eine disjunkte Zerlegung $S^2 = P \cup R' \cup B' \cup G'$ mit den folgenden Eigenschaften gefunden:

1. P ist abzählbar.
2. Die Drehung d_1 liefert eine Bijektion $B' \rightarrow R'$.
3. Die Drehung d_2 liefert eine Bijektion $G' \rightarrow R'$.
4. Die Drehung d_3 liefert eine Bijektion $B' \cup G' \rightarrow R'$.

Damit ist das Hausdorffparadoxon bewiesen. □

Mithilfe des Paradoxons 8.1 hat Hausdorff gezeigt, dass das Inhaltsproblem 1.5 für $n \geq 3$ keine Lösung besitzt.

Dazu formulieren wir zunächst:

8.4. Inhaltsproblem für die 2-Sphäre —

Gibt es eine Abbildung $\mu : \mathfrak{P}(S^2) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für disjunkte Mengen A und B in S^2 gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. $0 < \mu(S^2) < \infty$.
3. Für jede Teilmenge A und jede Drehung $g \in \text{SO}(3)$ gilt $\mu(g(A)) = \mu(A)$.

Satz 8.5 — *Das Inhaltsproblem für die 2-Sphäre ist nicht lösbar.*

Beweis. Wir nehmen an, μ wäre eine Lösung des Problems.

1. Schritt. Es sei $P = \{p_1, p_2, \dots\} \subset S^2$ eine abzählbare Teilmenge und q ein Punkt im Komplement von $P \cup (-P)$. Wir bezeichnen mit g die Drehung um die Achse $\mathbb{R}q$ mit einem noch festzulegenden Drehwinkel α . Nach Wahl von q liegt kein Punkt aus P auf der Drehachse von g . Es bezeichne p'_i die Projektion von p_i

auf die Ebene senkrecht zu q . Wenn p_i auf p_j abgebildet würde, müssten p'_i und p'_j den Winkel α einschließen. Wenn wir α so wählen, dass α verschieden von den abzählbar vielen von p'_i und p'_j eingeschlossenen Winkeln ist, so ist $g(p_i) = p_j$ unmöglich. Für ein solches α und die zugehörige Drehung g gilt also $g(P) \cap P = \emptyset$.

Es folgt, dass $P' = P \cup (P)$ eine abzählbare Menge mit Inhalt

$$\mu(P') = \mu(P) + \mu(g(P)) = 2\mu(P)$$

ist. Indem man das Argument mit P' etc. wiederholt, sieht man induktiv, dass $2^m \mu(P) \leq \mu(S^2) < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir schließen, dass abzählbare Mengen Inhalt 0 haben müssen.

2. Schritt. Es sei $S^2 = P \cup B' \cup G' \cup R'$ eine Zerlegung wie im Hausdorffparadoxon. Dann gilt

$$\mu(G') + \mu(B') = \mu(G' \cup B') = \mu(R') = \mu(G') = \mu(B').$$

Das ist nur möglich, wenn $\mu(B') = \mu(R') = \mu(G') = 0$. Damit ist S^2 die Vereinigung von vier disjunkten Mengen mit Inhalt 0 und hat daher selbst Inhalt 0, im Widerspruch zur Voraussetzung 2. $\square$

Satz 8.6 — *Das Inhaltsproblem für den $\mathbb{R}^n$ hat keine Lösung für $n \geq 3$.*

Beweis. 1. Reduktion: Hätte das Problem eine Lösung μ_n für den $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$, so auch für den $\mathbb{R}^3$: Es würde genügen, für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^3$ zu definieren: $\mu_3(A) := \mu_n(A \times [0, 1]^{n-3})$.

Es genügt daher zu zeigen, dass das Inhaltsproblem für den $\mathbb{R}^3$ keine Lösung besitzt.

2. Reduktion: Angenommen, das Inhaltsproblem hätte eine Lösung μ_3 für den $\mathbb{R}^3$. Dann hätte auch das Inhaltsproblem für die S^2 eine Lösung: für $A \subset S^2$ bezeichne CA den Kegel über A :

$$CA := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \|x\| \leq 1, x/\|x\| \in A\}.$$

Wir könnten dann nämlich definieren:

$$\mu_{S^2}(A) := \mu_3(CA).$$

Nach Satz 8.5 ist das ausgeschlossen. $\square$

9 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

9.1 Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen

Definition 9.1 — Ein topologischer Raum M heißt lokal euklidisch der Dimension d , wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U und einen Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow U'$ auf eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}^d$ gibt. Eine solche Abbildung heißt eine Karte von M , die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : U' \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M . Eine Familie $A = \{\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i\}$ von Karten ist ein Atlas, wenn die Kartengebiete U_i den Raum M überdecken.

Beispiel 9.2 — Wir konstruieren Karten für die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch stereographische Projektion vom Nordpol $N := (0, 0, 1)$ und vom Südpol $S = (0, 0, -1)$ aus: Die Abbildung $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{1 - z}(x, y)$$

ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

Beide Abbildungen sind stetig, also Homöomorphismen. Demnach ist φ eine Karte in einer Umgebung von $N \in S^2$. Analog ist $\psi : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{1 + z}(x, y)$$

eine Karte in einer Umgebung von S . Zusammen bilden φ und ψ einen Atlas für S^2 . Die Zweisphäre ist lokal euklidisch der Dimension 2.

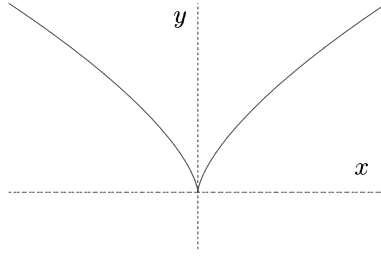
Definition 9.3 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein lokal euklidischer Teilraum der Dimension d und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ heißt $\mathcal{C}^k$ -Karte, wenn die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mal stetig differenzierbar ist und die Ableitung $D\varphi^{-1}(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ in jedem Punkt $p \in U'$ Rang d hat. Ein Atlas aus $\mathcal{C}^k$ -Karten heißt $\mathcal{C}^k$ -Atlas. M ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^k$, oder kurz: eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, wenn es einen $\mathcal{C}^k$ -Atlas gibt.

Beispiel 9.4 — Die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist eine zweidimensionale $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Zum Nachweis verwenden wir die beiden stereographischen Karten aus Beispiel 9.2. Die Ableitung der Parametrisierung $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt (u, v) ist durch

$$D\varphi^{-1}(u, v) = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} -u^2 + v^2 + 1 & -2uv \\ -2uv & u^2 - v^2 + 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese Matrix hat für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ Rang 2. Daher ist φ tatsächlich eine $\mathcal{C}^\infty$ -Karte.

Beispiel 9.5 — Die Neilsche Parabel $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 = x^2\}$ ist lokal euklidisch der Dimension 1, aber keine $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit.



In der Tat ist die Projektion auf die x -Achse $p : N \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$, ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung $p^{-1}(t) = (t, \sqrt{t^2})$. Andererseits ist p^{-1} sicherlich nicht differenzierbar. Es kann aber überhaupt keine C^1 -Karte φ in einer Umgebung von $(0, 0) \in N$ geben: Angenommen, es gäbe eine solche Karte, und $\psi : I \rightarrow N$ wäre die Umkehrabbildung mit einem offenen Intervall I und $\psi(t_0) = (0, 0)$, für einen Punkte $t_0 \in I$. Da $\psi_2(t) \geq 0$ für alle $t \in I$, hat ψ_2 bei t_0 ein lokales Minimum, und es folgt $\psi'_2(t_0) = 0$. Andererseits folgt aus der für alle $t \in I$ gültigen Identität $\psi_2(t)^3 = \psi_1(t)^2$, dass $3\psi_2(t)^2\psi'_2(t) = 2\psi_1(t)\psi'_1(t)$. Es folgt für $t \neq t_0$:

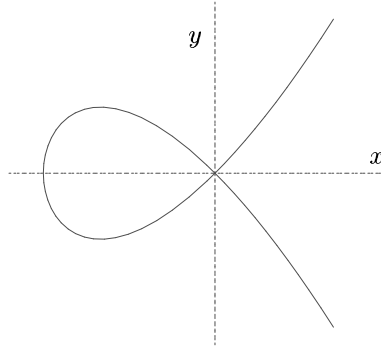
$$\psi'_1(t)^2 = \frac{9\psi_2(t)^4}{4\psi_1(t)^2} \psi'_2(t)^2 = \frac{9}{4} \psi_2(t) \psi'_2(t)^2.$$

Die rechte Seite ist stetig in t und geht für $t \rightarrow t_0$ gegen 0. Damit hat

$$D\psi(t_0) = \begin{pmatrix} \psi'_1(t_0) \\ \psi'_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rang 0, und φ kann keine C^1 -Karte sein.

Beispiel 9.6 — Die singuläre kubische Kurve $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + x^3\}$ ist im Ursprung $(0, 0)$ nicht lokal euklidisch, also erst recht keine Mannigfaltigkeit.



Es sei U eine hinreichend kleine zusammenhängende offene Umgebung von $(0, 0)$ in C . Dann zerfällt $U \setminus \{(0, 0)\}$ in vier Zusammenhangskomponenten. Angenommen, U wäre homöomorph zu einer zusammenhängenden offenen Menge V im $\mathbb{R}^d$, und unter diesem Homöomorphismus würde $(0, 0)$ auf den Punkt $p \in V$ abgebildet. Dann müsste $U \setminus \{(0, 0)\} \approx V \setminus \{p\}$ gelten. Andererseits hat $V \setminus \{p\}$ zwei oder eine Zusammenhangskomponenten je nachdem, ob $d = 1$ oder $d \geq 2$, aber jedenfalls niemals vier Komponenten. Demnach kann es einen solchen Homöomorphismus nicht geben.

Satz 9.7 — Es sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung mit der Eigenschaft, dass in jedem Punkt $p \in M := F^{-1}(0)$ die Ableitung $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Rang m hat. Dann ist M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension $d = n - m$.

Beweis. Es sei $p = (p_1, \dots, p_n) \in M$. Nach Annahme hat die Matrix

$$DF(p) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right)$$

Rang m . Insbesondere gibt es m linear unabhängige Spalten, und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die letzten m Spalten linear unabhängig sind. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann offene Umgebungen U' von $p' := (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$ und U'' von $p'' := (p_{d+1}, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^m$ mit $U' \times U'' \subset W$ und eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung $g : U' \rightarrow U''$ mit der Eigenschaft, dass $M \cap U' \times U'' = \{(q, g(q)) \mid q \in U'\}$. Setzt man also $U := M \cap U' \times U''$, so ist U eine offene Umgebung von p in M und $\varphi : U \rightarrow U'$, $x = (x', x'') \mapsto x'$, ist ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung $\psi : U' \rightarrow U$, $t \mapsto (t, g(t))$, die k -mal stetig differenzierbar ist und die in jedem Punkt $q \in U'$ die Ableitung

$$D\psi(q) = \begin{pmatrix} I_d \\ Dg \end{pmatrix}$$

vom Rang d hat. Das zeigt, dass $\varphi : U \rightarrow U'$ eine $\mathcal{C}^k$ -Karte in einer Umgebung von $p \in M$ ist. Da p beliebig war, ist M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. $\square$

Beispiel 9.8 — Es seien $a_1, \dots, a_n > 0$. Das Ellipsoid

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n} \right)^2 = 1 \right\}$$

ist eine $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$. Die Ableitung der Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_i (x_i/a_i)^2$, ist $DF(x) = (2x_1/a_1^2, \dots, 2x_n/a_n^2)$. Die Ableitung hat nur im Punkt $x = 0$ nicht vollen Rang, aber dieser Punkt gehört sowieso nicht zu E .

Beispiel 9.9 — Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt orthogonal, wenn $A^t A = I_n$. Dies ist äquivalent zu der Forderung, dass $\|Ax\| = \|x\|$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Die orthogonalen Matrizen bilden eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation, die orthogonale Gruppe $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$.

Wir wollen zeigen, dass $O(n)$ eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $\binom{n}{2}$ ist.

Zunächst einmal ist $O(n)$ beschränkt: Ist nämlich A eine orthogonale Matrix, so errechnet sich das Quadrat ihrer euklidischen Norm zu

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} A_{ij}^2 = \text{Sp}(A^t A) = \text{Sp}(I_n) = n.$$

Wir identifizieren den Raum aller $n \times n$ -Matrizen $M_n(\mathbb{R})$ mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ und den Untervektorraum

$$M_n(\mathbb{R})^+ := \{S \in M_n(\mathbb{R}) \mid S^t = S\}$$

mit dem $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$, denn zur Beschreibung einer symmetrischen Matrix genügt die Angabe aller Einträge auf und über der Hauptdiagonale, und diese können frei gewählt werden.

$O(n)$ ist offensichtlich die Menge der Nullstellen der C^∞ -Abbildung

$$F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})^+, \quad A \mapsto A^t A - I_n.$$

Insbesondere ist $O(n)$ also eine abgeschlossene Teilmenge und wegen der schon bewiesenen Beschränktheit kompakt.

Die Richtungsableitung von F im Punkt $A \in O(n)$ in Richtung B ist

$$DF(A)(B) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(A + \varepsilon B) \right|_{\varepsilon=0} = A^t B + B^t A.$$

Um den Satz anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass $DF(A) : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})^+$ surjektiv ist. Das ist leicht: Ist $S \in M_n(\mathbb{R})^+$ vorgegeben, so wähle $B := \frac{1}{2}AS$. Mit diesem B folgt $DF(A)(B) = A^t B + B^t A = \frac{1}{2}(S + S^t) = S$. Mit Satz 9.7 folgt die Behauptung.

Satz 9.10 (Begradigungslemma) — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit und $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ eine C^k -Karte auf einer offenen Umgebung U eines Punktes $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ mit $W \cap M \subset U$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : W \rightarrow W'$ auf eine offene Menge $W' \subset U' \times \mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass $\Phi(x) = (\varphi(x), 0)$ für alle $x \in W \cap M$.

Beweis. Es sei $\psi := \varphi^{-1} : U' \rightarrow U$ die lokale Parametrisierung zur Karte φ und $p' := \varphi(p) \in U'$. Nach Voraussetzung hat die lineare Abbildung $D\psi(p') : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ Rang d . Wir können also Vektoren $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^n$ so wählen, dass sie zusammen mit $\text{Im}(D\psi(p'))$ den $\mathbb{R}^n$ aufspannen. Wir definieren eine Abbildung

$$\Psi : U' \times \mathbb{R}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$\Psi(y, z_1, \dots, z_d) := \psi(y) + z_1 v_1 + \dots + z_d v_d.$$

Diese Abbildung ist k -mal stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$D\Psi(q, 0) = (D\psi(q) \mid v_1 \dots v_d).$$

Nach Wahl der Vektoren $v_1, \dots, v_d$ hat $D\Psi(q, 0)$ Rang n , und nach dem Satz über lokal umkehrbare Abbildungen ist $D\Psi$ ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung W' von $(q, 0)$ in $U' \times \mathbb{R}^{n-d}$ auf eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$. Durch Verkleinern von W und W' können wir erreichen, dass $W \cap M \subset U$. Wir setzen noch $\Phi := \Psi^{-1} : W \rightarrow W'$. Für Punkte $x \in U \cap W$ gilt nun: $\Psi((\varphi(x), 0)) = \psi(\varphi(x)) = x$, also umgekehrt $\Phi(x) = (\varphi(x), 0)$. $\square$

Satz 9.11 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen über eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind äquivalent:

1. Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ und eine C^k -Abbildung $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$.

2. Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p in M und eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ derart, dass $f \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung ist.

3. Für jede $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ von M ist $f \circ \varphi^{-1}$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung.

Beweis. $3 \Rightarrow 2$: trivial.

$2 \Rightarrow 1$: Es sei $p \in M$ vorgegeben und $\varphi : U \rightarrow U'$ eine $\mathcal{C}^k$ -Karte auf einer Umgebung U von p in M derart, dass $f \circ \varphi^{-1}$ k -mal stetig differenzierbar ist. Nach dem Begradigungslemma existiert eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ mit $W \cap M \subset U$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : W \rightarrow W'$ auf eine offene Menge $W' \subset U' \times \mathbb{R}^{n-d}$ mit $\Phi(x) = (\varphi(x), 0)$. Definiere $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $F := (f \circ \varphi^{-1}) \circ \text{pr}_1 \circ \Phi$. Dabei bezeichnet $\text{pr}_1 : W' \subset U' \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow U'$ die Projektion auf den ersten Faktor. Die Abbildungen Φ , pr_1 und $f \circ \varphi^{-1}$ sind $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen, und somit F auch. Außerdem gilt für $x \in W \cap M$: $\Phi(x) = (\varphi(x), 0)$ also $\text{pr}_1(\Phi(x)) = \varphi(x)$ und $F(x) = f(x)$.

$1 \Rightarrow 3$: Es sei $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ eine beliebige $\mathcal{C}^k$ -Karte von M und $p \in U$ ein beliebiger Punkt. Nach Voraussetzung existiert eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ und eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$. Die Mengen $V = U \cap W$ und $V' := \varphi(V)$ sind offene Umgebungen von p in M und $\varphi(p)$ in U' . Außerdem gilt $f \circ \varphi^{-1}|_{V'} = F \circ \varphi^{-1}|_{V'}$. Die rechte Seite ist k -mal stetig differenzierbar, also auch die linke. Da p beliebig war, ist $f \circ \varphi^{-1}$ auf ganz U' k -mal stetig differenzierbar. $\square$

Definition 9.12 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

1. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt k -mal stetig differenzierbar, kurz: eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung, wenn die äquivalenten Bedingungen aus Satz 9.11 erfüllt sind.
2. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ in eine Mannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^m$ heißt k -mal stetig differenzierbar, wenn dies für die zusammengesetzte Abbildung $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{i} \mathbb{R}^m$ gilt.

Bemerkungen 9.13 — 1. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, so ist der Begriff der differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ identisch mit dem früheren.

2. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, so ist jede $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung.

Folgerung 9.14 — Es seien $f : M \rightarrow M'$ und $g : M' \rightarrow M''$ k -mal stetig differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch die Komposition $g \circ f : M \rightarrow M''$ eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung.

Beweis. Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$, $M' \subset \mathbb{R}^{n'}$ und $M'' \subset \mathbb{R}^{n''}$ Mannigfaltigkeiten. Zu $p \in M$ und $p' := f(p)$ gibt es offene Umgebungen $W \subset \mathbb{R}^n$ und $W' \subset \mathbb{R}^{n'}$ und $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ und $G : W' \rightarrow \mathbb{R}^{n''}$ mit

$$F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}, \quad \text{und} \quad G|_{W' \cap M'} = g|_{W' \cap M'}.$$

Durch Verkleinern von W können wir erreichen, dass $F(W) \subset W'$. Dann ist $G \circ F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n''}$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung, deren Einschränkung auf $W \cap M$ mit $g \circ f$ übereinstimmt. Da $p \in M$ beliebig war, ist $g \circ f$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung. $\square$

Beispiel 9.15 (Kartenwechselabbildungen) — Es seien $\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i$, $i = 1, 2$ zwei $\mathcal{C}^k$ -Karten für eine Mannigfaltigkeit M . Weiter sei $U_{ij} := U_i \cap U_j$. Die Abbildung

$$\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_{ij}) \longrightarrow \varphi_i(U_{ij})$$

heißt Kartenwechselabbildung. Gemäß Folgerung 9.14 ist die Abbildung φ_{ij} k -mal stetig differenzierbar.

Ist $A = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ ein Atlas von M , so bekommen wir für jedes Paar i, j eine Kartenwechselabbildung. (Die Abbildung ist leer, falls $U_i \cap U_j = \emptyset$.) Dabei gilt $\varphi_{ii} = \text{id}_{U'_i}$ und $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$ für $i \neq j$. Schließlich gilt für drei verschiedene Indizes i, j und k auf der offenen Menge $\varphi_k(U_i \cap U_j \cap U_k) \subset U'_k$ die sogenannte Kozykel- oder Verklebebedingung

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}.$$

Definition 9.16 — Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ von Mannigfaltigkeiten heißt $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen sind.

Bemerkung 9.17 — Die folgende Frage ist bis heute offen:

Es sei M eine vierdimensionale $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit, die homöomorph zur S^4 ist. Ist dann M auch diffeomorph zur S^4 ?

Die Antwort auf die entsprechende Frage für die Dimensionen 1, 2, 3 und 5, 6 lautet ja. Milnor und Kervaire haben aber gezeigt, dass es 15 paarweise nicht diffeomorphe sieben dimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, die alle homöomorph zur S^7 sind. Nimmt man noch Orientierungen hinzu (siehe Kapitel 12), so gibt es insgesamt 28 sieben dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten, die paarweise nicht orientierungserhaltend diffeomorph sind. Auf dieser Menge kann man eine Verknüpfung definieren: Die verbundene Summe zweier Mannigfaltigkeiten $M \sharp M'$ entsteht dadurch, dass man aus M und M' jeweils einen Punkt herausnimmt und den Rest entlang der entstandenen offenen Ränder zusammenklebt. Mit dieser Verknüpfung bilden die 28 Mannigfaltigkeiten eine zyklische Gruppe. Milnor hat für seine Arbeiten 1962 die Fields-Medaille bekommen.

9.2 Tangentialräume

Alle Mannigfaltigkeiten in diesem Abschnitt sind $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$, alle Karten, Atlanten und differenzierbaren Abbildungen sind $\mathcal{C}^k$ -Karten etc., sofern nichts anderes ausdrücklich vermerkt ist.

Definition 9.18 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt p , wenn es ein offenes Intervall I und eine differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow M$ mit $c(t_0) = p$ und $c'(t_0) = v$ für ein $t_0 \in I$ gibt. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p wird mit $T_p M$ bezeichnet und heißt der Tangentialraum an M in p .

Satz 9.19 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

1. Es sei $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ eine Karte auf einer Umgebung U von p in M . Dann gilt $T_p M = \text{im}(D\varphi^{-1}(\varphi(p)) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n)$.
2. Es sei W eine offene Umgebung von p in $\mathbb{R}^n$ und $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung derart, dass $DF(p)$ Rang m hat und $W \cap M = F^{-1}(0)$. Dann gilt $T_p M = \ker(DF(p))$.

Insbesondere ist $T_p M$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension d .

Beweis. Es sei $p \in M$ ein beliebiger Punkt.

1. Es sei U eine offene Umgebung von p in M und $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ eine Karte von M mit $p' := \varphi(p)$. Ist $w \in \mathbb{R}^d$ ein beliebiger Vektor, so ist für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Kurve $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U'$, $t \mapsto p' + tw$, definiert, und es gilt $\tilde{c}(0) = p'$ und $\tilde{c}'(0) = w$. Für die Kurve $c := \varphi^{-1} \circ \tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ folgt $c(0) = \varphi^{-1}(p') = p$ und $c'(0) = D\varphi^{-1}(w)$. Insbesondere ist jeder Vektor des Untervektorraums $D\varphi^{-1}(p')(\mathbb{R}^d)$ ein Tangentialvektor. Deshalb besteht die Inklusion $\text{Im}(D\varphi^{-1}(p')) \subset T_p M$.

2. Es sei W eine offene Umgebung von p im $\mathbb{R}^n$ und $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = n - d$ eine differenzierbare Abbildung mit $M \cap W = F^{-1}(0)$ und $\text{Rang} DF(p) = m$. Dann ist für jede Kurve $c : I \rightarrow M \cap W$ die Komposition $F \circ c$ eine konstante Abbildung und hat verschwindende Ableitung. Nach der Kettenregel heißt das $DF(c(t))(c'(t)) = 0$. Ist $t_0 \in I$ ein Punkt mit $c(t_0) = p$, so folgt $c'(t_0) \in \ker(DF(p))$. Daher gilt $T_p M \subset \ker(DF(p))$.

3. Nimmt man die bisher bewiesenen Aussagen zusammen, so bestehen die Inklusionen

$$\text{im}(D\varphi^{-1}(p')) \subset T_p M \subset \ker(DF(p)).$$

Aber die Vektorräume links und rechts haben beide die Dimension d . Deshalb muss bei beiden Inklusionen Gleichheit bestehen. $\square$

Beispiel 9.20 — Der Tangentialraum an die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ an einen Einheitsvektor $v \in S^{n-1}$ ist

$$T_v S^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \perp v\}.$$

Beispiel 9.21 — Wir hatten die orthogonale Gruppe $O(n)$ als Nullstellengebilde der C^∞ -Abbildung $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})^n$, $A \mapsto A^t A - I_n$, dargestellt. Die Ableitung von F war

$$DF(A) : B \mapsto A^t B + B^t A.$$

Das heißt

$$T_A O(n) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t B + B^t A = 0\}.$$

Insbesondere besteht der Tangentialraum

$$T_{I_n} O(n) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^t = -B\}$$

an das Neutralelement $I_n \in O(n)$ genau aus den schiefsymmetrischen Matrizen.

Satz und Definition 9.22 — Es sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ferner sei $p \in M$ ein Punkt und $v \in T_p(M)$ ein Tangentialvektor an M in p . Es sei $c : I \rightarrow M$ eine

Kurve mit $c(t_0) = p$, $c'(t_0) = v$, für ein $t_0 \in I$. Dann hängt der Tangentialvektor $(f \circ c)'(t_0) \in T_{f(p)}N$ nicht von der Wahl von c ab. Die Abbildung $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$, $v \mapsto (f \circ c)'(t_0)$, ist linear.

Beweis. Es seien also $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Wir wählen zu $p \in M$ eine offene Umgebung W in $\mathbb{R}^m$, auf der es eine differenzierbare Fortsetzung $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $f|_{W \cap M}$ gibt. Wenn wir das Definitionsintervall von c etwas verkleinern, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $c(I) \subset W$. Darum gilt $F \circ c = f \circ c$, und mit der Kettenregel folgt:

$$(f \circ c)'(t_0) = (F \circ c)'(t_0) = DF(p)c'(t_0) = DF(p)(v).$$

Die linke Seite hängt nur von c ab, die rechte Seite nur von F . Daher ist der gesamte Ausdruck sowohl von c wie von F unabhängig und vollständig durch f bestimmt. Damit ist erstens $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$ wohldefiniert, und zweitens gilt $T_p f = DF(p)|_{T_p M}$. Daher ist $T_p f$ eine lineare Abbildung. $\square$

Folgerung 9.23 (Kettenregel) — Sind $f : M \rightarrow M'$ und $g : M' \rightarrow M''$ differenzierbare Abbildungen, so gilt für jeden Punkt $p \in M$ die Kettenregel:

$$T_{f(p)}g \circ T_p f = T_p(g \circ f).$$

Beweis. Es sei $w \in T_p M$ ein Tangentialvektor und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(t) = p$ und $c'(t) = w$ für ein $t \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_p(g \circ f)(w) &= (g \circ f \circ c)'(t) \quad \text{nach Definition von } T_p(g \circ f) \\ &= T_{f(p)}g((f \circ c)'(t)) \quad \text{nach Definition von } T_{f(p)}g \\ &= T_{f(p)}g(T_p f(c'(t))) \quad \text{nach Definition von } T_p f \\ &= (T_{f(p)}g \circ T_p f)(w) \end{aligned}$$

$\square$

Satz 9.24 (Satz über reguläre Abbildungen) — Es sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Ist in einem Punkt $p \in M$ die Abbildung $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$ ein Vektorraumisomorphismus, so gibt es Umgebungen $\tilde{U} \subset M$ und $\tilde{V} \subset N$ von p bzw. $f(p)$ derart, dass $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Es seien $\varphi : U \rightarrow U'$ und $\psi : V \rightarrow V'$ Karten in Umgebungen U von p in M und V von $f(p)$ in N . Durch Verkleinern von U (und U') kann man erreichen, dass $f(U) \subset V$. Die Abbildung $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow V'$ ist differenzierbar und hat in $p' = \varphi(p)$ die Ableitung

$$T_{p'}g = T_{f(p)}\psi \circ T_p f \circ (T_p \varphi)^{-1}.$$

Nach Voraussetzung ist dies ein Vektorraumisomorphismus. Nach dem Satz über lokale Diffeomorphismen aus der Analysis II gibt es Umgebungen U'' von p in U' und V'' von p' in V' derart, dass $g|_{U''} : U'' \rightarrow V''$ ein Diffeomorphismus ist. Setzt man $\tilde{U} := \varphi^{-1}(U'')$ und $\tilde{V} := \psi^{-1}(V'')$, so folgt die Behauptung. $\square$

Definition 9.25 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k -Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Menge. Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X(p) \in T_p M$. Ein Vektorfeld heißt stetig bzw. differenzierbar von der Klasse C^ℓ , $\ell \leq k - 1$, wenn die Abbildung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^ℓ -Abbildung ist.

Beispiel 9.26 — Die Abbildung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (-y, x)^t$, ist ein globales C^∞ -Vektorfeld ohne Nullstellen. Das geht allgemeiner für eine beliebige Sphäre von ungerader Dimension:

$$X : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, (x_1, \dots, x_{2n}) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots)^t.$$

Das Vektorfeld $X_1 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-y, x, 0)^t$ hat Nullstellen am Nordpol und am Südpol. Das Vektorfeld $X_2 : (x, y, z) \mapsto (-zx, -zy, z^2 - 1)^t$ hat ebenfalls Nullstellen am Nordpol und Südpol. Wir konstruieren ein Vektorfeld mit nur einer Nullstelle am Nordpol wie folgt: Stereographische Projektion vom Nordpol ist ein Diffeomorphismus

$$\varphi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \frac{1}{1-z}(x, y).$$

Die Umkehrabbildung ist nach früherer Rechnung durch

$$\psi : (u, v) \mapsto \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)$$

gegeben. Das Differential von ψ im Punkt $(u, v) = \varphi(x, y, z)$ lautet

$$\begin{aligned} D\psi(\varphi(x, y, z)) &= \frac{2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} \begin{pmatrix} -u^2 + v^2 + 1 & -2uv \\ -2uv & u^2 - v^2 + 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2z - 2x^2 & -2xy \\ -2xy & 2 - 2z - 2y^2 \\ 2x(1-z) & 2y(1-z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das konstante Vektorfeld $Y(p) = (1, 0)^t$ für $p \in \mathbb{R}^2$ liefert also ein Vektorfeld

$$X_3(x, y, z) := D\psi(\varphi(x, y, z))(Y(\varphi(x, y, z))) = \begin{pmatrix} 2 - 2z - 2x^2 \\ -2xy \\ 2x(1-z) \end{pmatrix}.$$

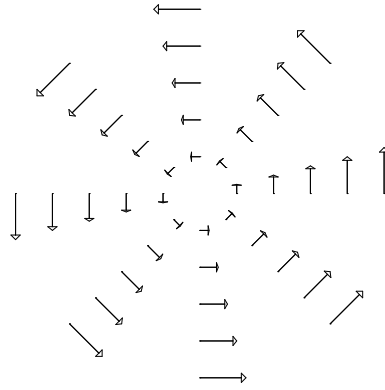
Man vergewissert sich durch eine Probe, dass $X_2(x, y, z) \perp (x, y, z)^t$, so dass X_3 tatsächlich ein Vektorfeld auf der Sphäre ist. Wir wollen die obigen Vektorfelder X_1, X_2 und X_3 in der Nähe ihrer Nullstelle am Nordpol betrachten. Dazu wechseln wir in eine am Nordpol definierte Karte, z.B. Projektion auf die xy -Ebene $\text{pr} = \text{pr}_{xy} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Umkehrabbildung $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. In dieser Karte sind die Vektorfelder wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(x, y) &= (-y, x)^t \\ \tilde{X}_2(x, y) &= (-x\sqrt{1 - x^2 - y^2}, -y\sqrt{1 - x^2 - y^2})^t \\ \tilde{X}_3(x, y) &= (2 - 2x^2 - 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}, -2xy)^t \end{aligned}$$

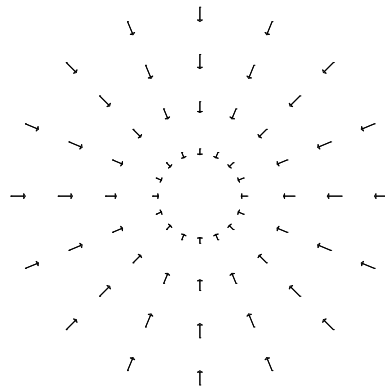
Allgemeiner muss jedes Vektorfeld auf einer Sphäre von gerader Dimension mindestens eine Nullstelle haben. Das ist aber nicht ganz so einfach zu beweisen.

Die Vektorfelder aus Beispiel 9.26

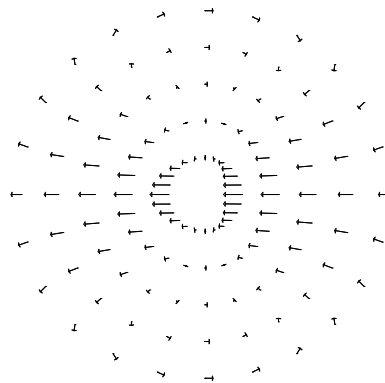
$$\tilde{X}_1(x, y) = (-y, x)^t$$



$$\tilde{X}_2(x, y) = (-x\sqrt{1-x^2-y^2}, -y\sqrt{1-x^2-y^2})^t$$



$$\tilde{X}_3(x, y) = (2 - 2x^2 - 2\sqrt{1-x^2-y^2}, -2xy)^t$$



9.3 Teilung der Eins

Definition 9.27 — Es sei X ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Dann heißt die abgeschlossene Menge

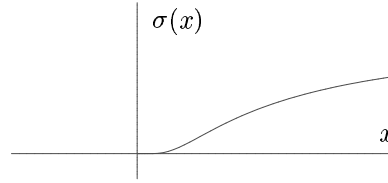
$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von f .

Die Funktion

$$\sigma(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \text{ falls } x > 0, \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

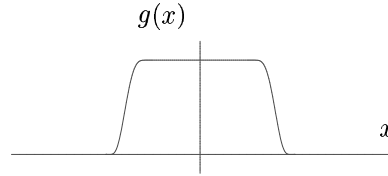
ist, wie wir früher gesehen haben, eine $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion.



Dasselbe gilt dann für die Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$g(x) := \frac{\sigma(1 - \|x\|^2)}{\sigma(1 - \|x\|^2) + \sigma(\|x\|^2 - 1/4)}$$

definiert ist.



Diese „Hut“-Funktion hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $0 \leq g(x) \leq 1$.
2. $g(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq 1/2$.
3. $\text{supp}(g) = B_1(0)$.

Definition 9.28 — Es sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\{Y_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen $Y_i \subset X$ heißt lokal endlich, wenn es zu jedem $p \in X$ eine offene Umgebung U gibt derart, dass $\{i \in I \mid Y_i \cap U \neq \emptyset\}$ eine endliche Menge ist.

Lemma 9.29 — Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, und $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $K \subset \bigcup_{i \in I} V_i$. Dann gibt es $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\psi_i = 0$ bis auf höchstens endlich viele $i \in I$.
2. $\text{supp}(\psi_i)$ ist kompakt und liegt in V_i .
3. $\sum_i \psi_i|_K > 0$.

Beweis. Zu jedem Punkt $p \in K$ existiert ein Index $i(p) \in I$ mit $p \in V_{i(p)}$ und ein Radius $r(p) > 0$ mit $U_{2r(p)}(p) \subset V_{i(p)}$. Die Mengen $U_{r(p)/2}(p)$, $p \in K$, bilden eine offene Überdeckung von K . Da K nach Voraussetzung kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_\ell \in K$ derart, dass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} U_{r(p_i)/2}(p_i).$$

Es sei $g_j(y) := g((y - p_j)/r(p_j))$ für $j = 1, \dots, \ell$. Dann ist $\text{supp}(g_j)$ kompakt und in $V_{i(p_j)}$ enthalten, und es gilt $\sum_j g_j|_K > 0$. Setze nun

$$\psi_i := \sum_{j \text{ mit } i(p_j)=i} g_j.$$

□

Satz 9.30 — *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M durch offene Mengen $U_i \subset M$. Dann gibt es C^k -Funktionen $\lambda_i : M \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\text{supp}(\lambda_i) \subset U_i$.
2. Die Familie $\{\text{supp}(\lambda_i)\}_{i \in I}$ ist lokal endlich.
3. $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

Definition 9.31 — Eine Familie $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ mit den Eigenschaften 1.–3. des Satzes heißt eine der Überdeckung $\mathfrak{U}$ untergeordnete Teilung der Eins auf M .

Beweis des Satzes. 1. Fall: M ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$.
Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_k := \left\{ y \in M \mid \|y\| \leq k, \ d(y, \mathbb{R}^n \setminus M) \geq \frac{1}{k} \right\}$$

und davon abgeleitet die kompakten Mengen

$$A_1 := M_1, \quad A_k := M_k \setminus M_{k-1}^\circ \text{ für } k \geq 1,$$

und die offenen Mengen

$$V_1 := M_2^\circ, \quad V_2 := M_3^\circ, \quad V_k := M_{k+1}^\circ \setminus M_{k-2}, \text{ für } k \geq 3.$$

Nach Konstruktion gilt

1. $A_k \subset V_k$,
2. $\bigcup_k A_k = M$, und
3. $V_k \cap V_\ell = \emptyset$, falls $|k - \ell| \geq 3$.

Für jedes k bilden die offenen Mengen $U_i \cap V_k$, $i \in I$ eine Überdeckung von A_k . Wir wenden Lemma 9.29 auf diese Situation an und finden eine Familie $\{g_{k,i}\}_{i \in I}$ von C^∞ -Funktionen $g_{k,i} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit kompaktem Träger in $U_i \cap V_k$, die (bei festem k) bis auf endlich viele i alle Null sind, und für die gilt

$$\sum_i g_{k,i}|_{A_k} > 0.$$

Bei festem ℓ hat V_k nur für $\ell-2 \leq k \leq \ell+2$ nichttrivialen Schnitt mit V_ℓ . Deshalb haben nur endliche viele Mengen $\text{supp}(g_{k,i})$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in I$, einen nichttrivialen Schnitt mit V_ℓ . Das bedeutet, dass die Familie $\{g_{k,i}\}_{(k,i) \in \mathbb{N} \times I}$ lokal endlich auf M ist. Deshalb ist

$$g_i := \sum_k g_{k,i}$$

eine wohldefinierte C^∞ -Funktion mit Träger in U_i . Ebenso ist $g := \sum_i g_i$ eine wohldefinierte C^∞ -Funktion, und es gilt $g|_{A_k} > 0$ für alle k , also auch $g > 0$ auf ganz M . Definiere nun

$$\lambda_i := \frac{g_i}{g}.$$

2. Fall: M wie im Satz. Zu jedem $i \in I$ gibt es nach Definition der Teilraumtopologie auf M eine offene Menge $V_i \subset \mathbb{R}^n$ mit $V_i \cap M = U_i$. Es sei $\{\psi_i\}_{i \in I}$ eine der Familie $\mathfrak{V} := \{V_i\}_{i \in I}$ untergeordnete Teilung der Eins, die gemäß dem gerade behandelten Fall existiert. Wir definieren dann $\lambda_i := \psi_i|_M$ und sind fertig. $\square$

Folgerung 9.32 — *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $A \subset U$. Dann existiert eine C^∞ -Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit $g|_A = 1$ und $\text{supp}(g) \subset U$.*

Beweis. Die Mengen $\{U, \mathbb{R}^n \setminus A\}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$. Es sei $\{g, h\}$ die zugehörige untergeordnete Teilung der Eins. Das bedeutet: $\text{supp}(g) \subset U$ und $\text{supp}(h) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Insbesondere ist $h|_A = 0$. Da $g + h = 1$, folgt $g|_A = 1$. $\square$

10 Äußere Algebra

10.1 Alternierende Formen

In diesem Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik 0, zum Beispiel $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 10.1 — Es seien V und W K -Vektorräume und $p \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : V^p = V \times \dots \times V \longrightarrow W$ heißt p -fach multilinear, wenn für jedes $i = 1, \dots, p$ und alle $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p \in V$ die Abbildung

$$V \longrightarrow W, \quad v \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_p)$$

linear ist.

Definition 10.2 — Eine p -fach multilineare Abbildung $f : V^p \rightarrow W$ heißt alternierend, wenn für jede Permutation $\pi \in S_p$ und $v_1, \dots, v_p \in V$ gilt

$$f(v_1, \dots, v_p) = \operatorname{sgn}(\pi) f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}).$$

Satz 10.3 — Die folgenden Aussagen über eine multilineare Abbildung $f : V^p \rightarrow W$ sind äquivalent:

1. f ist alternierend.
2. Für jede Transposition $\tau = (i j) \in S_p$ und beliebige $v_1, \dots, v_p \in V$ gilt $f(v_1, \dots, v_p) = -f(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)})$.
3. Sind $v_1, \dots, v_p \in V$ Vektoren mit $v_i = v_j$ für zwei Indizes $i \neq j$, so gilt $f(v_1, \dots, v_p) = 0$.
4. Sind $v_1, \dots, v_p \in V$ linear abhängige Vektoren, so gilt $f(v_1, \dots, v_p) = 0$.

Beweis. 1 $\Rightarrow$ 2, denn 2 ist nur ein Spezialfall von 1.

2 $\Rightarrow$ 1, denn jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen.

2 $\Rightarrow$ 3: Es gelte $v_i = v_j$ mit $i \neq j$. Bezeichnet τ die Transposition $(i j)$, so erhält man

$$-f(v_1, \dots, v_p) = f(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) = f(v_1, \dots, v_p),$$

was nur möglich ist, wenn $f(v_1, \dots, v_p) = 0$.

3 $\Rightarrow$ 2: Zur Abkürzung sei $g(v_i, v_j) := f(v_1, \dots, v_p)$ mit festen Vektoren v_k für $k \neq i, j$. Wegen der Multilinearität von f gilt

$$g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w) = g(v, w) + g(w, v).$$

Nach Voraussetzung verschwinden die Terme auf der linken Seite, und es folgt $g(v, w) = -g(w, v)$, was zu zeigen war.

4 $\Rightarrow$ 3, denn 3 ist ein Spezialfall von 4.

3 $\Rightarrow$ 4: Es seien $v_1, \dots, v_p$ linear abhängig. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$, die nicht alle verschwinden, mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$. Ohne Einschränkung ist $\lambda_1 \neq 0$ und daher $v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_p v_p$ mit $\mu_i = -\lambda_i / \lambda_1$. Wegen der Multilinearität von f folgt:

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{j=2}^p \mu_j f(v_j, v_2, \dots, v_p).$$

In jedem Summanden der rechten Seite sind zwei der Einträge von f gleich. Nach Voraussetzung ist dieser Summand Null und somit auch die ganze Summe. $\square$

Bezeichnungen 10.4 — Eine alternierende Abbildung $f : V^p \rightarrow K$ heißt alternierende Form der Stufe p , oder kurz: eine alternierende p -Form auf V . Es sei

$$\Lambda^p V^* := \{f : V^p \rightarrow K \mid f \text{ ist } p\text{-fach multilinear und alternierend}\}$$

für $p \in \mathbb{N}$ und $\Lambda^0 V^* := K$. Es ist klar, dass skalare Vielfache und Summen von alternierenden p -Formen wieder alternierende p -Formen sind. Mit anderen Worten: $\Lambda^p V^*$ ist ein K -Vektorraum. Außerdem ist $\Lambda^1 V^* = \text{Hom}_K(V, K) = V^*$ der Dualraum von V .

Folgerung 10.5 — Es gilt $\Lambda^p V^* = 0$ für alle $p > \dim(V)$.

Beweis. Es sei $f \in \Lambda^p V^*$, und $v_1, \dots, v_p \in V$. Ist $p > \dim(V)$, so sind $v_1, \dots, v_p$ linear abhängig, und nach dem Satz folgt $f(v_1, \dots, v_p) = 0$. $\square$

Satz 10.6 — 1. Es seien $\psi_1, \dots, \psi_p \in V^*$. Durch

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p(v_1, \dots, v_p) := \det\left((\psi_i(v_j))_{i,j}\right)$$

wird eine p -Form $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p$ auf V definiert.

2. Die Abbildung

$$V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \Lambda^p V^*, \quad (\psi_1, \dots, \psi_p) \mapsto \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p$$

ist multilinear und alternierend.

Beweis. Die beiden Aussagen folgen daraus, dass die Determinante multilinear und alternierend als Funktion der Spalten bzw. der Zeilen ist. $\square$

Im folgenden sei nun V ein Vektorraum der Dimension d . Weiter sei $e_1, \dots, e_d$ eine Basis von V und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ die duale Basis von V^* , d.h. $\epsilon_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Wir numerieren Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset [n] := \{1, \dots, d\}$ stets so, dass $i_1 < \dots < i_p$, und definieren

$$\epsilon_I := \epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_p} \in \Lambda^p V^*.$$

Im Falle $I = \emptyset$ setzen wir $\epsilon_\emptyset := 1 \in K = \Lambda^0 V^*$.

Satz 10.7 — Die Elemente ϵ_I mit $I \subset \{1, \dots, d\}$, $|I| = p$, bilden eine Basis von $\Lambda^p V^*$ für alle $p \in \{0, \dots, d\}$. Insbesondere ist

$$\dim(\Lambda^p V^*) = \binom{\dim V}{p}$$

für alle $p \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sind $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ und $J := \{j_1, \dots, j_p\}$ Teilmengen von $\{1, \dots, d\}$ mit $i_1 < \dots < i_p$ und $j_1 < \dots < j_p$, so gilt $\epsilon_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 1$, falls $I = J$, und $= 0$, falls $I \neq J$.

Es sei nun $f \in \Lambda^p V^*$ eine beliebige alternierende p -Form auf V , $p = 1, \dots, d$. Sind Vektoren $v_1, \dots, v_p \in V$ gegeben, so können wir diese nach der Basis $e_1, \dots, e_d$ entwickeln:

$$v_i = \sum_{j=1}^d a_{ji} e_j,$$

mit einer $d \times p$ -Matrix $A = (a_{ji})$. Aus der Multilinearität von f folgt

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{j_1=1}^d \cdots \sum_{j_p=1}^d a_{j_1,1} \cdots a_{j_p,p} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}).$$

Der Faktor $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ ist höchstens dann von Null verschieden, wenn die $j_1, \dots, j_p$ paarweise verschieden sind. Es genügt also, die Summation über alle Teilmengen $J = \{j_1, \dots, j_p\}$, $j_1 < \dots < j_p$, und alle möglichen Anordnungen dieser Indizes laufen zu lassen. Das zeigt:

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{J=\{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, d\}} \left(\sum_{\pi \in S_p} \text{sgn}(\pi) a_{j_{\pi(1)},1} \cdots a_{j_{\pi(p)},p} \right) f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}).$$

Setzt man

$$f_J := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \in K \quad (10.1)$$

und $A_J := \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn}(\pi) a_{j_{\pi(1)},1} \cdots a_{j_{\pi(p)},p}$, so heißt das etwas kürzer

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{J=\{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, d\}} A_J f_J.$$

Berechnet man auf diese Weise $\epsilon_I(v_1, \dots, v_p)$, so erhält man

$$\epsilon_I(v_1, \dots, v_p) = \sum_{|J|=p} A_J \epsilon_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = A_I.$$

Hieraus folgt

$$f = \sum_{|J|=p} f_J \epsilon_J.$$

Demnach bilden die Vektoren ϵ_J , $|J| = p$, ein Erzeugersystem von $\{1, \dots, d\}$. Da andererseits die Koeffizienten f_J wegen (10.1) eindeutig bestimmt sind, bilden die ϵ_J tatsächlich eine Basis. $\square$

10.2 Das äußere Produkt (Dachprodukt)

Es sei V ein K -Vektorraum und $p, q \in \mathbb{N}$. Ferner $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$.

Lemma 10.8 — Es seien $\psi \in \Lambda^p V^*$ und $\omega \in \Lambda^q V^*$ alternierende Formen auf V . Dann ist die Abbildung $\psi \wedge \omega : V^{p+q} \rightarrow K$ mit

$$\begin{aligned} (\psi \wedge \omega)(v_1, \dots, v_{p+q}) & \\ &:= \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi) \psi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \omega(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}) \end{aligned} \quad (10.2)$$

eine alternierende $(p+q)$ -Form auf V .

Beweis. $\psi \wedge \omega$ ist alternierend: Für $\sigma \in S_{p+q}$ gilt

$$\begin{aligned} \psi \wedge \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) & \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi) \psi(v_{\sigma\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p)}) \omega(v_{\sigma\pi(p+1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p+q)}) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{p!q!} \sum_{\sigma\pi \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma\pi) \psi(v_{\sigma\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p)}) \omega(v_{\sigma\pi(p+1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p+q)}) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi) \psi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \omega(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma) \psi \wedge \omega(v_1, \dots, v_{p+q}). \end{aligned}$$

□

Definition 10.9 — Die bilineare Abbildung

$$\wedge : \Lambda^p V^* \times \Lambda^q V^* \longrightarrow \Lambda^{p+q} V^*$$

heißt äußeres Produkt oder Dachprodukt. Falls $p = 0$ oder $q = 0$ wird das äußere Produkt einfach als skalare Multiplikation erklärt.

Im folgenden sei $S'_p \subset S_{p+q}$ die Untergruppe der Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, p\} \subset \{1, \dots, p+q\}$ und $S''_q \subset S_{p+q}$ die Untergruppe der Permutationen der Zahlen $\{p+1, \dots, p+q\}$. Offensichtlich vertauschen alle Permutationen aus S'_p mit allen Permutationen aus S''_q . Schließlich brauchen wir noch die Menge

$$M := \{\pi \in S_{p+q} \mid \pi(1) < \dots < \pi(p), \pi(p+1) < \dots < \pi(p+q)\}$$

aller Permutationen, die auf den Teilmengen $1, \dots, p$ und $p+1, \dots, p+q$ streng monoton wachsend sind. Jede Permutation $\pi \in S_{p+q}$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Form

$$\pi = \mu \circ \sigma \circ \rho \quad (10.3)$$

mit $\mu \in M$, $\sigma \in S'_p$ und $\rho \in S''_q$ schreiben.

Lemma 10.10 — Für $\psi \in \Lambda^p V^*$ und $\omega \in \Lambda^q V^*$ sowie $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$ gilt

$$\psi \wedge \omega(v_1, \dots, v_{p+q}) := \sum_{\mu \in M} \operatorname{sgn}(\mu) \psi(v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(p)}) \omega(v_{\mu(p+1)}, \dots, v_{\mu(p+q)}).$$

Beweis. Wir zerlegen in (10.2) die Permutation π gemäß (10.3) und summieren getrennt. Das ergibt

$$\psi \wedge \omega(v_1, \dots, v_p) = \sum_{\mu \in M} \text{sgn}(\mu) A_\mu B_\mu$$

mit

$$A_\mu = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S'_p} \text{sgn}(\sigma) \psi(v_{\mu\sigma(1)}, \dots, v_{\mu\sigma(p)})$$

und

$$B_\mu = \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S''_q} \text{sgn}(\rho) \psi(v_{\mu\rho(p+1)}, \dots, v_{\mu\rho(p+q)}).$$

Weil ψ und ω alternierende Formen sind, ist $A_\mu = \psi(v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(p)})$ und $B_\mu = \omega(v_{\mu(p+1)}, \dots, v_{\mu(p+q)})$. Das genügt. $\square$

Lemma 10.11 — Für $\varphi_1, \dots, \varphi_{p+q} \in V^*$ gilt

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p) \wedge (\varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \varphi_{p+q}) = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{p+q}.$$

Beweis. Nach Definition ist die rechte Seite, ausgewertet auf den Vektoren $v_1, \dots, v_{p+q}$, durch den Ausdruck

$$A := \sum_{\pi \in S_{p+q}} \text{sgn}(\pi) \varphi_1(v_{\pi(1)}) \cdots \varphi_{p+q}(v_{\pi(p+q)})$$

gegeben. Wir schreiben wieder π in der Form (10.3) und summieren getrennt über M , S'_p und S''_q :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\mu \in M} \text{sgn}(\mu) \sum_{\sigma \in S'_p} \text{sgn}(\sigma) \varphi_1(v_{\mu\sigma(1)}) \cdots \varphi_p(v_{\mu\sigma(p)}) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{\rho \in S''_q} \text{sgn}(\rho) \varphi_{p+1}(v_{\mu\rho(p+1)}) \cdots \varphi_{p+q}(v_{\mu\rho(p+q)}). \end{aligned}$$

Nach Definition der Formen $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$ und $\varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \varphi_{p+q}$ folgt

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\mu \in M} \text{sgn}(\mu) (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p)(v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(p)}) \cdot \\ &\quad \cdot (\varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \varphi_{p+q})(v_{\mu(p+1)}, \dots, v_{\mu(p+q)}). \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 10.10 ist A gleich der linken Seite in (10.11). $\square$

Satz 10.12 — 1. Für alle $\varphi \in \Lambda^p V^*$, $\psi \in \Lambda^q V^*$ gilt

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi,$$

d.h. das äußere Produkt ist antikommutativ (oder: graduiert kommutativ).

2. Für alle $\varphi \in \Lambda^p V^*$, $\psi \in \Lambda^q V^*$ und $\omega \in \Lambda^r V^*$ gilt

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \omega = \varphi \wedge (\psi \wedge \omega),$$

d.h. das äußere Produkt ist assoziativ.

Beweis. Da Formen der Gestalt $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$ mit 1-Formen $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, ein Erzeugendensystem von $\Lambda^p V^*$ für jedes $p \in \mathbb{N}$ bilden, genügt es, die behaupteten Identitäten für φ, ψ und ω von dieser speziellen Gestalt auszurechnen. Wir nehmen also ohne Einschränkung an, dass $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$, $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_q$. Nach Lemma 10.11 gilt

$$\varphi \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_q$$

und

$$\psi \wedge \varphi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_q \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p.$$

Die beiden rechten Seiten unterscheiden sich nur in der Anordnung der Faktoren. Genauer gehen die beiden Anordnungen unter der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & p+q-1 & p+q \\ p+1 & p+2 & \dots & p+q & 1 & 2 & \dots & q \end{pmatrix}$$

in einander über. Die Signatur dieser Permutation ist $(-1)^{pq}$. Das zeigt die Antikommutativität. Die Assoziativität geht genauso und einfacher. $\square$

Definition 10.13 — Es sei V ein d -dimensionaler Vektorraum. Der graduierte Vektorraum

$$\Lambda^\bullet V^* := \bigoplus_{p=0}^d \Lambda^p V^*$$

zusammen mit dem Produkt $\wedge$ heißt äußere Algebra oder Graßmannalgebra¹³ von V^* .

Es seien nun V und W Vektorräume über K und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Bekanntlich induziert f eine duale lineare Abbildung $f^* : W^* \rightarrow V^*$ durch $f^*(\psi) := \psi \circ f : V \rightarrow K$ für jede 1-Form $\psi \in W^*$. Wir erweitern diese Definition auf beliebige p -Formen:

Satz und Definition 10.14 — Es sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $\varphi \in \Lambda^p W^*$, $p \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $f^*(\varphi) : V^p \rightarrow K$ mit

$$f^*(\varphi)(v_1, \dots, v_p) := \varphi(f(v_1), \dots, f(v_p))$$

eine alternierende p -Form auf V .

Beweis. Klar. $\square$

Der Vollständigkeit halber setzen wir noch $f^*|_{\Lambda^0 W^*} := \text{id}_{\Lambda^0 W^*}$.

Lemma 10.15 — 1. Für jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist die Abbildung $f^* : \Lambda^p W^* \rightarrow \Lambda^p V^*$ ebenfalls linear. Im Falle $p = 1$ ist f^* die zu f duale Abbildung.

2. Für lineare Abbildungen $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow U$ gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

3. Für die Identität $\text{id}_V : V \rightarrow V$ gilt $\text{id}_V^* = \text{id}_{\Lambda^p V^*}$.

¹³Hermann Günter Graßmann * 15.4.1809 † 26.9.1877.

Beweis. Alle Aussagen folgen direkt aus der Definition. $\square$

Satz 10.16 — *Es sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und φ, ψ alternierende Formen auf W . Dann gilt*

$$f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*(\varphi) \wedge f^*(\psi).$$

Anders gesagt: Die lineare Abbildung $f^* : \Lambda^\bullet W^* \rightarrow \Lambda^\bullet V^*$ ist ein Homomorphismus von K -Algebren.

Beweis. Es seien zunächst $\psi_1, \dots, \psi_p$ Linearformen auf W und $v_1, \dots, v_p \in V$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} f^*(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p)(v_1, \dots, v_p) &= (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p)(f(v_1), \dots, f(v_p)) \\ &= \det(\psi_i(f(v_j))) \\ &= \det(f^*(\psi_i)(v_j)) \\ &= (f^*(\psi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\psi_p))(v_1, \dots, v_p), \end{aligned}$$

also $f^*(\psi_1, \dots, \psi_p) = f^*(\psi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\psi_p)$. Hieraus folgt die Behauptung des Satzes für $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$ und $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_q$ mit Linearformen $\varphi_i, \psi_j \in W^*$ wegen Lemma 10.11, und für beliebige alternierende Formen wegen Satz 10.7. $\square$

10.3 Orientierungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur endlichdimensionale Vektorräume über den reellen Zahlen.

Ist V ein d -dimensionaler reeller Vektorraum, so ist $\Lambda^d V^*$ eindimensional. Je zwei nichttriviale d -Formen unterscheiden sich also nur um einen Skalar $\neq 0$. Erklärt man zwei nichttriviale d -Formen ω und ω' für äquivalent, wenn $\omega' = \lambda\omega$ mit $\lambda > 0$, so zerfällt $\Lambda^d V^* \setminus \{0\}$ in zwei Äquivalenzklassen. Wir bezeichnen die Klasse von ω mit $[\omega]$.

Definition 10.17 — Eine Orientierung auf V ist eine Äquivalenzklasse $[\omega]$ mit $\omega \in \Lambda^d V^* \setminus \{0\}$. Ein Vektorraum V zusammen mit der Wahl einer Orientierung $[\omega]$ ist ein orientierter Vektorraum.

Definition 10.18 — Es sei $(V, [\omega])$ ein orientierter Vektorraum. Eine Basis $(e_1, \dots, e_d)$ von V heißt positiv bzw. negativ orientiert (bezüglich $[\omega]$), wenn $\omega(e_1, \dots, e_d) > 0$ bzw. < 0 .

Es ist klar, dass diese Definition nicht von der Wahl des Repräsentanten ω der Orientierung $[\omega]$ abhängt.

Bemerkung 10.19 — Es seien $(e_1, \dots, e_d)$ und $(v_1, \dots, v_d)$ zwei Basen von V und S die Basiswechselmatrix, d.h. $v_i = \sum_j S_{ji} e_j$. Dann gilt für jede d -Form ω auf V

$$\omega(v_1, \dots, v_p) = \det(S)\omega(e_1, \dots, e_p).$$

Insbesondere haben die beiden Basen genau dann die gleiche Orientierung, und zwar bezüglich jeder möglichen Orientierung, wenn $\det(S) > 0$. Ist eine Basis $(e_1, \dots, e_d)$ vorgegeben, so gibt es genau eine Orientierung, bezüglich der diese Basis positiv orientiert ist. Daher bestimmt jede Basis eine Orientierung, und zwei Basen bestimmen dieselbe Orientierung genau dann, wenn die zugehörige Basiswechselmatrix positive Determinanten hat.

Definition 10.20 — Es seien $(V, [\omega_V])$ und $(W, [\omega_W])$ orientierte Vektorräume der Dimension d . Ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$ heißt orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend, falls $f^*(\omega_W) = \lambda \omega_V$ mit $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$.

Bemerkung 10.21 — Sind $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow U$ Isomorphismen von orientierten Vektorräumen, so ist $g \circ f : V \rightarrow U$ genau dann orientierungserhaltend, wenn f und g beide orientierungserhaltend oder beide orientierungsumkehrend sind.

11 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

11.1 Differentialformen

Alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ haben denselben Tangentialraum $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ und denselben Kotangentialraum $T_x^* \mathbb{R}^n = (T_x \mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^*$.

Es sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die duale Basis des $(\mathbb{R}^n)^*$. Wir bezeichnen die konstanten Vektorfelder $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto e_i \in \mathbb{R}^n = T_x \mathbb{R}^n$ mit ∂_i , $i = 1, \dots, n$.

Definition 11.1 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $0 \leq p \leq n$. Eine Abbildung $\omega : U \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$ heißt eine p -Form auf U .

Insbesondere sind 0-Formen einfach Funktionen. 1-Formen heißen in der Literatur auch Pfaffsche¹⁴ Formen.

Wir bezeichnen die konstanten 1-Formen $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \varepsilon_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ mit dx_i , $i = 1, \dots, n$. Offenbar besitzt jede p -Form $\omega : U \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$ eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{I \subset [n], |I|=p} \omega_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

mit Funktionen $\omega_I : U \rightarrow \mathbb{R}$, den Komponentenfunktionen von ω .

Lemma 11.2 — Die folgenden Aussagen über eine p -Form ω auf U sind äquivalent, $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$:

1. ω ist eine $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildung.
2. Alle ω_I sind $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildungen.
3. Für alle $\mathcal{C}^\ell$ -Vektorfelder $X_1, \dots, X_p : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\omega(X_1, \dots, X_p) : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildung.

Beweis. Die Äquivalenz von 1. und 2. ist klar.

3. $\Rightarrow$ 2., denn $\omega_I = \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_p})$.

2. $\Rightarrow$ 3., denn wenn wir die Vektorfelder X_k in der Form $X_k = \sum_{i=1}^n X_{ik} \partial_i$ mit $\mathcal{C}^\ell$ -Funktionen X_{ik} schreiben, so gilt

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_p) &= \sum_I \omega_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(X_1, \dots, X_p) \\ &= \sum_I \omega_I \det((dx_{i_j}(X_k))_{jk}) \\ &= \sum_I \omega_I \det((X_{i_j,k})_{jk}). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist offenbar eine $\mathcal{C}^\ell$ -Funktion, wie zu zeigen war. $\square$

Bemerkungen 11.3 — Für eine Funktion f , p -Formen ω und ω' und eine q -Form ψ werden $f\omega$, $\omega + \omega'$ und $\omega \wedge \psi$ punktweise definiert. Es ist ziemlich klar, dass, wenn f etc. $\mathcal{C}^\ell$ -Funktionen sind, dasselbe für $f\omega$ etc. gilt.

¹⁴Johann Friedrich Pfaff * 22.12.1765 † 21.4.1825.

Beispiel 11.4 — $\omega = (x_1^2 + 2x_2)dx_1 + e^{x_3}dx_2$ und $\psi = 4x_3dx_1 + e^{-x_3}dx_3$ sind $\mathcal{C}^\infty$ -1-Formen. Es gilt

$$\omega + \psi = (x_1^2 + 2x_2 + 4x_3)dx_1 + e^{x_3}dx_2 + e^{-x_3}dx_3$$

und

$$\omega \wedge \psi = -4x_3e^{x_3}dx_1 \wedge dx_2 + (x_1^2 + 2x_2)e^{-x_3}dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3.$$

Definition 11.5 (Das totale Differential) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildung, $\ell \geq 1$. In jedem Punkt $x \in U$ ist die totale Ableitung $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$. Die 1-Form $U \ni x \mapsto Df(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ wird mit df bezeichnet und heißt das totale Differential von f .

Da $Df(x)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Ist f eine $\mathcal{C}^\ell$ -Funktion, so ist df eine $\mathcal{C}^{\ell-1}$ -1-Form.

Bemerkung 11.6 (Gradient und totales Differential) — Einer differenzierbaren Funktion f haben wir damit einerseits ein Vektorfeld zugeordnet, nämlich den Gradienten

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_i,$$

und andererseits eine 1-Form, nämlich das totale Differential

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Beide Darstellungen enthalten dieselbe Information. Zwischen Gradient und totalem Differential besteht die folgende Beziehung: Es sei $X = \sum_i X_i \partial_i$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\langle \text{grad} f, X \rangle = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = df(X).$$

Allerdings besteht der folgende Unterschied: Das totale Differential ist koordinatenunabhängig definiert, der Gradient aber nur mit Hilfe des Skalarproduktes. Deswegen lässt sich später der Begriff des totalen Differentials sofort auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, der Gradient dagegen nur nach voriger Einführung einer sogenannten Riemannschen Metrik.

Lemma 11.7 — Es seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildungen, $\ell \geq 1$. Dann gilt

$$d(f + g) = df + dg \quad \text{und} \quad d(fg) = f dg + g df.$$

Beweis. Klar. □

11.2 Äußere Ableitung

Wir wollen den Begriff des totalen Differentials von Funktionen auf beliebige Differentialformen erweitern.

Definition 11.8 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{I \subset [n], |I|=p} \omega_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf U , $\ell \geq 1$. Dann heißt die $\mathcal{C}^{\ell-1}$ -($p+1$)-Form

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_I d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

die äußere Ableitung oder das Differential von ω .

Beispiel 11.9 — Es sei $\omega = e^{x_1} dx_1 + x_1 e^{-x_2} dx_3$. Dann ist

$$d\omega = e^{-x_2} dx_1 \wedge dx_3 - x_1 e^{-x_2} dx_2 \wedge dx_3$$

und

$$d(d\omega) = (-e^{-x_2} dx_2) \wedge dx_1 \wedge dx_3 - (e^{-x_2} dx_1 - x_1 e^{-x_2} dx_2) \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0.$$

Satz 11.10 — Die äußere Ableitung hat die folgenden Eigenschaften:

1. Die Abbildung

$$d : \{\mathcal{C}^\ell\text{-}p\text{-Formen}\} \longrightarrow \{\mathcal{C}^{\ell-1}\text{-(}p+1\text{)-Formen}\}$$

ist linear.

2. Für eine p -Form ω und q -Form ψ gilt

$$d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge d\psi.$$

3. Für eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form ω , $\ell \geq 2$, gilt

$$d(d\omega) = 0.$$

Beweis. Aussage 1 ist klar.

Für Aussage 2 genügt es, den Fall $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ und $\psi = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$ zu betrachten. Dann ist $\omega \wedge \psi = (fg) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$, und nach Definition ergibt sich

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \psi) &= (fdg + gdf) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \\ &= (df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}) \\ &\quad + (-1)^p (f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \wedge (dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}) \\ &= d\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge d\psi \end{aligned}$$

Das Vorzeichen $(-1)^p$ in der dritten Zeile entsteht, weil wir die Form dg beim Sortieren an den p verschiedenen Formen $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_p}$ vorbeiziehen müssen und uns dabei jedesmal ein Vorzeichen einhandeln.

Für Aussage 3 genügt es, den Fall $\omega = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_p$ mit $\mathcal{C}^\ell$ -Funktionen $f_0, \dots, f_p$, $\ell \geq 2$, zu betrachten. Dann ist $d\omega = df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_p$, und nach Aussage 2 gilt

$$d(d\omega) = \sum_{i=0}^p (-1)^i df_0 \wedge \dots \wedge ddf_i \wedge \dots \wedge df_p.$$

Es genügt also, $ddf = 0$ für $\mathcal{C}^2$ -Funktionen zu beweisen. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{j < i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx_j \wedge dx_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

nach dem Satz von Schwarz. □

Definition 11.11 — Eine Differentialform ω mit $d\omega = 0$ heißt geschlossen, und ω heißt exakt, wenn es eine Form ψ mit $d\psi = \omega$ gibt.

Wegen $d \circ d = 0$ ist jede (hinreichend differenzierbare) exakte Form auch geschlossen. Die Umkehrung ist dagegen im Allgemeinen falsch.

11.3 Verhalten bei Abbildungen

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $\Phi : U \rightarrow V$ eine $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildung, $\ell \geq 1$. Für jeden Punkt $x \in U$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D\Phi_x : \mathbb{R}^n = T_x U \longrightarrow \mathbb{R}^m = T_{\Phi(x)} V.$$

Diese lineare Abbildung liefert uns gemäß der vorigen Abschnitte induzierte Abbildungen

$$(D\Phi_x)^* : \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^* \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*.$$

Definition 11.12 — Es sei ω eine p -Form auf V . Dann bezeichnet $\Phi^*\omega$ die p -Form auf U mit

$$\Phi^*\omega(x) = (D\Phi_x)^*(\omega(\Phi(x))).$$

Zur Erinnerung: Auf 0-Formen ist $D\Phi_x^*$ definitionsgemäß einfach die Identität. Das bedeutet für 0-Formen auf V , d.h. für Funktionen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$(\Phi^* f)(x) = (D\Phi_x)^*(f(\Phi(x))) = f(\Phi(x)) = (f \circ \Phi)(x).$$

Weiter folgt aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\Phi^*(df)(x) &= (D\Phi_x)^*(df(\Phi(x))) \\ &= (D\Phi_x)^*(Df_{\Phi(x)}) = Df_{\Phi(x)} \circ D\Phi_x \\ &= D(f \circ \Phi)_x = d(f \circ \Phi)(x).\end{aligned}$$

Das bedeutet:

$$\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi) = d(\Phi^*f).$$

Bezeichnet speziell y_i die i -te Koordinatenfunktion, so ist $y_i \circ \Phi$ genau die i -te Komponente von Φ . Deshalb gilt

$$\Phi^*(dy_i) = d\Phi_i.$$

Lemma 11.13 (Rechenregeln für das Zurückziehen von Formen) — Es seien ω und ω' p -Formen und ψ eine q -Form. Dann gilt

1. $\Phi^*(\omega + \omega') = \Phi^*\omega + \Phi^*\omega'.$
2. $\Phi^*(\omega \wedge \psi) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\psi.$
3. $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega).$

Beweis. Zu 3: Wegen Regel 1 kann man ohne Einschränkung annehmen, dass ω die speziell Gestalt $\omega = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_p$ mit gewissen Funktionen $f_0, f_1, \dots, f_p$ auf V hat. Es folgt

$$d\omega = df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_p$$

und mit Hilfe von Regel 2:

$$\begin{aligned}\Phi^*(d\omega) &= \Phi^*(df_0) \wedge \dots \wedge \Phi^*(df_p) \\ &= d(f_0 \circ \Phi) \wedge \dots \wedge d(f_p \circ \Phi) \\ &= d\left((f_0 \circ \Phi)d(f_1 \circ \Phi) \wedge \dots \wedge d(f_p \circ \Phi)\right) \\ &= d(\Phi^*(\omega)).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 11.14 — Ist ω eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf V und ist $\Phi : U \rightarrow V$ eine $\mathcal{C}^{\ell+1}$ -Abbildung, so ist $\Phi^*\omega$ eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form. Das sieht man so: Weil Φ^* eine lineare Abbildung ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\omega = f dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p}$$

mit einer $\mathcal{C}^\ell$ -Funktion f . Es folgt dann

$$\Phi^*\omega = (f \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_p}.$$

Auf der rechten Seite ist $f \circ \Phi$ eine $\mathcal{C}^\ell$ -Funktion, und $d\Phi_j$ sind $\mathcal{C}^{\ell-1}$ -Formen.

Lemma 11.15 — Sind $\Phi : U \rightarrow V$ und $\Psi : V \rightarrow W$ $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen, $k \geq 1$, so gilt für jede p -Form ω auf W , dass

$$\Phi^*\Psi^*\omega = (\Psi \circ \Phi)^*\omega.$$

Beweis. Es gilt in jedem Punkt $x \in U$:

$$\begin{aligned}
(\Psi \circ \Phi)^* \omega(x) &= (D(\Psi \circ \Phi)_x)^* (\omega((\Psi \circ \Phi)(x))) \\
&= (D\Phi_x)^* \Psi^* (D\Psi_x)^* (\omega(\Psi(\Phi(x)))) \\
&= (D\Phi_x)^* \left((D\Psi_{\Phi(x)})^* \omega(\Psi(\Phi(x))) \right) \\
&= (D\Phi_x)^* ((\Psi^* \omega)(\Phi(x))) \\
&= \Phi^* (\Psi^* (\omega))(x).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 11.16 — Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung mit

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_2, x_1 x_2^3 x_3)$$

und ω die Form $\omega(y_1, y_2) = (\sin y_1 + y_2) dy_1 \wedge dy_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Phi^*(dy_1) &= d\Phi_1 = d(x_1^2 + 2x_2) = 2x_1 dx_1 + 2dx_2 \\
\Phi^*(dy_2) &= d\Phi_2 = x_2^3 x_3 dx_1 + 3x_1 x_2^2 x_3 dx_2 + x_1 x_2^3 dx_3.
\end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega) &= (\sin \Phi_1 + \Phi_2) d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \\
&= (\sin \Phi_1 + \Phi_2) (2x_1 dx_1 + 2dx_2) \wedge (x_2^3 x_3 dx_1 + 3x_1 x_2^2 x_3 dx_2 + x_1 x_2^3 dx_3) \\
&= (\sin(x_1^2 + 2x_2) + x_1 x_2^3 x_3) \left((6x_1^2 x_2^2 x_3 - 2x_2^3 x_3) dx_1 \wedge dx_2 + \right. \\
&\quad \left. + 2x_1^2 x_2^3 dx_1 \wedge dx_3 + 2x_1 x_2^3 dx_2 \wedge dx_3 \right)
\end{aligned}$$

11.4 Divergenz und Rotation

Definition 11.17 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^ℓ -Vektorfeld, $\ell \geq 1$.

1. Die Funktion

$$\operatorname{div} v(x) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x)$$

heißt die Divergenz von v .

2. Das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

heißt die Rotation von v .

Bemerkung 11.18 — Man führt formal ein Vektorfeld ∇ (gelesen: Nabla)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

mit Werten in Differentialoperatoren ein und schreibt die Divergenz als Skalarprodukt $\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle$ und die Rotation als Kreuzprodukt $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$.

Zur Erinnerung, der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$ ist der Operator

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

der auf Funktionen und komponentenweise auf Vektorfeldern und Differentialformen wirkt.

Lemma 11.19 — *Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in \mathcal{C}^\ell(U, \mathbb{R})$ und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^\ell$ -Vektorfeld, $\ell \geq 2$. Dann gilt:*

1. $\text{rot grad } f = 0$. „Gradientenfelder sind wirbelfrei“.
2. $\text{div rot } v = 0$. „Rotationsfelder sind quellenfrei“.
3. $\text{div grad } f = \Delta f$.
4. $\text{grad div } v - \text{rot rot } v = \Delta v$.

Beweis. Einfach Nachrechnen: Einmal direkt und einmal mit dem ∇ -Kalkül. $\square$

Zwischen den Differentialoperatoren grad , div und rot einerseits und dem Differential von Formen besteht im $\mathbb{R}^3$ der folgende Zusammenhang. Der Einfachheit halber wollen wir nur mit $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen, Vektorfeldern und Formen arbeiten.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Es bezeichne $A^p(U, \mathbb{R})$ den Vektorraum der $\mathcal{C}^\infty$ - p -Formen auf U , speziell also $A^0(U, \mathbb{R})$ den Vektorraum der $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen auf U , und $A^0(U, \mathbb{R}^3)$ den Vektorraum der $\mathcal{C}^\infty$ -Vektorfelder auf U . Dann bestehen die folgenden Isomorphismen von Vektorräumen:

$$\begin{array}{lll} F^0 : & A^0(U, \mathbb{R}) & \longrightarrow A^0(U, \mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto f, \\ F^1 : & A^0(U, \mathbb{R}^3) & \longrightarrow A^1(U, \mathbb{R}) \\ & (v_1, v_2, v_3) & \longmapsto v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3, \\ F^2 : & A^0(U, \mathbb{R}^3) & \longrightarrow A^2(U, \mathbb{R}) \\ & (a_1, a_2, a_3) & \longmapsto a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ F^3 : & A^0(U, \mathbb{R}) & \longrightarrow A^3(U, \mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{array}$$

Wir können alle diese Abbildungen und Räume in dem folgenden Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^0(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & A^1(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & A^2(U, \mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & A^3(U, \mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow F^0 & & \uparrow F^1 & & \uparrow F^2 & & \uparrow F^3 & & \\ 0 & \longrightarrow & A^0(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & A^0(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & A^0(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & A^0(U, \mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ich behaupte, dass dieses Diagramm kommutiert, d.h. man wenn man von einer beliebigen Ecke des Diagramms in Pfeilrichtung zu einer anderen Ecke läuft, kommt es nicht darauf an, wie man das tut. Um das zu zeigen, muss man die folgenden Identitäten beweisen:

$$d(f) = F^1(\text{grad } f), \quad d(F^1(v)) = F^2(\text{rot } v), \quad d(F^2(a)) = F^3(\text{div } a).$$

Die erste dieser Identitäten ist ziemlich trivial und wurde in Bemerkung 11.6 kurz diskutiert. Die beiden anderen erfordern eine kurze Rechnung:

$$\begin{aligned}
& d(v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3) \\
&= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_3 \\
&= \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& d(a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2) \\
&= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

Deshalb übersetzt sich die Regel $dd = 0$ in $\text{rot grad} = 0$ und $\text{div rot} = 0$.

12 Integration auf Mannigfaltigkeiten I

12.1 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$. Wir hatten den Tangentialraum an M im Punkt x mit $T_x M$ bezeichnet. Der Dualraum zu $T_x M$ wird mit $T_x^* M$ bezeichnet und heißt der Kotangentialraum von M im Punkt x .

Definition 12.1 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit.

1. Eine p -Form auf M ist eine Abbildung $\omega : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} \Lambda^p T_x^* M$ mit $\omega(x) \in \Lambda^p T_x^* M$.
2. Es seien ω und ω' p -Formen auf M , ψ eine q -Form auf M . Die Summe $\omega + \omega'$ und das äußere Produkt $\omega \wedge \psi$ werden punktweise definiert, d.h. $(\omega + \omega')(x) = \omega(x) + \omega'(x)$ und $(\omega \wedge \psi)(x) = \omega(x) \wedge \psi(x)$.
3. Es sei $\Phi : M \rightarrow N$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung von Mannigfaltigkeiten und ω eine p -Form auf N . Dann bezeichnet $\Phi^* \omega$ die p -Form auf M mit $(\Phi^* \omega)(x) = (T_x \Phi)^* \omega(\Phi(x))$.

Lemma 12.2 — Es gelten die folgenden Rechenregeln.

1. $\Phi^*(\omega + \omega') = \Phi^* \omega + \Phi^* \omega'$.
2. $\Phi^*(\omega \wedge \psi) = \Phi^* \omega \wedge \Phi^* \psi$.
3. $\Psi^* \Phi^* \omega = (\Phi \circ \Psi)^* \omega$ für $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen $\Psi : M \rightarrow M'$ und $\Phi : M' \rightarrow M''$.

Beweis. Die Regeln folgen recht formal aus den Definitionen. Ich zeige exemplarisch und ausführlich die Regel 2:

$$\begin{aligned}
 \Phi^*(\omega \wedge \psi)(x) &= (T_x \Phi)^*((\omega \wedge \psi)(\Phi(x))) \\
 &\quad \text{nach Definition von } \Phi^* \\
 &= (T_x \Phi)^*(\omega(\Phi(x)) \wedge \psi(\Phi(x))) \\
 &\quad \text{wegen der punktweisen Definition von } \wedge \\
 &= (T_x \Phi)^*(\omega(\Phi(x))) \wedge (T_x \Phi)^*(\psi(\Phi(x))) \\
 &\quad \text{weil } T_x \Phi^* \text{ ein Homomorphismus ist, Satz 10.16,} \\
 &= (\Phi^* \omega)(x) \wedge (\Phi^* \psi)(x) \\
 &\quad \text{nach Definition von } \Phi^* \\
 &= (\Phi^* \omega \wedge \Phi^* \psi)(x) \\
 &\quad \text{wegen der punktweisen Definition von } \wedge.
 \end{aligned}$$

□

Definition 12.3 — Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^\ell$ -Funktion, $1 \leq \ell \leq k$. Dann bezeichnet df die 1-Form auf M mit

$$df(x) = T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

df heißt das totale Differential von f .

Lemma 12.4 — *Rechenregeln für das totale Differential.*

1. $d(f + g) = df + dg$.
2. $d(fg) = f dg + g df$.
3. $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi) = d(\Phi^* f)$.

Beweis. Zu 2: Es sei $h := (f, g) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$.
Damit gilt $fg = m \circ h$ und

$$T_{x_1, x_2} m = (x_2 \ x_1), \quad T_x h = \begin{pmatrix} T_x f \\ T_x g \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} d(fg)(x) &= T_x(fg) = T_x(m \circ h) = T_{h(x)} m \cdot T_x h \\ &= (g(x) \ f(x)) \cdot \begin{pmatrix} T_x f \\ T_x g \end{pmatrix} \\ &= g(x) T_x f + f(x) T_x g = g(x) df(x) + f(x) dg(x) = (g df + f dg)(x). \end{aligned}$$

Zu 3: Es sei $\Phi : M \rightarrow N$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung und $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^\ell$ -Funktion, $1 \leq \ell \leq k$. Dann gilt wegen der Kettenregel

$$\begin{aligned} \Phi^*(df)(x) &= (T_x \Phi)^*(df(\Phi(x))) \\ &= (T_x \Phi)^*(T_{\Phi(x)} f) = T_{\Phi(x)} f \circ T_x \Phi \\ &= T_x(f \circ \Phi) = d(f \circ \Phi)(x) = d(\Phi^* f)(x). \end{aligned}$$

□

Bezeichnung 12.5 — Es seien $M \subset N$ Mannigfaltigkeiten, und $i : M \rightarrow N$ bezeichne die Inklusionsabbildung. Wir schreiben dann für eine p -Form ω auf N meist einfacher $\omega|_M$ statt $i^* \omega$. Beispiele für eine solche Situation sind die Inklusion einer Mannigfaltigkeit M im umgebenden $\mathbb{R}^n$ oder die Inklusion einer offenen Menge U in einer Mannigfaltigkeit M .

Beispiel 12.6 — Wir betrachten die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und bezeichnen die Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ mit x, y und z . Die Sphäre wird von den offenen Mengen U_x , U_y und U_z mit

$$U_x := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \neq 0\} \quad \text{etc.}$$

überdeckt. Auf U_x ist die 2-Form

$$\omega_x := \frac{1}{x} dy \wedge dz|_{U_x}$$

wohldefiniert, analog auf U_y und U_z die Formen

$$\omega_y := -\frac{1}{y} dx \wedge dz|_{U_y}, \quad \omega_z := \frac{1}{z} dx \wedge dy|_{U_z}.$$

Ich behaupte, dass ω_x und ω_y auf $U_x \cap U_y$ übereinstimmen. Das sieht man so: Die Einschränkung der Funktion $p := x^2 + y^2 + z^2$ auf die Sphäre ist konstant. Deshalb gilt

$$0 = dp|_{S^2} = 2x dx + 2y dy + 2z dz.$$

Durch Anwendung von $\wedge \frac{1}{2}dz$ erhält man

$$x dx \wedge dz|_{S^2} + y dy \wedge dz|_{S^2} = 0,$$

und somit

$$\frac{1}{y} dx \wedge dz|_{U_x \cap U_y} + \frac{1}{x} dy \wedge dz|_{U_x \cap U_y} = 0.$$

Das zeigt die Behauptung. Entsprechend zeigt man, dass ω_x , ω_y und ω_z jeweils auf dem Durchschnitt der gemeinsamen Definitionsbereiche übereinstimmen. Wir können also eine 2-Form ω auf S^2 dadurch definieren, dass wir

$$\omega|_{U_x} := \omega_x, \quad \omega|_{U_y} := \omega_y, \quad \omega|_{U_z} := \omega_z$$

setzen. Man spricht bei dieser Art von Konstruktion vom Verkleben von Formen. Die Form ω ist zunächst nur auf den offenen Mengen einer gewissen Überdeckung gegeben. Wir können übrigens aus den Bruchstücken eine einheitliche Formel gewinnen: Die Funktionen x^2 , y^2 und z^2 bilden eine Art Teilung der Eins, denn ihre Summe ist auf der Sphäre (!) gleich 1. (Warum ist das keine Teilung der Eins im strengen Sinne?) Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= x^2 \omega_x + y^2 \omega_y + z^2 \omega_z \\ &= x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass $\tilde{\omega} = \omega$ auf der Sphäre.

Definition 12.7 — Eine p -Form ω auf der $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M heißt ℓ -mal stetig differenzierbar, $0 \leq \ell < k$, oder kurz: eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form, wenn es zu jedem Punkt x aus M eine offene Umgebung U und eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ mit der Eigenschaft gibt, dass $(\varphi^{-1})^* \omega$ eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf U' ist.

Satz 12.8 — Es seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten der Dimensionen d bzw. d' und $\Phi : N \rightarrow M$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung. Ist ω eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf M , $\ell < k$, so ist $\Phi^* \omega$ eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf N .

Beweis. Es sei $\omega' := \Phi^* \omega$ und $x \in N$ ein beliebiger Punkt. Wir wählen eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\alpha : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^{d'}$, die auf einer offenen Umgebung V von x in N definiert ist, und eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\beta : W \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^d$ auf einer offenen Umgebung W von $\Phi(x)$ in M mit der Eigenschaft, dass $(\beta^{-1})^* \omega$ eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form ist. Durch Verkleinern von V (und entsprechend V') können wir erreichen, dass $\Phi(V) \subset W$. Es sei

$$\Phi' := \beta \circ \Phi \circ (\alpha^{-1}) : V' \rightarrow W'.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha^{-1})^* \omega' &= (\alpha^{-1})^* \Phi^* \omega \\ &= (\Phi \circ \alpha^{-1})^* \omega = (\beta^{-1} \circ \Phi')^* \omega \\ &= (\Phi')^* (\beta^{-1})^* (\omega). \end{aligned}$$

Nach Definition der Differenzierbarkeit von Formen und gemäß der Annahme über ω ist $(\beta^{-1})^* \omega$ eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf W' . Da Φ' eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung ist, ist auch $(\alpha^{-1})^* \omega' = (\Phi')^* (\beta^{-1})^* (\omega)$ eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf V' . Da der Punkt $x \in N$ beliebig war, bedeutet dies nach Definition der Differenzierbarkeit von Formen, dass ω' eine $\mathcal{C}^\ell$ -Form auf N ist. $\square$

Folgerung 12.9 — Es sei ω eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf der $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M , $\ell < k$. Dann ist für jede $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ von M die Form $(\varphi^{-1})^*\omega$ auf U' ℓ -mal stetig differenzierbar.

Beweis. Wende den Satz auf $\varphi^{-1} : U' \rightarrow M$ an. $\square$

Folgerung 12.10 — Ist ω eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf der d -dimensionalen $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M und ist $\varphi : U \rightarrow U'$ eine $\mathcal{C}^k$ -Karte von M , so gibt es eine eindeutige Darstellung

$$\omega|_U = \sum_{|I|=p} \omega_I d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p},$$

wobei $\omega_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\ell$ -Funktionen sind, $I \subset \{1, \dots, n\}$, und φ_j die j -te Komponente von $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ bezeichnet.

Beweis. Es sei $\psi := \varphi^{-1} : U' \rightarrow M$. Ferner bezeichne $i = \psi \circ \varphi : U \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung der offenen Teilmenge $U \subset M$. Dann gilt:

$$\omega|_U = i^*\omega = (\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega).$$

Nun besitzt die $\mathcal{C}^\ell$ -Form $\psi^*\omega$ auf U' eine eindeutige Darstellung

$$\psi^*\omega = \sum_{|I|=p} \tilde{\omega}_I dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_p},$$

wobei $\tilde{\omega}_I : U' \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\ell$ -Funktionen sind und $y_1, \dots, y_d$ die Koordinatenfunktionen auf U' bezeichnen. Es folgt:

$$\begin{aligned} \omega|_U &= \varphi^*(\psi^*\omega) \\ &= \sum_{|I|=p} (\tilde{\omega}_I \circ \varphi) \varphi^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dy_{i_p}) \\ &= \sum_{|I|=p} \omega_I d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p}, \end{aligned}$$

mit $\omega_I := \tilde{\omega}_I \circ \varphi$. In der Rechnung haben wir benutzt, dass $\varphi^*(dy_j) = d(y_j \circ \varphi) = d\varphi_j$. $\square$

12.2 Orientierte Mannigfaltigkeiten

Lemma 12.11 — Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offene Mengen und $\Phi : U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\Phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d) = \det D\Phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d)(\partial_1, \dots, \partial_d)(x) &= dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d(D\Phi_x(\partial_1, \dots, D\Phi_x(\partial_d))) \\ &= \det(dx_i(D\Phi_x(\partial_j))) = \det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x)\right) \\ &= \det D\Phi(x). \end{aligned}$$

□

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. In jedem Punkt $x \in M$ ist $\Lambda^d T_x^* M$ ein 1-dimensionaler Vektorraum. Angenommen, ω ist eine d -Form auf M mit der Eigenschaft $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann läßt sich jede andere d -Form ω' auf M als Produkt $\omega' = \lambda\omega$ mit einer Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben.

Definition 12.12 — 1. Zwei nirgends verschwindende stetige d -Formen ω und ω' heißen gleichorientiert, wenn die eindeutig bestimmte Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $\omega' = \lambda\omega$ positiv ist.
 2. Eine Orientierung auf M ist eine Äquivalenzklasse von gleichorientierten stetigen nirgends verschwindenden d -Formen.
 3. Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn es eine Orientierung gibt.
 4. Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit der Wahl einer Orientierung.

Bemerkung 12.13 — Eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit M ist nichts anderes als eine Punktmenge im $\mathbb{R}^n$ ohne Häufungspunkte. Der Tangentialraum in jedem Punkt ist der Nullraum. Der einzige nichtverschwindende Raum $\Lambda^s T_p M^*$ ist der Raum zum Index $s = 0$, der nach Definition $\Lambda^0 T_p M^* = \mathbb{R}$ ist. Das muss man wörtlich nehmen: Der Vektorraum ist nicht nur isomorph zu $\mathbb{R}$, sondern gleich $\mathbb{R}$, d.h. man kann zwischen positiven und negativen Elementen unterscheiden. Eine Orientierung von M ist somit nichts anderes als die Wahl eines Vorzeichens $+1$ oder -1 in jedem Punkt.

Es sei $(M, [\omega])$ eine orientierte d -dimensionale Mannigfaltigkeit, also ω eine nirgends verschwindende stetige d -Form, die die Orientierung repräsentiert. Ferner sei $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ eine $\mathcal{C}^k$ -Karte von M . Dann gilt

$$(\varphi^{-1})^* \omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d$$

mit einer stetigen Funktion $f : U' \rightarrow \mathbb{R}$. Die Karte φ heißt positiv orientiert, wenn $f > 0$.

Lemma 12.14 — Es sei $(M, [\omega])$ eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 1$. Dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in M$ eine offene Umgebung U und eine positiv orientierte Karte $\varphi : U \rightarrow U'$.

Beweis. Es sei zunächst $\tilde{\varphi} : V \rightarrow V'$ irgendeine $\mathcal{C}^k$ -Karte, die in einer offenen Umgebung V von x_0 definiert ist. Wir schreiben

$$(\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d.$$

Es sei $y_0 := \tilde{\varphi}(x_0)$. Dann ist $f(y_0) \neq 0$, und es sind zwei Fälle möglich:

1. Fall: Es gilt $f(y_0) > 0$. Da f stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U' von y_0 in V' mit $f|_{U'} > 0$. Setze $U := \tilde{\varphi}^{-1}(U')$ und $\varphi := \tilde{\varphi}|_U$. Dann ist $\varphi : U \rightarrow U'$ eine positiv orientierte Karte.
2. Fall: Es gilt $f(y_0) < 0$. Die lineare Abbildung

$$\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (y_1, \dots, y_d) \mapsto (y_1, \dots, y_{d-1}, -y_d)$$

hat die Eigenschaft $\tau^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, also $\tau^{-1} = \tau$. Definiere nun $V'' := \tau(V')$ und $\hat{\varphi} := \tau \circ \tilde{\varphi} : V \rightarrow V''$. Es folgt:

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi}^{-1})^* \omega &= (\tau^{-1})^* (\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega \\ &= \tau^* (f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d) \\ &= (f \circ \tau) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{d-1} \wedge (-dy_d) \\ &= -(f \circ \tau) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d, \end{aligned}$$

denn $\tau^*(dy_i) = dy_i$ für $i = 1, \dots, d-1$ und $\tau^*(dy_d) = -dy_d$. Im Punkt $z_0 := \tau(y_0) = \hat{\varphi}(x_0) \in V''$ gilt also $-(f \circ \tau)(z_0) > 0$. Wir wenden nun Fall 1 auf die Karte $\hat{\varphi}$ an und sind fertig. $\square$

Folgerung 12.15 — *Es sei $(M, [\omega])$ eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 1$. Dann gibt es einen Atlas aus positiv orientierten Karten.*

Satz 12.16 — *Es sei M eine C^k -Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 1$.*

1. *Ist $[\omega]$ eine Orientierung von M und ist A ein Atlas aus positiv orientierten Karten, so gilt für alle Kartenwechselabbildungen φ_{ij} , dass $\det D\varphi_{ij} > 0$. (Solche Kartenwechsel heißen orientierungserhaltend.)*
2. *Es sei A ein Atlas mit der Eigenschaft, dass alle Kartenwechselabbildungen von A orientierungserhaltend sind. Dann ist M orientierbar, und es gibt eine nirgends verschwindende C^k - d -Form ω auf M , bezüglich der alle Karten von A positiv orientiert sind.*

Beweis. 1. Es sei $A = \{\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i\}$ ein Atlas aus positiv orientierten Karten, und es seien i, j Indizes, für die der Durchschnitt $U := U_i \cap U_j$ nicht leer ist. Es bezeichne $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U) \rightarrow \varphi_i(U)$ den zugehörigen Kartenwechsel. Da die Karten nach Voraussetzung positiv orientiert sind, gibt es positive Funktionen $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $(\varphi_i^{-1})^*(\omega) = f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ und $(\varphi_j^{-1})^*(\omega) = f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$. Indem wir die erste dieser Formen mit φ_{ij} zurückziehen, erhalten wir die Beziehung

$$(f_i \circ \varphi_{ij}) \det D\varphi_{ij} = f_j|_{\varphi_j(U)}.$$

Da f_i und f_j positiv sind, muss dies auch für $\det D\varphi_{ij}$ gelten.

2. Es sei $A = \{\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i\}$ ein Atlas mit orientierungserhaltenden Kartenwechselabbildungen $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$. Es sei ω_i die d -Form auf U_i , die durch

$$\omega_i := \varphi_i^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d)$$

gegeben ist. Dann gilt auf dem Durchschnitt $U := U_i \cap U_j$ wegen $\varphi_{ij} \circ \varphi_j = \varphi_i$, dass

$$\begin{aligned} \omega_i|_{U_{ij}} &= \varphi_i^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d)|_{U_{ij}} \\ &= \varphi_j^* \varphi_{ij}^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d)|_{U_{ij}} \\ &= \varphi_j^*(\det D\varphi_{ij} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d)|_{U_{ij}} \\ &= (\det D\varphi_{ij} \circ \varphi_j) \cdot \omega_j|_{U_{ij}}. \end{aligned}$$

Nach Annahme ist der Koeffizient $\mu_{ij} := \det D\varphi_{ij} \circ \varphi_j$ überall positiv. Es sei nun $\{\lambda_i\}$ eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Teilung der Eins. Definiere

$$\omega := \sum_i \lambda_i \omega_i.$$

Auf der offenen Menge U_i gilt nun für jeden Index j mit $\lambda_j(x) \neq 0$:

$$\omega_j(x) = \mu_{ji}(x) \omega_i(x)$$

und

$$\omega(x) = \sum_j \mu_{ji} \lambda_j(x) \cdot \omega_i(x).$$

Dabei ist der Koeffizient als Summe positiver Zahlen positiv. Das zeigt, dass die $\mathcal{C}^{k-1}$ -Form ω nirgends auf M verschwindet, und dass alle Karten φ_i bezüglich ω positiv orientiert sind. $\square$

Folgerung 12.17 (Kriterium für Nichtorientierbarkeit) — Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Gibt es Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i$, $i = 1, 2$, mit zusammenhängenden Kartengebieten U_1 und U_2 derart, dass die Funktionaldeterminante $\det D\chi$ der Kartenwechselabbildung $\chi := \varphi_2 \varphi_1^{-1}$ beide Vorzeichen annimmt, so ist M nicht orientierbar.

Beweis. Angenommen, M ist orientierbar und $[\omega]$ ist eine Orientierung. Dann hat die Funktion f_i mit

$$(\varphi_i^{-1})^* \omega = f_i dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d$$

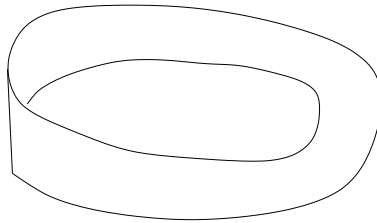
auf der zusammenhängenden Menge U'_i ein einheitliches Vorzeichen. Deshalb ist entweder φ_i oder $\tau \circ \varphi_i$ positiv orientiert, wenn $\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Abbildung aus dem Beweis von Lemma 12.14 bezeichnet.

Die Kartenwechselabbildungen für alle vier Kombinationen von φ_1 und $\tau\varphi_1$ einerseits und φ_2 und $\tau\varphi_2$ andererseits sind durch

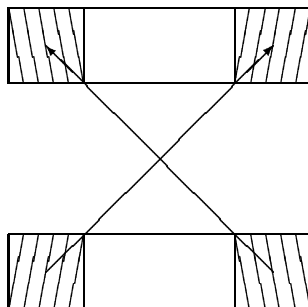
$$\chi, \tau\chi, \chi\tau \text{ und } \tau\chi\tau$$

gegeben. Deren Funktionaldeterminanten sind $\det D\chi$, $\det D(\tau\chi) = -\det D\chi$, $\det D(\chi\tau) = -(\det D\chi) \circ \tau$ und $\det D(\tau\chi\tau) = (\det D\chi) \circ \tau$. Nimmt nun $\det D\chi$ beide Vorzeichen an, so gilt dies auch für die drei anderen Funktionaldeterminanten, obwohl wenigstens eine Kombination nach Satz 12.16 Teil 1 orientierungserhaltend sein müsste. $\square$

Beispiel 12.18 — Das Möbiusband



ist nicht orientierbar. Es entsteht aus zwei Parameterbereichen $U'_1 = U'_2 = (0, 4) \times (0, 1)$ durch Verkleben der schraffierten Bereiche mit Hilfe der Kartenwechselabbildung χ . Der Definitionsbereich der Kartenwechselabbildung hat zwei Komponenten.



Auf der im Bild linken Komponente $(0, 1) \times (0, 1)$ ist χ etwa durch $\chi(x, t) = (x + 3, t)$ gegeben, auf der rechten Komponente $(3, 4) \times (0, 1)$ durch $\chi(x, t) = (x - 3, 1 - t)$. Die Funktionaldeterminante auf der linken Komponente ist -1 , auf der rechten 1 . Nach dem obigen Kriterium ist das Möbiusband nicht orientierbar. Insofern gibt die oben gegebene abstrakte Definition von Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit die Erfahrung, dass das Möbiusband nur eine Seite besitzt und sich deshalb nicht orientieren lässt, korrekt wieder.

Definition 12.19 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit. Ein Normalenvektorfeld an M ist eine Abbildung $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\nu(x) \perp T_x M$ für alle $x \in M$. Gilt zusätzlich $\|\nu(x)\| = 1$ für alle $x \in M$, nennt man ν ein Einheitsnormalenvektorfeld.

Man sagt, eine Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension d habe die Kodimension $n - d$. Eine Mannigfaltigkeit der Kodimension 1, d.h. der Dimension $n - 1$ nennt man eine Hyperfläche. Eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^2$ ist also eine Kurve, eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ eine Fläche. Zur Erinnerung: Ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Hyperebene. „Ebene“ im Gegensatz zu „Fläche“ steht als für eine lineare im Gegensatz zu einer eventuell gekrümmten Mannigfaltigkeit. Natürlich ist jede Hyperebene auch eine Hyperfläche, aber eben im allgemeinen nicht umgekehrt.

Beispiel 12.20 — Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Hyperfläche. Die Abbildung $S^{n-1} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Einheitsnormalenvektorfeld.

Beispiel 12.21 — Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\text{grad}F(x) \neq 0$ für alle $x \in M := F^{-1}(0)$, dann ist M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$, also eine Hyperfläche, und die Abbildung

$$M \ni x \mapsto \frac{\text{grad}F(x)}{\|\text{grad}F(x)\|} \in \mathbb{R}^n$$

ist ein Einheitsnormalenvektorfeld.

Bemerkung 12.22 (Höhere Vektorprodukte) — Es seien $a_1, \dots, a_{n-1}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau einen Vektor b mit der Eigenschaft, dass

$$\langle x, b \rangle = \det(x|a_1| \dots |a_{n-1}) \quad (12.1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Gemäß dem Determinantenentwicklungssatz ist die rechte Seite durch den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n x_i (-1)^{i-1} \det(A_{(i)})$$

gegeben ist, wobei $A_{(i)}$ die Matrix bezeichnet, die aus der $n \times (n-1)$ -Matrix $A = (a_1 | \dots | a_{n-1})$ durch Streichen der i -ten Zeile hervorgeht. Das zeigt:

$$b_i = (-1)^{i-1} \det(A_{(i)}).$$

Wir bezeichnen den Vektor b durch das Symbol $[a_1, \dots, a_{n-1}] := b$.

Es folgt leicht aus der Definition, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto [a_1, \dots, a_{n-1}]$$

multilinear und alternierend ist, und dass genau dann $[a_1, \dots, a_{n-1}] \neq 0$, wenn $a_1, \dots, a_{n-1}$ linear unabhängig sind. Ebenso ergibt sich direkt aus (12.1), dass

$$a_i \perp [a_1, \dots, a_{n-1}] \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n-1.$$

Es sei B die $n \times n$ -Matrix $B = (b|A)$. Es folgt:

$$\det(B) = \langle b, b \rangle$$

und

$$B^t B = \left(\begin{array}{c|c} \langle b, b \rangle & 0 \\ \hline 0 & A^t A \end{array} \right),$$

also

$$\|b\|^2 = \det(B) = \sqrt{\det(B^t B)} = \|b\| \cdot \sqrt{\det(A^t A)}.$$

Falls $b \neq 0$, d.h. falls $a_1, \dots, a_{n-1}$ linear unabhängig sind, folgt:

$$\|b\| = \| [a_1, \dots, a_{n-1}] \|^2 = \det(A^t A).$$

Die Bedingung $b \neq 0$ kann man jetzt fallen lassen, denn beide Seiten sind Polynome in den Koeffizienten von A , d.h. wenn die Aussage für Matrizen A vom Rang $n-1$ richtig ist, dann aus Stetigkeitsgründen für alle A .

Diese Konstruktion verallgemeinert das Kreuz- oder Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$: Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt $[x, y] = x \times y$, und die Länge von $[x, y]$ ist bekanntlich der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Satz 12.23 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k -Hyperfläche, $k \geq 1$.

1. Besitzt M ein stetiges, nirgends verschwindendes Normalenvektorfeld, so ist M orientierbar.
2. Ist M orientierbar, so gibt es ein C^{k-1} -Einheitsnormalenvektorfeld auf M .

Beweis. 1. Es sei $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges, nirgends verschwindendes Normalenvektorfeld. Dann wird in jedem Punkt $x \in M$ durch

$$\omega(x)(v_1, \dots, v_{n-1}) := \det(\nu(x), v_1, \dots, v_{n-1})$$

eine nicht verschwindende $(n-1)$ -Form auf $T_x M$ erklärt. Die Abbildung $x \mapsto \omega(x)$ ist stetig und bestimmt eine Orientierung $[\omega]$.

2. Es sei umgekehrt ω eine Orientierung auf M . Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es eine positiv orientierte Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ mit $x \in U$. Es sei $\psi := \varphi^{-1} : U' \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ die zugehörige Parametrisierung. Dann bilden die Vektoren

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(\varphi(x)), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_{n-1}}(\varphi(x))$$

eine Basis von $T_x M$. Wir setzen

$$\nu(x) := \left[\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(\varphi(x)), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_{n-1}}(\varphi(x)) \right]$$

mit den Bezeichnungen aus 12.22. Dann ist $\nu(x)$ ein Normalenvektor im Punkt x . Wählt man statt φ eine andere positive Karte in einer Umgebung von x , so unterscheiden sich die so konstruierten Normalenvektoren nur um einen positiven Faktor, werden also gleich, wenn man sie normalisiert. D.h. durch

$$\mu|_U := \frac{\nu}{\|\nu\|}$$

wird ein $\mathcal{C}^{k-1}$ -Einheitsnormalenvektorfeld auf ganz M definiert, wenn φ einen Atlas aus positiv orientierten Karten von M durchläuft. $\square$

12.3 Integration von Differentialformen

Auf Mannigfaltigkeiten gibt es zwei Arten von Integration:

1. von *Differentialformen* auf *orientierten* Mannigfaltigkeiten,
2. von *Funktionen* auf Mannigfaltigkeiten mit *Riemannscher Metrik*.

Wir werden beide Methoden behandeln und dann vergleichen, und beginnen mit der Integration von Formen.

Bemerkung 12.24 — Jeder Atlas einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit M enthält einen abzählbaren Teilatlas.

Es sei $A := \{\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i\}_{i \in I}$ ein Atlas. Nach Definition der Teilraumtopologie von $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es zu jedem $i \in I$ eine offene Menge $V_i \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $V_i \cap M = U_i$. Es sei B die abzählbare Menge aller Paare $(r, q) \in \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{Q}^n$ mit der Eigenschaft, dass es einen Index $i(r, q) \in I$ mit $U_r(q) \subset V_{i(r, q)}$ gibt. Dann gilt $\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{(r, q) \in B} U_r(q)$. Bezeichnet nun $I' \subset I$ die abzählbare Menge $I' := \{i(r, q) | (r, q) \in B\}$, so ist $A' := \{\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i\}_{i \in I'}$ der gesuchte abzählbare Teilatlas.

Definition 12.25 — Eine Teilmenge $X \subset M$ heißt Lebesgue-messbar bzw. eine Lebesgue-Nullmenge, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U und eine Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ mit der Eigenschaft gibt, dass $\varphi(X) \subset U'$ Lebesgue-messbar bzw. eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Bemerkung 12.26 — Ist $X \subset M$ eine Lebesgue-messbare Menge bzw. eine Nullmenge, so ist $\varphi(X)$ für jede Karte φ von M eine Lebesgue-messbare Menge bzw. eine Nullmenge.

Es sei X messbar. Nach Definition gibt es einen Atlas $A = \{\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i\}_{i \in I}$ derart, dass $\varphi_i(X) \subset U'_i$ messbar ist. Es sei nun $\varphi : U \rightarrow U'$ irgendeine andere Karte. Für jedes $i \in I$ sei $V_i := U_i \cap U$, $W_i := \varphi(V_i) \subset U'$ und $\chi_i := \varphi_i \circ \varphi^{-1} : W_i \rightarrow \varphi_i(V_i) \subset U'_i$ die Kartenwechselabbildung für die Karten φ und φ_i . Gemäß der obigen Bemerkung können wir annehmen, dass der Atlas A abzählbar ist. Dann gilt:

$$\varphi(X) = \bigcup_{i \in I} \chi_i^{-1}(\varphi_i(X)).$$

Nach Voraussetzung sind alle $\varphi_i(X)$ messbar. Außerdem ist χ_i ein Diffeomorphismus. Folglich ist $\chi_i^{-1}(\varphi_i(X))$ messbar, und somit auch $\varphi(X)$ als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen.

Ebenso schließt man für Nullmengen.

Definition 12.27 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und es sei

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

eine n -Form auf U . Das Integral von ω über eine messbare Menge $A \subset U$ ist durch

$$\int_A \omega := \int_A f d\mu$$

erklärt, falls die rechte Seite existiert.

Das Integral ist insbesondere stets erklärt, wenn A kompakt und ω stetig ist.

Lemma 12.28 — Es sei $\Phi : U \rightarrow V$ ein orientierungserhaltender $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus von offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$, ferner ω eine n -Form auf V und A eine Teilmenge in U . Ist das Integral von ω über $\Phi(A)$ erklärt, so ist auch das Integral von $\Phi^*(\omega)$ über A erklärt, und es gilt

$$\int_A \Phi^*(\omega) = \int_{\Phi(A)} \omega.$$

Beweis. Es sei $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Dann ist

$$\Phi^*(\omega) = (f \circ \Phi) \det D\Phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Da $\det D\Phi$ nach Voraussetzung positiv ist, ergibt sich nach der Transformationsformel

$$\int_A (f \circ \Phi) \det D\Phi d\mu(x) = \int_{\Phi(A)} f d\mu(x),$$

falls eine der beiden Seiten existiert. □

Es sei nun M eine orientierte $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ eine messbare Menge, und ω eine n -Form auf M . Weiter seien $\varphi_i : U_i \rightarrow U_i$, $i = 1, \dots, s$, positiv orientierte Karten von M mit $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_s$, und es seien $\lambda_i : M \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, s$, $\mathcal{C}^k$ -Abbildungen mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$ und der Eigenschaft $\lambda_i \omega|_{A \setminus U_i} = 0$.

Satz und Definition 12.29 — *Das Integral*

$$\int_A \omega := \sum_{i=1}^s \int_{\varphi_i(A)} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \omega)$$

ist erklärt, wenn die rechte Seite erklärt ist. Das hängt ebenso wie der Wert des Integrals nicht von der Wahl der Karten φ_i und der Funktionen λ_i ab.

Beweis. Angenommen, $\alpha_j : V_j \rightarrow V'_j$, $j = 1, \dots, t$, seien weitere positiv orientierte Karten mit $A \subset \bigcup_j V_j$, $\mu_j : M \rightarrow [0, 1]$ seien $\mathcal{C}^k$ -Funktionen mit $\sum_j \mu_j = 1$ und $\mu_j \omega|_{A \setminus V_j} = 0$.

Wir schreiben

$$(\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \omega) = g_i dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d$$

mit einer Funktion $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g_i = \sum_{j=1}^t (\mu_j \circ \varphi_i^{-1}) \cdot g_j.$$

Da die Funktionen μ_j positiv und beschränkt sind, folgt aus der Integrierbarkeit von g_i über $\varphi_i(A)$ auch die Integrierbarkeit von $(\mu_j \circ \varphi_i^{-1}) \cdot g_i$ über $\varphi_i(A)$. Deshalb existieren die Integrale $\int_{\varphi_i(A)} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega)$, und es folgt, dass

$$\int_{\varphi_i(A)} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \omega) = \sum_{j=1}^t \int_{\varphi_i(A)} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\lambda_i \mu_j|_{A \setminus U_i \setminus V_j} = 0.$$

Wir betrachten den Kartenwechsel

$$\chi_{ji} : \alpha_j \circ \varphi_i^{-1} : U_{ij} := \varphi_i(U_i \cap V_j) \longrightarrow V_{ji} := \alpha_j(U_i \cap V_j).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_i(A)} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega) &= \int_{\varphi_i(A) \cap U_{ij}} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega) \\ &= \int_{\alpha_j(A) \cap V_{ij}} \chi_{ji}^* ((\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega)) \\ &= \int_{\alpha_j(A)} (\alpha_j^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega). \end{aligned}$$

Zusammengenommen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^s \int_{\varphi_i(A)} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \omega) &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \int_{\varphi_i(A)} (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega) \\
&= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \int_{\alpha_j(A)} (\alpha_j^{-1})^* (\lambda_i \mu_j \omega) \\
&= \sum_{j=1}^t \int_{\alpha_j(A)} (\alpha_j^{-1})^* (\mu_j \omega)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 12.30 — 1. Die Voraussetzungen zur Definition des Integrals sind stets erfüllt, wenn $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge und ω eine stetige Form ist: Es gibt dann immer endlich viele Karten φ_i , deren Kartengebiete U_i die Menge A überdecken. Als Funktionen λ_i können wir eine Teilung der Eins wählen, die der Familie $\{U_i\}$ untergeordnet ist. Die Mengen $\text{supp}(\lambda_i) \cap A$ sind ebenso kompakt wie ihre Bilder $\varphi_i(\text{supp}(\lambda_i) \cap A)$. Schließlich sind stetige Funktionen über kompakten Mengen stets integrierbar.

2. Wir haben oben das Integral einer Form ω über eine orientierte Mannigfaltigkeit oder eine Teilmenge A davon definiert, indem wir die Mannigfaltigkeit mit offenen Kartengebieten überdeckt und Funktionen λ_i benutzt haben, um dafür zu sorgen, dass $\lambda_i \omega$ außerhalb des Kartengebiets U_i verschwindet.

Beim praktischen Integrieren findet man häufig eine einzige Karte φ derart, dass das Komplement N des Kartengebiets U eine Nullmenge in M ist. Das Integral über M ist dann gleich dem Integral über U . Es genügt also die Integration über U mit der Wahl $\lambda = 1$.

Beispiel 12.31 — Wir wollen die Form $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ über die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ integrieren. Wenn wir die Nullmenge $N = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0, x \leq 0\}$ herausnehmen, kommen wir mit einer einzigen positiv orientierten Karte aus, deren zugehörige Parametrisierung durch Kugelkoordinaten gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\psi : U' &:= (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow S^2 \setminus N, \\
(\varphi, \vartheta) &\mapsto (\cos(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta))^t.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\psi^*(dx) &= -\sin(\varphi) \cos(\vartheta) d\varphi - \cos(\varphi) \sin(\vartheta) d\vartheta \\
\psi^*(dy) &= \cos(\varphi) \cos(\vartheta) d\varphi - \sin(\varphi) \sin(\vartheta) d\vartheta \\
\psi^* dz &= \cos(\vartheta) d\vartheta
\end{aligned}$$

und

$$\psi^* \omega = \cos(\vartheta) d\varphi \wedge d\vartheta.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_{S^2} \omega &= \int_{S^2 \setminus N} \omega &= \int_{U'} \psi^* \omega &= \int_{U'} \cos(\vartheta) d\varphi \wedge d\vartheta \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta) d\mu(\vartheta) d\mu(\varphi) \\
 &= 4\pi.
 \end{aligned}$$

13 Der Satz von Stokes

13.1 Der Satz von Stokes für Quader

Wir betrachten im $\mathbb{R}^n$ den Quader $A = [a, b]$, $a < b$. Der Quader wird von den affinen Hyperflächen

$$H_{i,+} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = b_i\}, \quad H_{i,-} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = a_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

begrenzt. Die Vektorfelder ∂_i auf $H_{i,+}$ und $-\partial_i$ auf $H_{i,-}$ zeigen nach außen (vom Inneren von A aus gesehen). Deshalb orientieren wir die Hyperflächen mit den $(n-1)$ -Formen

$$\omega_{i,+} = \partial_i \lrcorner (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

bzw.

$$\omega_{i,-} = (-\partial_i) \lrcorner (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei $\widehat{dx_i}$ bedeutet, dass wir diesen Faktor auslassen. Schließlich seien $A_{i,\pm} := H_{i,\pm} \cap A$ die Stücke des Randes von A , die durch die Hyperebenen ausgeschnitten werden. Symbolisch schreiben wir

$$\int_{\partial A} := \sum_{(i,\pm)} \int_{A_{i,\pm}}.$$

Satz 13.1 (Satz von Stokes für Quader) — Es sei ω eine $\mathcal{C}^k$ -($n-1$)-Form, $k \geq 1$, die auf einer offenen Umgebung von A definiert ist. Dann gilt

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Beweis. Wir schreiben ω in der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dann gilt

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Außerdem verschwindet dx_j auf den Hyperebenen $H_{j,\pm}$. Darum gilt

$$\omega|_{A_{j,\pm}} = (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

und die anderen Komponenten fallen weg. Wegen der unterschiedlichen Orientierungen auf $H_{j,+}$ und $H_{j,-}$ gilt nun

$$\int_{A_{j,+}} \omega = \int_{\prod_{i \neq j} [a_i, b_i]} f_j(x_1, \dots, b_j, \dots, x_n) d\mu(x)$$

und

$$\int_{A_{j,-}} \omega = - \int_{\prod_{i \neq j} [a_i, b_i]} f_j(x_1, \dots, a_j, \dots, x_n) d\mu(x).$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$${}_j f(x_1, \dots, b_j, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, a_j, \dots, x_n) = \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j.$$

Nach dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{A_{j,+}} \omega + \int_{A_{j,-}} \omega &= \int_{\prod_{i \neq j} [a_i, b_i]} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j d\mu(x) \\ &= \int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\mu. \end{aligned}$$

Indem wir noch über alle j summieren, erhalten wir

$$\int_{\partial A} \omega = \sum_{j=1}^n \int_A \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\mu = \int_A \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} d\mu = \int_A d\omega.$$

□

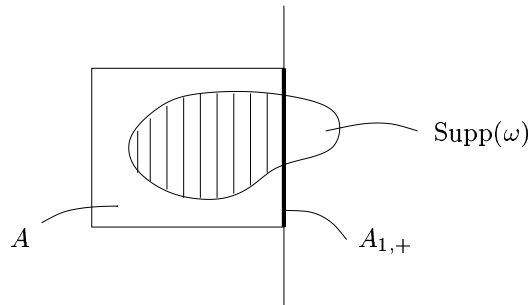
Bemerkung 13.2 — Die folgenden Aussagen sind Spezialfälle des Satzes. Dabei sei ω eine C^1 – $(n-1)$ -Form auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger.

1. Es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$. Denn unter diesen Annahmen können wir einen Quader A wählen, der so groß ist, dass der Träger von ω ganz im Innern von A liegt. Dann verschwindet $d\omega$ auf dem Rand von A und der Satz von Stokes impliziert

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = \int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega = 0.$$

2. Wir integrieren nur über den „linken“ Halbraum $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Dazu wählen wir genauer einen Quader der Form $A = [a_1, 0] \times A_{1,+}$ mit $a_1 < 0$ und einem Quader $A_{1,+} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, die so gewählt sind, dass $\text{Supp}(\omega) \subset A$. Wenn wir A noch weiter vergrößern, ist ω nur auf dem Randstück $A_{1,+}$ von Null verschieden. Es folgt:

$$\int_{\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}} d\omega = \int_A d\omega = \int_{A_{1,+}} \omega = \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega.$$



13.2 Das Differential von Formen auf Mannigfaltigkeiten

Satz und Definition 13.3 — Es sei M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, und ω eine $\mathcal{C}^\ell$ - p -Form auf M , $1 \leq \ell < k$. Dann gibt es genau eine $\mathcal{C}^{\ell-1}$ -($p+1$)-Form $d\omega$ auf M mit der Eigenschaft, dass für jede $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ von M gilt

$$d\omega|_U = \varphi^*(d(\varphi^{-1})^*\omega).$$

Beweis. Es seien $\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i$, $i = 1, 2$, zwei Karten von M mit nichtleerem Durchschnitt $U := U_1 \cap U_2$. Es ist dann zu zeigen, dass

$$\varphi_1^*(d(\varphi_1^{-1})^*\omega)|_U = \varphi_2^*(d(\varphi_2^{-1})^*\omega)|_U.$$

Dazu betrachte die offenen Mengen $V_i := \varphi_i(U)$ und die Kartenwechselabbildung

$$\chi := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : V_2 \rightarrow V_1.$$

Dann gilt wegen $\varphi_2^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \chi$ und $\varphi_1 = \chi \circ \varphi_2$:

$$\begin{aligned} \varphi_2^*(d(\varphi_2^{-1})^*\omega)|_U &= \varphi_2^*(d(\chi^*(\varphi_1^{-1})^*\omega)) \\ &= \varphi_2^*\chi^*(d(\varphi_1^{-1})^*\omega) \\ &\quad \text{weil } d\chi^* = \chi^*d \text{ für Formen im } \mathbb{R}^d, \\ &= \varphi_1^*(d(\varphi_1^{-1})^*\omega) \end{aligned}$$

□

Lemma 13.4 — Es gelten die folgenden Rechenregeln für das Differential von Formen auf Mannigfaltigkeiten:

1. $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$.
2. $d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge d\psi$, wenn ω eine p -Form ist.
3. Ist $\Phi : M \rightarrow N$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung von Mannigfaltigkeiten, dann gilt $\Phi^*(d\omega) = d\Phi^*\omega$.

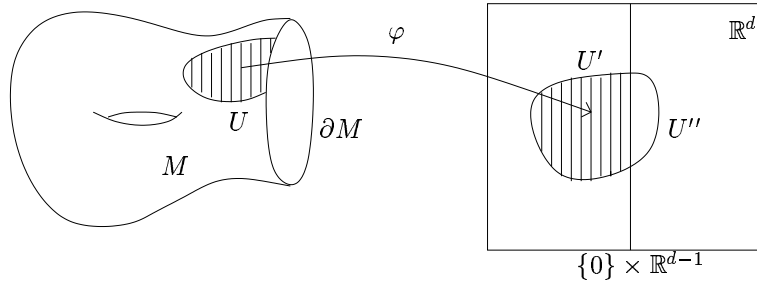
Beweis. Man führt mit Hilfe von Karten alles auf die analogen Regeln für Formen im $\mathbb{R}^n$ zurück. □

13.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand

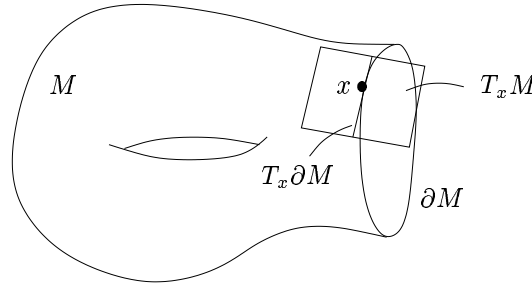
Definition 13.5 — Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine d -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \subset M$, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x in M und eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1. $\varphi : U \rightarrow U' := \varphi(U)$ ist ein Homöomorphismus von U auf eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{d-1}$.
2. $\varphi : (U \cap \partial M) \rightarrow (U' \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1})$ ist ein Homöomorphismus.
3. $\varphi^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt eine $\mathcal{C}^k$ -Fortsetzung $\psi : U'' \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $U'' \subset \mathbb{R}^n$ mit $U' \subset U''$ und $\text{Rang } D\psi(y) = d$ für alle $y \in U''$.

Eine solche Abbildung $\varphi : U \rightarrow U'$ heißt eine Karte von M .



Bemerkung 13.6 — 1. Ein Atlas von M ist wie früher eine Menge von Karten, deren Kartengebiete M überdecken.
 2. Die offene Teilmenge $iM := M \setminus \partial M$ heißt das Innere von M und ist eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit im früheren Sinne.
 3. Der Rand ∂M ist eine $(d-1)$ -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Ist $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ eine Karte von M , so ist $\varphi|_{U \cap \partial M} : U \cap \partial M \rightarrow U' \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ eine Karte von ∂M .



4. Der Tangentialraum an M in einem Randpunkt x ist der Vektorraum $\text{im}(D\psi)$, wobei $\psi : U'' \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Fortsetzung von φ^{-1} für eine in einer Umgebung von x definierte Karte φ ist. In jedem Randpunkt gibt es eine ausgezeichnete Hyperebene $T_x \partial M \subset T_x M$, denn

$$T_x M = D\psi(\mathbb{R}^d) \supset D\psi(\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}) = T_x \partial M.$$

5. Wir nennen eine Funktion auf M ℓ -mal stetig differenzierbar, wenn sich für jede Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ die Abbildung $f \circ \varphi^{-1}$ zu einer $\mathcal{C}^\ell$ -Funktion auf eine offene Menge U'' des $\mathbb{R}^d$ mit $U'' \supset U'$ fortsetzen lässt. Analog sprechen wir von $\mathcal{C}^\ell$ -Vektorfelder, -Formen etc.

Beispiele 13.7 — 1. Der Einheitsball $B^n \subset \mathbb{R}^n$ ist eine kompakte n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial B^n = S^{n-1}$.

2. Die Kugelkappe $K = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 1/2\}$ ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial K = \{(x, y, 1/2) \mid x^2 + y^2 = 3/4\} \cong S^1$.

3. Ist $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung mit nirgends verschwindender Ableitung, dann ist $C := c(I) \subset \mathbb{R}^3$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial C = \{c(a), c(b)\}$.

Satz 13.8 — Es sei M eine d -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gibt es genau ein C^{k-1} -Einheitsnormalenvektorfeld ν auf dem Rand ∂M derart, dass

1. $\nu(x) \in T_x M$ und $\nu(x) \perp T_x \partial M$ für alle $x \in \partial M$,
2. für jede Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ in einer Umgebung von x in ∂M gilt $d\varphi_1(\nu(x)) > 0$.

ν heißt das nach außen gerichtete Normalenvektorfeld entlang ∂M .

Beweis. 1. Es sei $\varphi : U \rightarrow U'$ eine Karte von M in einer Umgebung U des Randpunktes x_0 , und es sei $\psi : U'' \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Fortsetzung von φ^{-1} auf eine offene Menge $U'' \supset U'$. Die Vektoren

$$v_i(x) := \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(\varphi(x)), \quad i = 1, \dots, d$$

bilden in jedem Punkt $x \in U$ eine Basis von $T_x M$. Dabei bilden für Punkte $x \in \partial M$ die Vektoren $v_2(x), \dots, v_d(x)$ eine Basis von $T_x \partial M$. Nach Konstruktion ist $d\varphi_1(x)(v_1) = 1$. Wir wenden nun auf die Vektorfelder $v_d, v_{d-1}, \dots, v_1$ in dieser Reihenfolge (!) das Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt an und erhalten eine Orthonormalbasis $\tilde{v}_d(x), \dots, \tilde{v}_1(x)$ von $T_x M$, wobei $\tilde{v}_d(x), \dots, \tilde{v}_2(x)$ eine Orthonormalbasis von $T_x \partial M$ bilden. Übrigens ist das Orthogonalisierungsverfahren „unendlich oft differenzierbar“, d.h. die Vektorfelder $\tilde{v}$ sind wieder C^{k-1} -Vektorfelder. Nach Konstruktion erhält man $\tilde{v}_1$ als

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1 + \mu_2 \tilde{v}_2 + \dots}{\|v_1 + \mu_2 \tilde{v}_2 + \dots\|}$$

mit irgendwelchen Funktionen $\mu_2, \dots, \mu_d$. Aus dieser Identität folgt $d\varphi_1(\tilde{v}_1) > 0$. Damit hat $\tilde{v}_1$ auf $U \cap \partial M$ alle verlangten Eigenschaften.

2. Es seien $\varphi^{(i)} : U_i \rightarrow U'_i$, $i = 1, 2$, zwei Karten in Umgebungen U_i des Randpunktes x . Die Kartenwechselabbildung $\varphi_{12} = \varphi^{(1)} \circ (\varphi^{(2)})^{-1}$ bildet $\varphi^{(2)}(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{d-1}$ nach $\varphi^{(1)}(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{d-1}$ ab und dabei Teile, die in der Hyperebene $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ liegen, wieder in dieselbe Hyperebene. Deshalb hat die Ableitung von φ_{12} im Punkt $\varphi^{(2)}(x)$ die folgende Form:

$$D\varphi_{12}(\varphi_2(x)) = \left(\begin{array}{c|ccc} c & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right)$$

mit $c > 0$. Daraus folgt wegen $T\varphi^{(1)} = D\varphi_{12} \circ T\varphi^{(2)}$ für jeden Tangentialvektor $v \in T_x M$:

$$\begin{aligned} d\varphi_1^{(1)}(v) = (T_x \varphi^{(1)}(v))_1 &= \left(D\varphi_{12}(\varphi^{(2)}(x))(T_x \varphi^{(2)}(v)) \right)_1 \\ &= c \cdot (T_x \varphi^{(2)}(v))_1 \\ &= c \cdot d\varphi_1^{(2)}(v). \end{aligned}$$

(Beachte, dass hier untere Indizes Komponenten von Vektoren bedeuten und obere geklammerte Indizes die beiden Karten numerieren.) Man entnimmt dieser

Gleichung, dass die Bedingung $d\varphi_1(v) > 0$ des Satzes nicht von der verwendeten Karte abhängt.

3. In $T_x M$ gibt es genau zwei Einheitsvektoren, die senkrecht auf $T_x \partial M$ stehen. Durch die Bedingung 2 des Satzes wird einer davon ausgezeichnet, und diese Auswahl hängt nach der Argumentation von Teil 2 des Beweises nicht von der verwendeten Karte ab. Es gibt deshalb in jedem Punkt $x \in \partial M$ genau einen nach außen weisenden Einheitsnormalenvektor in $T_x M$. Das Argument aus Teil 1, nämlich die Konstruktion des Vektorfeldes $\tilde{v}_1$, zeigt, dass dieser nach außen weisende Einheitsnormalenvektor $k - 1$ -mal stetig differenzierbar vom Punkt x abhängt. Wegen der Eindeutigkeit verkleben sich die auf verschiedenen Kartengebieten definierten Vektorfelder zu dem gesuchten Vektorfeld auf ∂M . $\square$

Satz 13.9 — *Es sei $(M, [\omega])$ eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand, und es sei ν das nach außen gerichtete Normalenvektorfeld entlang ∂M . Dann ist die $(n - 1)$ -Form $\tilde{\omega}$ mit*

$$\tilde{\omega}(x) := \nu(x) \lrcorner \omega(x),$$

d.h.

$$\tilde{\omega}(x)(v_1, \dots, v_{d-1}) = \omega(\nu(x), v_1, \dots, v_{d-1})$$

für $x \in \partial M$ und $v_1, \dots, v_{d-1} \in T_x \partial M$, eine Orientierung von ∂M .

Wir nennen diese Orientierung die von M vererbte oder die induzierte Orientierung des Randes. Wenn wir im Folgenden den Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit betrachten, nehmen wir immer diese Orientierung.

13.4 Der Satz von Stokes

Satz 13.10 (Satz von Stokes¹⁵) — *Es sei M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und α eine $\mathcal{C}^1$ -($d - 1$)-Form auf M . Dann gilt*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Beweis. Da M kompakt ist, gibt es einen endlichen Atlas $\{\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i\}_{i=1, \dots, s}$ aus positiv orientierten Karten. Wir wählen eine diesem Atlas untergeordnete Teilung der Eins $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, s}$. Dann genügt es zu zeigen, dass für jedes $i = 1, \dots, s$ die Gleichheit

$$\int_M d(\lambda_i \alpha) = \int_{\partial M} \lambda_i \alpha$$

besteht. Der Träger von $\lambda_i \alpha$ ist kompakt und liegt ganz in der offenen Menge U_i . Nach Definition des Integrals und mit der Bezeichnung $\beta := (\varphi_i^{-1})^* / \lambda_i \alpha$ genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{U'_i} d\beta = \int_{\partial U'_i} \beta,$$

wobei $\partial U'_i = U'_i \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Diesen Fall haben wir bereits in 13.2 behandelt. $\square$

¹⁵George Gabriel Stokes * 13.8.1819 † 1.2.1903

14 Integration auf Mannigfaltigkeiten II

14.1 Die Gramsche Determinante

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ gibt durch Einschränkung ein Skalarprodukt auf jedem Tangentialraum $T_x M \subset \mathbb{R}^n$. Es sei nun $\varphi : U \rightarrow U'$ eine Karte von M und $\psi = \varphi^{-1} : U' \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ die dazu inverse Parametrisierung von M . Für jeden Punkt $y \in U'$ bilden die Vektoren

$$v_i = v_i(y) := \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y), \quad i = 1, \dots, d,$$

eine Basis des Vektorraums $T_{\psi(y)} M$. Es sei $e'_1, \dots, e'_d$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums. Schreiben wir

$$v_i = \sum_{k=1}^d A_{ki} e_k,$$

so ist, wie wir früher gesehen haben, $|\det A|$ das d -dimensionale Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren $v_1, \dots, v_d$ aufgespannt wird. Wir wollen zunächst dieses Volumen ohne Verwendung der Orthonormalbasis ausdrücken. Nun gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{s,t} A_{si} A_{tj} \langle e'_s, e'_t \rangle = \sum_s A_{si} A_{sj} = (A^t A)_{ij}.$$

Insbesondere gilt

$$\det(\langle v_i, v_j \rangle) = \det(A^t A) = \det(A)^2.$$

Das Volumen des Parallelepipeds ist folglich durch

$$\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} = |\det A|$$

gegeben.

Definition 14.1 — Die Funktion $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(y) = \det \left(\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y), \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(y) \right\rangle_{i,j} \right),$$

heißt Gramsche¹⁶ Determinante der Karte $\varphi : U \rightarrow U'$.

Lemma 14.2 — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, und $\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i$, $i = 1, 2$, seien zwei Karten von M . Es bezeichne $\varphi_{12} := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ die Kartenwechselabbildung und g_i die Gramsche Determinante auf U'_i , $i = 1, 2$. Dann gilt

$$\sqrt{g_1 \circ \varphi_{12}} \cdot |\det D\varphi_{12}| = \sqrt{g_2}$$

auf $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$.

¹⁶Jorgen Pedersen Gram * 27.6.1850 † 29.4.1916

Beweis. Bezeichnet $\psi_i := \varphi_i^{-1}$, so gilt $\psi_1 \circ \varphi_{12} = \psi_2$. Wir kürzen die Matrix $D\varphi_{12}(y)$ mit B ab und finden nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y_i}(y) = \sum_{\ell} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{\ell}}(\varphi_{12}(y)) \cdot B_{\ell i}.$$

Es folgt

$$\left\langle \frac{\partial \psi_2}{\partial y_i}, \frac{\partial \psi_2}{\partial y_j} \right\rangle(y) = \sum_{k, \ell} B_{i\ell}^t \cdot \left\langle \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{\ell}}, \frac{\partial \psi_1}{\partial y_k} \right\rangle(\varphi_{12}(y)) \cdot B_{kj}.$$

Durch Übergang zur Determinante erhält man

$$g_2(y) = \det(B^t) \cdot g_1(\varphi_{12}(y)) \cdot \det(B),$$

also

$$\sqrt{g_2} = \sqrt{g_1 \circ \varphi_{12}} \cdot |\det(B)|.$$

□

Lemma 14.3 — *Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Lemma 14.2 sei zusätzlich $K \subset M$ eine messbare Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $\text{supp}(f) \cap K \subset U_1 \cap U_2$. Dann gilt*

$$\int_{\varphi_1(K)} (f \circ \varphi_1^{-1}) \cdot \sqrt{g_1} d\mu = \int_{\varphi_2(K)} (f \circ \varphi_2^{-1}) \cdot \sqrt{g_2} d\mu.$$

Beweis. Die Annahme über den Träger bedeutet, dass man in beiden Integrale den Integrationsbereich durch $\varphi_i(K \cap \text{supp}(f))$ ersetzen kann. Die Kartenwechselabbildung $\varphi_{12} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ ist ein Diffeomorphismus. Nach der Transformationsregel für das Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^d$ folgt:

$$\int_{\varphi_1(K)} (f \circ \varphi_1^{-1}) \cdot \sqrt{g_1} d\mu = \int_{\varphi_2(K)} (f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_{12} \cdot \sqrt{g_1 \circ \varphi_{12}} \cdot |\det D\varphi_{12}| d\mu. \quad (14.1)$$

Nach Lemma 14.2 ist $\sqrt{g_1 \circ \varphi_{12}} \cdot |\det D\varphi_{12}| = \sqrt{g_2}$. Damit ist die rechte Seite von (14.1) gleich

$$\int_{\varphi_2(K)} (f \circ \varphi_2^{-1}) \sqrt{g_2} d\mu,$$

wie zu zeigen war. □

Satz und Definition 14.4 — *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ferner sei $A := \{\alpha_i : U_i \rightarrow U'_i\}$ ein abzählbarer Atlas, g_i die Gramsche Determinante der Karte α_i , und $\{\lambda_i\}$ eine untergeordnete Teilung der Eins. Das Maß einer messbaren Menge $K \subset M$*

$$\mu_M(K) := \sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i} d\mu_{\mathbb{R}^d}$$

hängt nicht von der Wahl des Atlanten oder der Teilung der Eins ab.

Beweis. Falls die rechte Seite für alle Wahlen eines Atlanten und einer Teilung der Eins unendlich ist, so hat K das Maß unendlich, und es ist nichts zu zeigen.

Wir nehmen daher ohne Einschränkung an, dass es einen Atlas $\mathcal{A}$ und eine Teilung der Eins $\{\lambda_i\}$ wie im Satz gibt, für die

$$\sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \circ \varphi_i^{-1}) \sqrt{g_i} d\mu_{\mathbb{R}^d} < \infty$$

gilt. Das bedeutet, dass jede der Funktionen

$$(\lambda_i \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i}|_{\alpha_i(K)}$$

integrierbar ist, und dass die Summe

$$\sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i} d\mu_{\mathbb{R}^d}$$

konvergiert.

Es sei nun $B = \{\beta_j : V_j \rightarrow V'_j\}_{j \in J}$ ein zweiter abzählbarer Atlas und $\{\mu_j\}$ die zugehörige Teilung der Eins. Da die Funktionen μ_j nichtnegativ, stetig und ≤ 1 sind, sind auch die Funktionen

$$(\lambda_i \mu_j \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i}|_{\alpha_i(K)}$$

integrierbar, und nach dem Satz von Lebesgue gilt

$$\int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i} d\mu_{\mathbb{R}^d} = \sum_{j \in J} \int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \mu_j \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i} d\mu_{\mathbb{R}^d}$$

Es genügt, in jedem Summanden die Integration über

$$\alpha_i(K \cap \text{Supp}(\lambda_i) \cap \text{Supp}(\mu_j))$$

zu erstrecken. Gemäß Lemma 14.3 kann man im Integrationsprozess die Karte α_i gegen die Karte β_j vertauschen:

$$\int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \mu_j \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d} = \int_{\beta_j(K)} (\lambda_i \mu_j \circ \beta_j^{-1}) \sqrt{\tilde{g}_j(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d},$$

wenn $\tilde{g}_j$ die Gramsche Determinante für die Karte β_j bezeichnet. Da alle Terme der folgenden konvergenten Reihe positiv sind, dürfen wir umsortieren:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d} &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{\alpha_i(K)} (\lambda_i \mu_j \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d} \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{\beta_j(K)} (\lambda_i \mu_j \circ \beta_j^{-1}) \sqrt{\tilde{g}_j(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d} \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \int_{\beta_j(K)} (\lambda_i \mu_j \circ \beta_j^{-1}) \sqrt{\tilde{g}_j(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d} \\ &= \sum_{j \in J} \int_{\beta_j(K)} (\mu_j \circ \beta_j^{-1}) \sqrt{\tilde{g}_j(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ging Satz 5.4 ein. Damit ist gezeigt, dass auch die mit Hilfe des Atlanten B und der Teilung der Eins $\{\mu_j\}$ definierte Summe endlich ist und mit der Summe übereinstimmt, die mit Hilfe des Atlas A und der Teilung der Eins $\{\lambda_i\}$ konstruiert wurde.

Im Umkehrschluss folgt: Ist die Summe bezüglich eines Atlanten ∞ , so auch bezüglich jedes anderen. $\square$

Bemerkung 14.5 — Man zeigt ohne größere Schwierigkeiten, dass die Menge der messbaren Teilmengen von M eine σ -Algebra ist und dass μ_M ein Maß auf dieser σ -Algebra ist.

Von jetzt an übertragen sich alle Definitionen und Aussagen über messbare oder integrierbare Funktionen im $\mathbb{R}^n$ auf Funktionen auf Mannigfaltigkeiten.

Eine Funktion ist messbar, wenn es zu jedem Punkt x von M eine in einer Umgebung von x definierte Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ gibt derart, dass $f \circ \varphi^{-1}$ messbar ist. Mit den denselben Bezeichnungen wie in Definition 14.4 ist das Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion f durch

$$\int_M f d\mu_M = \sum_{i \in I} \int_{\alpha_i(K)} (f \lambda_i \circ \alpha_i^{-1}) \sqrt{g_i(y)} d\mu_{\mathbb{R}^d}$$

gegeben.

Die Konvergenzsätze von Levi, Fatou, Lebesgue übertragen sich ebenso wie die Sätze über parameterabhängige Integrale und der Satz von Fubini.

Zusammenhang zum Integral von Differentialformen

Satz und Definition 14.6 (Volumenform) — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale orientierte C^k -Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$. Es gibt genau eine d -Form ω_M auf M mit der Eigenschaft, dass für alle positiv orientierten Karten $\varphi : U \rightarrow U'$ gilt

$$(\varphi^{-1})^* \omega_M = \sqrt{g} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d.$$

Dabei ist $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$ die Gramsche Determinante zur Karte. Diese Form ω_M ist eine C^{k-1} -Form und heißt die Volumenform auf M .

Beweis. Wenn es überhaupt eine solche Form gibt, so muss sie auf dem Definitionsbereich einer Karte $\varphi : U \rightarrow U'$ wie folgt gegeben sein:

$$\omega_M|_U = \varphi^*(\psi^* \omega_M) = \varphi^*(\sqrt{g} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d).$$

Deshalb definieren wir jetzt $\omega_M|_U$ durch den Ausdruck auf der rechten Seite. Damit daraus durch Verkleben eine wohldefinierte Form ω_M auf M werden kann, müssen wir zeigen, dass wir auf dem Durchschnitt der Kartengebiete zweier verschiedener Karten dieselbe Form bekommen.

Es sei also $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ eine weitere positiv orientierte Karte und $\chi := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ der zugehörigen Kartenwechsel. Mit $\chi \circ \varphi = \tilde{\varphi}$ und Lemma 14.2 folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^*(\sqrt{\tilde{g}} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d) &= \varphi^*(\chi^*(\sqrt{\tilde{g}} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d)) \\ &= \varphi^*(\sqrt{\tilde{g} \circ \chi} \det D\chi dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d) \\ &= \varphi^*(\sqrt{g} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d). \end{aligned}$$

$\square$

Satz 14.7 — Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $A \subset M$ kompakt. Dann gilt

$$\int_A f \omega_M = \int_A f d\mu_M.$$

Beweis. Durch Verwendung einer Teilung der Eins reduziert man auf den Fall, dass der Träger von f ganz in einem Kartengebiet liegt. Die Behauptung folgt dann aus der Definition von ω_M und der Definition des Lebesgue-Integrals auf M . $\square$

Wir bezeichnen das Maß der Mannigfaltigkeit M als Teilmenge von M als ihr Volumen:

$$\text{vol}(M) := \mu_M(M).$$

Bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten sprechen wir von ihrer Fläche oder Oberfläche, bei eindimensionalen von ihrer Länge.

Beispiel 14.8 — Um die Oberfläche der Kugel zu berechnen, verwenden wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \psi : (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow S^2, \\ (\varphi, \vartheta) &\mapsto (\cos(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta)). \end{aligned}$$

Das Bild U von ψ ist das Komplement der Nullmenge

$$N = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0, x \leq 0\}.$$

Deshalb gilt $\text{vol}(S^2) = \mu_{S^2}(S^2) = \mu_{S^2}(U)$, und es genügt mit dieser Parametrisierung zu rechnen: Die Ableitungen von ψ nach den Winkeln φ und ϑ sind

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Damit findet man für die Gramsche Determinante

$$g(\vartheta) = \det \begin{pmatrix} \cos^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos^2(\vartheta).$$

Es folgt:

$$\text{vol}(S^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(\vartheta)| d\vartheta d\varphi = 2\pi \sin(\vartheta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi.$$

$\square$

Beispiel 14.9 (Oberfläche einer allgemeinen Kugel) — Wir betrachten im $\mathbb{R}^n$ eine Kugel S mit Radius r und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Es sei Φ die Abbildung aus Beispiel 7.4. Dann ist die Abbildung

$$\psi : (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)^{n-2} \rightarrow S, (\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \mapsto \Phi(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \quad (14.2)$$

eine Parametrisierung einer offenen Menge in S , deren Komplement eine Nullmenge ist. Man rechnet nach, dass die Ableitungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial \theta_{n-2}},$$

paarweise senkrecht aufeinander stehen, und dass

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\| = r \cos(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_1), \quad \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \theta_i} \right\| = r \cos(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_{i+1}).$$

Daraus ergibt sich leicht die Gramsche Determinante:

$$\sqrt{g(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})} = r^{n-1} \cos(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \cdots \cos^{n-2}(\theta_{n-2}).$$

Das Volumen von S ist daher

$$\mu(S) = r^{n-1} \omega_{n-1}$$

mit der Konstanten

$$\omega_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-2} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^i(\theta) d\theta.$$

Beispiel 14.10 (Oberfläche eines Rotationskörpers) — Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive, stetig differenzierbare Funktion und F die Fläche im $\mathbb{R}^3$ die bei Rotation des Graphen von f um die x -Achse entsteht, d.h.

$$F = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

F ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Rand, der aus zwei Komponenten besteht. Wir parametrisieren das Innere von F (bis auf eine Nullmenge) durch

$$\psi : (0, 2\pi) \times [a, b] \rightarrow F, \quad (\varphi, x) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \cos(\varphi) \\ f(x) \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Gramsche Determinante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \sin(\varphi) \\ f(x) \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \cos(\varphi) \\ f'(x) \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle = f(x)^2, \quad \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle = 1 + f'(x)^2,$$

und erhalten

$$g(\varphi, x) = \det \begin{pmatrix} f(x)^2 & 0 \\ 0 & 1 + f'(x)^2 \end{pmatrix} = f(x)^2 (1 + f'(x)^2).$$

Die gesuchte Oberfläche ist daher durch

$$\text{vol}(F) = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx d\varphi = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

gegeben.

Bemerkung 14.11 — Ich habe zu Beginn von Kapitel 12.3 von der Integration auf Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik gesprochen. In allen Definitionen und Sätzen dieses Kapitels haben wir benutzt, dass die betrachtete Mannigfaltigkeit M eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist und dass deshalb der Tangentialraum $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ in jedem Punkt x der Mannigfaltigkeit durch Einschränkung des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt erbt.

Stattdessen könnte man etwas allgemeiner mit einem Skalarprodukt arbeiten, das selbst von Punkt zu Punkt auf differenzierbare Weise variiert. Dann bleiben — nach minimalen Änderungen — alle Definitionen und Sätze gültig. Ein solches variables Skalarprodukt nennt man eine Riemannsche Metrik, und Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik heißen Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten kann man über die Länge von Wegen reden, man sucht die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten, sogenannten geodätischen Linien, und entwickelt eine Theorie der Krümmung. Diese Untersuchungen sind Gegenstand der Differentialgeometrie.

14.2 Bogenlängen

Es sei $c : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve mit $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Wenn I kompakt und c injektiv ist, ist das Bild C eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Die Länge von C im obigen Sinne ist dann durch das folgende Integral gegeben:

$$\text{Länge}(C) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Gemäß Satz 14.4 ist diese Länge nicht von der Parametrisierung abhängig, sondern allein durch C bestimmt.

Beispiel 14.12 (Kreisumfang) — Wir parametrisieren den Kreis

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

vom Radius r durch $c : (0, 2\pi) \rightarrow C$, $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Dann ist $|c'(t)| = r$ und somit

$$\text{Länge}(C) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Beispiel 14.13 — Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Der Graph $C = \{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$ von f ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und hat die Länge

$$\text{Länge}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Im Fall von Kurven kann man den Längenbegriff auch auf andere, sogar etwas allgemeinere und einfachere Weise einführen:

Wir betrachten im folgenden stets parametrisierte Kurven, also stetige Abbildungen

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall ist. Unter einer Umparametrisierung von c verstehen wir eine Kurve der Form $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $\varphi : J \rightarrow I$ ein monoton wachsender Homöomorphismus ist.

Für jede Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_s = b\}$, $t_0 < t_1 < \dots < t_s$ approximiert der Polygonzug

$$c_{\mathcal{Z}}(s) := \frac{t_{i+1} - s}{t_{i+1} - t_i} c(t_i) + \frac{s - t_i}{t_{i+1} - t_i} c(t_{i+1}), \quad \text{für } s \in [t_i, t_{i+1}],$$

die parametrisierte Kurve c . Die Länge des Polygonzugs ist

$$L(c_{\mathcal{Z}}) = \sum_{i=0}^{s-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|.$$

Es folgt sofort aus der Dreiecksungleichung, dass für eine verfeinerte Zerlegung $\mathcal{Z}' \supset \mathcal{Z}$ die Abschätzung

$$L(c_{\mathcal{Z}'}) \geq L(c_{\mathcal{Z}})$$

besteht.

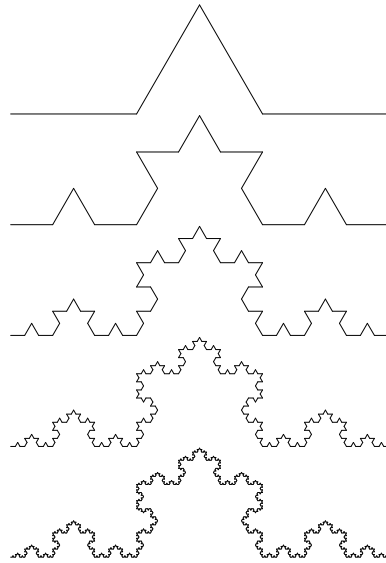
Definition 14.14 — Eine stetige Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar, wenn

$$L(c) := \sup\{L(c_{\mathcal{Z}}) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } I\}$$

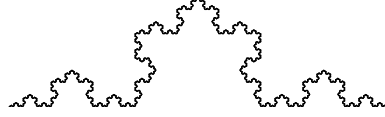
endlich ist. In diesem Falle heißt $L(c)$ die Länge von c .

Es ist klar, dass die Länge einer rektifizierbaren Kurve sich bei Umparametrisierung nicht ändert.

Beispiel 14.15 — Die von Koch'sche¹⁷ Kurve c ist der Grenzwert der gleichmäßig konvergenten Folge von stückweise linearen Kurven c_n , die hier als Bilder wiedergegeben sind, woraus das Bildungsgesetz klar wird:



¹⁷Niels Fabian Helge von Koch * 25.1.1870 † 11.3.1924.



Die Länge von c_n ist $(4/3)^n L(c_0)$. Die Kurve c ist stetig, aber nicht rektifizierbar, denn die Kurven c_n sind Polygonzugapproximationen an c und ihre Längen gehen gegen ∞ . Man kann zeigen, dass c nirgends differenzierbar ist.

Satz 14.16 — *Ist $c : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist c rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Beweis. Nach Annahme ist die Abbildung $t \mapsto c'(t)$ stetig, also sogar gleichmäßig stetig. Deshalb gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass $\|c'(t) - c'(s)\| < \varepsilon$ sobald $|t - s| < \delta$. Für ein Teilintervall $[a', b'] \subset I$ mit $b' - a' \leq \delta$ und beliebiges $s \in [a, b]$ gilt nun

$$\frac{1}{b' - a'} (c(b') - c(a')) - c'(s) = \frac{1}{b' - a'} \int_{a'}^{b'} (c'(t) - c'(s)) dt$$

also

$$\left\| \frac{1}{b' - a'} \|c(b') - c(a')\| - \|c'(s)\| \right\| \leq \varepsilon.$$

Erneute Integration von a' bis b' gibt:

$$\left\| \|c(b') - c(a')\| - \int_{a'}^{b'} \|c'(s)\| dx \right\| \leq (b' - a')\varepsilon.$$

Wir wenden diese Abschätzung auf jedes Teilintervall einer Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0, \dots, t_N\}$ mit der Eigenschaft $\max\{|t_{i+1} - t_i| \mid t = 0, \dots, N-1\} < \delta$ an und erhalten nach Summation über alle Teilintervalle:

$$\left| L(c_{\mathcal{Z}}) - \int_a^b \|c'(t)\| dt \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

Lassen wir ε gegen Null gehen und gehen zu immer feineren Zerlegungen über, so folgt im Grenzübergang die Behauptung. $\square$

15 Der Gaußsche Integralsatz

15.1 Die Integralsätze von Gauß und Green

Satz 15.1 (Gaußscher Integralsatz) — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Es sei $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$ das nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektorfeld. Ferner sei $X : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$ -Vektorfeld, dass in einer Umgebung W von M definiert ist. Dann gilt:

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\mu_M = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, d\mu_{\partial M}. \quad (15.1)$$

Beweis. 1. Wir betrachten die $(n-1)$ -Form α auf U mit

$$\alpha := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dann gilt

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \operatorname{div} X \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Deshalb ist die linke Seite in (15.1) nach dem Satz von Stokes gleich

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\mu_M = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha. \quad (15.2)$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, d\mu_{\partial M}. \quad (15.3)$$

2. Dazu sei $\varphi : U \rightarrow U'$ eine positiv orientierte Karte von ∂M und $\psi := \varphi^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ die dazu inverse Parametrisierung. Mit Hilfe einer Teilung der Eins reduziert man das Problem auf den Fall, dass der Träger von $X|_{\partial M}$ ganz in U liegt.

Es bezeichne B_i das Vektorfeld

$$B_i(y) := \frac{\partial \psi}{\partial y_i}$$

und B die $n \times (n-1)$ -Matrix mit den Spalten $B_1, \dots, B_{n-1}$, ferner $B_{(i)}$ die Matrix, die aus B durch Streichen der i -ten Zeile entsteht.

3. Zur rechten Seite von (15.3):

Die Gramsche Determinante ist

$$g(y) = \det(B^t B).$$

Mit den Bezeichnungen von 12.22 ist

$$Z := [B_1, \dots, B_{n-1}]$$

ein nach außen weisendes Normalenvektorfeld an ∂M . Die einzelnen Komponenten von Z sind $Z_i = (-1)^{i-1} \det(B_{(i)})$. Wir wissen außerdem nach 12.22, dass Z die Länge

$$\|Z\| = \sqrt{B^t B} = \sqrt{g}$$

hat, und dass das Einheitsvektorfeld ν aus Z durch Normierung entsteht. Deshalb gilt

$$\nu(\psi(y)) \cdot \sqrt{g(y)} = Z(y).$$

Es folgt:

$$\langle X \circ \psi, \nu \rangle \cdot \sqrt{g(y)} = \langle X \circ \psi, Z \rangle.$$

Die rechte Seite in 15.3 ergibt sich somit zu

$$\int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\mu_{\partial M} = \int_{U'} \langle X \circ \psi, Z \rangle d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}}. \quad (15.4)$$

4. Zur linken Seite von (15.3):

Mit der Beziehung

$$d\psi_j = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} dy_i = \sum_{i=1}^{n-1} B_{ji} dy_i$$

folgt

$$d\psi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\psi_i} \wedge \dots \wedge d\psi_n = \det B_{(i)} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}.$$

Jetzt können wir $\psi^* \alpha$ hinschreiben:

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X_i(\psi) d\psi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\psi_i} \wedge \dots \wedge d\psi_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X_i(\psi) \det B_{(i)} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(\psi) Z_i dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1} \\ &= \langle X(\psi), Z \rangle dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_{U'} \psi^* \alpha = \int_{U'} \langle X(\psi), Z \rangle d\mu \quad (15.5)$$

5. Aus dem Vergleich von (15.5) und (15.4) folgt die Behauptung. $\square$

Wir wenden den Gaußschen Integralsatz speziell auf Vektorfelder der folgenden Form an:

$$X(x) = f(x) \operatorname{grad} g(x),$$

wobei f eine $\mathcal{C}^1$ -Funktion und g eine $\mathcal{C}^2$ Funktion ist. Dann gilt:

$$\operatorname{div} X = f \Delta(g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle.$$

Andererseits kann man das Skalarprodukt von X mit einem Vektor v nach Definition des Gradienten als Richtungsableitung aufschreiben:

$$\langle X, v \rangle = f D_v g.$$

Setzt man diese Ausdrücke in den Gaußschen Integralsatz ein, so erhält man die erste Hälfte des folgenden Satzes:

Satz 15.2 (Greensche Formeln) — Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit mit Rand, und ν bezeichne das nach außen weisende Einheitsnormalenvektorfeld auf ∂M .

1. Für jede C^1 -Funktion f und jede C^2 -Funktion g gilt

$$\int_M (f \Delta g + \langle \text{grad} f, \text{grad} g \rangle) d\mu = \int_{\partial M} f D_\nu g d\mu_{\partial M}.$$

2. Für alle C^2 -Funktionen f und g gilt

$$\int_M (f \Delta g - g \Delta f) d\mu = \int_{\partial M} (f D_\nu g - g D_\nu f) d\mu_{\partial M}.$$

Beweis. Wir haben bereits hergeleitet wie die erste Aussage des Satzes aus dem Gaußschen Integralsatz folgt. Vertauscht man die Rollen von f und g , so erhält man:

$$\int_M (f \Delta g + \langle \text{grad} f, \text{grad} g \rangle) d\mu = \int_{\partial M} f D_\nu g d\mu_{\partial M}.$$

und

$$\int_M (g \Delta f + \langle \text{grad} g, \text{grad} f \rangle) d\mu = \int_{\partial M} g D_\nu f d\mu_{\partial M}.$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt die zweite Aussage des Satzes. $\square$

15.2 Harmonische Funktionen

Definition 15.3 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ heißt harmonisch, wenn $\Delta f = 0$.

Beispiele 15.4 — 1. Trivialerweise sind alle lineare Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonisch, weil sämtliche zweiten Ableitungen verschwinden. Auf $\mathbb{R}$ oder Intervallen sind die linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ offensichtlich auch die einzigen harmonischen Funktionen. Die Situation ist in höheren Dimensionen ganz anders:

2. Es sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe, d.h. komplex differenzierbare Funktion. Dann sind Real- und Imaginärteil von f harmonische Funktionen: Zum Beispiel hat die holomorphe Funktion z^2 den Realteil $x^2 - y^2$ und den Imaginärteil $2xy$. Die holomorphe Funktion e^z hat den Realteil $e^x \cos(y)$ und den Imaginärteil $e^x \sin(y)$. In beiden Fällen sieht man sofort durch Nachrechnen, dass Real- und Imaginärteil harmonisch sind. Holomorphe Funktionen und die Beziehung zu harmonischen Funktionen sind Gegenstand einer Vorlesung über Funktionentheorie.

3. Die Funktion

$$N(x) := \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \|x\|^{2-n} & , \text{ falls } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log(\|x\|) & , \text{ falls } n = 2. \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heißt Newtonpotential. Dabei bezeichnet ω_{n-1} wie in Beispiel 14.9 die Oberfläche der Einheitssphäre S^{n-1} . Der Gradient des Newtonpotentials ist

$$\text{grad} N(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{x}{\|x\|^n}$$

für alle $n \geq 2$. Daraus folgt:

$$\Delta N(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} N(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \left(\frac{n}{\|x\|^n} - \sum_i x_i^2 \frac{-n}{\|x\|^{n+2}} \right) = 0.$$

D.h. das Newtonpotential ist eine auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonische Funktion.

Folgerung 15.5 — *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit mit Rand und nach außen weisendem Einheitsnormalenvektorfeld $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für jede auf einer Umgebung von M definierte harmonische Funktion f gilt*

$$\int_{\partial M} D_\nu f \, d\mu_{\partial M} = 0. \quad (15.6)$$

Beweis. Es genügt in der zweiten Greenschen Formel $g = 1$ zu nehmen. $\square$

Folgerung 15.6 — *Mit denselben Bezeichnungen: Ist f harmonisch und gibt es Teile $A, B \subset \partial M$ mit $A \cup B = \partial M$ derart, dass $f|_A = 0$ oder $D_\nu f|_B = 0$, so ist f auf jeder Komponente von M konstant.*

Beweis. Die erste Greensche Formel liefert für harmonisches f mit $g = f$ die Gleichung

$$\int_M \|\operatorname{grad} f\|^2 \, d\mu = \int_{\partial M} f D_\nu f \, d\mu.$$

Unter Voraussetzung an f verschwindet der Integrand auf der rechten Seite auf dem gesamten Rand ∂M . Der Gradient ist daher fast überall auf M Null und verschwindet als stetiges Vektorfeld überall. Die Funktion f ist daher lokal konstant. $\square$

Satz 15.7 — *Es sei M wie in Satz 15.2, und es bezeichne N das n -dimensionale Newtonpotential. Für jede Funktion f , die in einer Umgebung von M definiert und harmonisch ist, und jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^n \setminus \partial M$ gilt:*

$$\int_{\partial M} \left(D_\nu f(x) N(x-p) - f(x) D_\nu N(x-p) \right) d\mu_{\partial M} = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \in \mathbb{R}^n \setminus M, \\ f(p), & \text{falls } p \in M \setminus \partial M. \end{cases}$$

Beweis. 1. Es sei zunächst p ein Punkt außerhalb von M . Dann ist die Funktion $x \mapsto N(x-p)$ in einer Umgebung von M harmonisch. Deshalb ist die linke Seite in der zweiten Greenschen Formel, angewendet auf $f(x)$ und $N(x-p)$, Null, und es folgt die Behauptung des Satzes.

2. Es sei jetzt p ein Punkt im Innern von M . Es gibt dann ein $r > 0$ derart, dass ein abgeschlossener Ball $B_r(p)$ vom Radius r mit Mittelpunkt p noch ganz im Innern von M liegt. Der Rand von $M' := M \setminus U_r(0)$ besteht aus dem Rand von M und dem Rand S_r von $B_r(p)$, wobei allerdings S_r als Rand von M' genau die umgekehrte Orientierung wie als Rand von $B_r(p)$ bekommt. Die Funktionen $N(x-p)$ und $f(x)$ sind auf M' harmonisch, und deshalb folgt aus der zweiten

Greenschen Formel, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial M} \left(D_\nu f(x) N(x-p) - f(x) D_\nu N(x-p) \right) d\mu \\ &\quad - \int_{S_r} \left(D_\nu f(x) N(x-p) - f(x) D_\nu N(x-p) \right) d\mu. \end{aligned}$$

Dabei rührt das Vorzeichen beim zweiten Summanden daher, dass wir als Orientierung von S_r die uns vertraute als Rand von $B_r(p)$ wählen. Zum Beweis des Satzes ist also zu zeigen, dass

$$\int_{S_r} \left(D_\nu f(x) N(x-p) - f(x) D_\nu N(x-p) \right) d\mu = f(p).$$

Für alle $x \in S_r$ ist $N(x-p) = c$ für eine von r abhängige Konstante, und $\text{grad} N(x-p) = (x-p)/(\omega_{n-1} r^n)$. Andererseits ist das nach außen weisende Einheitsnormalenvektorfeld auf S_r einfach $\nu(x) = (x-p)/r$, also

$$D_\nu N(x-p) = \langle \nu(x), \text{grad} N(x-p) \rangle = \frac{\|x-p\|^2}{\omega_{n-1} r^{n+1}} = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}}. \quad (15.7)$$

Der erste Summand

$$\int_{S_r} D_\nu f(x) N(x-p) d\mu = c \int_{S_r} D_\nu f d\mu = 0$$

verschwindet gemäß Folgerung 15.5. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_{S_r} f(x) D_\nu N(x-p) d\mu = f(p).$$

Tatsächlich ist die linke Seite gemäß 15.7 gleich

$$\int_{S_r} f(x) D_\nu N(x-p) d\mu = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S_r} f d\mu.$$

Der Diffeomorphismus $\Phi : S \rightarrow S_r$, $x \mapsto p + rx$, hat die Funktionaldeterminante r^{n-1} . Es folgt:

$$\int_{S_r} f(x) D_\nu N(x-p) d\mu = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_S f(p + rx) d\mu. \quad (15.8)$$

Auf der rechten Seite wird jetzt für jedes r über dieselbe Mannigfaltigkeit integriert, nämlich die Einheitssphäre. Dafür hängt der Integrand von dem Parameter r ab. Nach Voraussetzung ist die Funktion f stetig, also in einer Umgebung von p sicherlich beschränkt. Damit sind alle Voraussetzungen für Satz 5.14 (bzw. seine gleichlautende Verallgemeinerung für Integrale auf Mannigfaltigkeiten) erfüllt. Daher hängt die rechte Seite von (15.8) stetig von r ab und wir können den Grenzübergang unter dem Integral vornehmen. Der nach unserer Herleitung von $r > 0$ in Wirklichkeit gar nicht abhängige Wert des Integrals ergibt sich daher als

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} f(x) D_\nu N(x-p) d\mu &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_S f(p) d\mu \\ &= f(p) \cdot \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_S 1 d\mu = f(p). \end{aligned}$$

□

Folgerung 15.8 (Mittelwerteigenschaft) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann gilt für jeden Punkt $p \in U$ und jedes $r > 0$ mit $B_r(p) \subset U$, dass

$$f(p) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S_r} f d\mu.$$

Beweis. Folgt aus dem Beweis des Satzes. $\square$

Satz 15.9 (Maximumprinzip) — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge, und es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Besitzt f in einem Punkt $p \in U$ ein Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

Beweis. f nehme in p sein Maximum an. Wir betrachten die nichtleere, abgeschlossene Menge $A := \{x \in U \mid f(x) = p\} \subset U$ und zeigen, dass A auch offen ist. Da U nach Annahme zusammenhängend ist, folgt hieraus die Behauptung.

Dazu sei $x_0 \in A$ ein beliebiger Punkt und r so klein, dass $B_r(x_0) \subset U$. Angenommen, es gäbe einen Punkt $y \in U_r(x) \setminus A$. Dann wäre f auch noch in einer kleinen Umgebung von y kleiner als $f(p) = f(x_0)$. Wir wählen $\rho = \|y - x_0\|$ und wenden die Mittelwerteigenschaft auf den Kreis um x_0 mit Radius ρ an:

$$f(x_0) = \frac{1}{\omega_{n-1} \rho^{n-1}} \int_{S_\rho(x_0)} f d\mu \leq \frac{1}{\omega_{n-1} \rho^{n-1}} \int_{S_\rho(x_0)} f(p) d\mu = f(p).$$

Nach Wahl von y ist f auf einem offenen Teil der Sphäre $S_\rho(x_0)$ kleiner als $f(p)$, so dass man in der Abschätzung $\leq$ durch $<$ ersetzen kann, ein Widerspruch. Demnach liegt noch die ganze offene Umgebung $U_r(x_0)$ in A , und A erweist sich als offen.

Für das Minimum schließt man genauso, oder wendet das Argument auf die Funktion $-f$ an. $\square$

Folgerung 15.10 — Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt, $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf U harmonisch ist, so nimmt f sein Maximum und Minimum auf dem topologischen Rand von U an.

Beweis. Nach Annahme ist $\overline{U}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und f nimmt sein Maximum (oder Minimum) an. Liegt dieses in U , so ist f nach dem Satz konstant, und hat überall, einschließlich des topologischen Randes, denselben Wert. $\square$

16 De Rham-Kohomologie und Poincaré-Lemma

16.1 Das Poincaré-Lemma

Für eine differenzierbare ($= C^\infty$ -) Mannigfaltigkeit M bezeichne $A^p(M)$ den Vektorraum der C^∞ - p -Formen auf M . Wir setzen $A^p(M) = 0$, falls $p < 0$ oder $p > \dim(M)$. Das äußere Differential gibt uns eine Folge von linearen Abbildungen $d : A^p(M) \rightarrow A^{p+1}(M)$ mit der Eigenschaft $d \circ d = 0$. Das bedeutet, dass jede exakte p -Form, also eine p -Form der Gestalt $\omega = d\psi$, auch geschlossen ist, d.h. $d\omega = 0$. Das Poincaré Lemma gibt ein hinreichendes Kriterium für die Umkehrung.

Im folgenden bezeichnet $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall.

Definition 16.1 — Es seien M und N C^∞ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Zwei differenzierbare Abbildungen $f, g : M \rightarrow N$ heißen homotop, in Zeichen $f \simeq g$, wenn es eine differenzierbare Abbildung $H : I \times M \rightarrow N$ mit der Eigenschaft $H_0 = f$ und $H_1 = g$ gibt. Dabei bezeichne $H_t : M \rightarrow N$ für jedes $t \in [0, 1]$ die Abbildung mit $H_t(x) = H(t, x)$. Eine solche Abbildung H nennt man eine Homotopie von f nach g .

Beispiel 16.2 — Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ nennt man sternförmig bezüglich $y_0 \in U$, wenn mit jedem Punkt $y \in U$ auch alle Punkte der Verbindungsstrecke $ty_0 + (1 - t)y$, $t \in I$, ganz in U liegen. Zum Beispiel ist jede konvexe Menge sternförmig bezüglich jedes Punktes in U .

Ist U sternförmig bezüglich y_0 , so ist die identische Abbildung $id_U : U \rightarrow U$ homotop zur konstanten Abbildung $c : U \rightarrow \{y_0\}$: Eine Homotopie ist durch $H(t, y) := ty + (1 - t)y_0$ gegeben.

Definition 16.3 — Eine Mannigfaltigkeit M heißt zusammenziehbar, wenn die identische Abbildung id_M zu einer konstanten Abbildung $c : M \rightarrow \{y_0\}$ homotop ist.

So sind zum Beispiel sternförmige Mengen zusammenziehbar. Aber es gibt sicher zusammenziehbare offene Mengen im $\mathbb{R}^n$, die nicht sternförmig sind.

Satz 16.4 — Es sei $H : I \times M \rightarrow N$ eine Homotopie von f nach g . Dann gibt es Abbildungen $s^p : A^p(N) \rightarrow A^{p-1}(M)$, $p \in \mathbb{Z}$, mit der Eigenschaft

$$d \circ s^p + s^{p+1} \circ d = g^* - f^* : A^p(N) \rightarrow A^p(M)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Es bezeichne t die Koordinate auf $I = [0, 1]$.

Es sei ω eine p -Form auf N . Die Form $H^*\omega$ ist eine p -Form auf $I \times M$ und kann wie folgt geschrieben werden:

$$H^*\omega = dt \wedge \psi' + \psi'',$$

wobei ψ' eine $(p - 1)$ -Form und ψ'' eine p -Form auf M ist, die zusätzlich vom Parameter t abhängen. Für festes t_0 gilt dabei

$$\psi''|_{t=t_0} = H_{t_0}^*(\omega).$$

Wir schreiben in ähnlicher Form

$$H^*(d\omega) = dt \wedge \eta' + \eta''.$$

Nun gilt andererseits

$$\begin{aligned} H^*(d\omega) = dH^*\omega &= d(dt \wedge \psi' + \psi'') \\ &= -dt \wedge d\psi' + d\psi'' + dt \wedge \frac{\partial \psi''}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dabei schreibe ich $d\psi'$ und $d\psi''$ für das Differential nur in Richtung der Koordinaten von M . Der Vergleich mit dem vorigen Ausdruck liefert die Identitäten:

$$\eta' = -d\psi' + \frac{\partial \psi''}{\partial t}, \quad \eta'' = d\psi''.$$

Wir definieren nun die Abbildung $s^p : A^p(N) \rightarrow A^{p-1}(M)$ durch

$$s^p(\omega) := \int_0^1 \psi' d\mu(t),$$

also auch

$$s^{p+1}(d\omega) = \int_0^1 \eta' d\mu(t).$$

Mit diesen Bezeichnungen folgt:

$$\begin{aligned} s^{p+1}(d\omega) + ds^p(\omega) &= \int_0^1 (\eta' + d\psi') d\mu(t) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \psi''}{\partial t} d\mu(t) \\ &= \psi''|_{t=1} - \psi''|_{t=0} \\ &= H_1^*\omega - H_0^*\omega = (g^* - f^*)\omega \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Satz 16.5 (Poincaré¹⁸-Lemma) — *Es sei M eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit. Dann ist jede geschlossene p -Form, $p > 0$, auf M exakt.*

Beweis. Es sei $H : I \times M \rightarrow M$ eine Homotopie von einer konstanten Abbildung $c : M \rightarrow \{x_0\} \subset M$ zur identischen Abbildung id_M . Die konstante Abbildung kann als Komposition $c = i \circ \text{pr}$ geschrieben werden, wobei $i : \{x_0\} \rightarrow M$ die Inklusion des Punktes bezeichnet und $\text{pr} : M \rightarrow \{x_0\}$ die Projektion. Es sei $p > 0$. Aus Dimensionsgründen ist $A^p(\{x_0\}) = 0$. Insbesondere ist $i^*(\omega) = 0$ für jede p -Form ω . Dann gilt auch $c^*\omega = \text{pr}^*(i^*\omega) = 0$.

Nach Satz 16.4 existieren Abbildungen $s^i : A^i(M) \rightarrow A^{i-1}(M)$ mit der Eigenschaft

$$\omega = \text{id}_M^*\omega - c^*\omega = d(s^p\omega) + s^{p+1}(d\omega) = d(s\omega).$$

□

¹⁸Jules Henri Poincaré * 29.4.1854 † 17.7.1912.

Man beachte, dass der Beweis des Poincaré Lemmas nicht nur die Existenz einer Form β mit $d\beta = \omega$ liefert, sondern ein explizites Verfahren angibt, wie man β berechnet, nämlich $\beta = s\omega$. Ich will das am Beispiel von sternförmigen Mengen im $\mathbb{R}^n$ illustrieren:

Beispiel 16.6 — Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die sternförmig bezüglich x_0 ist. Wir können der Einfachheit halber und ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_0 = 0$, d.h. der Koordinatenursprung ist. Wir betrachten die Homotopie

$$H : [0, 1] \times U \rightarrow U, \quad (t, x) \mapsto t \cdot x$$

und berechnen $H^*\omega$ für eine p -Form

$$\omega = \sum_{|I|=p} f_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Es folgt:

$$H^*(f_I)(t, x) = f_I(tx), H^*(dx_i) = x_i dt + t dx_i.$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} H^*\omega(t, x) &= dt \wedge t^{p-1} \sum_{|I|=p} f_I(tx) \sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell-1} x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &\quad + t^p \sum_{|I|=p} f_I(tx) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 16.4 heißt das:

$$\psi' = t^{p-1} \sum_{|I|=p} f_I(tx) \sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell-1} x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

und

$$s\omega(x) = \sum_{|I|=p} \int_0^1 t^{p-1} f_I(tx) dt \cdot \sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell-1} x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Ein explizites Beispiel in der Ebene: Die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Form

$$\omega = x^2 dy + (2yx + 1) dx$$

ist geschlossen. Das obige Verfahren liefert

$$\begin{aligned} s\omega(x, y) &= \int_0^1 t^0 (xt)^2 dt \cdot y + \int_0^1 t^0 (2xyt^2 + 1) dt \cdot x \\ &= \frac{1}{3} x^2 y + \frac{2}{3} x^2 y + x = x^2 y + x. \end{aligned}$$

16.2 De Rham-Kohomologie

Es sei M eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ordnet man die Vektorräume $A^p(M)$ und die Abbildungen d hintereinander an, so entsteht das folgende Bild:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^n(M) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Die Vektorräume $A^p(M)$ bilden zusammen mit dem Differential d den sogenannten De Rham¹⁹-Komplex von M .

Wir bezeichnen mit $Z^i(M) := \ker(d : A^i(M) \rightarrow A^{i+1}(M))$ den Untervektorraum der Kozykel, und mit $B^i(M) := \operatorname{im}(d : A^{i-1}(M) \rightarrow A^i(M))$ den Untervektorraum der Koränder. Die Bedingung $d^i \circ d^{i-1} = 0$ bedeutet mit diesem Vokabular, dass $B^i(M) \subset Z^i(M)$. Die Begriffe Kozykel und Koränder stammen aus der allgemeineren Theorie der Komplexe. In unserer Situation sind Kozykel die geschlossenen Differentialformen und Koränder die exakten Differentialformen.

Definition 16.7 — Der Faktorvektorraum

$$H_{DR}^i(M; \mathbb{R}) := Z^i(M) / B^i(M)$$

heißt die i -te De Rham-Kohomologie von M . Ist $H_{DR}^i(M, \mathbb{R})$ endlich dimensional, so nennt man

$$b_i(M) := \dim_{\mathbb{R}} H_{DR}^i(M, \mathbb{R})$$

die i -te Bettizahl von M .

Ein Element in $H_{DR}^p(M)$ ist also eine Klasse $[\omega]$, wobei ω eine geschlossene p -Form ist, und zwei p -Formen ω und ω' repräsentieren genau dann dieselbe Klasse $[\omega] = [\omega']$, wenn sie sich um eine exakte Form unterscheiden, d.h. wenn es eine $(p-1)$ -Form η mit der Eigenschaft $\omega' = \omega + d\eta$ gibt.

Die direkte Summe $H_{DR}(M, \mathbb{R}) := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_{DR}^p(M, \mathbb{R})$ trägt sogar die Struktur eines nichtkommutativen Rings, dessen Multiplikation durch

$$[\omega] \cdot [\eta] := [\omega \wedge \eta]$$

gegeben ist. Die Multiplikation ist wohldefiniert:

1. Sind ω und η Kozykel vom Grad p bzw. q , so ist $\omega \wedge \eta$ ein Kozykel vom Grad $p+q$, weil nach der Leibnizregel gilt:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta = 0.$$

2. Das Produkt hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab: Für jeden Kozykel ψ und eine beliebige $(p-1)$ -Form φ gilt

$$(d\varphi) \wedge \psi = d(\varphi \wedge \psi),$$

d.h. das Produkt eines Korandes mit einem Kozykel ist ein Korand.

¹⁹Georges de Rham * 10.9.1903 † 9.10.1990.

$b_i(M) = 0$ bedeutet, dass $Z^i(M) = B^i(M)$, d.h. jeder i -Kozykel ist auch ein i -Korand, oder noch anders gesagt: Jede geschlossene i -Form auf M ist exakt. Man sagt in diesem Falle, der De Rham-Komplex von M sei an der i -ten Stelle exakt. Das Poincaré Lemma lässt sich also auch wie folgt formulieren:

Satz 16.8 (Poincaré Lemma, kohomologische Fassung) — Es sei M eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt $H^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $H_{DR}^i(M, \mathbb{R}) = 0$ für alle $i \neq 0$.

Beweis. Für $i < 0$ und $i > \dim(M)$ ist $H_{DR}^i(M, \mathbb{R})$ von vornherein Null. Für $0 < i \leq \dim(M)$ gilt $B^i(M) = Z^i(M)$ nach 16.5, also $H_{DR}^i(M, \mathbb{R}) = 0$. Eine Funktion $f \in A^0(M)$ ist ein Zykel, wenn $df = 0$, d.h. wenn die Funktion lokal konstant ist. Zusammenziehbare Räume sind zusammenhängend. Deshalb ist jede Funktion f mit $df = 0$ konstant. Da offensichtlich $B^0(M) = 0$, folgt $H_{DR}^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $\square$

Es sei nun $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung von C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Für das Zurückziehen von Formen

$$f^* : A^p(N) \longrightarrow A^p(M)$$

gilt $f^*(d\omega) = df^*(\omega)$. Demnach sind in dem folgenden Diagramm alle Quadrate kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A^{i-1}(N) & \longrightarrow & A^i(N) & \longrightarrow & A^{i+1}(N) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ \cdots & \longrightarrow & A^{i-1}(M) & \longrightarrow & A^i(M) & \longrightarrow & A^{i+1}(M) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Die Eigenschaft $f^* \circ d = d \circ f^*$ bedeutet unter anderem, dass

$$f^* Z^i(N) \subset Z^i(M) \quad \text{und} \quad f^* B^i(N) \subset B^i(M).$$

Lemma 16.9 — Es gibt genau eine lineare Abbildung

$$f^* : H_{DR}^i(N, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{DR}^i(M, \mathbb{R})$$

mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^i(N) & \longrightarrow & Z^i(N) & \longrightarrow & H_{DR}^i(N, \mathbb{R}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & B^i(M) & \longrightarrow & Z^i(M) & \longrightarrow & H_{DR}^i(M, \mathbb{R}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutiert. Die so definierte Abbildung

$$f^* : H_{DR}(N, \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}(M, \mathbb{R})$$

ist ein Ringhomomorphismus.

Beweis. Es sei $[\alpha] \in H_{DR}^p(M, \mathbb{R})$ durch die geschlossene p -Form α repräsentiert. Wir definieren

$$f^*([\alpha]) := [f^*(\alpha)].$$

Die Abbildung f^* ist wohldefiniert, denn zunächst einmal ist $f^*\alpha$ wieder ein Kozykel, weil $df^*\alpha = f^*(d\alpha) = 0$, und ist α' ein anderer Repräsentant von $[\alpha]$, so gilt $\alpha' = \alpha + d\psi$ für irgendeine $(p-1)$ -Form auf M , woraus

$$f^*\alpha' = f^*\alpha + f^*d\psi = f^*\alpha + d(f^*\psi),$$

also $[f^*\alpha'] = [f^*\alpha]$ folgt.

Die letzte Aussage ist klar, denn für Formen gilt $f^*(\omega \wedge \psi) = f^*\omega \wedge f^*\psi$. $\square$

Bemerkung 16.10 — Für diese Konstruktionen gelten die folgenden Aussagen:

1. Ist $f = \text{id}_M$ die identische Abbildung auf M , so ist f^* die identische Abbildung auf $H_{DR}(M, \mathbb{R})$.
2. Sind $f : M \rightarrow M'$ und $g : M' \rightarrow M''$ differenzierbare Abbildungen, so gilt $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* : H_{DR}(M'', \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}(M, \mathbb{R})$.
3. Ist M die disjunkte Vereinigung zweier Mannigfaltigkeiten M' und M'' , so gilt $H_{DR}(M, \mathbb{R}) = H_{DR}(M', \mathbb{R}) \oplus H_{DR}(M'', \mathbb{R})$.
4. Ist M ein Punkt, so gilt $H^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $H^i(M, \mathbb{R}) = 0$ für alle $i \neq 0$.
5. Ist M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so gilt $H^0(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Denn offensichtlich gilt $B^0(M) = 0$, und $Z^0(M)$ besteht aus allen Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df = 0$. Solche Funktionen sind lokal konstant. Da M als zusammenhängend angenommen ist, muss f eine Konstante sein. Es folgt $H_{DR}^0(M, \mathbb{R}) = Z^0(M) = \mathbb{R}$.

Satz 16.11 — Es seien $f, g : M \rightarrow N$ homotope Abbildungen. Dann gilt

$$f^* = g^* : H_{DR}(N, \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}(M, \mathbb{R}).$$

Beweis. Nach Satz 16.4 gibt es Abbildungen $s^i : A^i(N) \rightarrow A^{i-1}(M)$ mit

$$s^{i+1} \circ d + d \circ s^i = f^* - g^*.$$

Es sei nun $[\omega] \in H^p(N, \mathbb{R})$ gegeben und repräsentiert durch eine geschlossene p -Form ω . Dann gilt:

$$f^*\omega = g^*\omega + s^{i+1}(d\omega) + d(s^i\omega) = g^*\omega + d(s^i\omega).$$

Es folgt $[f^*\omega] = [g^*\omega]$. $\square$

Definition 16.12 — Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ von Mannigfaltigkeiten ist eine Homotopieäquivalenz, wenn es eine differenzierbare Abbildung $g : N \rightarrow M$ mit der Eigenschaft gibt, dass $f \circ g \simeq \text{id}_N$ und $g \circ f \simeq \text{id}_M$. Eine solche Abbildung g heißt ein Homotopieinverses von f .

Beispiel 16.13 — Die Identität $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversen $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$, $x \mapsto x/\|x\|$.

Folgerung 16.14 — Ist $f : M \rightarrow N$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f^* : H_{DR}(N, \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}(M, \mathbb{R})$ ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis. Es sei g ein Homotopieinverses zu f . Dann gilt nach Definition $f \circ g \simeq \text{id}_N$ und $g \circ f \simeq \text{id}_M$. Gemäß Satz 16.4 gilt nun:

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (\text{id}_M)^* = \text{id}_{H_{DR}(M, \mathbb{R})}$$

und

$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (\text{id}_N)^* = \text{id}_{H_{DR}(N, \mathbb{R})}.$$

Damit erweisen sich die Abbildungen $f^* : H_{DR}(N, \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}(M, \mathbb{R})$ und $g^* : H_{DR}(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}(N, \mathbb{R})$ als zueinander inverse Isomorphismen. $\square$

Das Studium der Kohomologiegruppen und des Einflusses der Kohomologie auf die Geometrie einer Mannigfaltigkeit ist Gegenstand der algebraischen Topologie. Als kleinen Ausblick formuliere ich hier nur ein wichtiges Ergebnis über die Kohomologie der Sphären:

Satz 16.15 — Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$H_{DR}^i(S^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad i = 0, \\ 0 & , \text{ falls } 0 < i < n, \\ \mathbb{R} & , \quad i = n. \end{cases}$$

Der Beweis geschieht durch Induktion über n mit Hilfe des Satzes von Mayer-Vietoris.

Stark vereinfacht zählt $H_{DR}^i(M, \mathbb{R})$ die Anzahl der $(i+1)$ -dimensionalen Löcher in M .

Folgerung 16.16 — $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind genau dann homöomorph, wenn $n = m$.

Beweis. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus und $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Translation um den Vektor $-\Phi(0)$. Dann ist $T \circ \Phi$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, der 0 auf 0 abbildet. Insbesondere sind somit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ homöomorph und somit S^{n-1} und S^{m-1} homotopieäquivalent. Nach den obigen Überlegungen müssen sie isomorphe De Rham-Kohomologiegruppen haben. Hieraus folgt $n = m$. $\square$

Dieser Beweis ist nicht ganz sauber: Zunächst erhält man nur eine *stetige* Homotopieäquivalenz. Im ganzen Abschnitt haben wir aber nur mit differenzierbaren Abbildungen gearbeitet. Das ist aber eine nur lässliche Sünde: Jede stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist stetig homotop zu einer differenzierbaren Abbildung, und zwei differenzierbare Abbildungen, die im stetigen Sinne homotop sind, sind auch im differenzierbaren Sinne homotop. Übung: Ausführen der Details. Literatur: Bröcker, Jänich.