

Geometrie von Liegruppen I

Mainz, Wintersemester 2011 Manfred Lehn

Inhaltsverzeichnis

§1 Liegruppen	4
1.1 Definitionen und Beispiele	4
1.2 Quaternionen	12
1.3 Klassische Liegruppen	15
1.4 Wegekompenten und Fundamentalgruppen	21
§2 Die symplektische Gruppe	26
2.1 Schiefsymmetrische Formen	26
2.2 Pfaffsche Determinanten	28
2.3 Komplexe Metriken	31
2.4 Quaternionale Metriken	32
§3 Homotopie	34
3.1 Höhere Homotopiegruppen	34
3.2 Faserungen	37
§4 Spingruppen	43
4.1 Symmetrische Bilinearformen	43
4.2 Orthogonale Gruppen	46
4.3 Universelle Tensorkonstruktionen	48
4.4 Cliffordalgebren	51
4.5 Spingruppen	61
§5 Die Liealgebra einer Liegruppe	64
5.1 Lieklammer von Vektorfeldern	64
5.2 Flüsse	65
5.3 Exponentialabbildung	68
5.4 Die adjungierte Darstellung	71
§6 Das Haarsche Integral	74
6.1 Invariante Integration	74
6.2 Existenz eines linksinvarianten Haarintegrals	76
6.3 Eindeutigkeit des Haarschen Integrals	79
6.4 Das Haarintegral für Liegruppen	81
§7 Darstellungen	83
7.1 Grundbegriffe	83
7.2 Reynoldsoperator	85

§8 Der Satz von Peter und Weyl	89
8.1 Fourierreihen	89
8.1.1 Die Sätze von Dirichlet und Jordan	91
8.1.2 Der Satz von Stone-Weierstraß	95
8.1.3 Der Satz von Fejér	97
8.2 Funktionalanalytische Hilfsmittel	98
8.3 Der Satz von Peter und Weyl	101
§9 Die Komplexifizierung einer kompakten Liegruppe	109
9.1 Treue Darstellungen	109
9.2 Hopfalgebren	110
9.3 Die Hopfalgebrenstruktur auf $T(G, k)$	111
9.4 Die Komplexifizierung von G	114
§10 Invariantentheorie	117
10.1 Invarianten für die klassischen Weylgruppen	119
10.2 Das 14. Hilbertsche Problem	121
§11 Liealgebren	123
11.1 Liealgebren, Unteralegebren und Ideale	123
11.2 Darstellungen	127
11.3 Derivationen und Automorphismen	133
§12 Nilpotente Liealgebren und Cartanunteralegebren	135
12.1 Nilpotente Liealgebren	135
12.2 Cartanunteralegebren	139
12.3 Jordan-Chevalley Zerlegung	142
§13 Auflösbare Liealgebren und Cartankriterium	147
13.1 Auflösbare Liealgebren	147
13.2 Invariante Bilinearformen	150
13.3 Das Cartankriterium	151
13.4 Das Casimirelement	152
13.5 Dreidimensionale Liealgebren	153
§14 Halbeinfache Liealgebren	156
14.1 Einfachheit und Halbeinfachheit	156
14.2 Jordan-Chevalley-Zerlegung	159
14.3 Die Cartanzerlegung	160
14.4 Spiegelungen	165

§1 Liegruppen

1.1 Definitionen und Beispiele

Pontryagin: Topologische Gruppen.

Bröcker, tom Dieck: Compact Lie groups.

Definition 1.1 — Eine topologische Gruppe ist ein topologischer Raum G zusammen mit einer stetigen Gruppenstruktur $m : G \times G \rightarrow G$ und der Eigenschaft, daß die Invertierungsabbildung $i : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ stetig ist. Ein Morphismus von topologischen Gruppen ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Wir bezeichnen das Neutralelement einer nicht näher spezifizierten Gruppe in der Regel mit dem Symbol e und schreiben die Gruppenmultiplikation als $m(g, g') =: gg'$. Wenn wir von der Topologie einer topologischen Gruppe G absehen wollen, also nur die zugrundeliegende Gruppenstruktur betrachten wollen, sprechen wir von der abstrakten Gruppe G . Die topologischen Gruppen bilden eine Kategorie.

Es sei G eine topologische Gruppe. Es ist klar, daß die folgenden Abbildungen von G in sich Homöomorphismen sind: Die Linkstranslation $\ell_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$, mit einem beliebigen Element $g \in G$, ebenso die Rechtstranslation $\rho_g : G \rightarrow G, h \mapsto hg$, die Konjugation $c_g = \ell_g \rho_{g^{-1}} : G \rightarrow G, h \mapsto ghg^{-1}$ und das Invertieren $i : G \rightarrow G, i(g) = g^{-1}$.

Lemma 1.2 — Es sei G eine topologische Gruppe.

1. Ist $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Umgebungsbasis des Neutralelements $e \in G$, so bilden die Mengen $\{gU_\alpha\}_{\alpha \in A, g \in G}$ eine Basis der Topologie von G .
2. Ist $H \subset G$ eine Untergruppe von G , so ist der topologische Abschluß $\overline{H}$ eine abgeschlossene Untergruppe von G . Ebenso ist der Abschluß eines Normalteilers ein Normalteiler.
3. Jede offene Untergruppe $H \subset G$ ist auch abgeschlossen. Jede abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index ist offen.
4. Die Zusammenhangskomponente $G_0 \subset G$ des Neutralelements ist ein Normalteiler. Wenn G lokal wegzusammenhängend ist, ist G_0 offen in G .

□

Lemma 1.3 — Es sei G eine topologische Gruppe. Zu jeder offenen Umgebung U von e gibt es eine offene Umgebung V mit $V = V^{-1}$ und $V^2 \subset U$.

Beweis. Weil die Gruppenmultiplikation stetig ist, gibt es offene Umgebungen W', W'' des Neutralelements mit $W' \cdot W'' \subset U$. Dann hat $W := W' \cap W''$ die Eigenschaft

$W^2 \subset U$. Weil das Invertieren stetig ist, ist die Menge $W^{-1} := \{g \in G \mid g^{-1} \in W\}$ eine offene Umgebung des Neutralelements. Die Menge $V := W \cap W^{-1}$ hat die behaupteten Eigenschaften. $\square$

Lemma 1.4 — *Eine topologische Gruppe ist genau dann Hausdorffsch, wenn sie mindestens einen abgeschlossenen Punkt besitzt.*

Beweis. Es sei G eine topologische Gruppe mit einem abgeschlossenen Punkt. Weil die Linkstranslation ein Homöomorphismus ist, ist jeder Punkt abgeschlossen. Es seien $g_1, g_2 \in G$ zwei verschiedene Punkte. Dann ist $G \setminus \{g_1^{-1}g_2\}$ offen, und nach dem vorigen Lemma gibt es eine offene Umgebung $V = V^{-1}$ des Neutralelements mit $V^2 \subset G \setminus \{g_1^{-1}g_2\}$. Es genügt zu zeigen, daß $g_1V \cap g_2V = \emptyset$. Andernfall gäbe es $h_1, h_2 \in V$ mit $g_1h_1 = g_2h_2$, also

$$g_1^{-1}g_2 = h_1h_2^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V \cdot V \subset G \setminus \{g_1^{-1}g_2\},$$

Widerspruch. $\square$

Beispiel 1.5 (Abstrakte Gruppen) — Jede abstrakte Gruppe G wird mit der diskreten Topologie versehen zu einer topologischen Gruppe. In diesem Sinne erweitert die Kategorie der topologischen Gruppen die Kategorie der Gruppen.

Beispiel 1.6 (Topologische Vektorräume) — Die additive Gruppe $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie ist eine topologische Gruppe. Allgemeiner versteht man unter einem topologischen Vektorraum einen reellen oder komplexen Vektorraum, der mit einer Topologie versehen ist, bezüglich der die Addition $V \times V \rightarrow V$ und die skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ stetige Abbildungen sind. Topologische Vektorräume sind insbesondere auch topologische Gruppen. Jeder normierte Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum.

Definition 1.7 — Eine reelle Liegruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G mit einer differenzierbaren Gruppenstruktur $m : G \times G \rightarrow G$.

Hier und im Folgenden verstehen wir unter einer differenzierbaren (= glatten = C^∞ -) Mannigfaltigkeit einen parakompakten, lokal euklidischen Hausdorffraum, für den ein Atlas von Karten ausgezeichnet ist, dessen Kartenwechselabbildungen beliebig oft differenzierbar sind.

Satz 1.8 — *Es sei G eine Liegruppe. Dann ist die Inversenbildung $i : G \rightarrow G$ differenzierbar. Insbesondere ist also jede Liegruppe eine topologische Gruppe.*

Beweis. Es eine kanonische Zerlegungen $T_{g,h}(G \times G) = T_gG \oplus T_hG$. Die Einschränkung der Multiplikationsabbildung $m : G \times G \rightarrow G$ auf die Untermannigfaltigkeiten

$\{g\} \times G$ und $G \times \{h\}$ sind die Links- bzw. Rechtstranslationen ℓ_g bzw. r_h . Deshalb gilt

$$D_{g,h}m = T_g r_h \oplus T_h \ell_g.$$

Weil ℓ_g und r_h Diffeomorphismen sind, ist $D_{g,h}m$ surjektiv, d.h. die Gruppenmultiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ ist eine Submersion. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $\Gamma := m^{-1}(e) = \{(g, g^{-1}) \mid g \in G\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim(G \times G) - \dim(G) = \dim(G)$. Außerdem ist $T_{g,g^{-1}}\Gamma = \ker(D_{g,g^{-1}}m)$. Die kanonischen Projektionen $p_1 : \Gamma \rightarrow G$ und $p_2 : \Gamma \rightarrow G$ auf den ersten bzw. zweiten Faktor sind differenzierbar und bijektiv. Außerdem sind die Abbildungen $T_{g,g^{-1}}p_1 : T_{g,g^{-1}}\Gamma \rightarrow T_g G$ und $T_{g,g^{-1}}p_2 : T_{g,g^{-1}}\Gamma \rightarrow T_{g^{-1}}G$ surjektiv. Deshalb sind p_1 und p_2 lokale Diffeomorphismen und wegen ihrer Bijektivität auch globale Diffeomorphismen. Schließlich ist $i = p_2 \circ p_1^{-1}$ ein Diffeomorphismus. $\square$

Definition 1.9 — Eine komplexe Liegruppe ist eine komplexe Mannigfaltigkeit G mit einer holomorphen Gruppenstruktur $m : G \times G \rightarrow G$.

Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem differenzierbaren Atlas, dessen Karten auf offene Mengen im $\mathbb{C}^n$ abbilden und dessen Kartenwechselabbildungen holomorph sind. Die einer komplexen Liegruppe zugrundeliegende differenzierbare Mannigfaltigkeit ist natürlich eine reelle Liegruppe.

Satz 1.10 — Es sei G eine komplexe Liegruppe. Dann ist die Inversenbildung $i : G \rightarrow G$ holomorph.

Beweis. Wie zum vorigen Satz. $\square$

Beispiel 1.11 (Lineare Gruppen) — Die multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^*$ und $\mathbb{C}^*$ und allgemeiner die Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind topologische Gruppen bezüglich der euklidischen Topologie. Die Multiplikation von Matrizen ist eine polynomiale Abbildung und daher differenzierbar bzw. holomorph. Matrixinvertierung ist eine rationale Abbildung, also ebenfalls differenzierbar bzw. holomorph: Bezeichnet $\mathrm{adj}(A)$ die adjunkte oder Kofaktormatrix von A , so gilt bekanntlich $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$. Zur Erinnerung: $\mathrm{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$, wobei A^{ji} die Matrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte entsteht. Demnach ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine reelle Liegruppe und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine komplexe Liegruppe.

Die Determinantenabbildungen $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ und $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ sind rational und damit differenzierbar bzw. holomorph. Das Differential der Determinante an der Einheitsmatrix ist die Spur:

$$\det(I + \varepsilon A) = \varepsilon \mathrm{tr}(A) \mod (\varepsilon^2).$$

Der Kern der Determinantenabbildung

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{g \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det(g) = 1\}, \quad K = \mathbb{R}, \mathbb{C},$$

ist eine reelle bzw. komplexe Liegruppe.

Beispiel 1.12 (Tori) — Die multiplikative Gruppe $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist eine kommutative kompakte topologische Gruppe. Die Exponentialabbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t},$$

hat den Kern $\mathbb{Z}$ und definiert einen topologischen Isomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$. Dabei wird $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Quotiententopologie versehen, d.h. eine Menge $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist genau dann offen, wenn das Urbild $\pi^{-1}(U)$ unter der kanonischen Projektion $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ offen in $\mathbb{R}$ ist.

Dieses Beispiel läßt sich wie folgt verallgemeinern: Ein Gitter Λ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V ist ein $\mathbb{Z}$ -Untermodul, der von einer $\mathbb{R}$ -Basis $v_1, \dots, v_n$ von V erzeugt wird, d.h. $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_n$. Es bezeichne $\pi : V \rightarrow V/\Lambda =: T$ die natürliche Projektion auf die Faktorgruppe T . Versehen mit der Quotiententopologie ist T eine topologische Gruppe. Eine topologische Gruppe der Form V/Λ heißt ein reeller Torus. Die Abbildung

$$\Phi : S^1 \times \dots \times S^1 \rightarrow V/\Lambda, \quad (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}) \mapsto \sum_{k=1}^n t_k v_k \mod \Lambda,$$

ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen. Tatsächlich ist die Abbildung π lokal stetig invertierbar, und eine überdeckende Familie von lokalen Umkehrfunktionen ist ein differenzierbarer Atlas. Auf diese Weise wird T zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und zu einer reellen Liegruppe. Die Abbildung Φ ist ein Diffeomorphismus und damit ein Isomorphismus von reellen Liegruppen. Zu jedem $n \geq 1$ gibt es bis auf Isomorphie genau einen reellen Torus der Dimension n .

Die Projektion $p : V \rightarrow V/\Lambda$ ist offensichtlich eine universelle Überlagerung. Die Abbildung $\lambda \mapsto ([0, 1] \ni t \mapsto t\lambda \mod \Lambda)$ definiert einen kanonischen Gruppenhomomorphismus $\Lambda \mapsto \pi_1(V/\Lambda, 0)$, und weil Λ kommutativ und torsionsfrei ist, auch kanonische Isomorphismen $\Lambda \rightarrow H_1(V/\Lambda, \mathbb{Z})$ und $\Lambda^\vee \rightarrow H^1(V/\Lambda, \mathbb{Z})$.

Mit der Künnethformel folgt aus der Produktdarstellung $S^1 \times \dots \times S^1 \cong V/\Lambda$, daß $H^*(S^1, \mathbb{Z}) \otimes \dots \otimes H^*(S^1, \mathbb{Z}) \cong H^*(V/\Lambda/\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Es folgt:

Satz 1.13 — Der natürliche Isomorphismus $\Lambda^\vee \rightarrow H^1(V/\Lambda, \mathbb{Z})$ induziert einen Isomorphismus von Ringen

$$\Lambda_{\mathbb{Z}}^*(\Lambda^\vee) \rightarrow H^*(V/\Lambda, \mathbb{Z}), \quad \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k \mapsto \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k.$$

□

Es seien nun zwei reelle Tori $T = V/\Lambda$ und $T' = V'/\Lambda'$ gegeben. Wir wollen die Menge $\text{Hom}(T, T')$ der stetigen Gruppenhomomorphismen $\alpha : T \rightarrow T'$ bestimmen. Wenn nun $p : V \rightarrow T$ und $p' : V' \rightarrow T'$ die Projektionen bezeichnen und $\alpha : T \rightarrow$

T' einen Gruppenhomomorphismus, so ist $\alpha \circ p : V \rightarrow T'$ ein Homomorphismus und bildet deshalb 0 auf 0 ab. Wegen der universellen Eigenschaft der Überlagerung $p' : V' \rightarrow T'$ gibt es genau eine Hochhebung $u : V \rightarrow V'$ mit $p' \circ u = \alpha \circ p$ und $u(0) = 0$. Für beliebiges $v \in V$ hat auch $\tilde{u}(x) := u(x+v) - u(v)$ diese Eigenschaften und stimmt deshalb mit u überein, d.h. $u(x+v) - u(v) = u(x)$. Das zeigt, daß u ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist.

Lemma 1.14 — *Stetige Gruppenhomomorphismen $u : V \rightarrow V'$ sind $\mathbb{R}$ -linear.*

Beweis. Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine $\mathbb{R}$ -Basis von V . Dann gilt für beliebige rationale Zahlen $c_1, \dots, c_n$ mit Hauptnenner N , d.h. $c_i N = m_i \in \mathbb{Z}$, daß

$$Nu\left(\sum_i c_i v_i\right) = u\left(\sum_i Nc_i v_i\right) = u\left(\sum_i m_i v_i\right) = \sum_i m_i u(v_i)$$

und

$$u\left(\sum_i c_i v_i\right) = \sum_i c_i u(v_i).$$

Folglich ist u eine $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung. Weil u stetig ist, ist u auch $\mathbb{R}$ -linear. $\square$

Es gibt also zu jedem stetigen Gruppenhomomorphismus $\alpha : T \rightarrow T'$ genau eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $u : V \rightarrow V'$ mit $p'u = \alpha p$. Weiter gilt für jeden Gittervektor $\lambda \in \Lambda$, daß $\alpha p(\lambda) = 0$, also $u(\lambda) \in (p')^{-1}(0) = \Lambda'$. Kurz: $u(\Lambda) \subset \Lambda'$. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, gibt es genau eine wohldefinierte Abbildung $\alpha : T \rightarrow T'$ mit $\alpha p = p'u$, und diese Abbildung ist ein stetiger Homomorphismus. Weil die $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $u : V \rightarrow V'$ vollständig durch die Einschränkung $u|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ bestimmt ist, können wir die Überlegungen wie folgt zusammenfassen:

Satz 1.15 — $\text{Hom}(T, T') = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda') \cong \mathbb{Z}^{\text{rg } \Lambda \cdot \text{rg } \Lambda'}$. $\square$

Aus dem Satz ergeben sich die folgenden Spezialfälle:

Folgerung 1.16 — *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ hat die Form $\varphi(z) = z^m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.* $\square$

Folgerung 1.17 — *Es sei Λ ein Gitter, $V = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $T = V/\Lambda$ der zugehörige Torus und $\Lambda^* := \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ das zu Λ duale Gitter. Dann ist die Abbildung*

$$\Lambda^* \rightarrow \text{Hom}(T, S^1), \quad \varphi \mapsto [v \bmod \Lambda \mapsto \exp(2\pi i \varphi(v))],$$

ein Isomorphismus von Gruppen. Dabei wird $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ linear zu einer Abbildung $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt. $\square$

Beispiel 1.18 (Komplexe Tori) — Es sei nun V ein komplexer Vektorraum der Dimension n und $\Lambda \subset V_{\mathbb{R}}$ ein Gitter in dem V zugrundeliegenden reellen Vektorraum, so daß Λ als $\mathbb{Z}$ -Modul den Rang $2n$ hat. Dann trägt $T = V/\Lambda$ die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit, und die Gruppenmultiplikation ist ebenso wie die Inversenbildung holomorph.

Die obigen Überlegungen über Abbildungen zwischen Tori lassen sich im komplexen Fall verschärfen: Es sei $\alpha : T = V/\Lambda \rightarrow T' = V'/\Lambda'$ eine beliebige holomorphe Abbildung, d.h. wir setzen nicht voraus, daß α ein Gruppenhomomorphismus ist. Es sei $[a] := \alpha([0])$ das Bild des Nullelements. Dann gibt es zu jeder Wahl eines Urbilds $(a \in p')^{-1}([a])$ genau eine holomorphe Abbildung $u : V \rightarrow V'$ mit $p'u = \alpha p$ und $u(0) = a$. Für jedes $w \in V$ ist $p'u(v+w) = \alpha p(v+w) = \alpha p(v) + \alpha p(w) = p'(u(v) + u(w))$. Deshalb gibt es genau ein Element $\lambda' \in \Lambda'$, abhängig von v und w , mit $u(v+w) = u(v) + u(w) + \lambda'$. Die linke Seite ist stetig in v und w , aber die rechte Seite nimmt Werte in der diskreten Menge Λ' , und weil V zusammenhängend ist, muß λ' unabhängig von v und w sein. Speziell mit $v = w = 0$ folgt $\lambda = -u(0)$. Es folgt: $v \mapsto u(v) - u(0)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Indem man weiter wie oben argumentiert, erhält man den Satz:

Satz 1.19 — Jede holomorphe Abbildung $\alpha : T \rightarrow T'$ zwischen komplexen Tori ist von der Form $\alpha([v]) = \alpha(0) + f([v])$ für einen holomorphen Gruppenhomomorphismus $f : T \rightarrow T'$. Weiter gilt $\text{Hom}_{\text{hol}}(T, T') = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda') \cap \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$. $\square$

Wir betrachten speziell den Fall, daß $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$, so daß $\text{rg}(\Lambda) = 2$. Als komplexer Vektorraum besitzt V eine natürliche Orientierung. Eine Basis v_1, v_2 von Λ ist positiv orientiert, wenn $v_2 = \tau v_1$ für ein $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Unter der Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow V, z \mapsto zv_1$, geht das Gitter $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ isomorph auf Λ . Man erhält so einen Isomorphismus $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau \rightarrow V/\Lambda$.

Die Familie aller Riemannschen Flächen der Form

$$E_{\tau} := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau), \quad \tau \in \mathbb{H},$$

umfaßt also alle eindimensionalen komplexen Tori. Es kann allerdings immer noch vorkommen, daß $E_{\tau} \cong E_{\tau'}$ für $\tau \neq \tau'$. Die genauen Verhältnisse ergeben sich aus dem Satz: Jeder Isomorphismus $\varphi : E_{\tau} \rightarrow E_{\tau'}$ hat die folgende Gestalt: Es gibt eine komplexe Zahl $u \neq 0$ derart, daß Multiplikation mit u einen Gitterisomorphismus $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau'$ liefert. Dazu muß es ganze Zahlen a, b, c, d mit den folgenden Eigenschaften geben:

1. $u \cdot 1 = c\tau' + d$ und $u \cdot \tau = a\tau' + b$.
2. Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist in $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ invertierbar, oder äquivalent: $ad - bc \in \{\pm 1\}$.

Die Multiplikation mit u erhält die Orientierung. Deshalb muß sogar stärker $ad - bc =$

1 gelten. Und die erste Bedingung ist äquivalent zu

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}.$$

Das läßt sich so zusammenfassen:

Satz 1.20 — Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ durch Möbiustransformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Zwei Tori E_τ und $E_{\tau'}$ sind genau dann isomorph, wenn τ und τ' in derselben Bahn unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegen. Gilt $\tau = A\tau'$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist ein Isomorphismus $E_\tau \rightarrow E_{\tau'}$ durch die Multiplikation mit $u = c\tau' + d$ gegeben.

Insbesondere stehen Isomorphieklassen von eindimensionalen komplexen Tori in Bijektion zu Punkten im Bahnraum $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Die Gruppenwirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ ist eigentlich diskontinuierlich, d.h. jeder Punkt in $\mathbb{H}$ besitzt eine Umgebung U mit der Eigenschaft, daß die Menge $\{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist. Unter dieser Annahme kann man allgemein auf Quotienten wie $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine komplexe Struktur definieren. In der Theorie der elliptischen Funktionen konstruiert man eine biholomorphe Abbildung $j : \mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$. Sie hat die explizite Gestalt

$$j(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \dots$$

Beispiel 1.21 (Direkte Produkte) — Das direkte Produkt zweier topologischer Gruppen $G \times G'$ wird durch komponentenweise Verknüpfung zu einer abstrakten Gruppe und mit der Produkttopologie zu einem topologischen Raum. Zusammengenommen wird $G \times G'$ auf diese Weise zu einer topologischen Gruppe. Dasselbe gilt allgemeiner für das Produkt $\prod_{a \in I} G_a$ einer beliebigen Familie $\{G_a\}_{a \in I}$ von topologischen Gruppen. [Übung: Die Topologie auf einem unendlichen Produkt von Gruppen ist nicht die diskrete Topologie, selbst wenn alle Faktoren diskret sind.]

Nach dem Satz von Tychonov ist das Produkt einer beliebigen Familie von kompakten topologischen Räumen wieder kompakt. Daraus ergibt sich unmittelbar: Ist $\{G_a\}_{a \in I}$ eine Familie von endlichen Gruppen mit der diskreten Topologie, so ist $\prod_{a \in I} G_a$ eine kompakte topologische Gruppe.

Beispiel 1.22 (Limiten) — Eine gerichtete Indexmenge ist eine Menge I mit einer Halbordnung $\prec$ und der Eigenschaft, daß es zu je zwei Elementen $a, b \in I$ einen Index $c \in I$ mit $a \prec c$ und $b \prec c$ gibt. Ein projektives System von topologischen Gruppen ist eine Familie $\{G_a\}_{a \in I}$ von topologischen Gruppen mit Morphismen $\varphi_{ab} : G_a \rightarrow G_b$ für jedes Paar $a, b \in I$ mit $b \prec a$ und der Eigenschaft, daß $\varphi_{bc}\varphi_{ab} = \varphi_{ac}$, wenn $c \prec b \prec a$. Wir betrachten die beiden Morphismen von topologischen Gruppen

$$\partial_0, \partial_1 : P := \prod_a G_a \longrightarrow \prod_{b \prec a} G_b, \quad \partial_0(g)_{ba} = \varphi_{ab}(g_a) \text{ und } \partial_1(g) = g_b.$$

Die Menge

$$Z := \{g \in P \mid \partial_0(g) = \partial_1(g)\}$$

ist eine Untergruppe, die wir mit der Teilraumtopologie von P versehen. Sie wird auf diese Weise zu einer topologischen Gruppe. Für jeden Index $a \in I$ gibt es natürliche Projektionen $\text{pr}_a : \prod_b G_b \rightarrow G_a$ und $\varphi_a := \text{pr}_a|_Z : Z \rightarrow G_a$. Für diese gilt $\varphi_{ab}\varphi_a = \varphi_b$.

Satz 1.23 — Die Gruppe Z mit den Homomorphismen $\varphi_a : Z \rightarrow G_a$, $a \in I$, hat die folgende universelle Eigenschaft: Für jede topologische Gruppe H mit einer Familie von stetigen Homomorphismen $\psi_a : H \rightarrow G_a$ mit $\varphi_{ba}\psi_b = \psi_a$ gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\psi : H \rightarrow Z$ mit $\varphi_a\psi = \psi_a$.

Beweis. Die Abbildungen ψ_a setzen sich zu einem stetigen Homomorphismus $\tilde{\psi} : H \rightarrow P$ zusammen. Daß nach Voraussetzung $\varphi_{ba}\psi_b = \psi_a$ für alle $a \prec b$ gilt, ist gleichbedeutend damit, daß $\tilde{\psi}(H) \subset Z$. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der universellen Eigenschaft des Produktes. $\square$

Man nennt $(Z, \{\varphi_a\}_{a \in I})$ den Limes des projektiven Systems $\{G_a, \varphi_{ab}\}$, und schreibt

$$Z =: \varprojlim G_a.$$

Beispiel 1.24 (Proendliche Gruppen) — Topologische Gruppen, die sich als Limes eines projektiven Systems von endlichen Gruppen schreiben lassen, heißen proendliche Gruppen. Sie sind kompakt: nach unserer Vorüberlegung sind Produkte endlicher Gruppen kompakt. Es genügt dann zu verifizieren, daß $\varprojlim G_a$ eine abgeschlossene Untergruppe in $\prod G_a$ ist.

Wir betrachten zwei Beispiele zu dieser Konstruktion aus der Algebra:

1. Es sei p eine Primzahl. Das projektive System

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^3 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/p$$

hat als Limes die Gruppe der p -adischen Zahlen. Alternativ kann man $\mathbb{Z}_p$ als Komplettierung von $\mathbb{Z}$ bezüglich der p -adischen Bewertung $|a|_p := p^{-\text{ord}_p(a)}$ definieren. Die beiden Topologien stimmen überein. Aus der ersten Konstruktion folgt unmittelbar die Kompaktheit von $\mathbb{Z}_p$.

2. Es sei K ein Körper und $\overline{K}$ die separable Hülle. Für jeden normalen Zwischenkörper $K \subset L \subset \overline{K}$ bezeichne $G_L := \text{Gal}(L/K)$ die Galoisgruppe der Erweiterung L/K . Ist L/K endlich, so ist G_L eine endliche Gruppe. Zu jeder Inklusionskette $K \subset L \subset M \subset \overline{K}$ gibt es einen kanonischen Epimorphismus $G_M \rightarrow G_L$. Das so definierte projektive System $\{G_L\}$, wo L durch die normalen Zwischenkörper von endlichem Grad über K läuft, besitzt einen Limes $\varprojlim G_L$, und die natürlichen Homomorphismen $G_{\overline{K}} \rightarrow G_L$ induzieren einen Gruppenhomomorphismus $\psi : G_{\overline{K}} \rightarrow \varprojlim G_L$. Man zeigt dann: ψ ist ein Gruppenisomorphismus. Auf diese Weise erhält die absolute

Galoisgruppe $G_{\overline{K}} = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ die Struktur einer kompakten topologischen Gruppe. Der Hauptsatz der Galoistheorie gilt nun in der erweiterten Form, daß die Abbildung $H \mapsto \overline{K}^H$ eine Bijektion zwischen der Menge der *abgeschlossenen* Untergruppen von $G_{\overline{K}}$ und der Menge der Zwischenkörper der Erweiterung $\overline{K}/K$ ist. $\square$

Aufgabe 1.1 — Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, G eine endliche Gruppe, die auf U holomorph und effektiv operiert, d.h. für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $\rho(g) : U \rightarrow U$ eine holomorphe Abbildung, und $\rho(g) \neq \text{id}_U$, wenn $g \neq e_G$. Man zeige:

1. $\rho(g)$ ist eine biholomorphe Abbildung für alle $g \in G$.

Es sei nun $p \in U$ ein Fixpunkt der Gruppenwirkung.

2. Die Abbildung $G \ni g \mapsto \rho(g)'(p) \in \text{GL}(T_p U) = \mathbb{C}^*$ ist eine lineare Darstellung. Insbesondere ist das Bild der Abbildung $\rho' : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ eine zyklische Gruppe, erzeugt durch die Multiplikation mit einer Einheitswurzel ζ .
3. Für jedes $g \in G$ mit $\rho'(g)(p) = 1$ ist $\rho(g) = \text{id}_U$. [Hinweis: Wähle eine Koordinate z auf U mit $z(p) = 0$ und entwickle $\rho(g)^*(z)$ in eine Potenzreihe. Wie sind dann die Potenzreihen zu den Potenzen $\rho(g^m)$ gegeben?]
4. G ist zyklisch.
5. Es sei z eine Koordinate in einer Umgebung von p mit $z(p) = 0$. Dann ist

$$w := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)'(p) g^*(z).$$

eine Koordinatenfunktion auf einer G -invarianten Umgebung V von p mit $w(p) = 0$ und $w(\rho(g)(q)) = \chi(g)w(q)$ für eine Charakter $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ und alle $q \in V$. Man sagt: Die Gruppenwirkung läßt sich lokal linearisieren.

1.2 Quaternionen

Ebbinghaus et. al.: Zahlen.

Draxl: Skew Fields.

Baez: The Octonions. Bulletin AMS 39,2 (2001), 145 - 205.

Ein Schiefkörper K ist ein Ring mit Einselement $1 \neq 0$ und der Eigenschaft, daß jedes $a \in K \setminus \{0\}$ ein Linksinverses a^{-1} besitzt. Aus der Assoziativität der Multiplikation folgt

$$(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}1 = (a^{-1})^{-1}(a^{-1}a) = ((a^{-1})^{-1}a^{-1})a = 1a = a.$$

Daraus folgt, daß a^{-1} auch ein Rechtsinverses von a ist. Man sieht leicht, daß das Zentrum $Z(K) = \{a \in K \mid ab = ba \text{ für alle } b \in K\}$ eines Schiefkörpers ein Körper ist. Insbesondere ist K eine $Z(K)$ -Algebra.

Nachdem sich die komplexen Zahlen im Laufe des 18. Jahrhunderts durchgesetzt hatten, und die großen Vorteile aus ihrem Gebrauch deutlich wurden, hat Hamilton versucht, interessante $\mathbb{R}$ -Algebrastrukturen, insbesondere Schiefkörperstrukturen auf endlichdimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen zu definieren, und zwar zunächst erfolglos für dreidimensionale Vektorräume. 1843 gelang ihm die Konstruktion eines vierdimensionalen Schiefkörpers, des Raums der Quaternionen, und zwar wie folgt:

Wir definieren auf dem vierdimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{H} := \mathbb{R}\langle 1, i, j, k \rangle$ eine assoziative $\mathbb{R}$ -Algebrenstruktur durch die Relationen

$$ijk = -1, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Weil die Multiplikation assoziativ sein soll, sind alle Produkte der Basiselemente durch diese Relationen bestimmt. Ausgeschrieben ergibt sich das folgende Bild:

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) &= (aa' - bb' - cc' - dd') \\ &\quad + (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ &\quad + (ac' + ca' + db' - bd')j \\ &\quad + (ad' + da' + bc' - cb')k. \end{aligned}$$

Daß die so definierte Multiplikation tatsächlich assoziativ ist, bedarf einer kurzen Rechnung. $\mathbb{H}$ ist der Raum der Quaternionen. Im Singular: die Quaternion.

Die Konjugation $\overline{a + bi + cj + dk} := a - bi - cj - dk$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$\overline{\lambda q} = \lambda \bar{q}, \quad \overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q'}, \quad \overline{qq'} = \bar{q'}\bar{q} \quad \text{und} \quad \bar{\bar{q}} = q$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $q, q' \in \mathbb{H}$. Insbesondere ist

$$(a + bi + cj + dk)\overline{(a + bi + cj + dk)} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =: |a + bi + cj + dk|^2 \geq 0.$$

Daraus folgt sofort, daß für jedes $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ das Element $\bar{q}/|q|^2$ ein multiplikatives Inverses von q ist. Damit ist gezeigt:

Satz 1.25 (Hamilton) — $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper. □

Weil für jedes Quaternion q das Produkt $q\bar{q} = \bar{q}q$ reell ist und deshalb mit allen anderen Quaternionen vertauscht, gilt

$$|qp|^2 = \overline{qp}qp = \bar{p}(\bar{q}q)p = \bar{q}q\bar{p}p = |q|^2|p|^2.$$

Wenn man diese Relation für $p = a + bi + cj + dk$ und $q = a' + b'i + c'j + d'k$ ausschreibt, erhält man die folgende Identität, die auf Euler zurückgeht, und die natürlich nicht nur für reelle Zahlen, sondern allgemeiner für beliebige Elemente in einem kommutativen Ring gilt:

Satz 1.26 (Euler, Vierquadratesatz) —

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ = (aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2 \\ + (ac' + ca' + db' - bd')^2 + (ad' + da' + bc' - cb')^2. \end{aligned}$$

□

Außerdem folgt aus der Multiplikativität der Norm sofort:

Satz 1.27 — Die Sphäre $S^3 = \{p \in \mathbb{H} \mid |p| = 1\}$ ist mit der quaternionalen Multiplikation versehen eine topologische Gruppe. □

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit für Quaternionen ergibt sich aus der Zerlegung von $q = a + bi + cj + dk$ in einen Real- und einen Imaginärteil:

$$\operatorname{Re}(q) := a \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(q) := bi + ci + dk \in \mathbb{R}^3.$$

Wir schreiben abkürzend $x = (x_0, \xi)$ mit $x_0 = \operatorname{Re}(x)$ und $\xi = \operatorname{Im}(x)$, und analog für $y = (y_0, \eta)$. Dann läßt sich die Quaternionenmultiplikation wie folgt durch das Skalarprodukt (ξ, η) und das Vektorprodukt $\xi \times \eta$ ausdrücken:

$$(x_0, \xi)(y_0, \eta) = (x_0 y_0 - (\xi, \eta), x_0 \eta + y_0 \xi + \xi \times \eta).$$

Die Assoziativität des Produktes übersetzt sich dann in Standardrelationen für Skalar- und Vektorprodukt.

Satz 1.28 (Frobenius) — Jeder Schiefkörper D mit $\mathbb{R} \subset Z(D)$ und von endlicher Dimension über $\mathbb{R}$ ist zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ isomorph.

Beweis. Jedes $x \in D$ erzeugt eine kommutative $\mathbb{R}$ -Unteralgebra $\mathbb{R}[x] \subset D$ von endlicher $\mathbb{R}$ -Dimension. Weil diese Unteralgebra auch nullteilerfrei ist, ist sie ein Körper, genauer: eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{R}$. Notwendigerweise ist sie deshalb isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Insbesondere genügt jedes $x \in D \setminus \mathbb{R}$ einer quadratischen Gleichung $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und $a_1^2 - 4a_0 < 0$. In diesem Falle ist $z := (2x + a_1) / \sqrt{4a_0 - a_1^2}$ ein Element in $\mathbb{R}[x]$ mit $z^2 = -1$. Falls $D \neq \mathbb{R}$, so gibt es ein Element $i \in D \setminus \mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$ und $\mathbb{R}[i] \cong \mathbb{C}$.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß $D \supsetneq \mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$. Die Abbildung $\psi : D \rightarrow D$, $y \mapsto i y i^{-1}$, ist ein Automorphismus des Schiefkörpers D mit $\psi^2 = 1$. Deshalb zerfällt D in eine direkte Summe von Eigenräumen $D = D^+ \oplus D^-$ zu den Eigenwerten 1 und -1 . Für diese gilt $D^\pm D^\pm \subset D^+$ und $D^\pm D^\mp \subset D^-$. Nun ist D^+ eine nullteilerfreie Algebra endlicher Dimension, die $\mathbb{C}$ in ihrem Zentrum enthält. Wie im ersten Schritt erzeugt jedes $y \in D^+ \setminus \mathbb{C}$ eine echte algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{C}$. Das

ist aber ausgeschlossen, weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Mit anderen Worten: $D_+ = \mathbb{C}$. Wir fassen jetzt D^- als Linksvektorraum über $\mathbb{C}$ auf.

Es sei nun $y \in D^- \setminus \{0\}$ und $y^2 + b_1 y + b_0 = 0$ die zugehörige quadratische Relation mit reellen Koeffizienten y_1 und y_2 . Wendet man hierauf ψ an, kippt das Vorzeichen von b_1 . Daraus folgt $b_1 = 0$ und $b_0 > 0$. Wir setzen $j := y/\sqrt{b_0}$. Dann gilt $j^2 = -1$ und $ij = -ji$. Außerdem ist $D^- j \subset D^+ = \mathbb{C}$, also $D^- \subset \mathbb{C}j$. Das zeigt: D wird von i und j als $\mathbb{R}$ -Algebra mit den Relationen $i^2 = j^2 = -1$ und $ij = -ji$ erzeugt. Das zeigt $D \cong \mathbb{H}$. $\square$

1.3 Klassische Liegruppen

Die orthogonale, unitäre und symplektische Gruppe. — Es sei K einer der (Schiefe-)Körper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Wir fassen Vektorräume über dem Schiefkörper $\mathbb{H}$ grundsätzlich als Rechtsvektorräume auf.

Ein reelles, komplexes bzw. quaternionales Skalarprodukt auf einem Vektorraum V über $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{H}$ ist eine Abbildung $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow K$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. (Sesquilinearität) Für alle Vektoren x, x_1 , etc und Skalare λ_1, λ_2 etc gelten die Identitäten

$$\langle x, y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle \lambda_1 + \langle x, y_2 \rangle \lambda_2$$
 und

$$\langle x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2, y \rangle = \overline{\mu_1} \langle x_1, y \rangle + \overline{\mu_2} \langle x_2, y \rangle.$$
2. (Hermitizität) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. (Positivität) $\langle x, x \rangle \geq 0$, und $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Das Standardskalarprodukt auf dem Raum K^n der Spaltenvektoren, das wir im Folgenden betrachten, ist durch

$$\langle x, y \rangle := x^* y$$

gegeben. Dabei bezeichnet man für Matrizen $M \in K^{n \times m}$ mit M^* die adjungierte Matrix mit den Einträgen $M_{ij}^* = \overline{M_{ji}}$. Eine K -lineare Abbildung $g : K^n \rightarrow K^n$ heißt orthogonal, unitär bzw. symplektisch, wenn

$$\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in K^n,$$

oder äquivalent dazu, wenn $g^* g = I_n$. Dies führt auf die folgenden Untergruppen:

$$O(n) = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid g^* g = I_n\} \quad (\text{orthogonale Gruppe}) \quad (1.1)$$

$$U(n) = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid g^* g = I_n\} \quad (\text{unitäre Gruppe}) \quad (1.2)$$

$$\text{Sp}(n) = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{H}) \mid g^* g = I_n\} \quad (\text{symplektische Gruppe}) \quad (1.3)$$

Jede dieser Gruppen ist die Nullfaser der Abbildung

$$F : K^{n \times n} \rightarrow H := \{M \mid M^* = M\} \subset K^{n \times n}, \quad F(A) = A^* A - I_n,$$

in den $\mathbb{R}$ -Vektorraum H der Hermiteschen Matrizen. Hermitesche Matrizen haben reelle Diagonalelemente, und die Einträge oberhalb der Diagonalen bestimmen die Einträge unterhalb. Deshalb ist

$$\dim_{\mathbb{R}} H = n + \binom{n}{2} \dim_{\mathbb{R}} K.$$

Das Differential von F in einem Punkt $g \in F^{-1}(0)$ ist $D_g F(A) = g^* A + A^* g$. Ist ein $b \in H$ vorgegeben, so erreicht man mit $A := \frac{1}{2}gb$, daß $D_g F(A) = b$. Folglich ist F in jedem Punkt $g \in F^{-1}(0)$ submersiv. Die in (1.1) - (1.3) definierten Gruppen sind also nach dem Jacobikriterium abgeschlossene Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} K^n - \dim_{\mathbb{R}} H = \dim_{\mathbb{R}}(K) \left(n^2 - \binom{n}{2} \right) - n.$$

Das bedeutet im Einzelnen:

$$\dim O(n) = \binom{n}{2}, \quad \dim U(n) = n^2, \quad \dim Sp(n) = \binom{2n+1}{2}.$$

Alle drei Liegruppen sind kompakt: Für jede orthogonale etc. Matrix g gilt

$$\|g\|^2 = \sum_{ij} |g_{ij}|^2 = \operatorname{tr}(g^* g) = \operatorname{tr}(I_n) = n.$$

Die orthogonale, unitäre bzw. symplektische Gruppe ist also eine abgeschlossene Teilmenge der Kugel vom Radius $\sqrt{n}$ in K^n .

Es bezeichne $D(K) \subset K^{n \times n}$ den Raum aller Dreiecksmatrizen A mit $A_{ij} = 0$ für $i > j$ und $A_{ii} > 0$ für alle i . Die letzte Bedingung verlangt also insbesondere, daß alle Diagonaleinträge positive reelle Zahlen sind. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} O(n) \times D(K) &\xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}) \\ U(n) \times D(\mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C}) \\ Sp(n) \times D(\mathbb{H}) &\xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{H}) \end{aligned}$$

sind Diffeomorphismen. Umkehrabbildungen werden durch das Gram-Schmidt-Verfahren definiert. Weil die Räume $D(K)$ kontrahierbar sind, sind die Inklusionen

$$O(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad U(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad Sp(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{H})$$

Deformationsretrakte. □

Die spezielle orthogonale Gruppe. — Für $g \in O(n)$ folgt aus $g^t g = I$, daß $\det(g)^2 = 1$. Spiegelungen haben negative Determinante. Deshalb ist der Gruppenhomomorphismus $\det : O(n) \rightarrow \{\pm 1\}$ surjektiv. Der Kern

$$SO(n) := \{g \in O(n) \mid \det(g) = 1\}$$

heißt spezielle orthogonale Gruppe.

Satz 1.29 — $\mathrm{SO}(n)$ ist zusammenhängend. $\mathrm{O}(n)$ hat genau zwei WegekompONENTEN: $\mathrm{SO}(n)$ und $s\mathrm{SO}(n)$ für eine beliebige Spiegelung s .

Beweis. Jede orthogonale Abbildung g ist ein Produkt $g = s_{v_1} \cdots s_{v_k}$ aus Spiegelungen an geeigneten Einheitsvektoren $v_1, \dots, v_k \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Weil die Einheitssphäre zusammenhängend ist, gibt es Wege $\alpha_i : I \rightarrow S^{n-1}$ mit $\alpha_i(0) = v_i$ und $\alpha_i(1) = v_1$. Dann ist $g_t := s_{\alpha_1(t)} \cdots s_{\alpha_k(t)}$ ein Weg in $\mathrm{O}(n)$ von g nach $s_{v_1}^k$. Wenn $\det(g) = 1$, ist k gerade. In diesem Falle verläuft der Weg ganz in $\mathrm{SO}(n)$ und endet in $s_{v_1}^k = I_n$. Das zeigt, daß $\mathrm{SO}(n)$ zusammenhängend ist. Es ist klar, daß $s\mathrm{SO}(n)$ für jede Spiegelung in einer anderen WegekompONENTE liegt. Ist andererseits $g \in \mathrm{O}(n)$ mit $\det(g) = -1$, so folgt $sg \in \mathrm{SO}(n)$, also $g \in s\mathrm{SO}(n)$. $\square$

Als WegekompONENTE des Neutralelements hat $\mathrm{SO}(n)$ denselben Tangentialraum wie $\mathrm{O}(n)$. Üblicherweise verwendet man die Bezeichnung

$$\mathfrak{so}(n) := T_e \mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t + A = 0\}.$$

Für kleine Werte von n lassen sich die topologischen Räume, die den Gruppen $\mathrm{SO}(n)$ zugrunde liegen, direkt angeben:

Es ist $\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^*$, und $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ ist die triviale Gruppe. Eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ liegt genau dann in $\mathrm{SO}(2)$, wenn

$$ad - bc = 1, \quad a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

Mit dem Ansatz $a = \cos(t)$, $c = \sin(t)$, $b = \sin(u)$, $d = \cos(u)$, übersetzen sich diese Gleichungen in die Bedingungen $\cos(t+u) = 1$ und $\sin(t+u) = 0$, also $t+u = 0 \bmod 2\pi\mathbb{Z}$, oder

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathrm{SO}(2), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$. Als topologischer Raum ist $\mathrm{SO}(2)$ diffeomorph zur eindimensionalen Sphäre S^1 .

Es sei $g \in \mathrm{SO}(3)$. Dann ist g das Produkt zweier Spiegelungen, etwa an den Hyperebenen H_1 und H_2 . Wenn $g \neq I_3$, sind die Hyperebenen verschiedenen und bestimmen eine Achse $A := H_1 \cap H_2$ aus Eigenvektoren von g vom Eigenwert 1. Bezüglich einer Orthonormalbasis e'_1, e'_2, e'_3 , wo $e'_1 \in A$, ist g durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese Matrix hängt nur von e'_1 , aber nicht von der Wahl der Basis e'_2, e'_3 in der Ebene $A^\perp$ ab. Wählt man statt e'_1 den entgegengesetzten Vektor $-e'_1$, so ändert sich der Drehwinkel in $-\varphi$.

Für jeden Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ und jeden Einheitsvektor $v \in S^2$ bezeichne $D(v, \varphi)$ die Drehung um die durch v bestimmte Achse um den Winkel φ . Die Abbildung

$$a : B_3 \longrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad v \mapsto D(v/\|v\|, \pi\|v\|)$$

von der Einheitskugel in die spezielle orthogonale Gruppe ist gegen den ersten Anschein auch im Ursprung definiert und stetig. Sie ist nach den Vorüberlegungen surjektiv, und $a(v) = a(w)$ gilt genau dann, wenn entweder $v = w$ oder $v = -w \in S^2$. Bezeichnet $\sim$ die Äquivalenzrelation auf B^3 , die durch $v \sim -v$ für $v \in S^2$ erzeugt wird, so induziert a einen Homöomorphismus

$$\mathbb{R}P^3 \approx B^3 / \sim \approx \mathrm{SO}(3).$$

Der Liegruppe $\mathrm{SO}(3)$ zugrundeliegende topologische Raum ist also der dreidimensionale reelle projektive Raum. Insbesondere ist $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2$.

Die spezielle unitäre Gruppe. — Für jede unitäre Matrix $g \in \mathrm{U}(n)$ folgt aus $g^*g = I$, daß $|\det(g)| = 1$. Ist ein $z \in S^1$ vorgegeben und wählt man $w \in S^1$ mit $w^n = z$, so ist $\det(wI_n) = z$. Deshalb ist der Gruppenhomomorphismus $\det : \mathrm{U}(n) \rightarrow S^1$ surjektiv. Der Kern

$$\mathrm{SU}(n) := \{g \in \mathrm{U}(n) \mid \det(g) = 1\}$$

ist deshalb eine Lieuntergruppe der Dimension $n^2 - 1$. Die Abbildung

$$\mathrm{SU}(n) \rtimes S^1 \longrightarrow \mathrm{U}(n), \quad (g, \zeta) \mapsto g \operatorname{diag}(\zeta, 1, \dots, 1),$$

ist ein Isomorphismus von Liegruppen ist, der aber nicht zerfällt. D.h. $\mathrm{U}(n)$ ist diffeomorph zu $\mathrm{SU}(n) \times S^1$, aber nicht als Gruppe isomorph.

Satz 1.30 — $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ sind zusammenhängend.

Beweis. Jede unitäre Matrix g ist insbesondere normal in dem Sinne, daß g mit g^* vertauscht. Deshalb gibt es eine unitäre Matrix u mit der Eigenschaft, daß u^*gu eine Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ mit den Diagonaleinträgen $\zeta_i \in S^1$, $i = 1, \dots, n$ ist. Dabei liegt g genau dann in $\mathrm{SU}(n)$, wenn $\zeta_1 \cdots \zeta_n = 1$. Wir wählen Wege $\alpha_i : I \rightarrow S^1$ mit $\alpha_i(0) = \zeta_i$ und $\alpha_i(1) = 1$. Wenn $\zeta_1 \cdots \zeta_n = 1$, wählen wir speziell $\alpha_n(t) = \alpha_1(t)^{-1} \cdots \alpha_{n-1}(t)^{-1}$. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$g_t := u^* \operatorname{diag}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))u$$

ein Weg in $\mathrm{U}(n)$ von g nach I_n , der außerdem ganz in $\mathrm{SU}(n)$ verläuft, falls $g \in \mathrm{SU}(n)$. Folglich sind $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ wegzusammenhängend. $\square$

Aufgabe 1.2 — Man zeige mit derselben Methode erneut, daß $\mathrm{SO}(n)$ zusammenhängend ist.

Für kleine Werte von n lassen sich die topologischen Räume, die den Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$ zugrundeliegen, wieder direkt angeben:

Es gilt $U(1) = S^1$ und $SU(1) = \{1\}$. Eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ liegt genau dann in $SU(2)$, wenn die Koeffizienten a, b, c, d die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$ad - bc = 1, \quad |a|^2 + |c|^2 = 1, \quad |b|^2 + |d|^2 = 1, \quad \bar{a}b + \bar{c}d = 0.$$

Die beiden äußeren Gleichungen lassen sich so zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $d = \bar{a}$ und $b = -\bar{c}$. Die Bilanz ist

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C} \text{ mit } |a|^2 + |c|^2 = 1 \right\} \approx S^3.$$

Insbesondere ist $\pi_1(SU(2)) = 0$ und $\pi_1(U(2)) \cong \mathbb{Z}$.

Die symplektischen Gruppen. — Die Gruppe $Sp(1) = \{g \in \mathbb{H} \mid \|g\| = 1\}$ ist ebenfalls isomorph zur S^3 . Einen direkten Isomorphismus $Sp(1) \rightarrow SU(2)$ erhält man wie folgt: Wir fassen $\mathbb{H}$ als einen Rechts- $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Basis 1 und j auf. Die Linksmultiplikation mit einem Element $g = a + jb$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ auf $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$ ist dann eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung und auf den Basiselementen wie folgt gegeben:

$$g \cdot 1 = a + jb, \quad g \cdot j = -\bar{b} + j\bar{a}.$$

Man erhält also einen injektiven $\mathbb{R}$ -Algebrenhomomorphismus

$$\psi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad (a + jb) \mapsto \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt $\psi(\bar{g}) = \psi(g)^*$ und $|g|^2 = \det(g)$. Unter ψ geht die Gruppe $Sp(1)$ isomorph auf $SU(2)$.

Satz 1.31 — Die Gruppen $Sp(n)$ sind zusammenhängend.

Beweis. Die Gruppe $Sp(n)$ wirkt auf der Einheitssphäre $S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$ durch Matrizenmultiplikation von links. Die Abbildung

$$p : Sp(n) \rightarrow S^{4n-1}, \quad A \mapsto Ae_1,$$

ist surjektiv (d.h. die Wirkung ist transitiv) und sogar submersiv (d.h. in jedem Punkt $g \in Sp(n)$ ist das Differential $T_g p : T_g Sp(n) \rightarrow T_{ge_1} S^{4n-1}$ surjektiv). Submersive Abbildungen von Mannigfaltigkeiten sind offen. Die Faser $F_{e_1} := p^{-1}(e_1)$ über dem Einheitsvektor e_1 ist genau die Standgruppe von e_1 . Das ist die zu $Sp(n-1)$ isomorphe Gruppe

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h \end{array} \right) \mid h \in Sp(n-1) \right\},$$

Die Faser über einem allgemeinen Punkt $y = ge_1 \in S^{4n-1}$ ist $F_y := p^{-1}(y) = gHg^{-1}$.

Nun ist $\mathrm{Sp}(1) \cong S^3$ zusammenhängend. Wir betrachten $\mathrm{Sp}(n)$ für ein $n > 1$ und nehmen an, $\mathrm{Sp}(n-1)$ wäre schon als zusammenhängend erwiesen. Es sei $\mathrm{Sp}(n) = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Teilmengen. Weil p offen und surjektiv ist, gibt es eine offene Überdeckung $S^{4n-1} = p(A) \cup p(B)$. Angenommen, $y \in p(A) \cap p(B)$. Dann sind die Mengen $F_y \cap A$ und $F_y \cap B$ nicht leer und disjunkt und bilden eine offene Überdeckung von F_y , im Widerspruch dazu, daß $F_y \cong \mathrm{Sp}(n-1)$ nach Induktionsannahme zusammenhängend ist. Folglich kann man solch ein y nicht wählen, d.h. $p(A) \cap p(B)$ ist leer. Weil die Sphäre S^{4n-1} zusammenhängend ist, folgt hieraus $p(A) = \emptyset$ oder $p(B) = \emptyset$. Folglich hat man auch $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Das war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 1.3 — Man führe die Details im Beweis aus: Warum ist p surjektiv, warum submersiv? Warum sind submersive Abbildungen offen?

Aufgabe 1.4 — Welches allgemeine Zusammenhangskriterium kann man aus dem im zweiten Teil des Beweises verwendeten Arguments ableiten?

Aufgabe 1.5 — Man zeige mit derselben Methode erneut, daß $\mathrm{SO}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ zusammenhängend sind.

Wie fassen jetzt $\mathbb{H}$ als vierdimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit der Basis $1, i, j$ und k auf. Weil $|axb| = |a| |x| |b|$, ist die Abbildung

$$\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad x \mapsto axb^{-1},$$

für jedes Paar $a, b \in S^3$ eine längentreue und damit orthogonale Abbildung. Man erhält so eine Abbildung

$$\varphi : S^3 \times S^3 \longrightarrow \mathrm{SO}(4), \quad (a, b) \mapsto (a \mapsto axb^{-1}).$$

Man sieht leicht, daß dies ein Gruppenhomomorphismus ist und daß $(-1, -1)$ im Kern liegt. Tatsächlich gilt

Satz 1.32 — Die Folge

$$1 \longrightarrow \langle (-1, -1) \rangle \longrightarrow S^3 \times S^3 \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SO}(4) \longrightarrow 1$$

ist exakt.

Beweis. Es sei (a, b) ein Element im Kern von φ . Dann gilt zunächst $1 = a1b^{-1}$, also $a = b$. Weiter gilt $x = axa^{-1}$ für alle a genau dann, wenn a im Zentrum von $\mathbb{H}$, also in $\mathbb{R}$ liegt. Für Elemente $a \in \mathbb{R}$ gilt aber $\varphi(a, a) = I_4$ genau dann, wenn $a^2 = 1$.

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ besitzt die quaternionale Beschreibung $\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(\bar{x}y)$. Deshalb kann man die Spiegelung s_u an einem Element $u \in S^3$ durch

$$s_u(x) = x - 2\langle u, x \rangle u = u(\bar{u}x - 2\langle 1, \bar{u}x \rangle 1) = us_1(\bar{u}x)$$

auf die Spiegelung $s_1(x) = -\bar{x}$ am Einselement zurückführen. Deshalb ist $s_u(x) = -u\bar{x}u$, und die Komposition zweier Spiegelungen ist $s_v s_u(x) = (v\bar{u})x(\bar{u}v)$. Folglich liegt das Produkt zweier Spiegelungen im Bild von φ , und weil sich jede eigentliche orthogonale Abbildung als Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen schreiben läßt, ist φ surjektiv. $\square$

Weil $a1a^{-1} = 1$, bildet $\varphi(a, a)$ Realteil und Imaginärteil von $\mathbb{H}$ jeweils in sich ab. Die Einschränkung auf $\operatorname{Im}(\mathbb{H})$ ist also eine orthogonale Abbildung auf dem dreidimensionalen Raum $\operatorname{Im}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\langle i, j, k \rangle$. Damit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi : S^3 \rightarrow \operatorname{SO}(3), \quad a \mapsto (x \mapsto axa^{-1}).$$

Satz 1.33 — *Die Folge*

$$1 \longrightarrow \langle -1 \rangle \longrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} \operatorname{SO}(3) \longrightarrow 1$$

ist exakt.

Beweis. Ein Element $(a, b) \in S^3 \times S^3$ wird unter φ genau dann auf $\{(1)\} \times \operatorname{SO}(3) \subset \operatorname{SO}(4)$ abgebildet, wenn $a1b^{-1} = 1$, d.h. wenn $a = b$. Deshalb ist die Surjektivität von π eine Konsequenz der Surjektivität von φ . Es ist klar, daß $\pi(a) = I_3$ genau dann, wenn a im Zentrum von $\mathbb{H}$ liegt. Daraus folgt die Behauptung über den Kern. $\square$

Die Abbildungen $\varphi : S^3 \times S^3 \rightarrow \operatorname{SO}(4)$ und $\pi : S^3 \rightarrow \operatorname{SO}(3)$ sind einfach zusammenhängende topologische Überlagerungen, also die universellen Überlagerungen der beiden topologischen Gruppen. Deshalb erhält man als Folgerung der beiden Sätze:

Folgerung 1.34 — $\operatorname{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$. $\square$

Folgerung 1.35 — $\pi_1(\operatorname{SO}(3)) \cong \pi_1(\operatorname{SO}(4)) \cong \mathbb{Z}/2$. $\square$

1.4 Wegekomponten und Fundamentalgruppen

Spanier: Algebraic Topology. Springer Verlag.

Whitehead: Homotopy Theory. Springer Verlag.

Für einen beliebigen topologischen Raum X bezeichne $\pi_0(X)$ die Menge der Wegekomponten und $\operatorname{pr} : X \rightarrow \pi_0(X)$ die natürliche Projektion.

Die Wegekompontente G_0 des Neutralelements einer lokal wegzusammenhängenden topologische Gruppe G ist eine offene Teilmenge von G . Das Bild von $G_0 \times G_0$

unter der Multiplikationsabbildung ist wegzusammenhängend und enthält das Neutralelement. Deshalb gilt $G_0 G_0 \subset G_0$. Analog zeigt man $G_0^{-1} \subset G_0$ und $g G_0 g^{-1} \subset G_0$ für jedes $g \in G$. Das zeigt:

Satz 1.36 — *Es sei G eine lokal wegzusammenhängende topologische Gruppe.*

1. *Die Wegekomponekte G_0 des Neutralelements in G ist ein offener Normalteiler.*
2. *Die Wegekomponekten von G sind genau die Nebenklassen von G_0 .*
3. *Es gibt genau eine Gruppenstruktur auf $\pi_0(G)$ bezüglich der die Projektion $\text{pr} : G \rightarrow \pi_0(G)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.*
4. *Die Folge $1 \rightarrow G_0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\text{pr}} \pi_0(G) \rightarrow 1$ ist exakt.*

□

Für einen beliebigen topologischen Raum X mit einem Basispunkt x_0 ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Homotopieklasse von Abbildungen $\alpha : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ mit der Verknüpfung

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } t \in [0, 1/2] \text{ und} \\ \beta(2t - 1) & \text{für } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Der konstante Weg $\underline{x_0}$ ist das Neutralelement in $\pi_1(X, x_0)$.

Wenn G eine topologische Gruppe mit Neutralelement e ist, gibt es auf der Menge $C((I, \partial I), (G, e))$ neben $*$ eine weitere Verknüpfung, die durch die Gruppenwirkung vermittelt wird:

$$(\alpha \circ \beta)(t) = \alpha(t)\beta(t) \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Die Aussagen des folgenden Lemmas sind unmittelbar einsichtig.

Lemma 1.37 — *$\circ$ ist mit Homotopie verträglich und induziert eine mit demselben Symbol bezeichnete Verknüpfung auf $\pi_1(G, e)$. Der konstante Weg $\underline{e} \in \pi_1(G, e)$ ist ein zweiseitiges Neutralelement für $\circ$. Zwischen $*$ und $\circ$ bestehen auf $\pi_1(G, e)$ die folgenden Verträglichkeitsbeziehungen: $(\alpha * \beta) \circ (\gamma * \delta) = (\alpha \circ \gamma) * (\beta \circ \delta)$.* □

Lemma 1.38 — *Es sei Π eine Menge mit zwei Verknüpfungen $\circ$ und $\star$ und einem Element e , das bezüglich beider Verknüpfungen ein zweiseitiges Neutralelement ist. Gilt $(a \circ b) \star (c \circ d) = (a \star c) \circ (b \star d)$ für alle $a, b, c, d \in \Pi$, so sind $\circ$ und $\star$ gleich und kommutativ.*

Beweis. Es gilt

$$a \circ b = (a \star e) \circ (e \star b) = (a \circ e) \star (e \star b) = a \star b$$

und

$$a \circ b = (e \star a) \circ (b \star e) = (e \circ b) \star (a \circ e) = b \star a.$$

□

Folgerung 1.39 — Die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe G ist abelsch. Die durch die Gruppenmultiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ induzierte Abbildung

$$\pi_1(m) : \pi_1(G \times G, (e, e)) = \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \rightarrow \pi_1(G, e)$$

ist die Gruppenmultiplikation auf der Fundamentalgruppe. □

Im Folgenden schränken wir uns auf Liegruppen ein. Liegruppen sind Mannigfaltigkeiten und deshalb lokal wegzusammenhängend und semilokal einfachzusammenhängend. Nach den Ergebnissen der allgemeinen Überlagerungstheorie gibt es daher für jede zusammenhängende Liegruppe G zu jeder Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(G, e)$ genau eine zusammenhängende topologische Überlagerung $(G_\Gamma, e_\Gamma) \rightarrow (G, e)$ mit $\pi_1(G_\Gamma, e_\Gamma) \xrightarrow{\cong} \Gamma \subset \pi_1(G, e)$.

Satz 1.40 — Es sei G eine zusammenhängende Liegruppe und $p : G' \rightarrow G$ eine zusammenhängende topologische Überlagerung, $e' \in p^{-1}(e)$.

1. $p : G' \rightarrow G$ ist eine reguläre Überlagerung, d.h. die Gruppe $\text{Deck}(p)$ der Decktransformationen wirkt transitiv auf den Fasern von p .
2. Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf G' bezüglich der p ein lokaler Diffeomorphismus ist.
3. Es gibt genau eine topologische Gruppenstruktur auf G' mit Neutralelement e' bezüglich der p ein Gruppenhomomorphismus ist.
4. G' mit der differenzierbaren Struktur aus 2 und der Gruppenstruktur aus 3 ist eine Liegruppe.
5. Die Wirkung von $\text{Deck}(p)$ auf G' induziert einen Isomorphismus $\text{Deck}(p) \rightarrow \ker(p)$ von Gruppen, und $\ker(p)$ ist eine diskrete Untergruppe im Zentrum von G' .

Beweis. Ad 1. Weil $\pi_1(G, e)$ abelsch ist, ist jede Überlagerung regulär.

Ad 2. Die Aussage gilt allgemeiner für topologische Überlagerungen beliebiger Mannigfaltigkeiten. Man wählt für $x' \in G'$ und $x := p(x) \in G$ eine Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer Umgebung U von x , die so klein gewählt ist, daß U zulässig wird, d.h. $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ mit $p : U_\alpha \xrightarrow{\cong} U$. Ist α der Index mit $x' \in U_\alpha$ und wählt man $\varphi \circ p : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Karte für x' , so definieren diese Karten einen differenzierbaren Atlas.

Ad 3. Die Abbildung $h : G' \times G' \xrightarrow{p \times p} G \times G \xrightarrow{m} G$ besitzt genau dann eine Hochhebung $m' : G' \times G' \rightarrow G'$ mit $m'(e', e') = e'$, wenn das Bild von $\pi_1(G', e') \times \pi_1(G', e')$ unter $\pi_1(h) = \pi_1(m) \circ (\pi_1(p) \times \pi_1(p))$ in $\pi_1(G', e')$ liegt. Aber $\pi_1(m)$ ist genau die Gruppenstruktur auf $\pi_1(G, e)$, und $\pi_1(p)(\pi_1(G', e'))$ ist eine Untergruppe von $\pi_1(G, e)$. Daraus ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit einer Abbildung $m' : G' \times G' \rightarrow G'$ mit $p \circ m' = m' \circ (p \times p)$ und $m'(e', e') = e'$. Mit demselben Eindeutigkeitsargument zeigt man, daß m' assoziativ ist, d.h. daß $m' \circ (m' \times \text{id})$ und $m' \circ (\text{id} \times m')$ dieselben Abbildungen $G' \times G' \times G' \rightarrow G'$ sind, und weiter daß G' eine topologische Gruppe wird. Es ist klar, daß m' sogar differenzierbar bezüglich der kanonischen differenzierbaren Struktur auf G' ist.

Ad 5. Es sei $g \in \ker(p)$. Wegen $p(g) = p(e') = e$ sind die Links- und die Rechtsmultiplikation $\ell_g, r_g : G' \rightarrow G'$ Decktransformationen mit $\ell_g(e') = g = r_g(e)$. Sie stimmen daher untereinander überein, was bedeutet, daß g im Zentrum liegt. Das zeigt $\ker(p) \subset Z(G)$. Es ist klar, daß jede Decktransformation von der Form ℓ_g für ein $g \in \ker(p)$ ist und daß $\varphi \mapsto \varphi(e')$ einen Isomorphismus $\text{Deck}(p) \rightarrow \ker(p)$ definiert. $\square$

Wir erhalten also zu $p : (G', e') \rightarrow (G, e)$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen:

$$1 \longrightarrow \pi_1(G', e') \xrightarrow{p_*} \pi_1(G, e) \xrightarrow{r} G' \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1,$$

wobei r wie folgt gegeben ist: Es sei $\alpha' : (I, 0) \rightarrow (G', e')$ eine Hochhebung des Weges $\alpha : (I, \partial I) \rightarrow (G, e)$. Dann ist $r([\alpha]) = \alpha'(1)$.

Beispiel 1.41 — Das Zentrum der Gruppe $S^3 = \text{SU}(2)$ ist $\{\pm 1\}$. Das Zentrum von $S^3 \times S^3$ ist also isomorph zur Kleinschen Vierergruppe und erzeugt von $s_1 = (-1, 1)$ und $s_2 = (1, -1)$. Es sei $s_3 = s_1 s_2 = (-1, -1)$. Teilt man aus $S^3 \times S^3$ die Untergruppen $\langle s_i \rangle$ für $i = 1, 2, 3$ bzw. $\langle s_1, s_2 \rangle$ heraus, erhält man das folgende kommutative Diagramm aus Überlagerungsabbildungen:

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 \times S^3 & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ SO(3) \times S^3 & & S^3 \times SO(3) & & SO(4) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & SO(3) \times SO(3) & & \end{array}$$

Aufgabe 1.6 — Es sei $H \subset Z(G)$ eine diskrete Untergruppe im Zentrum der Liegruppe G . Dann gibt es auf G/H genau eine Liegruppenstruktur mit der Eigenschaft, daß die kanonische Projektion $p : G \rightarrow G/H$ ein Homomorphismus von Liegruppen ist.

Aufgabe 1.7 — Das Zentrum von $\text{SU}(n)$ besteht aus allen Diagonalmatrizen $g = \text{diag}(\zeta, \dots, \zeta)$, wo ζ eine n -te Einheitswurzel ist, d.h. $\text{SU}(n) \cong \mu_n$. Es sei $\text{PSU}(n) :=$

$SU(n)/\mu_n$. Für jeden Teiler $d|n$ gibt es eine Zwischenüberlagerung

$$SU(n) \rightarrow G_d \rightarrow PSU(n).$$

Dabei ist $\pi_1(G_d) \cong \mu_d$ und $Z(G_d) \cong \mu_n/\mu_d$.

§2 Die symplektische Gruppe

2.1 Schiefsymmetrische Formen

Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Eine Bilinearform $\omega : V \times V \rightarrow K$ ist schiefsymmetrisch oder alternierend, wenn $\omega(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Insbesondere gilt dann auch $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$ für alle $v, w \in V$. Bezüglich einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von V ist ω durch eine schiefsymmetrische Matrix Ω mit den Einträgen $\Omega_{ij} = \omega(v_i, v_j)$ gegeben. Hier und im Folgenden verstehen wir unter einer schiefsymmetrischen oder alternierenden Matrix Ω stets eine Matrix, deren Einträge den Bedingungen $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ und $\Omega_{ii} = 0$ genügen. Unter einem Basiswechsel $v'_i = \sum_j S_{ji} v_j$ transformiert sich Ω wie $\Omega' = S^t \Omega S$.

Wir sagen $v, w \in V$ seien senkrecht bezüglich ω , in Zeichen: $v \perp w$, wenn $\omega(v, w) = 0$. Analog setzen wir $X \perp Y$ für beliebige Teilmengen $X, Y \subset V$, wenn $x \perp y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Für einen Unterraum $W \subset V$ bezeichne $W^\perp$ den Raum aller Vektoren v mit $v \perp W$. In diesem Sinne ist $V^\perp \subset V$ der Raum aller Vektoren, die senkrecht auf jedem anderen Vektor stehen. Wir nennen

$$\text{rad}(\omega) := V^\perp$$

das Radikal von V . Die Form heißt nicht ausgeartet oder symplektisch, wenn $\text{rad}(\omega) = 0$. Ein Vektorraum V mit einer nicht ausgearteten schiefsymmetrischen Form ist ein symplektischer Vektorraum. Auf dem Faktorraum $\bar{V} := V / \text{rad}(\omega)$ wird durch

$$\bar{\omega}(\bar{v}, \bar{w}) := \omega(v, w)$$

eine schiefsymmetrische Form definiert, weil man jederzeit v und w durch $v + u$ und $w + u'$ mit $u, u' \in V^\perp$ ersetzen kann, ohne daß sich am Wert von $\omega(v + u, w + u') = \omega(v, w)$ etwas ändert. Der Raum $\bar{V}$ mit der Form $\bar{\omega}$ ist symplektisch, wie man leicht sieht.

Wenn ω symplektisch ist, gilt $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$. Weil offensichtlich $W \subset (W^\perp)^\perp$, erhält man aus der Dimensionsrelation sogar die Gleichheit: $W = (W^\perp)^\perp$. Wie man schon an dem Beispiel $\{v\} \subset v^\perp$ für jeden Vektor $v \in V$ sieht, ist es im Allgemeinen nicht wahr, daß $W + W^\perp = V$. Man hüte sich also vor Fehlschlüssen, die aus der Anschauung eines reellen *euklidischen* Raumes herrühren. Für eine beliebige alternierende Form ω , deren Einschränkung auf einen Unterraum W symplektisch ist, gilt $V = W \oplus W^\perp$.

Ein Unterraum $W \subset V$ heißt isotrop, wenn $W \subset W^\perp$. Weil ω alternierend ist, ist jeder eindimensionale Unterraum isotrop. $W \subset V$ ist ein Lagrangeunterraum, wenn $W = W^\perp$.

Satz 2.1 — *Es sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum.*

1. *Ist W ein Lagrangeunterraum, so gilt $\dim V = 2 \dim W$.*

2. Jeder isotrope Unterraum liegt in einem Lagrangeunterraum. Insbesondere besitzt V Lagrangeunterräume.
3. Zu jedem Lagrangeunterraum W existiert ein komplementärer Lagrangeunterraum W' . Die Paarung $\omega : W \times W' \rightarrow K$ ist nicht ausgeartet.

Beweis. 1. Die Behauptung folgt sofort aus $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp) = 2 \dim(W)$.

2. Weil alle eindimensionalen Unterräume isotrop sind, ist die zweite Aussage für den Nullraum trivialerweise richtig, ebenso für Lagrangeunterräume. Es sei also $W \subset V$ ein isotroper Unterraum mit $0 < \dim(W) < \frac{1}{2} \dim(V)$. Wegen $W = (W^\perp)^\perp$ gilt $W = \text{rad}(\omega|_{W^\perp})$, so daß $V' := W^\perp/W$ ein symplektischer Vektorraum von kleinerer Dimension als V ist. Wir können induktiv annehmen, daß es in V' einen Lagrangeunterraum L' gibt. Es sei L das Urbild von L' unter der Projektion $W^\perp \rightarrow V'$. Dann gilt $W \subset L$ und $L^\perp = L$.

3. Es sei $W \subset V$ ein Lagrangeunterraum und $e_1, \dots, e_n$ eine Basis, die zu einer Basis $e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_n$ von V ergänzt wird. Bezeichnet man mit A und T die Matrizen

$$A_{ij} = \omega(e_i, x_j), \quad T_{ij} = \omega(x_i, x_j),$$

so gehört zu ω bezüglich der gegebenen Basis die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -A^t \\ A & T \end{pmatrix}.$$

Aus $\det(\Omega) \neq 0$ folgt $\det(A) \neq 0$. Wir machen für eine neue Basis den Ansatz $y_i = x_i + \sum_k B_{ki} e_k$, wobei die Matrix B so zu bestimmen ist, daß

$$0 = \omega(y_i, y_j) = T_{ij} + \sum_k B_{ki} A_{kj} - \sum_k B_{kj} A_{ki} = (T + B^t A - A^t B)_{ij}.$$

Das gelingt sofort mit $B = \frac{1}{2}(A^t)^{-1}T$. Nun ist der von $f_1, \dots, f_n$ aufgespannte Raum W' isotrop, und weil die Matrix $(\omega(e_i, y_j)) = A$ invertierbar ist, ist die Paarung $\omega : W \times W' \rightarrow K$ nicht ausgeartet. $\square$

Folgerung 2.2 — Zu jedem symplektischen Vektorraum (V, ω) findet man eine Basis $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ mit der Eigenschaft

$$\omega(e_i, e_j) = 0, \quad \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}.$$

Solche Basen heißen symplektische Basen. $\square$

Folgerung 2.3 — Zu jeder schiefsymmetrischen Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix S mit

$$S^t A S = \begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \\ & & & O \end{pmatrix},$$

wobei J die schiefsymmetrische 2-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und O eine Nullmatrix der Spalten- und Zeilenzahl $= \dim(\text{rad}(\omega))$ bezeichnet. $\square$

Definition 2.4 — Es sei (V, ω) ein symplektischer K -Vektorraum. Die Untergruppe

$$\text{Sp}(V, \omega) := \{g \in \text{GL}(V) \mid \omega(g(v), g(v')) = \omega(v, v') \text{ für alle } v, v' \in V\}$$

heißt die symplektische Gruppe von (V, ω) .

Eine linearer Isomorphismus $f : V \rightarrow V'$ von symplektischen Vektorräumen ist symplektisch, wenn $\omega'(f(v), f(v')) = \omega(v, v')$ für alle $v, v' \in V$. In diesem Falle ist die Abbildung $f_* : \text{Sp}(V, \omega) \rightarrow \text{Sp}(V', \omega')$ mit $f_*(g) = f \circ g \circ f^{-1}$ ein Isomorphismus von Gruppen. Weil es symplektische Basen gibt, ist jede symplektische Gruppe eines $2n$ -dimensionalen symplektischen Vektorraums zu der Gruppe

$$\text{Sp}_{2n}(K) := \{g \in \text{GL}_{2n}(K) \mid g^t \Omega_{2n} g = \Omega_{2n}\}$$

isomorph, wobei

$$\Omega_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Im einfachsten Fall $n = 1$ erhält man für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sp}_2(K)$ die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

was einfach auf die Bedingung $1 = ad - bc$ hinausläuft. Das zeigt:

$$\text{Sp}_2(K) = \text{SL}_2(K).$$

2.2 Pfaffsche Determinanten

Es sei R ein kommutativer Ring und $A \in R^{n \times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix, d.h. $A^t = -A$ und $A_{ii} = 0$ für alle i .

Lemma 2.5 — Falls n ungerade, ist $\det(A) = 0$.

Beweis. Der Beweis ist leicht, wenn R ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ ist: Wegen $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ folgt $0 = \det(A)(1 - (-1)^n) = 2\det(A)$, also $\det(A) = 0$.

Man kann die Aussage für allgemeine Ringe darauf zurückführen: Es sei $S = \mathbb{Z}[Y_{ij}]$ der Polynomring in $\binom{n}{2}$ Unbestimmten Y_{ij} für $1 \leq i < j \leq n$ und $M \in S^{n \times n}$ die schiefsymmetrische Matrix mit den Einträgen $M_{ij} = Y_{ij}$ für $i < j$. Unter dem Ringhomomorphismus $\varphi : S \rightarrow R$, $Y_{ij} \mapsto A_{ij}$, geht M auf A . Weil $\det(A) =$

$\det(\varphi(M)) = \varphi(\det(M))$, genügt es zu zeigen, daß $\det(M) = 0$. Indem wir M als Matrix im Quotientenkörper von S auffassen, folgt die Behauptung. $\square$

Diese sogenannte generische Methode erlaubt es, allgemeine polynomiale Identitäten über beliebigen kommutativen Ringen auf den Fall von Körpern der Charakteristik 0 zurückzuführen. Tatsächlich könnte man sich sogar auf den Fall $\mathbb{C}$ zurückziehen und analytische Beweismethoden verwenden: In der generischen Methode tauchen nur Körper auf, die endlichen Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ haben, und weil $\text{trdeg}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) = \infty$, lassen sich solche Körper in $\mathbb{C}$ einbetten. Im Folgenden führe ich diesen Beweisschritt nicht mehr aus.

Im Übrigen kann man das Lemma natürlich auch direkt durch eine einfache kombinatorische Überlegung beweisen: Wir betrachten die Summendarstellung $\det(A) = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) A_{1\pi(1)} \cdots A_{n\pi(n)}$. Für jeden Summanden erhält man durch Umindizierung:

$$A_{1\pi(1)} \cdots A_{n\pi(n)} = A_{\pi^{-1}(1)1} \cdots A_{\pi^{-1}(n)n} = (-1)^n A_{1\pi^{-1}(1)} \cdots A_{n\pi^{-1}(n)}.$$

Wenn also π und π^{-1} verschiedene Permutationen sind, löschen sich ihre Beiträge zur Summe aus. Falls umgekehrt $\pi = \pi^{-1}$, ist π ein Produkt von Transpositionen und hat deshalb mindestens einen Fixpunkt $i \in \{1, \dots, n\}$, weil n ungerade ist. Im Summanden von π kommt also der Faktor $A_{ii} = 0$ vor. Deshalb tragen auch solche Permutationen zur Summe nichts bei.

Viel interessanter sind schiefsymmetrische Matrizen von gerader Ordnung. Man beobachtet:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a^2$$

und

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

Es sei $n = 2m$ gerade. Jede Permutation $\pi \in S_n$ bestimmt eine Zerlegung der Menge $\{1, \dots, n\}$ in m zweielementige Mengen:

$$\{\{\pi(1), \pi(2)\}, \{\pi(3), \pi(4)\}, \dots, \{\pi(n-1), \pi(n)\}\}.$$

Umgekehrt erhält man jede solche Zerlegung auf diese Weise. Allerdings ist π nicht eindeutig bestimmt: Die Anordnung der zweielementigen Mengen ist ebenso beliebig wie die Anordnung der beiden Elemente innerhalb jeder Teilmenge. Deshalb erhält man jede Zerlegung auf $2^m m!$ verschiedene Weisen. Es sei $\Pi \subset S_n$ ein Repräsentantensystem, das für jede Zerlegung genau eine Permutation enthält. Man überzeugt sich leicht, daß die folgende Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentantensystems ist.

Definition 2.6 — Es sei $A \in R^{n \times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix. Der Ausdruck

$$\text{pf}(A) := \sum_{\pi \in \Pi} \text{sgn}(\pi) A_{\pi(1)\pi(2)} \cdots A_{\pi(n-1)\pi(n)}$$

heißt Pfaffsche Determinante von A .

Über Körpern der Charakteristik 0 gilt offensichtlich auch

$$\text{pf}(A) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) A_{\pi(1)\pi(2)} \cdots A_{\pi(n-1)\pi(n)}.$$

Man erhält direkt aus der Definition

$$\text{pf} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23},$$

ebenso wie

$$\text{pf} \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M^t & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\binom{m}{2}} \det(M)$$

für jede Matrix $M \in R^{m \times m}$ und

$$\text{pf} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & a_m \\ & & & -a_m & 0 \end{pmatrix} = a_1 \cdots a_m$$

für $a_1, \dots, a_m \in R$.

Lemma 2.7 — Es sei n gerade, $A, S \in R^{n \times n}$ und A schiefsymmetrisch. Dann gilt $\det(A) = \text{pf}(A)^2$ und $\text{pf}(S^t A S) = \det(S) \text{pf}(A)$.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß R ein Körper der Charakteristik 0 ist. Es gilt dann mit $n = 2m$:

$$\begin{aligned} 2^m m! \text{pf}(S^t A S) &= \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^m S_{i_{2k-1}\pi(2k-1)} A_{i_{2k-1}i_{2k}} S_{i_{2k}\pi(2k)} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^m A_{i_{2k-1}i_{2k}} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) S_{i_1\pi(1)} \cdots S_{i_n\pi(n)} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^m A_{i_{2k-1}i_{2k}} \det(S(i_1, \dots, i_n)) \end{aligned}$$

wobei $S(i_1, \dots, i_n)$ die Matrix bezeichnet, die sich aus der i_1 -ten bis zur i_n -ten Zeile von S zusammensetzt. Insbesondere verschwindet diese Determinante, wenn zwei

Indizes i_k und i_ℓ gleich sind. Ein Multiindex i liefert einen nichttrivialen Beitrag also nur, wenn i selbst eine Permutation ist, und in diesem Falle ist $\det S(i_1, \dots, i_n) = \operatorname{sgn}(i) \det(S)$. Wir können also wie folgt weiterrechnen:

$$\begin{aligned} \cdots &= \det(S) \sum_{i \in S_n} \operatorname{sgn}(i) A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{n-1} i_n} \\ &= 2^m m! \det(S) \operatorname{pf}(A). \end{aligned}$$

Um $\det(A) = \operatorname{pf}(A)^2$ zu zeigen, darf man wegen der Relationen $\det(S^t A S) = \det(S)^2 \det(A)$ und $\operatorname{pf}(S^t A S) = \det(S) \operatorname{pf}(A)$ jederzeit A durch $S^t A S$ ersetzen, sofern S invertierbar ist. Nun findet man stets eine invertierbare Matrix S mit der Eigenschaft, daß

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & a_m \\ & & & -a_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Und für Matrizen dieser Form ist die Behauptung offensichtlich wahr. $\square$

Satz 2.8 — Für alle $g \in \operatorname{Sp}_{2n}(K)$ gilt $\det(g) = 1$.

Beweis. Aus $\operatorname{pf}(\Omega) = \operatorname{pf}(g^t \Omega g) = \det(g) \operatorname{pf}(\Omega)$ folgt $\det(g) = 1$. $\square$

2.3 Komplexe Metriken

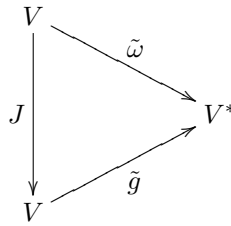
Eine komplexe Struktur auf einem reellen Vektorraum W ist eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung J mit $J^2 = -\operatorname{id}$. Ist eine komplexe Struktur J gegeben, wird W durch $(a + bi) \cdot w := aw + bJw$ zu einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Ist umgekehrt V ein komplexer Vektorraum, so definiert die Multiplikation mit i eine komplexe Struktur $J(v) := iv$ auf dem zugrundeliegenden reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$. Eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $f : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathbb{C}$ -linear, wenn $fJ = Jf$.

Es sei $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Metrik auf V und $g := \operatorname{Re}(h)$ der Realteil. Dann ist $g : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ ein reelles Skalarprodukt mit der zusätzlichen Eigenschaft $g(Jv, Jw) = g(v, w)$. Umgekehrt definiert jedes in diesem Sinne J -invariante Skalarprodukt g eine hermitesche Metrik durch $h(v, w) = g(v, w) + g(Jv, w)i$, und mit dieser Beziehung läßt sich jede hermitesche Metrik aus ihrem Realteil rekonstruieren. Eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung f , die h erhält, also unitär bezüglich h ist, erhält auch das Skalarprodukt g . Deshalb gilt $U(V, h) \subset \operatorname{SO}(V_{\mathbb{R}}, g)$. Umgekehrt ist eine bezüglich g orthogonale $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung unitär bezüglich h . Mit anderen Worten:

$$U(V, h) = \operatorname{SO}(V_{\mathbb{R}}, g) \cap \operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(V).$$

Analog ist der Imaginärteil $\omega := \operatorname{Im}(h) : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine schiefsymmetrische Bilinearform mit der Eigenschaft $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$. Der Zusammenhang zwischen g, ω ist durch $\omega(v, Jw) = g(v, w)$ und $\omega(v, w) = -g(v, Jw)$ gegeben. Insbesondere ist ω nicht ausgeartet, und je zwei der Strukturen g, ω und J bestimmen die dritte. Zu g und ω gehören adjungierte Abbildungen $\tilde{g} : V \rightarrow V^*, \tilde{g}(v)(w) = g(v, w)$, und $\tilde{\omega} : V \rightarrow V^*, \tilde{\omega}(v)(w) = \omega(v, w)$. Die Relation $\omega(v, w) = g(Jv, w)$ übersetzt sich dann in die Aussage $\tilde{g} \circ J = \tilde{\omega}$. Mit anderen Worten:



ist ein kommutierendes Diagramm aus Vektorraumisomorphismen. Wir können die Gruppen $\operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(V), \operatorname{SO}(V, g), \operatorname{Sp}(V_{\mathbb{R}}, \omega) \subset \operatorname{GL}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ als die Symmetriegruppen von J, g und ω auffassen. In diesem Sinne gilt dann der Satz:

Satz 2.9 — *Zwischen den Symmetriegruppen von h, g, ω und J bestehen die Relationen*

$$\begin{aligned} \operatorname{U}(V, h) &= \operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(V) \cap \operatorname{SO}(V_{\mathbb{R}}, g) \\ &= \operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(V) \cap \operatorname{Sp}(V_{\mathbb{R}}, \omega) \\ &= \operatorname{SO}(V_{\mathbb{R}}, g) \cap \operatorname{Sp}(V_{\mathbb{R}}, \omega). \end{aligned}$$

Speziell für die Gruppen zu den Standardskalarprodukten erhält man

$$\operatorname{U}(n) = \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \operatorname{O}(2n) = \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \operatorname{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \operatorname{O}(2n) \cap \operatorname{Sp}_{2n}(\mathbb{R}).$$

2.4 Quaternionale Metriken

Es sei nun V ein quaternionaler Vektorraum mit einer hermiteschen Metrik h . Dann ist $(v, w) = \operatorname{Re} h(v, w)$ ein reelles Skalarprodukt auf dem zugrundeliegenden $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft $(v\lambda, w\lambda) = (v, w)$ für alle $\lambda \in S^3 \subset \mathbb{H}$. Eine $\mathbb{H}$ -lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ erhält kh genau dann, wenn sie orthogonal bezüglich $(-, -)$ ist. Deshalb gilt

$$\operatorname{Sp}(V, k) = \operatorname{SO}(V_{\mathbb{R}}) \cap \operatorname{GL}_{\mathbb{H}}(V).$$

Interessanter ist der Zusammenhang zum zugrundeliegenden $\mathbb{C}$ -Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$. Wir zerlegen h in der Form $h = g + j\omega$, wobei g und ω Formen auf $V_{\mathbb{C}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ sind. Dann ist $g : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplex hermitesches Skalarprodukt und

$\omega : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{V}$ eine schiefsymmetrische komplexe Bilinearform: Das ergibt sich für komplexe Zahlen λ, μ und Vektoren v, w' aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} g(\lambda v, \mu w) + j\omega(\lambda v, \mu w) &= h(\lambda v, \mu w) = \bar{\lambda}h(v, w)\mu \\ &= \bar{\lambda}(g(v, w) + j\omega(v, w))\mu \\ &= \bar{\lambda}\mu g(v, w) + j\lambda\mu\omega(v, w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g(v, w) + j\omega(v, w) &= h(v, w) = \overline{h(w, v)} \\ &= \overline{g(w, v) + j\omega(w, v)} \\ &= \overline{g(w, v)} + \overline{\omega(w, v)}(-j) \\ &= \overline{g(w, v)} - j\omega(w, v) \end{aligned}$$

Wie im vorigen Abschnitt zeigt man nun:

Satz 2.10 — Zwischen den Untergruppen $\mathrm{Sp}(h)$, $\mathrm{GL}_{\mathbb{H}}(V)$, $\mathrm{U}(V_{\mathbb{C}}, g)$ und $\mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega)$ in $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ bestehen die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(h) &= \mathrm{GL}_{\mathbb{H}}(V) \cap \mathrm{U}(V_{\mathbb{C}}, g) \\ &= \mathrm{GL}_{\mathbb{H}}(V) \cap \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega) \\ &= \mathrm{U}(g) \cap \mathrm{Sp}(V_{\mathbb{C}}, \omega). \end{aligned}$$

Speziell gilt $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2n)$.

Deshalb ist $\mathrm{Sp}(n)$ die kompakte Untergruppe zur komplexen Liegruppe $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Die etwas unangenehme Indizierung der Gruppen liegt in verschiedenen Traditionen bei Differentialgeometern und Gruppentheorikern begründet.

Damit bestehen die folgenden Inklusionsbeziehungen zwischen kompakten Liegruppen auf der einen Seite und komplexen linearen Gruppen auf der anderen Seite:

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &\subset \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{SU}(n) &\subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \\ \mathrm{Sp}(n) &\subset \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Die rechtsstehenden Gruppen sind die Komplexifizierungen der linksstehenden kompakten Gruppen in dem folgenden Sinne, der später zu präzisieren sein wird: Aus der Inklusion $K \subset G$ erhält man eine analoge Inklusion $\mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ der Liealgebren. Diese induziert in allen drei Fällen einen Isomorphismus

$$\mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}$$

von komplexen Liealgebren.

§3 Homotopie

3.1 Höhere Homotopiegruppen

Literatur:

Spanier, Algebraic Topology.

Whitehead, Elements of homotopy theory.

Milnor: Topology from the differentiable viewpoint.

Eine Homotopie zwischen stetigen Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ ist eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$, wobei hier und im Folgenden $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall bezeichnet und zur Abkürzung $H_t(x) = H(x, t)$ gesetzt ist. Falls eine solche Homotopie existiert, heißen f und g homotop, in Zeichen: $f \simeq g$. Eine Homotopie von Raumpaaren ist eine Abbildung $H : (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$, also eine Homotopie von X nach Y , die den Teilraum A für jedes $t \in I$ nach B abbildet. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen von X nach Y bzw. der Menge $C((X, Y), (Y, B))$ der stetigen Abbildungen von Raumpaaren. Wir schreiben $[X, Y] := C(X, Y) / \simeq$ bzw. $[(X, A), (Y, B)] = C((X, A), (Y, B)) / \simeq$ für die Menge der Homotopieklassen. Ist außerdem $Z \subset X$ eine Teilmenge, so heißt $H : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie relativ zu Z , wenn für jedes $z \in Z$ die Abbildung $t \mapsto H(z, t)$ konstant ist. Wir schreiben $[X, Y]_Z$ für die Menge der stetigen Abbildungen modulo Homotopie relativ zu Z .

Wir vereinbaren die folgenden Bezeichnungen: Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| = (\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm und $\|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}$ die Maximumsnorm. Ferner ist $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene n -dimensionale Einheitskugel, und $D^0 = \{0\}$ ein Punkt. $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ die n -dimensionale Sphäre, und vereinbarungsgemäß $S^{-1} = \emptyset$. Es gilt dann $\partial D^n = S^{n-1}$ für alle $n \geq 0$.

Definition 3.1 — Es sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ ein Basispunkt.

1. Für $n \geq 0$ sei $\pi_n(X, x_0) := [(S^n, e_1), (X, x_0)]$ die Menge der Homotopieklassen von punktierten Abbildungen der n -dimensionalen Einheitssphäre in X . Die Menge $\pi_n(X, x_0)$ enthält einen ausgezeichneten Punkt, die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $\underline{x}_0$.
2. Jede stetige Abbildung $a : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ definiert eine Abbildung $\pi_n(a) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ durch $\pi_n(a)([f]) = [a \circ f]$. Dabei geht der ausgezeichnete Punkt $\underline{x}_0$ auf den Punkt $\underline{y}_0$, d.h. $\pi_n(a)$ ist Abbildung von punktierten Mengen.

Der Spezialfall $n = 0$ gibt die Menge $\pi_0(X, x_0)$ der Wegekompenten: Jede Abbildung $f : S^0 \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $f(1) = x_0$ ist durch die Wahl $f(-1) \in X$ bestimmt. Eine Homotopie zwischen zwei solchen Abbildungen f_1 und f_2 ist einfach ein Weg von $f_1(-1)$ nach $f_2(-1)$.

Für $n = 1$ ist $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Homotopieklassen von Schleifen in X mit Grundpunkt x_0 . Daß wir $\pi_1(X, x_0)$ mit einer Gruppenstruktur versehen können und dann von der Fundamentalgruppe von X sprechen, nutzt den Homöomorphismus $I/(0 \sim 1) \rightarrow S^1$ aus. Um auch für $n \geq 2$ auf ähnliche Weise zu Gruppenstrukturen auf den Mengen $\pi_n(X, x_0)$ zu kommen, konstruieren wir einen Homöomorphismus $I^n/\partial I^n \rightarrow S^n$ wie folgt:

Für $n \geq 1$ bezeichne $M := \frac{1}{2}(1, \dots, 1) \in I^n$ den Mittelpunkt des Einheitswürfels. Dieser läßt sich dann auch durch $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - M\|_\infty \leq \frac{1}{2}\}$ charakterisieren. Die Abbildung

$$\Phi : I^n \setminus \{M\} \rightarrow S^n, \quad x \mapsto \left(-\cos(2\pi\|x - M\|_\infty), -\frac{\sin(2\pi\|x - M\|_\infty)}{\|x - M\|_2}(x - M) \right)$$

besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung $\Phi : I^n \rightarrow S^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi(M) = -e_1, \quad \Phi(\partial I^n) = \{e_1\}$.
2. $\Phi : I^n \setminus \partial I^n \rightarrow S^n \setminus \{e_1\}$ ist ein Homöomorphismus.
3. $\bar{\Phi} : I^n/\partial I^n \rightarrow S^n, [x] \mapsto \Phi(x)$, ist ein Homöomorphismus.

Die letzte Aussage ist eine Konsequenz der ersten beiden: Wegen 1. und der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie steigt Φ zu einer stetigen Abbildung $\bar{\Phi} : I^n/\partial I^n \rightarrow S^n$ ab. Wegen 2. ist $\bar{\Phi}$ bijektiv. Und weil $I^n/\partial I^n$ kompakt ist, ist $\bar{\Phi}$ ein Homöomorphismus. Man überzeugt sich leicht, daß man für $n = 1$ die übliche Abbildung

$$\Phi : (I, \{0, 1\}) \rightarrow S^1, \quad x \mapsto \exp(2\pi i x)$$

erhält. Diese Konstruktion liefert:

Lemma 3.2 — *Die Abbildung*

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, e_1), (X, x_0)] \longrightarrow [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)], \quad [f] \mapsto [f \circ \Phi],$$

ist eine natürliche Bijektion.

Im Folgenden identifizieren wir stets stillschweigend $\pi_n(X, x_0)$ auf diese Weise mit $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$. Wir können jetzt ganz analog zur Verknüpfung von Wegen für allgemeines $n \geq 1$ Verknüpfungen von Abbildungen $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ definieren, sogar mehr als eine: Für jeden Index i mit $1 \leq i \leq n$ setzt man

$$(f \circ_i g)(t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} f(t_1, \dots, 2t_i, \dots, t_n), & \text{falls } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}, \\ g(t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist $f \circ_i g$ stetig und bildet ∂I^n nach x_0 ab. Außerdem hängt die Homotopieklasse von $f \circ_i g$ nur von den Homotopieklassen von f und g ab. Deshalb gibt es wohldefinierte Abbildungen

$$\circ_i : \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Satz 3.3 —

1. Für alle $1 \leq i \leq n$ definiert $\circ_i$ auf $\pi_n(X, x_0)$ eine Gruppenstruktur mit Neutralelement $\underline{e}$. Dabei ist die zu $[f]$ inverse Klasse durch die Klasse der Abbildung $t \mapsto f(t_1, \dots, 1 - t_i, \dots, t_n)$ gegeben.
2. Für jedes $n \geq 1$ und jede stetige Abbildung $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist die Abbildung $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ ein Gruppenhomomorphismus.
3. Für alle $n \geq 2$ und beliebige $1 \leq i, j \leq n$ definieren $\circ_i$ und $\circ_j$ dieselbe Verknüpfung auf $\pi_n(X, x_0)$, und diese ist kommutativ.

Beweis. Die erste und die zweite Aussage beweist man wörtlich genauso wie die analoge Aussage für die Fundamentalgruppe. Für die dritte Aussage betrachten wir vier Abbildungen $a, b, c, d : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ und halten fest, daß für $i \neq j$ die Beziehungen

$$(a \circ_i b) \circ_j (c \circ_i d) = (a \circ_j c) \circ_i (b \circ_j d)$$

und $(a \circ_i \underline{e}) \simeq a \simeq (\underline{e} \circ_i a)$ gelten. Die Behauptung ist dann eine Konsequenz des folgenden Lemmas, angewandt auf die Verknüpfungen $\circ_i$ und $\circ_j$ auf der Menge der Homotopieklassen. $\square$

Lemma 3.4 — Es sei M eine Menge mit zwei Verknüpfungen $*$ und $\circ$, die der Regel $(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d)$ genügen, und einem Element 1 , das ein Neutralelement sowohl für $*$ wie für $\circ$ ist. Dann sind $*$ und $\circ$ gleich und kommutativ.

Beweis. Es gilt $a \circ b = (a * b) \circ (1 * 1) = (a \circ 1) * (b \circ 1) = a * b$ und $a \circ b = (1 * a) \circ (b * 1) = (1 \circ b) * (a \circ 1) = b * a$. $\square$

Weil also die Verknüpfungen $\circ_i$ auf $\pi_n(X, x_0)$ alle gleich sind, schreiben wir sie mit dem Symbol $\circ$ ohne weitere Indizes (oder gar nicht) und fassen zusammen:

1. $\pi_0(X, x_0)$ ist eine punktierte Menge, die Menge der Wegekompenten von X .
2. $\pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe, die Fundamentalgruppe von X zum Basispunkt x_0 .
3. $\pi_n(X, x_0)$ ist für $n \geq 2$ eine abelsche Gruppe.

$\pi_n(X, x_0)$ heißt die n -te Homotopiegruppe von (X, x_0) .

Satz 3.5 — Für $n = 0, 1$, bzw. ≥ 2 ist π_n ein Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der punktierten Mengen, der Gruppe bzw. der abelschen Gruppen, d.h. es gelten die Regeln

1. $\pi_n(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$.
2. $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(f) \circ \pi_n(g)$ für $g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $f : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$.

Zusätzlich ist π_n homotopieinvariant, d.h.

3. $\pi_n(f) = \pi_n(g)$ für $[f] = [g] \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$.

Beweis. Übung □

Ähnlich wie bei den Homologiegruppen ist der Ausgangspunkt vieler Berechnungen von Homotopiegruppen die Kenntnis der Homotopiegruppen für die Sphären.

Satz 3.6 — Es sei $n \geq 1$:

1. $\pi_0(S^n, e^1) = \{*\}$.
2. $\pi_m(S^n, e^1) = 0$ für alle $1 < m < n$.

Beweis. 1. Klar.

2. Es sei $1 < m \leq n$ und $f : (S^m, e_1) \rightarrow (S^n, e_1)$ stetig. Die Abbildung $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann man durch eine differenzierbare Abbildung $g : S^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|f - g\| < 1/2$ approximieren, und zwar so daß $g(e_1) = e_1$. Dann sind f und $g/\|g\|$ als Abbildungen von S^m nach S^n homotop. Wir können also f als differenzierbar voraussetzen. Nach dem Satz von Sard liegt die Menge der regulären Werte von f in S^n dicht, ist also insbesondere nicht leer. Es sei $y \in S^m$ ein solcher regulärer Wert.

Wenn $n < m$ ist die Regularität von y dazu äquivalent, daß $f^{-1}(y)$ leer ist, oder anders gesagt: $f(S^m) \subset S^n \setminus \{y\}$. Nun ist $S^m \setminus \{y\}$ kontrahierbar, also f nullhomotop. □

Satz 3.7 — Für $n \geq 1$ ist $\pi_n(S^n, e^1) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt von der Klasse $[\text{id}_{S^n}]$ der Identität.

Einen Beweis findet man in Milnor: Topology from the differentiable viewpoint.

3.2 Faserungen

Eine Abbildung $p : X' \rightarrow X$ besitzt die Homotopiehochhebungseigenschaft für einen Raum Y , wenn es zu jeder stetigen Abbildung $f' : Y \rightarrow X'$ und jeder Homotopie $H : Y \times I \rightarrow X$ mit $H_0 = pf'$ eine Homotopie $H' : Y \times I \rightarrow X'$ mit $H = pH'$ gibt. Die Abbildung p heißt Faserung, wenn p die Homotopiehochhebungseigenschaft für beliebige topologische Räume hat, und eine Serre-Faserung, wenn die Homotopiehochhebungseigenschaft wenigstens für alle Sphären S^n , $n \geq 0$, besteht.

Aus der allgemeinen Überlagerungstheorie wissen wir, daß jede topologische Überlagerung eine Faserung ist.

Definition 3.8 — Eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow B$ ist ein Faserbündel mit typischer Faser F , wenn es zu jedem Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung U einen Homöomorphismus $f : X_U := p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ mit $p \circ f = \text{pr}_U$ gibt. Solche Homöomorphismen heißen lokale Trivialisierungen des Faserbündels. Eine offene Menge $U \subset B$ heiße zulässig, wenn es eine Trivialisierung $f : X_U := p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ gibt.

Satz 3.9 — *Faserbündel sind Serre-Faserungen.*

Beweis. Es sei $p : X \rightarrow B$ ein Faserbündel mit typischer Faser F . Nach Definition des Begriffs Faserbündel gibt es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ durch zulässige offene Mengen U_i mit Trivialisierungen $f_i : X_i := p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$. Es sei nun weiter eine Homotopie $K : S^n \times I \rightarrow B$ und eine Hochhebung $k : S^n \rightarrow E$ von K_0 . Wir ersetzen K durch $H := K \circ (\Phi \times \text{id}_I) : I^n \times I \rightarrow B$ und analog k durch $h := k \circ \Phi : I^n \rightarrow E$. Nach Konstruktion sind h und H_t für jedes $t \in I$ auf ∂I^n konstant. Es sei $x_0 := h(\partial I^n)$. Weil p die Homotopiehochhebungseigenschaft für die S^0 besitzt, gibt es einen Weg $\alpha : I \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $p(\alpha(t)) = H_t(\partial I^n)$. Wir setzen $H'(q, t) := \alpha(t)$ für alle $q \in \partial I^n$.

Die Wahl einer natürlichen Zahl N führt zu einer Zerlegung $Q = \bigcup_\nu Q_\nu$, wo der Multiindex ν durch die Menge $\{1, \dots, N\}^n$ läuft und Q_ν den abgeschlossenen Teilquader $[\frac{\nu_1-1}{N}, \frac{\nu_1}{N}] \times \dots \times [\frac{\nu_n-1}{N}, \frac{\nu_n}{N}]$ bezeichnet.

Nach dem Lebesgue-Lemma kann man $N, M > 0$ so groß wählen, daß es zu jedem Multiindex ν und jedem $\mu \in \{1, \dots, M\}$ einen Index $i(\nu, \mu)$ mit

$$H(Q_\nu \times [\frac{\mu-1}{M}, \frac{\mu}{M}]) \subset U_{i(\nu, \mu)}$$

gibt. Wir wollen H' stufenweise auf $Q \times [\frac{\mu-1}{M}, \frac{\mu}{M}]$ für $\mu = 1, \dots, M$ konstruieren. Indem wir induktiv argumentieren, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $M = 1$. Mit anderen Worten, wir dürfen annehmen, daß es zu jedem ν einen Index $i(\nu)$ mit $H(Q_\nu \times I) \subset U_{i(\nu)}$ gibt.

Wir konstruieren nun H' auf den Seiten aller Quader Q_ν , und zwar durch Induktion über die Dimension der Seiten.

Wir beginnen mit den Ecken: Für jeden inneren Punkt $q \in Q$, der Ecke eines und damit gleich mehrerer Quader Q_ν ist, wählen wir einen Index $\nu(q)$ mit $q \in Q_{\nu(q)}$ aus und definieren

$$H'(q, t) := f_{\nu(q)}^{-1}((\text{pr}_F \circ f_{\nu(q)} \circ h')(q), H(q, t))$$

Es sei nun $k \leq n$ und H' auf allen Quaderseiten der Dimension $< k$ schon definiert. Eine Quaderseite Q' der Dimension k liegt entweder ganz im Rand ∂Q , so daß H' auf $Q' \times I$ schon definiert ist, oder das Innere von Q' liegt ganz im Innern von Q und ist Seite mehrerer Quader Q_ν . Wir wählen eine Index $\nu(Q')$ mit $Q' \subset Q_{\nu(Q')}$ aus. Induktiv ist H' bereits auf $Q'' := Q' \times \{0\} \cup \partial Q \times I$ definiert. Nun ist $Q'' \subset Q'$ ein Retrakt, sogar ein Deformationsretrakt. Wir wählen eine Retraktion $r : Q' \rightarrow Q''$ und definieren H' auf $Q' \times I$ durch

$$H'(q, t) := f_{\nu(Q')}^{-1}((\text{pr}_F \circ f_{\nu(Q')} \circ H' \circ r)(q, t), H(q, t)).$$

Nach n Schritten ist H' auf $Q \times I$ definiert. □

Eine andere wichtige Klasse von Faserbündeln erhält man aus dem Satz von Ehresmann:

Satz 3.10 (Ehresmann) — Es sei $p : X \rightarrow B$ eine eigentliche submersive Abbildung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und B zusammenhängend. Dann ist p ein Faserbündel.

Definition 3.11 — Es sei H eine topologische Gruppe, F ein topologischer Raum mit einer stetigen Gruppenwirkung $H \times F \rightarrow F$. Ein Faserbündel $p : X \rightarrow B$ mit typischer Faser F hat die Strukturgruppe H , wenn eine Familie $f_a : p^{-1}(U_a) \rightarrow U_a \times F$, $a \in A$, von lokalen Trivialisierungen mit der folgenden Eigenschaften ausgezeichnet ist:

1. Die offenen Mengen $\{U_a\}_{a \in A}$, überdecken X .
2. Für jedes Paar $(a, b) \in A^2$ gibt es eine stetige Abbildung $\varphi_{ab} : U_{ab} := U_a \cap U_b \rightarrow H$ mit $f_b \circ f_a^{-1}(b, f) = (b, \varphi_{ab}(u)(f))$.

Satz 3.12 — Es sei G eine Liegruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann besitzt $M := G/H$ genau eine Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, bezüglich der die Projektion $\pi : G \rightarrow M$ eine submersive differenzierbare Abbildung ist. In diesem Falle ist π genauer ein H -Hauptfaserbündel.

Beweis. Jede abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Wir können eine lokal abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $S \subset G$ der Dimension $\dim(S) = \dim(G) - \dim(H)$ so wählen, daß $e \in S$ und daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus T_e S$. Dann ist das Differential der Multiplikationsabbildung $\alpha : S \times H \rightarrow G$ im Punkt (e, e) die Identität. Nach Verkleinern von S ist das Differential $D\alpha$ überall auf $S \times \{e\}$ ein Isomorphismus, und wegen der Äquivarianz unter Rechtstranslation mit Elementen aus H ist α auf ganz $S \times H$ ein lokaler Diffeomorphismus. Insbesondere ist das Bild offen und eine Umgebung der Faser eH .

Das Urbild $K \subset S \times S$ von H unter der Abbildung $S \times S \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x^{-1}y$, ist eine abgeschlossene Teilmenge, die die abgeschlossene Diagonale Δ_S enthält. Angenommen, es gäbe eine Folge $(s_n, s'_n) \in K \setminus \Delta_S$ mit $s_n \rightarrow e$, $s'_n \rightarrow e$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation geht dann auch $s_n^{-1}s'_n =: h_n \in H$ gegen e . Aber dann wären (s'_n, e) und (s_n, h_n) zwei Folgen in $S \times H$, die gegen (e, e) konvergieren und dieselbe Bildfolge in G hätten. Das widerspräche der Tatsache, daß α in einer Umgebung von (e, e) ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Folglich gibt es eine Umgebung V des Neutralelements in S mit der Eigenschaft, daß $V \times V \cap K = V \times V \cap \Delta_S$. Mit dieser Wahl von V ist die Abbildung $V \times H \rightarrow G$ nicht nur lokal diffeomorph, sondern auch injektiv. Damit ist $\alpha : V \times H$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von H .

Für ein beliebiges $x \in G$ sei $V_x := xV$ und $U_x := \pi(V_x) \subset G/H$. Die Projektion $\pi_x := \pi|_{V_x} : V_x \rightarrow U_x$ ist bijektiv und stetig, und die Multiplikationsabbildung $\alpha_x : V_x \times H \rightarrow G$ ist ein rechts- H -äquivarianter Diffeomorphismus auf die offene Umgebung $\pi^{-1}(U_x)$ der Bahn xH . Daraus folgt, daß $\pi_x : V_x \rightarrow U_x$ ein Homöomor-

phismus ist, und daß

$$\varphi_x : \pi^{-1}(U_x) \xrightarrow{\alpha_x^{-1}} V_x \times H \xrightarrow{\pi_x \times \text{id}_H} U_x \times H$$

eine lokale Trivialisierung von π über U_x ist. Die Kartenwechselabbildungen haben die Form

$$U_x \cap U_y \ni p \mapsto \text{pr}_2 \circ \alpha_y^{-1} \pi_x^{-1} \in H.$$

□

Lemma 3.13 — Es sei $p : X \rightarrow B$ eine Serre-Faserung, $x_0 \in X$, $b_0 := \pi(b_0)$ und $i : F := p^{-1}(b_0) \rightarrow X$ die Inklusion der Faser über dem Basispunkt von B . Die Sequenz $\pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ ist für alle $n \geq 0$ exakt.

Für $n \geq 1$ bedeutet dies, daß das Bild von i_* der Kern von p_* ist. Im Falle $n = 0$ ist die Aussage so zu lesen, daß das Bild von i_* genau die Wegekompenten von X sind, die über der Wegekompente von b_0 liegen.

Beweis. Es ist klar, daß $p_* i_*$ die Nullabbildung ist, wenn $n \geq 1$, bzw. Alles auf die Komponente von b_0 abbildet, wenn $n = 0$. Es sei umgekehrt $f : (S^n, e_1) \rightarrow (X, x_0)$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß $p_*(f)$ nullhomotop ist. Es gibt dann eine Homotopie $H : (S^n, e_1) \times I \rightarrow B$ mit $H_0 = p \circ f$ und $H_1 = \underline{b_0}$. Weil p eine Serre-Faserung ist, gibt es eine Hochhebung $H' : (S^n, e_1) \times I \rightarrow X$ dieser Homotopie mit $H'_0 = f$. Andererseits ist $p \circ H'_1 = H_1$ die konstante Abbildung mit Bild b_0 . Folglich nimmt H'_1 Werte in F . Formal ist $H'_1 = i \circ g$ für eine stetige Abbildung $g : (S^n, e_1) \rightarrow F$. Insgesamt: $f \simeq i \circ g$, also $[f] \in \text{im}(i_*)$ □

Interessanterweise kann man eine Randabbildung $r : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$ konstruieren: Wie früher stellen wir Elemente in $\pi_n(B, b_0)$ durch Abbildungen

$$f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (B, b_0)$$

dar, fassen f aber als eine Homotopie der konstanten Abbildung $I^{n-1} \rightarrow \{b_0\}$ auf. Diese läßt sich trivialerweise zu einer konstanten Abbildung mit Wert x_0 hochheben. Weil p eine Serre-Faserung ist, gibt es Homotopie $H' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ mit $pH' = H$ und $H'_0 = \underline{x_0}$. Weil aber auch $pH'_1 = H_1 = \underline{b_0}$, definiert liegt das Bild von H'_1 in der Faser F . Wir setzen

$$r([f]) := [H'_1].$$

Lemma 3.14 —

1. r ist wohldefiniert, d.h. $[H'_1]$ hängt nicht von der Wahl von f in seiner Homotopieklasse noch von der Wahl der Hochhebung H' ab.
2. Für $n \geq 2$ ist $r : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Satz 3.15 — Es sei $p : X \rightarrow B$ eine Serre-Faserung, $x_0 \in X$, $b_0 := \pi(b_0)$ und $i : F := p^{-1}(b_0) \rightarrow X$ die Inklusion der Faser über dem Basispunkt von B . Die Sequenz

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{r} \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \dots$$

ist für alle $n \geq 1$ exakt. Weiter ist die Sequenz von punktierten Mengen

$$\dots \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{r} \pi_0(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0)$$

in dem Sinne exakt, daß das Bild jeder Abbildung das Urbild des ausgezeichneten Punktes unter der Folgeabbildung ist.

Beweis. Ein Drittel der Behauptung ist durch Lemma 3.14 erledigt. Wir betrachten den Ausschnitt $\pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(X, x_0)$. Aus der Konstruktion von r ist unmittelbar klar, daß $i_* \circ p$ trivial ist. Ist umgekehrt $g : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, x_0)$ zusammen mit einer Nullhomotopie $H' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ gegeben, so ist klar, daß $H := p \circ H'$ den Rand von I^n nach b_0 abbildet, also ein Element in $\pi_n(B, b_0)$ definiert. Außerdem ist die Konstruktion von r gerade so gemacht, daß $r(-[H]) = [f]$.

Es bleibt die Exaktheit des Ausschnitts $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$ zu zeigen. Trivialerweise ist jedes $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ eine Hochhebung von $p \circ f$. Als Homotopie aufgefaßt, ist aber $f_1 : I^{n-1} \rightarrow F$ die konstante Abbildung. Das zeigt, daß $r \circ p_*$ die Nullabbildung ist. Es sei umgekehrt $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ eine Abbildung mit einer Hochhebung $H' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$, deren rechter Rand in F nullhomotop ist. Wählt man eine Nullhomotopie $K : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, x_0)$, so definiert $H' \circ_n K$ ein Element in $\pi_n(X, x_0)$, dessen Bild $H \circ_n \underline{b_0}$ zu H homotop ist. Das zeigt: $[f] \in \text{im}(p_*)$. $\square$

Folgerung 3.16 — Für jede Überlagerung $p : X \rightarrow B$ zusammenhängender topologischer Räume ist die natürliche Abbildung $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(B)$ für alle $n \geq 2$ ein Isomorphismus. $\square$

Die Gruppe $\text{SO}(n)$ operiert transitiv auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ durch Matrixmultiplikation. Standgruppe von e_1 ist die zu $\text{SO}(n-1)$ isomorphe Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \mid h \in \text{SO}(n-1) \right\}.$$

Deshalb ist $\text{SO}(n)/H \rightarrow S^{n-1}$ ein Homöomorphismus. Wir erhalten ein $\text{SO}(n-1)$ -Hauptfaserbündel

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(n-1) & \rightarrow & \text{SO}(n) \\ & & \downarrow \\ & & S^{n-1} \end{array}.$$

Die lange exakte Homotopiesequenz lautet:

$$\pi_{k+1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_k(\mathrm{SO}(n-1)) \longrightarrow \pi_k(\mathrm{SO}(n)) \longrightarrow \pi_k(S^n).$$

Wir schließen: Für $k < n$ ist $\pi_k(\mathrm{SO}(n-1)) \rightarrow \pi_k(\mathrm{SO}(n))$ surjektiv, für $k < n-1$ sogar isomorph. Daraus folgt:

Satz 3.17 —

1. $\pi_1 \mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1 \mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{Z}/2$ für alle $n \geq 3$.
2. $\pi_2 \mathrm{SO}(n) = 0$ für alle $n \geq 2$.
3. Für jedes $k \geq 1$ gilt $\pi_k \mathrm{SO}(k+2) = \pi_k \mathrm{SO}(k+3) = \dots = \pi_k \mathrm{SO}(\infty)$.

Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ operiert auf dem projektiven Raum $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ mit Standgruppe

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \mid z \in S^1 \right\} \cong S^1$$

am Element $[1 : 0]$. Das zugehörige S^1 -Hauptfaserbündel

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

heißt Hopfbündel. Die lange exakte Homotopiesequenz enthält die folgenden Abschnitte:

$$0 = \pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3) = 0$$

und

$$0 = \pi_{k+1}(S^1) \rightarrow \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(S^2) \rightarrow \pi_k(S^1) = 0 \quad \text{für } k \geq 2.$$

Ganz analog operiert $\mathrm{SU}(n)$ transitiv auf der Einheitssphäre $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ mit einer zu $\mathrm{SU}(n-1)$ isomorphen Standgruppe. Aus dem $\mathrm{SU}(n-1)$ -Hauptfaserbündel

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SU}(n-1) & \rightarrow & \mathrm{SU}(n) \\ & & \downarrow \\ & & S^{2n-1} \end{array}$$

erhält man eine lange exakte Homotopiesequenz

$$\pi_{k+1}(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_k(\mathrm{SU}(n-1)) \longrightarrow \pi_k(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_k(S^{2n-1}).$$

Daraus folgt:

Satz 3.18 —

1. $\pi_1(\mathrm{SU}(k)) = 0$ für alle $k \geq 2$.
2. $\pi_2(\mathrm{SU}(k)) = 0$ für alle $k \geq 2$.
3. $\pi_3(\mathrm{SU}(k)) = \mathbb{Z}$ für alle $k \geq 2$.
4. $\pi_k(\mathrm{SU}(n)) = \pi_k(\mathrm{SU}(n+1)) = \dots = \pi_k(\mathrm{SU}(\infty))$ für alle $n > k/2$.

§4 Spingruppen

Im gesamten Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

4.1 Symmetrische Bilinearformen

Eine symmetrische Bilinearform ist eine bilineare Abbildung $q : V \times V \rightarrow K$ auf einem endlichdimensionalen K -Vektorraum V mit der Eigenschaft $q(v, v') = q(v', v)$ für alle $v, v' \in V$. Die zugehörige quadratische Form $\tilde{q} : V \rightarrow K$ ist die Abbildung $\tilde{q}(v) = q(v, v)$. Daraus kann man die Bilinearform durch Polarisierung

$$q(v, v') = \frac{1}{2}(\tilde{q}(v + v') - \tilde{q}(v) - \tilde{q}(v')) \quad (4.1)$$

zurückgewinnen. Ein Isomorphismus von symmetrischen Bilinearformen (V, q) und (V', q') ist ein Vektorraumisomorphismus $\Phi : V \rightarrow V'$ mit $q'(\Phi(v_1), \Phi(v_2)) = q(v_1, v_2)$ für alle v_1, v_2 . Solche Isomorphismen heißen orthogonale Abbildungen oder Isometrien.

Zwei Vektoren v und v' stehen bezüglich q senkrecht aufeinander, in Zeichen: $v \perp v'$, wenn $q(v, v') = 0$. Analog schreiben wir $X \perp X'$ für beliebige Teilmengen $X, X' \subset V$, wenn $x \perp x'$ für alle $x \in X$ und $x' \in X'$. Die Menge der zu einer Menge $S \subset V$ senkrechten Vektoren $S^\perp \subset V$ ist ein Unterraum. Ein Vektor $v \in V$ bzw. ein Unterraum $W \subset V$ heißen isotrop, wenn $v \perp v$ bzw. $W \perp W$. Das Radikal von q ist der Unterraum

$$\text{rad}(q) := V^\perp$$

Die Form q heißt nicht ausgeartet, wenn $\text{rad}(q) = 0$. Falls $\text{rad}(q) \neq 0$, kann man auf die folgende Weise zu einem nicht ausgearteten Raum übergehen. Wir setzen $\bar{V} := V/\text{rad}(q)$ und $\bar{q}(\bar{v}, \bar{w}) := q(v, w)$, wenn $v, w \in V$ Repräsentanten von $\bar{v}, \bar{w} \in \bar{V}$ bezeichnen.

Bezüglich einer Basis $v_1, \dots, v_n$ wird q durch eine symmetrische Matrix $Q \in K^{n \times n}$ mit Einträgen $Q_{ij} = q(v_i, v_j)$ beschrieben. Unter Basiswechsel $v'_i = \sum_j S_{ji} v_j$ transformiert sich Q gemäß $Q' = S^t Q S$. Die Form q ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $\det(Q) \neq 0$.

Lemma 4.1 (Existenz einer Orthogonalbasis) — *Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ mit $q(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ für gewisse $\lambda_i \in K$.*

Beweis. Die Behauptung ist trivial, wenn $\dim(V) = 1$. Wir nehmen also an, es sei $\dim(V) > 1$, und die Behauptung sei schon für alle Bilinearformen kleinerer Dimension gezeigt. Wenn $q = 0$ ist die Behauptung trivial. Andernfalls gibt es zwei Vektoren v' und v'' mit $q(v', v'') \neq 0$. Aus der Identität (4.1) folgt, daß es einen nichtisotropen Vektor $v_1 \in \{v', v'', v' + v''\}$ gibt. Es sei $V' = v_1^\perp$. Für jeden Vektor $v \in V$ gibt es

eine eindeutige Zerlegung

$$v = \frac{q(v_1, v)}{q(v_1, v_1)} v_1 + v', \quad \text{mit } v' \in V'.$$

Da $v_1 \notin V'$, besteht eine orthogonale Zerlegung $V = \langle v_1 \rangle \oplus V'$. Nach Induktionsannahme gibt es eine Orthogonalbasis $v_2, \dots, v_n$ von V' , und $v_1, \dots, v_n$ ist eine Orthogonalbasis von V . $\square$

Zusatz 4.2 (Gram-Schmidt Verfahren) — Ist $w_1, \dots, w_n$ eine Basis mit der Eigenschaft, daß q auf den Räumen $V_i = \langle w_1, \dots, w_i \rangle$ nicht ausgeartet ist, kann man die Orthogonalbasis $v_1, \dots, v_n$ so wählen, daß zusätzlich $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.

Beweis. Wir konstruieren $v_1, \dots, v_n$ rekursiv wie folgt: Es sei $v_1 = w_1$ und

$$v_k = w_k - \sum_{i < k} \frac{q(w_k, v_i)}{q(v_i, v_i)} v_i.$$

Damit im nächsten Schritt nicht durch 0 geteilt wird, ist sicherzustellen, daß v_k nicht isotrop ist. Da aber v_k nach Konstruktion senkrecht auf allen $v_i, i < k$, steht und da die Einschränkung von q auf $V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ nicht ausgeartet ist, kann v_k nicht isotrop sein. $\square$

Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform mit einer Orthogonalbasis $v_1, \dots, v_n$ und Diagonaleinträgen $\lambda_i = q(v_i, v_i)$. Ersetzt man die Basis $v_1, \dots, v_n$ durch skalare Vielfache $v'_i = \mu_i v_i$, ändern sich die Diagonaleinträge zu $\lambda'_i = q(v'_i, v'_i) = \mu_i^2 \lambda_i$.

Satz 4.3 — Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K -Vektorraum. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, d.h. eine Basis $v_1, \dots, v_n$ mit $q(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. $\square$

Satz 4.4 (Sylvesterscher Trägheitssatz) — Es sei $q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Orthogonalbasis $v_1, \dots, v_n$ mit der Eigenschaft, daß die Matrix $Q = (q(v_i, v_j))$ die folgende Gestalt hat:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{n_+} & & \\ \hline & -I_{n_-} & \\ \hline & & O \end{array} \right).$$

Dabei hängen die Zahlen n_+ und n_- nicht von der Wahl der Basis ab. Sie sind als die Dimensionen von maximalen Unterräumen charakterisiert, auf denen q positiv bzw. negativ definit ist. Die Spalten- und Zeilenzahl der Nullmatrix O ist gleich $\dim(\text{rad}(q))$. $\square$

Im Falle einer positiv oder negativ definiten symmetrischen Bilinearform auf einem reellen Vektorraum kann nur der Nullvektor isotrop sein. Aber schon für eine indefinite reelle Form wie etwa

$$q(x, y) = x^t I_{p,s} y, \quad \text{mit } I_{p,s} = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_s \end{array} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}^{p+s},$$

gibt es viele isotrope Vektoren. In physikalischen Kontexten spricht man von lichtartigen Vektoren. Sie bilden einen Kegel $C \subset V$, der die offenen Bereiche V_+ und V_- der Vektoren v mit $\tilde{q}(v) > 0$ und $\tilde{q}(v) < 0$ trennt. Man hat Homotopieäquivalenzen $S^{p-1} \rightarrow V_+$ und $S^{q-1} \rightarrow V_-$, wobei S^{p-1} und S^{q-1} die Einheitssphären in $\mathbb{R}^p \oplus 0$ bzw. $0 \oplus \mathbb{R}^q$ sind.

Satz 4.5 — Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf einem K -Vektorraum der Dimension $d = 2n$ bzw. $d = 2n + 1$.

1. Falls $n > 0$, enthält V nichttriviale isotrope Vektoren.
2. Jeder maximale isotrope Unterraum hat die Dimension n .
3. Es sei $W \subset V$ ein isotroper Unterraum. Dann läßt sich jede Basis $x_1, \dots, x_m$ von W so zu einer Basis $x_1, \dots, x_d$ von V ergänzen, daß $q(x_i, x_j) = \delta_{i+j, d+1}$.

Die Matrix zu q bezüglich der Basis $x_1, \dots, x_d$ hat also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. 1. Es sei $v_1, \dots, v_m$ eine Orthonormalbasis zu q , $m \geq 2$. Dann ist $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ genau dann ein isotroper Vektor, wenn $(x_1, \dots, x_m)$ die quadratische Gleichung $x_1^2 + \dots + x_m^2 = 0$ löst. Eine nichttriviale Lösung ist zum Beispiel $x = (1, \sqrt{-1}, 0, \dots, 0)$.

2. Es sei $W \subset V$ ein isotroper Unterraum. Weil die Form q nicht ausgeartet ist, gilt $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, und aus $W \subset W^\perp$ folgt $\dim W \leq n$. Es sei nun W ein isotroper Unterraum der Dimension $m < n$. Dann ist W ein echter Unterraum in $W^\perp$ der Kodimension ≥ 2 . Nach Schritt 1 besitzt $W^\perp/W$ isotrope Vektoren, und wir können induktiv annehmen, annehmen, daß es in $W^\perp/W$ einen maximalen isotropen Unterraum L' der Dimension $n - m$ gibt. Das Urbild $L \subset W^\perp$ von L' unter der Projektion $W^\perp \rightarrow W^\perp/W$ ist ein isotroper Raum der Dimension n . Speziell für maximale isotrope Unterräume heißt dies, daß sie n -dimensional sein müssen.

3. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß W ein maximaler isotroper Raum ist, also die Dimension n hat. Wir wählen ein Komplement U und unterscheiden die Fälle $\dim U = \dim W$ und $\dim U > \dim W$.

Es sei zunächst $\dim U = n$. Weil W isotrop, aber q nicht ausgeartet ist, muß die Paarung $W \times U$ nicht ausgeartet sein. Man kann also eine Basis $y_1, \dots, y_n$ so wählen, daß $q(x_i, y_j) = \delta_{i+j, n+1} =: J_{ij}$. Wir machen den Ansatz $x_{n+j} = y_j + \sum_k B_{kj} x_k$. Dann gilt $q(x_i, x_{n+j}) = \delta_{i+j, n+1}$ unabhängig von der Wahl von B , welches wir also nur so bestimmen müssen, daß

$$0 = q(x_{n+j}, x_{n+\ell}) = q(y_j, y_\ell) + \sum_k B_{kj} J_{\ell k} + \sum_k B_{k\ell} J_{kj}.$$

Mit der Bezeichnung $Q := (q(y_i, y_j))$ heißt das: B ist so zu wählen, daß $0 = Q + J^t B + B^t J$. Dazu genügt $B := -\frac{1}{2}(J^t)^{-1}Q$.

Der Fall $\dim U = n + 1$ läßt sich auf den früheren Fall zurückführen: Es sei $z \in W^\perp \cap U$ nicht trivial. Dieser Vektor kann nicht isotrop sein, sonst wäre $W^\perp$ isotrop, obwohl $\dim W^\perp > n$. Wir setzen $x_{n+1} := z / \sqrt{q(v, v)}$ und betrachten $V' := x_{n+1}^\perp$. Die Einschränkung $q' := q|_{V'}$ ist nicht ausgeartet, und W ist ein maximaler isotroper Unterraum in V' von halber Dimension. Gemäß dem vorigen Absatz gibt es eine Basis $x_1, \dots, x_n, x'_{n+1}, \dots, x'_{2n}$ mit $x'_{n+i} \in V' \cap U$ und $q(x_i, x'_{n+j}) = \delta_{i+j, n+1}$ und $q(x'_{n+j}, x_{n+k}) = 0$. Einfaches Umnummerieren liefert eine Basis

$$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} := x'_{n+1}, \dots, x_{2n+1} := x'_{2n}$$

von V mit den gewünschten Eigenschaften. □

Bezeichnet W einen beliebigen Vektorraum und W^* seinen Dualraum, so definiert die Standardpaarung $W \times W^* \rightarrow K$ auf der direkten Summe $W \oplus W^*$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform

$$q((w, \varphi), (w', \varphi')) := \varphi(w') + \varphi'(w).$$

Offenbar sind W und W' maximale isotrope Unterräume. Solche Formen heißen in der Theorie der quadratischen Formen 'hyperbolische Räume'.

Folgerung 4.6 — Ist V ein geradedimensionaler Vektorraum, $\dim V = 2n$, mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform und einem n -dimensionalen isotropen Unterraum W , dann gibt es eine Isometrie $V \rightarrow W \oplus W^*$, die auf W die Identität ist.

4.2 Orthogonale Gruppen

Definition 4.7 — Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Die orthogonale Gruppe zur Form q ist die Untergruppe

$$O(V, q) := \{g \in \text{GL}(V) \mid q(gv, gv') = q(v, v') \text{ für alle } v, v' \in V\} \subset \text{GL}(V).$$

Die spezielle orthogonale Gruppe ist die Untergruppe

$$\text{SO}(V, q) := \{g \in O(V, q) \mid \det(g) = 1\} \subset O(V, q).$$

Im Falle der Standardform $q(v, v') = v^t v'$ auf $V = K^n$ schreiben wir kurz

$$O_n(k) := \{g \in k^{n \times n} \mid g^t g = I_n\} \supset SO_n(k) := \{g \in O_n(k) \mid \det(g) = 1\}.$$

Beispiel 4.8 (Spiegelungen) — Es sei $q : V \times V \rightarrow k$ nicht ausgeartet. Dann ist für jeden nichtisotropen Vektor die Spiegelung an v bzw. an der zu v senkrechten Hyperebene durch

$$s_v(x) := x - 2 \frac{q(v, x)}{q(v, v)} v$$

definiert. Es gelten die Rechenregeln

1. $s_v(v) = -v$ und $s_v|_{\langle v \rangle^\perp} = \text{id}_{\langle v \rangle^\perp}$, insbesondere ist $s_v \in O(V, q)$ und $s_v^2 = \text{id}_V$.
2. $s_v = s_{\lambda v}$ für alle $\lambda \in k^*$, und $gs_v g^{-1} = s_{g(v)}$ für alle $g \in O(V, q)$.

Satz 4.9 — Es sei $q : V \times V \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, $n = \dim(V)$. Dann ist jedes Element $g \in O(V, q)$ Produkt von höchstens $2n$ Spiegelungen. Wenn es in V keine nichttrivialen isotropen Vektoren gibt, ist jedes Element Produkt von höchstens n Spiegelungen.

Beweis. Wir zeigen stärker durch absteigende Induktion: Ist W ein k -dimensionaler Vektorraum mit $g|_W = \text{id}_W$ und der Eigenschaft, daß $q|_W$ nicht ausgeartet ist, so ist g ein Produkt von höchstens $2(n-k)$ Spiegelungen. Die Behauptung ist für $k = n$ trivial. Es sei also ein k -dimensionaler Unterraum W mit diesen Eigenschaften gegeben, und die Behauptung für alle solcher Unterräume größerer Dimension schon gezeigt. Falls $W = V$, ist nichts zu zeigen. Weil q und $q|_W$ nicht ausgeartet sind, gibt es einen Vektor nicht isotropen Vektor $v \in W^\perp$. Weil $g|_W = \text{id}_W$, ist auch $gv \perp W$. Wegen

$$q(gv - v, gv - v) + q(gv + v, gv + v) = 2q(gv, gv) + q(v, v) = 4q(v, v) \neq 0$$

können nicht $gv + v$ und $gv - v$ zugleich isotrop sein. Es sei $a := s_{gv-v}$ falls $gv - v$ nicht isotrop ist, und andernfalls $a := s_{gv+v} s_v$. Dann gilt $a|_W = \text{id}_W$ und $agv = v$. Demnach ist $W' = W \oplus \langle v \rangle$ ein Unterraum, auf dem q nicht ausgeartet ist, mit $ag|_{W'} = \text{id}_{W'}$. Nach Induktion ist (ag) ein Produkt von höchstens $2(n-k-1)$ Spiegelungen und folglich $g = a^{-1}(ag)$ ein Produkt von höchstens $2(n-k)$ Spiegelungen. $\square$

Aufgabe 4.1 — Es seien $r, s > 0$, $I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$ und

$$O(r, s) := \{g \in \text{GL}_{r+s}(\mathbb{R}) \mid g^t I_{r,s} g = I_{r,s}\}.$$

Zu zeigen:

1. $O(r, s)$ ist eine Liegruppe der Dimension $\binom{r+s}{2}$.
2. $O(r, s) \cong O(s, r)$.
3. $O(r, s)$ ist nicht kompakt.

4. $O(r, s)$ hat genau vier Zusammenhangskomponenten, die durch das Vorzeichen von $\det(g_{11})$ bzw. $\det(g_{22})$ charakterisiert sind, wenn $g \in O(r, s)$ in der Blockform $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ gegeben ist.
5. $\pi_0(O(r, s)) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

4.3 Universelle Tensorkonstruktionen

Literatur:

Serge Lang: Algebra.

Die freie assoziative Algebra. Es sei K ein Körper. Für K -Vektorräume V und W gibt es einen mit $V \otimes W$ bezeichneten K -Vektorraum und eine bilineare Abbildung $p : V \times W \rightarrow V \otimes W$ mit der universellen Eigenschaft, daß es zu jeder bilinearen Abbildung $\varphi : V \times W \rightarrow U$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bar{\varphi} : V \otimes W \rightarrow U$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ p$ gibt. Das Paar $(V \otimes W, p)$ ist wie stets in solchen Fällen durch die universelle Eigenschaft eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus gekennzeichnet. Man beachte, daß der Raum $V \otimes W$ zwar von Vektoren der Form $v \otimes w := p(v, w)$ aufgespannt wird, daß aber ein beliebiges Element in $V \otimes W$ sich im Allgemeinen nicht so schreiben läßt, sondern vielmehr eine Linearkombination der Form $\sum_i v_i \otimes w_i$ ist.

Aus der Eindeutigkeit des Tensorprodukts folgt dann insbesondere leicht, daß es genau einen Isomorphismus $(V \otimes W) \otimes U \rightarrow V \otimes (W \otimes U)$ mit $(v \otimes w) \otimes u \mapsto v \otimes (w \otimes u)$ gibt. Wir können also im Folgenden alle Klammerungen von Tensorprodukten fortlassen und zum Beispiel $W_1 \otimes \dots \otimes W_n$ für das Tensorprodukt von Räumen $W_1, \dots, W_n$ schreiben. Insbesondere setzen wir $V^{\otimes n}$ für das n -fache Tensorprodukt von V mit sich selbst und vereinbaren $V^{\otimes 0} = K$ und $V^{\otimes 1} = V$. Es gibt dann kanonische Isomorphismen $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \cong V^{\otimes (n+m)}$.

Der graduierte Vektorraum $TV = \bigoplus_{n \geq 0} T^n V$ mit $T^n V = V^{\otimes n}$ mit der kanonischen Verknüpfung $T^n V \times T^m V \rightarrow T^{n+m} V$ heißt Tensoralgebra von V . Sie ist assoziativ und hat die folgende universelle Eigenschaft: Es sei $i : V \rightarrow TV$ der kanonische Isomorphismus auf $T^1 V$. Ist $j : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung in eine beliebige assoziative k -Algebra A mit 1, so gibt es genau einen k -Algebrenhomomorphismus $a : TV \rightarrow A$ mit $a \circ i = j$. Dabei ist $a(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = j(v_1) \dots j(v_n)$. Um diese Eigenschaft zu betonen, spricht man häufig von der freien assoziativen Algebra, die von V frei erzeugt wird. Die Tensoralgebra dient uns als Ausgangspunkt zu zahlreichen algebraischen Konstruktionen.

Besitzt V eine Basis $v_1, \dots, v_\ell$, so hat $T^n V$ eine Basis der Form $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n}$ mit $1 \leq i_j \leq \ell$ für $j = 1, \dots, n$. Insbesondere ist $\dim(T^n V) = \dim(V)^n$.

Die symmetrische Algebra. Es sei $I \subset TV$ das zweiseitige Ideal, das von allen Elementen der Form $x \otimes y - y \otimes x$ mit $x, y \in V$ erzeugt wird. Weil alle Erzeuger homogen vom Grad 2 sind, ist auch das Ideal I homogen, d.h. mit der Bezeichnung

$I^n := I \cap T^n V$ gilt daher $I = \bigoplus_n I^n$. Ebenso sieht man $I^0 = 0$ und $I^1 = 0$. Die assoziative Faktoralgebra $SV := TV/I$ erbt daher eine Graduierung, $SV = \bigoplus_n S^n V$ mit $S^n V = T^n V / I^n$. Außerdem ist $S^0 V = T^1 V = K$ und $S^1 V = T^1 V = V$. Die graduierte Algebra SV heißt symmetrische Algebra von V .

Es bezeichne $\pi : TV \rightarrow SV$ die Projektion. Wir schreiben $v_1 \cdots v_k$ für $\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$. Weil

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_k - v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k$$

im Ideal J liegt, gilt $v_1 \cdots v_i v_{i+1} \cdots v_k = v_1 \cdots v_{i+1} v_i \cdots v_k$ in $S^k V$. Und weil die Symmetrische Gruppe S_k von Transpositionen erzeugt wird, gilt allgemeiner

$$v_1 \cdots v_k = v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}$$

für beliebige Permutationen σ . Daraus folgt unmittelbar: Die Multiplikation in SV ist assoziativ und kommutativ. Wenn wir mit $j : V \rightarrow SV$ die kanonische Inklusion bezeichnen gilt nun analog zum Fall der Tensoralgebra:

Satz 4.10 (Universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra) — *Zu jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow A$ in eine assoziative Algebra mit 1 mit der Eigenschaft $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ für alle $x, y \in V$ gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $F : SV \rightarrow A$ mit $F \circ j = f$. Insbesondere ist $V \xrightarrow{j} SV$ durch diese Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wegen der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra gibt es nämlich genau einen Algebrenhomomorphismus $\Phi : TV \rightarrow A$ mit $\Phi \circ j = f$. Nach Voraussetzung liegen die Erzeuger $x \otimes y - y \otimes x$ des Ideals I im Kern von Φ . Aber dann liegt auch das ganze zweiseitige Ideal I im Kern von Φ , und Φ muß über Abbildungen $\pi : TV \rightarrow SV$ und $F : SV \rightarrow A$ faktorisieren. Ist andererseits $F' : SV$ irgendeine Algebrenabbildung mit $F' \circ j = f$, so besitzt $F' \circ \pi$ dieselbe Eigenschaft wie Φ , muß also wegen der Eindeutigkeit von Φ mit Φ übereinstimmen. Daraus folgt $F' = F$. $\square$

Sind A und B graduierte Algebren, so erbt $A \otimes B$ eine Graduierung

$$(A \otimes B)^n := \bigoplus_{k+\ell=n} A^k \otimes B^\ell$$

und ein Produkt

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb').$$

Wenn die Produkte in A und B beide assoziativ bzw. kommutativ sind, gilt dasselbe für das Produkt in $A \otimes B$.

Satz 4.11 — *Es gibt genau einen Isomorphismus $S(V \oplus W) \rightarrow SV \otimes SW$ von K -Algebren, der sich auf $V \oplus W$ zur identischen Abbildung nach $V \otimes K \oplus K \otimes W$ einschränkt.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $SV \otimes SW$ dieselbe universelle Eigenschaft wie $S(V \oplus W)$ besitzt. Es sei also $f : V \oplus W \rightarrow A$ eine lineare Abbildung in eine kommutative und assoziative Algebra mit 1. Dann gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $F_V : SV \rightarrow A$, der $f|_V$ fortsetzt, ebenso genau einen Algebrenhomomorphismus $F_W : SW \rightarrow A$, der $f|_W$ fortsetzt. Weil die Bilder $F_V(SV)$ und $F_W(SW)$ untereinander kommutieren, ist die einzig denkbare Fortsetzung $F(a \otimes b) := F_V(a) \cdot F_W(b)$ für $a \in SV$ und $b \in SW$ tatsächlich ein Homomorphismus. Weil jeder Algebrenhomomorphismus $G : SV \otimes SW$ auf $SV \otimes K$ mit F_V und auf $K \otimes SW$ mit F_W übereinstimmen muß, gilt auch $G = F$. $\square$

Folgerung 4.12 — *Besitzt V eine endliche Basis $v_1, \dots, v_n$, so hat $S^k V$ eine Basis aus Elementen $v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}$ mit $k_i \in \mathbb{N}_0$ und $k_1 + \dots + k_n = k$. Insbesondere ist $\dim S^k V = \binom{k+n-1}{n-1}$.*

Beweis. Falls $V = \langle v \rangle$, hat TV eine Basis aus den Elementen $1, v, v^{\otimes 2}, v^{\otimes 3}, \dots$. In diesem Falle ist $I = 0$ und $TV = SV$. Die Behauptung ist dann sicher richtig. Der allgemeine Fall ergibt sich jetzt durch Induktion über die Dimension von V : Ist die Behauptung für V' schon gezeigt, so folgt sie für $V = V' \oplus \langle v \rangle$ aus dem obigen Satz wegen

$$S^k V = S^k V' \oplus S^{k-1} V' v \oplus S^{k-2} V' v^2 \oplus \dots \oplus K v^k.$$

$\square$

Die äußere Algebra. Es sei $J \subset TV$ das zweiseitige Ideal, das von allen Elementen der Form $x \otimes x$, $x \in V$, erzeugt wird. Weil alle Erzeuger homogen vom Grad 2 sind, ist auch das Ideal J homogen. Mit der Bezeichnung $J^n := J \cap T^n V$ gilt daher $J = \bigoplus_n J^n$. Ebenso sieht man $J^0 = 0$ und $J^1 = 0$. Die assoziative Faktoralgebra $\Lambda V := TV/J$ erbt daher eine Graduierung, $\Lambda V = \bigoplus_n \Lambda^n V$ mit $\Lambda^n V = T^n V / J^n$. Außerdem ist $\Lambda^0 V = T^0 V = K$ und $\Lambda^1 V = T^1 V = V$. Die gradierte Algebra ΛV heißt äußere Algebra von V .

Es bezeichne $\pi : TV \rightarrow \Lambda V$ die Projektion. Wir schreiben $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ für $\pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$. Nach Konstruktion ist $v \wedge v = 0$. Wie üblich folgt hieraus

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(k)}$$

für beliebige Permutationen σ . Die Multiplikation in ΛV ist daher antikommutativ. Es gilt

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \psi \wedge \varphi$$

für homogene Elemente $\varphi, \psi \in \Lambda V$ vom Grad $|\varphi|$ bzw. $|\psi|$. Wenn wir mit $j : V \rightarrow \Lambda V$ wieder die kanonische Inklusion, bezeichnen gilt analog zum Fall der Tensoralgebra und der symmetrischen Algebra:

Satz 4.13 (Universelle Eigenschaft der äußeren Algebra) — *Zu jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow A$ in eine assoziative Algebra mit 1 mit der Eigenschaft $f(x)^2 = 0$ für*

alle $x \in V$ gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $F : \Lambda V \rightarrow A$ mit $F \circ j = f$. Insbesondere ist $V \xrightarrow{j} \Lambda V$ durch diese Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Beweis. Ganz analog zum Fall der symmetrischen Algebra. $\square$

Es seien A und B zwei antikommutative graduierte Algebren. Damit das Tensorprodukt $A \otimes B$ mit der üblichen Graduierung wieder antikommutativ wird, müssen wir es wie folgt abändern:

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (-1)^{|b| \cdot |a'|} (aa') \otimes (bb').$$

Wir bezeichnen das Tensorprodukt der Algebren mit der auf diese Weise abgeänderten Multiplikation durch das Symbol $A \hat{\otimes} B$.

Satz 4.14 — Es gibt genau einen Isomorphismus $\Lambda(V \oplus W) \rightarrow \Lambda V \hat{\otimes} \Lambda W$ von K -Algebren, der sich auf $V \oplus W$ zur identischen Abbildung nach $(V \otimes K) \oplus (K \otimes W)$ einschränkt.

Beweis. Ganz analog zum Fall der symmetrischen Algebra. $\square$

Folgerung 4.15 — Besitzt V eine endliche Basis $v_1, \dots, v_n$, so hat $\Lambda^k V$ eine Basis aus Elementen $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Insbesondere findet man $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ und $\dim \Lambda V = 2^{\dim V}$.

Beweis. Falls $V = \langle v \rangle$, hat TV eine Basis aus den Elementen $1, v, v^{\otimes 2}, v^{\otimes 3}, \dots$. Weil $v \otimes v$ das Ideal J erzeugt, folgt $\Lambda^0 V = K$, $\Lambda^1 V = \langle v \rangle$ und $\Lambda^k V = 0$ für $k \geq 2$. Die Behauptung ist in diesem Falle sicher richtig. Der allgemeine Fall ergibt sich jetzt durch Induktion über die Dimension von V : Ist die Behauptung für V' schon gezeigt, so folgt sie für $V = V' \oplus \langle v \rangle$ wegen

$$\Lambda^k V = \Lambda^k V' \wedge 1 \oplus \Lambda^{k-1} V' \wedge v.$$

$\square$

4.4 Cliffordalgebren

Atiyah, Bott, Shapiro: Clifford Modules.

Cliffordalgebren wurden 1876 von William Clifford erfunden mit der Idee, höherdimensionale Verallgemeinerungen der komplexen Zahlen und der Quaternionen zu schaffen. Es handelt sich um eine auf den ersten Blick kleine Modifikation der Konstruktion der äußeren Algebren, die aber zu einem wesentlich verschiedenen algebraischen Verhalten führen.

Konstruktion der Cliffordalgebren. Dazu sei $q : V \times V \rightarrow k$ eine symmetrische Bilinearform. Wir betrachten in TV das zweiseitige Ideal J , das von allen Elementen der Form

$$v \otimes v - q(v, v) \cdot 1, \quad v \in V$$

erzeugt wird. Gemäß der Polarisierungsformel (4.1) liegen in J auch alle Elemente der Form

$$v \otimes w + w \otimes v - 2q(v, w) \cdot 1.$$

Der Quotient $\text{Cl}(V, q) := TV/J$ ist eine assoziative k -Algebra mit 1, die von den Bildern der kanonischen Abbildung $i : V \rightarrow T^1V \rightarrow V$ erzeugt wird. Wir schreiben die Verknüpfung in $\text{Cl}(V, q)$ mit einem Multiplikationspunkt, oder lassen die Bezeichnung der Verknüpfung ganz weg. Indem wir Elemente $v \in V$ mit ihren Bildern in $\text{Cl}(V, q)$ identifizieren, bestehen also in $\text{Cl}(V, q)$ die Relationen:

$$v^2 = q(v, v) \quad \text{und} \quad vw = -wv + 2q(v, w) \quad \text{für } v, w \in V.$$

Die Multiplikation in $\text{Cl}(V, q)$ ist also im allgemeinen nicht kommutativ. Sind v und w orthogonal, so antikommutieren die Elemente. $\text{Cl}(V, q)$ heißt die Cliffordalgebra zur Form q .

Satz 4.16 (Universelle Eigenschaft der Cliffordalgebren) — *Es sei (V, q) eine symmetrische Bilinearform, $\text{Cl}(V, q)$ die zugeordnete Cliffordalgebra und $i : V \rightarrow \text{Cl}(V, q)$ die kanonische Abbildung. Ist $f : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung in eine assoziative Algebra mit 1 mit der Eigenschaft, daß $f(v)^2 = q(v, v)1_A$ für alle $v \in V$, so existiert genau ein Algebrenhomomorphismus $F : \text{Cl}(V, q) \rightarrow A$ mit $F \circ i = f$. Insbesondere ist $i : V \rightarrow \text{Cl}(V, q)$ durch diese Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wie früher. □

Die Erzeuger $v \otimes v - q(v, v)$ sind nicht homogen bezüglich der $\mathbb{Z}$ -Graduierung auf TV , wohl aber bezüglich der $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung, die durch Zusammenfassung der geraden und der ungeraden Teile entsteht:

$$TV = \bigoplus_{m \text{ gerade}} T^m V \oplus \bigoplus_{m \text{ ungerade}} T^m V.$$

Das Ideal J ist in diesem Sinne $\mathbb{Z}/2$ homogen, und $\text{Cl}(V, q)$ erbt eine $\mathbb{Z}/2$ -Graduierung.

$$\text{Cl}(V, q) = \text{Cl}^0(V, q) \oplus \text{Cl}^1(V, q).$$

Elemente in den beiden Summanden heißen gerade bzw. ungerade. Die Summanden werden jeweils von Produkten $v_1 \cdots v_m$ erzeugt, wobei m gerade bzw. ungerade ist.

Da in der Definition der Multiplikation für die Algebren $A \hat{\otimes} B$ die Graduierung der Elemente nur $\bmod 2$ einging, läßt sich die Definition wörtlich auf den Fall zweier nur $\mathbb{Z}/2$ -graduierter Algebren erweitern. In diesem Sinne gilt:

Satz 4.17 — Ist $V = V' \oplus V''$ eine orthogonale Zerlegung bezüglich der symmetrischen Bilinearform q auf V , so gibt es genau einen Algebrenisomorphismus

$$\mathrm{Cl}(V, q) \longrightarrow \mathrm{Cl}(V', q|_{V'}) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(V'', q|_{V''}),$$

der auf V' und V'' die Identität induziert.

Beweis. Wie im Falle der äußeren Algebra. Daß die Zerlegung $V' \oplus V''$ orthogonal ist, wird dafür gebraucht, daß Elemente $v' \in V'$ und $v'' \in V''$, die im Tensorprodukt auf der rechten Seite antikommutieren, auch in der Cliffordalgebra auf der linken Seite antikommutieren. $\square$

Satz 4.18 — Es sei q eine symmetrische Bilinearform auf V und $v_1, \dots, v_n$ eine Orthogonalbasis. Dann bilden die Elemente $v_I := v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, wo $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ die Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft, eine Basis von $\mathrm{Cl}(V, q)$. Insbesondere gilt $\dim \mathrm{Cl}(V, q) = 2^{\dim V}$. Außerdem haben der gerade und der ungerade Teil von $\mathrm{Cl}(V, q)$ dieselbe Dimension. Weiter gelten die Rechenregeln

$$v_i v_j = -v_j v_i \text{ für } i \neq j, \text{ und } v_I v_J = \pm \prod_{i \in I \cap J} \lambda_i \cdot v_{I \Delta J},$$

wobei $\lambda_i := q(v_i, v_i) = v_i^2$ für $i = 1, \dots, n$.

Im Satz bezeichnet $I \Delta J := I \cup J \setminus I \cap J$ die symmetrische Differenz der Indexmengen. Das Vorzeichen $\pm \prod_{i \in I \cap J} \lambda_i \cdot v_{I \Delta J}$ hängt davon ab, wieviele Faktoren aneinander vorbei gezogen werden müssen, um sie in dem zusammengesetzten Produkt $v_I v_J$ zu ordnen.

Beweis des Satzes. Für einen eindimensionalen Vektorraum V mit Basiselement v ist TV zum Polynomring $K[x]$ in einer Unbestimmten isomorph. Das Ideal $J = (v \otimes v - q(v, v))$ entspricht dabei dem Hauptideal $(x^2 - \lambda)$, wenn $\lambda = q(v, v)$. Insbesondere ist $\mathrm{Cl}(V, q) \cong K[x]/(x^2 - \lambda)$ zweidimensional und hat eine Basis aus den Elementen 1 und v . Die Behauptung für den allgemeinen Fall folgt dann aus dem Isomorphismus

$$\mathrm{Cl}(V, q) = \mathrm{Cl}(\langle v_1 \rangle) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(\langle v_n \rangle)$$

durch Induktion über $\dim(V)$. $\square$

Beispiel 4.19 — Es sei C_n die Cliffordalgebra zur reellen symmetrischen Bilinearform mit der Matrix $-I_n$ bezüglich der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ auf dem $\mathbb{R}^n$. Folglich gilt $\dim_{\mathbb{R}} C_n = 2^n$. Genauer gilt:

- $C_0 = \mathbb{R}$
- $C_1 \cong \mathbb{C}$, denn $e_1^2 = -1$.

- $C_2 \cong \mathbb{H}$, wenn wir $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$ und $e_1 e_2 \mapsto ij = k$ senden. In der Tat ist $e_1^2 = -1$, $e_2^2 = -1$, $(e_1 e_2)^2 = -e_1^2 e_2^2 = -1$ und $e_1 e_2 = -e_2 e_1$.

Zentraleinfache Algebren. Literatur: Draxl: Skew fields. Weil: Basic number theory.

Definition 4.20 — Eine zentral einfache K -Algebra ist eine assoziative K -Algebra mit 1 von endlicher K -Dimension und den folgenden Eigenschaften:

1. A ist einfach, d.h. A besitzt keine zweiseitigen Ideale außer (0) und (1) .
2. $Z(A) = K$.

Beispiele von zentral einfachen Algebren sind endlichdimensionale Schiefkörper mit Zentrum K , Matrizenringe, oder, wie wir in Kürze sehen, gewisse Cliffordalgebren.

Satz 4.21 — Mit A und B ist auch $A \otimes B$ eine zentraleinfache K -Algebra.

Beweis. Es sei $x = \sum_i a_i \otimes b_i$ ein nichttriviales zentrales Element in $A \otimes B$. Ohne Einschränkung seien die Elemente b_i linear unabhängig. Für jedes $a \in A$ gilt dann

$$0 = (a \otimes 1)x - x \otimes a = \sum_i (aa_i - a_i a) \otimes b_i.$$

Weil die b_i linear unabhängig sind, hat man $aa_i = a_i a$ für jedes i , d.h. alle a_i sind zentrale Elemente in A und somit Skalare aus K . Damit hat x die Form $x = 1 \otimes b$ und ist genau dann zentral, wenn b zentral in B ist. Aber dann ist x ein Skalar. Das zeigt: $Z(A \otimes B) = K$.

Es sei $I \subset A \otimes B$ ein nichttriviales zweiseitiges Ideal und $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ ein nichttriviales Element in I mit minimaler Anzahl n von Summanden. Weil A einfach und $a_1 \neq 0$ ist, gibt es Elemente $c_j, d_j \in A$ mit $\sum_j c_j a_1 d_j = 1$. Dann liegt auch $x' = \sum_j (c_j \otimes 1)x(d_j \otimes 1) = 1 \otimes b_1 + \sum_{i \neq 1} a'_i \otimes b_i$ im Ideal I .

Falls alle $a'_i \in K$, hat x' die Form $x' = 1 \otimes b'$. Weil $(b') = B$, folgt $(1 \otimes b') = A \otimes B$. Falls andererseits $a'_2 \notin K$, gibt es ein a mit $aa'_2 - a'_2 a \neq 0$. Dann widerspricht $x'' := (a \otimes 1)x - x(a \otimes 1) = \sum_{i \geq 2} (aa_i - a_i a) \otimes b_i$ der Minimalität von x . Der Fall tritt also nicht auf. Deshalb ist $A \otimes B$ einfach. $\square$

Satz 4.22 (Wedderburn) — Für jede zentral einfache K -Algebra gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutigen Schiefkörper D und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A \cong M_n(D) \cong D \otimes_K M_n(K)$.

Beweis. Es sei A eine zentral einfache K -Algebra und $\mathfrak{a}$ ein minimales nichttriviales Rechtsideal. Ein solches existiert, weil A endlichdimensional ist. Für jedes $x \in A$ ist die Linksmultiplikation $x \cdot : \mathfrak{a} \rightarrow A$ eine rechts- A -lineare Abbildung. Weil $\mathfrak{a}$ minimal

ist, ist der Kern gleich $\mathfrak{a}$ oder 0, d.h. das Bild ist entweder 0 oder ein zu $\mathfrak{a}$ isomorphes minimales Rechtsideal $x\mathfrak{a}$. Die Summe $\sum_{x \in A} x\mathfrak{a}$ ist ein nichttriviales zweiseitiges Ideal in A , also A . Jede Summe von von minimalen Idealen ist eine direkte Summe von minimalen Idealen über eine endliche Teilmenge der Indexmenge, d.h. es gibt $x_1, \dots, x_n$ mit $A = \bigoplus_i x_i$. Insbesondere ist A als A -Rechtsmodul isomorph zu $\mathfrak{a}^n$. Jeder Endomorphismus von A als A -Rechtsmodul hat die Form

$$\varphi(a) = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1)a,$$

ist also als Linksmultiplikation mit dem Element $\varphi(1)$ gegeben. Deshalb gibt es Algebrenisomorphismen

$$A \cong \text{End}_A(A_A) \cong \text{End}_A(\mathfrak{a}^n) \cong M_n(\text{End}_A(\mathfrak{a})) = M_n(D).$$

Dabei bezeichnet A_A der Deutlichkeit halber den A -Rechtsmodul A und $D := \text{End}_A(\mathfrak{a})$. Weil $\mathfrak{a}$ minimal ist, ist für jeder Endomorphismus $\psi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$ entweder ein Isomorphismus oder die Nullabbildung, weil Kern und Bild von ψ entweder gleich 0 oder gleich $\mathfrak{a}$ sind. Daraus folgt, daß D ein Schiefkörper ist. $\square$

Satz 4.23 (Artin-Whaples) — *Ist A zentral einfach, so ist auch die entgegengesetzte Algebra A^{op} , d.h. A mit der Multiplikation $a \circ b := ba$, zentral einfach, und es gilt $A \otimes A^{\text{op}} \cong \text{End}_K(A) = M_{\dim A}(K)$.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Die Abbildung $\psi : A \otimes A^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_K(A)$, $\psi(a \otimes b) : x \mapsto axb$, ist ein nichttrivialer K -linearer Algebrenhomomorphismus. Der Kern von ψ ist ein zweiseitiges echtes Ideal von $A \otimes A^{\text{op}}$, und weil $A \otimes A^{\text{op}}$ einfach ist, ist $\ker(\psi) = 0$. Und weil $A \otimes A^{\text{op}}$ und $\text{End}_K(A)$ dieselbe Vektorraumdimension haben, ist ψ ein Isomorphismus. $\square$

Insbesondere ist das Tensorprodukt $D' \otimes_K D''$ zweier Schiefkörper mit Zentrum K im allgemeinen zwar kein Schiefkörper mehr, es gibt aber einen eindeutig bestimmten Schiefkörper D mit $D' \otimes_K D'' \cong M_n(D)$. Das legt die folgende Konstruktion nahe: Zwei zentral einfache K -Algebren A und B heißen äquivalent, wenn $M_n(A) \cong M_m(B)$ für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$. Dann liegt in jeder Äquivalenzklasse genau ein Schiefkörper. Es bezeichne $\text{Br}(K)$ die Menge der Äquivalenzklassen von zentral einfachen K -Algebren. Darauf ist durch $[A] \cdot [B] := [A \otimes_K B]$ eine wohldefinierte kommutative und assoziative Verknüpfung mit Neutralelement $[K]$ gegeben. Nach dem Satz von Artin-Whaples ist $[A^{\text{op}}]$ ein Inverses zu $[A]$. Mit dieser Verknüpfung versehen, wird $\text{Br}(K)$ zu einer Gruppe, der Brauergruppe des Körpers K .

Beispiele 4.24 — 1. Die einzigen Schiefkörper von endlicher Dimension über $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$. Davon sind nur $\mathbb{R}$ und $\mathbb{H}$ zentral einfache $\mathbb{R}$ -Algebren, denn $\mathbb{C}$ hat das Zentrum $\mathbb{C}$. Konjugation ist ein Algebrenisomorphismus $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{\text{op}}$. Mit dem Satz von

Artin-Whaples folgt

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\text{op}} \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cong M_4(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}.$$

Deshalb ist $[\mathbb{H}]^2 = [\mathbb{H}][\mathbb{H}^{\text{op}}] = [\mathbb{R}]$. Insgesamt ist $\text{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$.

2. Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist $\text{Br}(K) = 0$. Dazu ist zu zeigen, daß es keine Schiefkörper D mit Zentrum K von endlicher Dimension $[D : K] > 1$ gibt. Andernfalls wählen wir $a \in D \setminus K$. Dann ist $K[a] \subset D$ ein Integritätsbereich von endlicher Vektorraumdimension über K , also eine endliche Körpererweiterung, im Widerspruch dazu, daß K algebraisch abgeschlossen ist.

3. Ist K ein endlicher Körper, so ist $\text{Br}(K) = 0$. Das ist eine Konsequenz eines Satzes von Wedderburn: Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ. Einen Beweis findet man auf der ersten Seite des Buches *Basic Number Theory* von André Weil.

4. Brauergruppen von Zahlkörpern sind sehr groß.

Struktur der Cliffordalgebren. Im Folgenden sei (V, q) eine nicht ausgeartete Bilinearform über einem Körper K und $C = \text{Cl}(V, q)$ die zugehörige Cliffordalgebra mit der Zerlegung $C = C^0 \oplus C^1$ in ihren geraden und ungeraden Anteil. Wir fixieren eine orthogonale Basis $v_1, \dots, v_n$ und setzen zur Abkürzung $[n] := \{1, \dots, n\}$ und $\omega := v_{[n]} = v_1 \cdots v_n$. Weiter sei

$$v_i^2 =: \lambda_i \quad \text{und} \quad \omega^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_n =: \Delta.$$

Weil q als nicht ausgeartet vorausgesetzt ist, sind alle v_I , $I \subset [n]$, invertierbar, zum Beispiel gilt

$$v_i^{-1} = \frac{1}{\lambda_i} v_i, \quad v_{ij}^{-1} = -\frac{1}{\lambda_i \lambda_j} v_{ij}.$$

Unter Konjugation $v_J \mapsto v_I v_J v_I^{-1}$ geht v_J bis aufs Vorzeichen in sich über, und das Vorzeichen hängt von Anzahl der Paare $(i, j) \in I \times J$ von *verschiedenen* Indizes i und j ab. Genauer gilt

$$v_I v_J v_I^{-1} = (-1)^{|I| \cdot |J| - |I \cap J|} v_J.$$

Im Folgenden bezeichnet $Z(A)$ das Zentrum einer assoziativen K -Algebra A , also die Unteralgebra aller Elemente, die mit allen anderen Elementen von A vertauschen, und allgemeiner $Z_A(B)$ den Zentralisator einer Teilmenge $B \subset A$, das ist die Unteralgebra aller Elemente in A , die mit allen Elementen von B vertauschen.

Lemma 4.25 — *Es gilt:*

1. $Z_C(C^0) = k \oplus k\omega$.
2. Falls $\dim(V)$ gerade: $Z(C) = k$ und $Z(C^0) = k \oplus k\omega$.
3. Falls $\dim(V)$ ungerade: $Z(C) = k \oplus k\omega$ und $Z(C^0) = k$.

Beweis. Ein Element $a = \sum_I a_I v_I$ liegt genau dann in $Z(C)$, $Z(C^0)$ bzw. $Z_C(C^0)$, wenn dies für jedes in a mit nichttrivalem Koeffizienten vorkommende Monom v_I gilt.

Das Monom v_J liegt genau dann in $Z_C(C^0)$, wenn $v_{ij} v_J v_{ij}^{-1} = v_J$ für alle zweielementigen Teilmengen $\{i, j\} \subset [n]$, was nach der Vorüberlegung auf die äquivalente Bedingung $2|J| + |J \cap \{i, j\}| \equiv |J \cap \{i, j\}| \equiv 0 \pmod{2}$ für alle $i \neq j$ führt. Offenbar muß J also jede zweielementige Indexmenge entweder enthalten oder zu ihr disjunkt sein. Das trifft genau auf die Mengen $J = \emptyset$ und $J = [n]$ zu. Das zeigt $Z_C(C^0) = k \oplus k\omega$.

Die Behauptungen über $Z(C^0)$ ergeben sich daraus wegen $Z(C^0) = C^0 \cap Z_C(C^0)$. Und Monome $v_J \in Z(C) \subset Z_C(C_0)$ zeichnen sich durch die zusätzliche Eigenschaft $v_i v_J v_i^{-1} = v_J$ also $|J| + |J \cap \{i\}| \equiv 0 \pmod{2}$ für alle $i \in [n]$ aus. Diese Bedingung ist für $J = \emptyset$ immer erfüllt und für $J = [n]$ genau dann, wenn n ungerade ist. $\square$

Wir können das Lemma verwenden, um die Abhängigkeit des Elements $v_{[n]}$ von der Wahl der Orthogonalbasis $v_1, \dots, v_n$ zu klären. Dazu betrachten wir eine zweite Orthogonalbasis $v'_1, \dots, v'_n$, deren Relation zur ersten durch die Gleichungen $v'_i = \sum_j B_{ji} v_j$ wiedergegeben wird. Man erhält

$$\omega' := v'_1 \cdots v'_n = \det(B)\omega + \sum_{J \neq [n]} \mu_J v_J.$$

Weil aber ω' gemäß den obigen Überlegungen im Zentralisator von C^0 liegt, der von ω und 1 aufgespannt wird, kann dies nur $\omega' = \det(B)\omega + \beta$ für ein $\beta \in k$ bedeuten. Quadrieren liefert $\Delta' := \omega'^2 = (\beta^2 + \det(B)^2 \Delta) + 2\beta \det(B)\omega \in k$. Somit ist $\beta = 0$. Zusammengefaßt: $\omega' = \det(B)\omega$ und $\Delta' = \det(B)^2 \Delta$. Insbesondere ist die Restklasse von

$$\Delta := (1)^{\binom{n}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

in $K^\times / K^{\times 2}$ unabhängig von der Wahl der Orthogonalbasis und heißt die *Diskriminante* der Form q . Die Bedeutung der Diskriminante ist die folgende: Das Element ω ist Nullstelle des Polynoms $T^2 - \Delta \in K[T]$. Wenn die Diskriminante nicht verschwindet, ist dieses Polynom irreduzibel und somit $\tilde{K} := K \oplus K\omega \cong K[\sqrt{\Delta}]$ eine quadratische Körpererweiterung von K . Wenn dagegen die Diskriminante verschwindet, gibt es in K eine Quadratwurzel μ von Δ , und wir können die Elemente

$$u_\pm := \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\omega}{\mu} \right)$$

mit den Eigenschaften $u_+ + u_- = 1$, $u_+ u_- = 0$, $u_+^2 = u_+$, $u_-^2 = u_-$ bilden. Die Elemente u_+ und u_- sind also Idempotente und führen zu einer Zerlegung

$$K \oplus K\omega = Ku_+ \times Ku_-.$$

Die Existenz einer solchen Zerlegung und bis auf eine Vertauschung der Faktoren auch die Zerlegung selbst sind unabhängig von der Wahl der Orthogonalbasis.

Lemma 4.26 — Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

1. Wenn $\dim V$ gerade ist oder $\Delta \notin K^{\times 2}$, ist C eine einfache Algebra. Andernfalls ist $C = Cu_+ \times Cu_-$ eine Zerlegung in ein Produkt von einfachen Algebren.
2. Wenn $\dim V$ ungerade ist oder $\Delta \notin K^{\times 2}$, ist C^0 eine einfache Algebra. Andernfalls ist $C^0 = C^0u_+ \times C^0u_-$ eine Zerlegung in ein Produkt von einfachen Algebren.

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{a}$ ein nichttriviales zweiseitiges Ideal in C . Sobald $\mathfrak{a}$ ein einzelnes Monom v_I enthält, ist $\mathfrak{a}$ das Einsideal, weil $I \ni v_I^2 = (-1)^{\binom{|I|}{2}} \prod_{i \in I} \lambda_i$. Wir betrachten also ein Element $a = \sum_J a_J v_J \in \mathfrak{a}$ mit einer minimalen Anzahl von in a tatsächlich vorkommenden Monomen und nehmen an, diese Anzahl sei ≥ 2 .

Für jeden Index i liegt auch $a \pm v_i a v_i^{-1}$ in $\mathfrak{a}$. Damit diese neuen Idealelemente der Minimalität von a nicht widersprechen, müssen für alle in a vorkommenden Monome v_J die Vorzeichen in

$$v_i v_J v_i^{-1} = \pm v_J$$

für jedes i jeweils gleich ausfallen. D.h. die Parität von $|J| - |J \cap \{i\}|$ muß für alle Monome v_J in a jeweils gleich sein. Es seien v_J und v_K verschiedene in a vorkommende Monome. Indem man $i \in J \setminus K$ oder $i \in K \setminus J$ wählt, sieht man, daß $|J|$ und $|K|$ verschiedene Parität haben müssen. Wenn es $i \in J \cap K$ oder $i \in [n] \setminus (J \cup K)$ gibt, müssen $|J|$ und $|K|$ dagegen gleiche Parität haben. Das ist nur möglich, wenn n ungerade ist und J und K komplementäre Teilmengen in $[n]$ sind. Das Element a hat dann die Form $a = \alpha v_J + \beta v_{\bar{J}}$ mit $\bar{J} = [n] \setminus J$. In diesem Fall enthält $\mathfrak{a}$ auch das Element

$$(\alpha v_J + \beta v_{\bar{J}})(\alpha v_J - \beta v_{\bar{J}}) = \alpha' \pm 2\alpha\beta v_{[n]}.$$

Wir schließen: Ein nichttriviales zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a} \subset C$ ist entweder das Einsideal, oder n ist ungerade und $\mathfrak{a}$ enthält ein Element $u = \alpha + \beta v_{[n]}$ mit $\alpha\beta \neq 0$. Wir untersuchen den zweiten Fall genauer. Mit u liegt auch $uv_{[n]} = \lambda\beta + \alpha v_{[n]}$ in $\mathfrak{a}$. Wenn die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 \lambda$$

nicht verschwindet, erhält man aus u und $uv_{[n]}$ durch Linearkombination das Einselement, so daß $\mathfrak{a}$ wieder das Einselement ist. Andernfalls besitzt λ in K eine Quadratwurzel, d.h. die Form q hat eine triviale Diskriminante. Die gerade geführte Rechnung zeigt, daß in diesem Falle $\mathfrak{a}$ eine der beiden früher definierten Idempotenten $u_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\mu} v_{[n]} \right)$ enthält. Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist also eine der beiden Komponenten der Zerlegung $C = Cu_+ \times Cu_-$.

2. Die Argumentation verläuft für C^0 völlig parallel: Wir müssen für Monome v_J mit ausschließlich geradem $|J|$ das Vorzeichenverhalten von $v_i v_J v_i^{-1} = \pm v_J$ untersuchen. Das Vorzeichen hängt nur von der Parität von $|J \cap \{i, j\}|$ ab. Das zwei

verschiedene Monome J und K dasselbe Vorzeichenverhalten für alle zweielementigen Teilmengen haben, ist nur möglich, wenn n gerade ist und $K = \overline{J}$, usw. $\square$

Wir fassen die Ergebnisse der obigen Diskussion wie folgt zusammen:

Satz 4.27 — Es sei (V, q) eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform über dem Körper K mit Diskriminante $\Delta \in K^*$ und C die zugehörige Cliffordalgebra.

1. Wenn $\dim(V)$ gerade ist, ist C eine zentrale einfache K -Algebra.
2. Wenn $\dim(V)$ ungerade ist und $\Delta \notin K^{\times 2}$ hat, ist C eine zentrale einfache $K[\sqrt{\Delta}]$ -Algebra.
3. Wenn $\dim(V)$ ungerade ist und $\Delta \in K^{\times 2}$, so gibt es in C eine Zerlegung $1 = u_- + u_+$ in Idempotente und eine Produktzerlegung $C \cong Cu_- \times Cu_+$ mit zentrale einfachen K -Algebren $Cu_{\pm}$.

Satz 4.28 — Es sei (V, q) eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform über dem Körper K mit Diskriminante $\Delta \in K^*$ und C die zugehörige Cliffordalgebra. Es bezeichne $C^0 \subset C$ die Unter algebra der geraden Elemente.

1. Wenn $\dim(V)$ ungerade ist, ist C^0 eine zentrale einfache K -Algebra.
2. Wenn $\dim(V)$ gerade ist und $\Delta \notin K^{\times 2}$, ist C^0 eine zentrale einfache $K[\sqrt{\Delta}]$ -Algebra.
3. Wenn $\dim(V)$ gerade ist und $\Delta \in K^{\times 2}$, gibt es in C^0 eine Zerlegung $1 = u_- + u_+$ in Idempotente und eine Produktzerlegung $C^0 \cong C^0u_- \times C^0u_+$ mit zentrale einfachen K -Algebren $C^0u_{\pm}$.

Die Beobachtung, daß man für C und C^0 ähnliche Strukturaussagen erhält, die gewissermaßen lediglich in der Dimension der Ausgangsform um 1 verschoben sind, kann man zumindest für gewisse Fälle wie folgt präzisieren und erklären:

Lemma 4.29 — Es sei (V, q) eine symmetrische Bilinearform und $q' := \langle -1 \rangle \oplus q$ die Form $\tilde{q}'((\lambda, v), (\lambda', v')) = -\lambda\lambda' + q(v, v')$ auf dem Vektorraum $V' = ke_0 \oplus V$. Dann induziert die Abbildung $V \rightarrow \text{Cl}(V', q')$, $v \mapsto e_0v$, einen Isomorphismus von k -Algebren $\varphi : \text{Cl}(V, q) \rightarrow \text{Cl}^0(V', q')$.

Beweis. Für $\varphi(v) := e_0v$ gilt: $\varphi(v)^2 = e_0ve_0v = -e_0^2v^2 = q(v, v)$. Wegen der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra setzt sich die lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow C^0(V', q')$ zu einem Algebrenhomomorphismus $\varphi : \text{Cl}(V, q) \rightarrow \text{Cl}^0(V', q')$ fort. Das Bild enthält alle Elemente der Form e_iv und $vv' = (e_0v)(e_0v')$. Da diese $\text{Cl}^0(V', q')$ erzeugen, ist φ surjektiv. Beide Algebren haben dieselbe k -Dimension. Deshalb ist φ ein Isomorphismus. $\square$

Cliffordalgebren über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Es bezeichne I_n die Einheitsmatrix vom Rang n und C_n die reelle Cliffordalgebra zur quadratischen Form $-I_n$, sowie C'_n die reelle Cliffordalgebra zur quadratischen Form I_n . Die Cliffordalgebren C_n und C'_n stehen in der folgenden Rekursionsrelation zueinander:

Lemma 4.30 — $C_n \otimes C'_2 \cong C'_{n+2}$ und $C'_n \otimes C_2 \cong C_{n+2}$.

Beweis. Es sei $f : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow C'_n \otimes C_2$ die lineare Abbildung mit $e_i \mapsto 1 \otimes e_i$ für $i = 1, 2$ und $e_i \mapsto e_i \otimes e_1 e_2$ für $i > 2$. Dann antikommutieren $f(e_i)$ und $f(e_j)$ für $i \neq j$, und $f(e_i)^2 = -1$ für alle i . Deshalb setzt sich f zu einem Algebrenhomomorphismus $F : C_{n+2} \rightarrow C_n \otimes C'_2$ fort. Da das Bild alle Erzeuger $e_j \otimes 1$ und $1 \otimes e_i$ enthält, ist F surjektiv und aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Analog im anderen Fall. $\square$

Satz 4.31 — Die Cliffordalgebren C_n und C'_n sind für kleine n wie folgt gegeben:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \times \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \times M_8(\mathbb{R})$
C'_n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \times M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$

Weiter gilt $C_{n+8} \cong C_n \otimes_{\mathbb{R}} M_{16}(\mathbb{R})$ und $C'_{n+8} \cong C'_n \otimes_{\mathbb{R}} M_{16}(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir wissen schon, daß $C_1 = \mathbb{C}$, $C_2 = \mathbb{H}$ und $C'_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ mit $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ induziert einen Isomorphismus $C'_n \cong M_2(\mathbb{R})$. Das liefert die ersten drei Spalten in der Tabelle des Satzes. Daraus erhält man die sukzessive die anderen Spalten mit Hilfe des obigen Lemmas und der Relationen $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong M_4(\mathbb{R})$ sowie $M_m(K) \otimes M_n(K') \cong M_{mn}(K \otimes K')$. Die letzte Behauptung folgt aus $C_{n+4} \cong (C_n \otimes C'_2) \otimes C_2 \cong C_n \otimes (C'_2 \otimes C_2)$ und $C_2 \otimes C'_2 \cong M_2(\mathbb{H})$ und $M_2(\mathbb{H}) \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong M_{16}(\mathbb{R})$. Ebenso für C'_n . $\square$

Über den komplexen Zahlen ist jede nicht ausgeartete quadratische Form isomorph zur Standardform. Die Cliffordalgebra zu einer n -dimensionalen nicht ausgearteten Form ist deshalb isomorph zu $C_n \otimes \mathbb{C} \cong C'_n \otimes \mathbb{C}$. Wegen $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C})$ erhält man daher durch Komplexifizieren der Tabelle aus Satz 4.31 direkt das folgende Resultat. Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus Satz 4.27 und dem Satz von Wedderburn 4.22.

Satz 4.32 — Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$C_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \begin{cases} M_{2^{n/2}}(\mathbb{C}) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ M_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) \times M_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$\square$

4.5 Spingruppen

Dieser Abschnitt folgt der Arbeit von Atiyah, Bott, Shapiro: Clifford Modules.

Wie früher bezeichne $C = C_n$ die Cliffordalgebra zur Bilinearform $q(x, y) = -x^t y$ auf $V = \mathbb{R}^n$. Auf C gibt es einen natürlichen Automorphismus

$$\alpha : C \rightarrow C, \quad \alpha(v_1 \cdots v_m) = (-1)^m v_1 \cdots v_m,$$

d.h. $\alpha|_{C^0} = \text{id}_{C^0}$ und $\alpha|_{C^1} = \text{id}_{C^1}$, und einen natürlichen Antiautomorphismus

$$(\)^t : C \rightarrow C, \quad (v_1 \cdots v_m)^t = v_m \cdots v_1.$$

Wir schreiben $\bar{x} = \alpha(x^t) = \alpha(x)^t$ für die Komposition. Es gilt also $\bar{\bar{v}} = -v$ für $v \in V$ und $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ für allgemeine $x, y \in C$.

Satz 4.33 — 1. Die Menge $\Gamma := \{x \in C^\times \mid \alpha(x)vx^{-1} \in V \text{ für alle } v \in V\}$ ist eine Untergruppe der Einheitengruppe $C^\times$ und heißt Clifford-Gruppe zur Form q .

2. Für jedes $x \in \Gamma$ ist die Abbildung $\rho(x) : v \mapsto \alpha(x)vx^{-1}$ eine orthogonale Abbildung von V in sich, und $\rho : \Gamma \rightarrow \text{O}(V, q)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

3. Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ liegt in Γ , und $\rho(v) = s_v$.

4. Die Sequenz $1 \longrightarrow \mathbb{R}^* \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\rho} \text{O}(n) \longrightarrow 1$ ist exakt.

Beweis. 1. Weil α ein Ringhomomorphismus ist, gilt $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ für alle $x, y \in C^\times$. Außerdem ist $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Deshalb liegt mit x und y auch xy in Γ und es gilt $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$. Weiter folgt für $x \in \Gamma$ mit der Bezeichnung $w = \alpha(x)vx^{-1}$ auch $\alpha(x^{-1})w(x^{-1})^{-1} = v$. Deshalb läßt sich v aus $w = \rho(x)(v)$ rekonstruieren, und $\rho(x)$ ist ein Isomorphismus. Weiter durchläuft mit v auch $w = \rho(x)(v)$ ganz V . Das zeigt, daß $x^{-1} \in \Gamma$. Daraus folgt die erste Behauptung, und daß ρ ein Gruppenhomomorphismus ist.

2. Weiter erhält man aus $w = \alpha(x)vx^{-1}$ durch Anwenden des Homomorphismus α die Relation $-w = \alpha(w) = x\alpha(v)\alpha(x)^{-1} = -xv\alpha(x)^{-1}$ und hieraus

$$|w|^2 = -w^2 = (\alpha(x)vx^{-1})(xv\alpha(x)^{-1}) = \alpha(x)v^2\alpha(x)^{-1} = -|v|^2.$$

Folglich ist $\rho(x)$ eine orthogonale Transformation.

3. Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ist in C invertierbar mit Inversem $v^{-1} = -v/|v|^2$, so daß

$$\rho(v)(w) = \frac{-vw(-v)}{|v|^2} = w - 2\frac{q(v, w)}{q(v, v)}v = s_v(w) \in V$$

für jedes $w \in V$. Weil jede orthogonale Abbildung sich als Produkt von Spiegelungen schreiben läßt, ist ρ surjektiv.

4. Es ist klar, daß $\mathbb{R}^*$ im Kern von ρ liegt. Es sei umgekehrt $x \in \ker(\rho)$, d.h. $\alpha(x)v = vx$ für alle $v \in V$. Mit der Gradzerlegung $x = x^0 + x^1$ übersetzt sich dies

in die Relationen $x^0v = vx^0$ und $-x^1v = vx^1$ für alle $v \in V$. Aber dann ist x^0 ein gerades Element im Zentrum von C und daher ein Skalar, und x^1 ist ein ungerades Element, das mit C^0 vertauscht. Nach Lemma 4.25 geht das nur, wenn x^1 ein Vielfaches von ω ist (in der Notation des Lemmas) und wenn $\dim(V)$ ungerade ist. Aber dann würde x^1 sogar mit ganz C vertauschen. Also ist $x^1 = 0$. $\square$

Satz 4.34 — 1. Für jedes $x \in \Gamma$ liegt $N(x) := x\bar{x}$ in $\mathbb{R}^*$. Die Abbildung $N : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. Es sei $\text{Pin}(n) := \ker(N)$. Dann ist die Sequenz

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \text{Pin}(n) \xrightarrow{\rho} \text{O}(n) \longrightarrow 1$$

exakt.

3. Es sei $\text{Spin}(n) := \rho^{-1}\text{SO}(n)$. Die Sequenz

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \text{Spin}(n) \xrightarrow{\rho} \text{SO}(n) \longrightarrow 1$$

exakt. Für $n \geq 2$ ist $\text{Spin}(n)$ wegzusammenhängend. Insbesondere ist $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ für $n \geq 3$ die universelle Überlagerung.

Beweis. Für $x \in \Gamma$ und $v \in V$ gilt

$$\alpha(\bar{x})v(\bar{x})^{-1} = x^t v \alpha(x^{-1})^t = (\alpha(x^{-1})v^t x)^t = \alpha(x^{-1})vx.$$

Das zeigt, daß $\bar{x} \in \Gamma$ und daß $\rho(\bar{x}) = \rho(x)^{-1}$. Insbesondere ist $\rho(N(x)) = \rho(x\bar{x}) = \text{id}_V$. Mit anderen Worten, $N(\Gamma) \subset \ker(\rho) = K^*$. Nun folgt $N(xy) = xy\bar{y}\bar{x} = x(y\bar{y})\bar{x} = (x\bar{x})(y\bar{y}) = N(x)N(y)$. Die Komposition $\mathbb{R}^* \rightarrow \Gamma \xrightarrow{N} \mathbb{R}^*$ ist die Abbildung $a \mapsto a^2$ mit Kern $\{\pm 1\}$. Deshalb ist auch $\ker(\rho|_{\text{Pin}(V,q)}) = \{\pm 1\}$. Jeder Einheitsvektor $v \in V$ liegt in $\text{Pin}(n)$. Weil $\rho(v)$ die Spiegelung an v ist, ist auch $\rho : \text{Pin}(n) \rightarrow \text{O}(n)$ surjektiv.

Es genügt zu zeigen, daß es für $n \geq 2$ einen Weg in $\text{Spin}(n)$ gibt, der 1 und -1 verbindet. Es seien dazu e_0 und e_1 zwei orthogonale normierte Vektoren in V und $v_t = \cos(t)e_0 + \sin(t)e_1$. Dann liegen auf dem stetigen Weg $\gamma(t) := -v_t v_0$ in $\text{Spin}(n)$ die Punkte $\gamma(0) = 1$ und $\gamma(\pi) = -1$. $\square$

Wir konstruieren zum Schluß noch explizite Modelle für die komplexen Spindarstellungen von $\text{Spin}(n)$:

Es sei $n = 2m$ gerade. Wir wählen einen Isomorphismus $\mathbb{C}^n \cong W \oplus W^*$ von quadratischen Formen. Die Cliffordalgebra zu $\mathbb{C}^n$ wird also von Elementen $w \in W$ und $\varphi \in W^*$ mit den Relationen

$$ww' + w'w = 0, \quad \varphi\varphi' + \varphi'\varphi = 0, \quad \varphi w + w\varphi = 2\varphi(w),$$

für $w, w' \in W$, $\varphi, \varphi' \in W^*$ erzeugt. Wir konstruieren auf dem 2^m -dimensionalen Vektorraum $M := \Lambda W$ Wirkungen der äußeren Algebren ΛW und ΛW^* wie folgt:

Für $w \in W$ bezeichne $e_w : M \rightarrow M, u \mapsto w \wedge u$, die äußere Multiplikation mit w . Offensichtlich ist $e_w^2 = 0$, und deshalb ist $\Lambda W \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M), w \mapsto e_w$, eine wohldefinierte Darstellung. Für $\varphi \in W^*$ ist die innere Multiplikation $i_\varphi : M \rightarrow M$ durch Kontraktion mit φ definiert:

$$i_\varphi(u_1 \wedge \dots \wedge u_\ell) = \sum_i (-1)^{i-1} \varphi(u_i) u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_i \wedge \dots \wedge u_\ell$$

gegeben. Dabei bedeutet $\hat{}$ wie üblich, daß der entsprechende Faktor ausgelassen wird. Wieder gilt $i_\varphi^2 = 0$, so daß $\Lambda W^* \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M), \varphi \mapsto i_\varphi$ eine wohldefinierte Darstellung ist. Man verifiziert schließlich $i_\varphi e_w + e_w i_\varphi = \varphi(w) \text{id}_M$.

Nach der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra gibt es genau einen $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : \text{Cl}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$$

mit $(w, \varphi) \mapsto \sqrt{2}(e_w + i_\varphi)$. Der Homomorphismus Φ muß injektiv sein, weil sonst der Kern ein echtes zweiseitiges Ideal der einfachen Algebra $C_n^{\mathbb{C}}$ wäre. Andererseits haben beide Seiten dieselbe Vektorraumdimension $2^n = (2^m)^2$. Folglich ist Φ ein Isomorphismus.

Es sei $M = M^0 \oplus M^1$ die Zerlegung der äußeren Algebra in ihre geraden und ungeraden Teile. Da e_w den Grad um genau 1 erhöht und i_φ den Grad um genau 1 senkt, hat man $\Phi(\mathbb{C}^n) : M^0 \rightarrow M^1, M^1 \rightarrow M^0$. Insbesondere sind M^0 und M^1 Untermoduln von M bezüglich der Unteralgebra $\text{Cl}^0(\mathbb{C}^n)$. Weil $\text{Spin}(n)$ eine Untergruppe der Einheitengruppe von $\text{Cl}^0(\mathbb{C}^n)$ erhält man zwei Darstellungen von $\text{Spin}(2m)$ auf den 2^{m-1} -dimensionalen Vektorräumen M^0 und M^1 .

Schließlich besteht für ungerades $n = 2m + 1$ der Isomorphismus $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \cong \text{Cl}^0(\mathbb{C}^{2m+1})$, so daß wir $\text{Spin}(2m + 1)$ als Untergruppe der Einheitengruppe von $\text{Cl}(\mathbb{C}^{2m})$ auffassen können. Der gerade definierte Modul M ist also eine 2^m -dimensionale Darstellung von $\text{Spin}(2m + 1)$.

Zusammengefaßt liefert diese Konstruktion also eine Darstellung

$$\rho : \text{Spin}(2m + 1) \longrightarrow \text{SO}_{2^m}(\mathbb{C})$$

und zwei Darstellungen

$$\rho_+, \rho_- : \text{Spin}(2m) \longrightarrow \text{SO}_{2^{m-1}}(\mathbb{C}).$$

§5 Die Liealgebra einer Liegruppe

Literatur:

Bourbaki: Groupes et Algèbres de Lie.

Bröcker, tom Dieck: Representations of Compact Lie groups.

Kobayashi, Nomizu: Foundations of Differential Geometry.

Bröcker, Jänich: Differentialtopologie.

5.1 Lieklammer von Vektorfeldern

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\Theta(M)$ der Vektorraum der globalen differenzierbaren Vektorfelder. Für eine differenzierbare Funktion $f \in C^\infty(U)$, $U \subset M$, und ein Vektorfeld $X \in \Theta(M)$ bezeichne $X(f) \in C^\infty(U)$ die Ableitung von f in Richtung X . Für zwei Vektoren $X, Y \in \Theta(M)$ ist die Abbildung $f \mapsto X(Y(f))$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung, aber die Differenz $f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ ist wieder ein Vektorfeld, wie die direkte Rechnung zeigt. Die Lieklammer

$$[-, -] : \Theta(M) \times \Theta(M) \rightarrow \Theta(M), (X, Y) \mapsto X \circ Y - Y \circ X$$

hat die folgenden Eigenschaften:

1. $[-, -]$ ist bilinear,
2. $[X, X] = 0$ für alle $X \in \Theta(M)$.
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ für alle $X, Y, Z \in \Theta(M)$.

Die Gleichung 3. heißt Jacobi-Identität.

Definition 5.1 — Ein K -Vektorraum $\mathfrak{g}$ mit einer Abbildung $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ist eine Liealgebra, wenn die Klammer K -bilinear und alternierend ist und der Jacobi-Identität genügt. Eine Abbildung $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ von Liealgebren ist ein Homomorphismus, wenn φ K -linear ist und wenn $[\varphi(x), \varphi(x')] = \varphi([x, x'])$ für alle $x, x' \in \mathfrak{g}$.

Es sei $a : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Zwei Vektorfelder $X \in \Theta(M)$ und $Y \in \Theta(N)$ heißen a -verträglich, wenn $T_p a(X(p)) = Y(a(p))$ für jedes $p \in M$. Das ist äquivalent dazu, daß für jede Funktion $f \in C^\infty(N)$ gilt: $X(a^*(f)) = a^*(Y(f))$.

Lemma 5.2 — Es seien X und Y bzw. X' und Y' a -verträgliche Paare von Vektorfeldern auf M und N . Dann sind auch die Vektorfelder $[X, X']$ und $[Y, Y']$ a -verträglich.

Beweis. Es sei $X(X'(a^*f)) = X(a^*Y'(f)) = a^*Y(Y'(f))$ und analog in umgekehrter Reihenfolge. Damit gilt $[X, X'](a^*f) = a^*[Y, Y'](f)$. $\square$

Es sei nun G eine Liegruppe und $\ell_g : G \rightarrow G$ die Linkstranslation mit $g \in G$. Wir verstehen den Tangentialraum $\text{Lie}(G) := T_e G$ am Neutralelement auf die folgende Weise mit der Struktur einer Liealgebra: Ein Vektorfeld $\xi \in \Theta(G)$ heißt linksinvariant, wenn $T_g \ell_h(\xi(g)) = \xi(hg)$ für alle $g, h \in G$. Äquivalent dazu ist, daß ξ für jedes $g \in G$ mit sich selbst ℓ_g -verträglich ist. Ein linksinvariantes Vektorfeld ist durch den Wert am Neutralelement eindeutig bestimmt, denn $\xi(g) = T_e \ell_g(\xi(e))$. Umgekehrt definiert jeder Vektor $X \in \text{Lie}(G)$ durch $\xi^X(g) := T_e \ell_g(X)$ ein linksinvariantes Vektorfeld. Nach Lemma 5.2 ist die Lieklammer von linksinvarianten Vektorfeldern wieder linksinvariant. Bezeichnet $\Theta(G)^{\text{links}} \subset \Theta(G)$ die Menge der linksinvarianten Vektorfelder, so ergibt sich aus dieser Überlegung: $\Theta(G)^{\text{links}}$ ist eine Unterliealgebra von $\Theta(G)$, und die Abbildung $\xi \mapsto \xi(e)$ ist ein Vektorraumisomorphismus von $\Theta(G)^{\text{links}}$ auf $\text{Lie}(G)$. Wir verstehen $\text{Lie}(G)$ mittels dieses Isomorphismus mit der Lieklammer von $\Theta(G)$, d.h. für $X, Y \in \text{Lie}(G)$ gilt $\xi^{[X,Y]} = [\xi^X, \xi^Y]$.

Definition 5.3 — $\text{Lie}(G)$ heißt die Liealgebra zur Liegruppe G .

Satz 5.4 — Es sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Liegruppen. Dann ist die Abbildung $\varphi_* := T_e \varphi : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ ein Homomorphismus von Liealgebren.

Beweis. Für $X \in \text{Lie}(G)$ bezeichne $Y := T_e \varphi(\xi) \in \text{Lie}(H)$ das Bild unter φ_* , und $\xi^X \in \Theta(G)$ und $\xi^Y \in \Theta(H)$ die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder. Daß φ ein Homomorphismus ist, kann man auch in der Form $\ell_{\varphi(g)} \circ \varphi = \varphi \circ \ell_g$ ausdrücken. Insbesondere gilt:

$$T_g \varphi(\xi^X(g)) = T_g \varphi T_e \ell_g(X) = T_e \ell_{\varphi(g)} T_e \varphi(X) = T_e L \ell \varphi(g)(Y) = \xi^Y(\varphi(g)).$$

Das bedeutet: ξ^X und ξ^Y sind φ -verträglich. Dasselbe gilt nun auch für einen zweiten Vektor $X' \in \text{Lie}(G)$ und sein Bild $Y' \in \text{Lie}(H)$ und für die Lieklammern zwischen X und X' einerseits und Y und Y' andererseits. Daraus folgt: $T_e \varphi([X, X']) = [Y, Y'] = [T_e \varphi(X), T_e \varphi(X')]$. Das war zu zeigen. $\square$

5.2 Flüsse

Zu jedem Vektorfeld $X \in \Theta(M)$ und jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine maximale Integralkurve $\gamma_p : I_p \rightarrow M$, definiert auf einer offenen Umgebung I_p von $0 \in \mathbb{R}$ mit $\gamma_p(0) = p$ und $\dot{\gamma}_p(t) = X(\gamma_p(t))$. Dann ist die Menge $U := \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\}$ eine offene Umgebung von $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, und die Abbildung $\Phi : U \rightarrow M$ mit $\Phi(t, p) := \gamma_p(t)$ ist differenzierbar. Φ heißt der maximale Fluß zum Vektorfeld X . Mit der Bezeichnung $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ gilt $\Phi_0 = \text{id}_M$ und $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$ dort, wo beide definiert sind. Das ist für solche Punkte $p \in M$ und Zeiten s, t der Fall, für die $(t, p) \in U$ und $(s, \Phi(t, p)) \in U$. Übung: Wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft gibt, daß $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_p$ für alle $p \in M$, dann ist $U = \mathbb{R} \times M$. Dies ist insbesondere immer dann der Fall, wenn M kompakt ist.

Lemma 5.5 — Es sei $f : M \rightarrow N$ differenzierbar und $(X \in \Theta(M), Y \in \Theta(N))$ ein Paar von f -verträglichen Vektorfeldern. Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine Integralkurve für X , dann ist $\beta := f \circ \gamma : I \rightarrow N$ eine Integralkurve für Y . Bezeichnen $M_t \subset M$ bzw. $N_t \subset N$ die maximalen offenen Teilmengen, auf denen Φ_t^X bzw. Φ_t^Y definiert sind, so gilt $f(M_t) \subset N_t$ und $f \circ \Phi_t^X = \Phi_t^Y \circ f$.

Beweis. $\dot{\beta}(t) = T_{\alpha(t)}f(\dot{\alpha}(t)) = T_{\alpha(t)}f(X(\alpha(t))) = Y(f(\alpha(t))) = Y(\beta(t))$. Die zweite Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der ersten. $\square$

Zur Erinnerung: Bezeichnet $\varphi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, so ist für jede offene Menge $U \subset N$ der Ringhomomorphismus

$$\varphi^* : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(f^{-1}(U)), \quad f \mapsto f \circ \varphi,$$

definiert. Dieser setzt sich auf Formen fort: Es bezeichne $A^p(U)$ den Vektorraum der alternierenden p -Formen auf U . Dann ist

$$\varphi^* : A^p(U) \rightarrow A^p(f^{-1}(U)), (\varphi^*\omega)_x(v_1, \dots, v_p) := \omega(T_x\varphi(v_1), \dots, T_x\varphi(v_p))$$

für Punkte $p \in f^{-1}(U)$ und Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_p \in T_xM$. Für dieses Zurückziehen von Formen, wobei wir Funktionen als 0-Formen auffassen können, gelten die Rechenregeln:

1. φ^* ist $\mathbb{R}$ -linear.
2. φ^* ist multiplikativ: $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$. Das schließt die Multiplikation mit Funktionen als Spezialfall ein.
3. φ^* ist verträglich mit dem Differential: $\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$.

Es sei nun $X \in \Theta(M)$ ein globales Vektorfeld, $\Phi : U \rightarrow M$ der zugehörige maximale Fluß und $\omega \in A^p(M)$. Für $\varepsilon > 0$ sei $V \subset M$ eine maximale offene Menge mit der Eigenschaft, daß Φ_t für alle t mit $|t| < \varepsilon$ auf V definiert ist. Wir können dann auf V die Formen $\Phi_t^*(\omega)$ vergleichen, und insbesondere die Ableitung

$$\mathcal{L}_X(\omega) := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \Phi_t^*\omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^*\omega - \omega}{t}$$

betrachten. Nach Konstruktion ist $\mathcal{L}_X(\omega)$ zunächst nur eine p -Form auf V , aber indem man ε immer kleiner wählt, sieht man, daß $\mathcal{L}_X(\omega)$ auf ganz M definiert ist.

Definition 5.6 — Die Abbildung $\mathcal{L}_X : A^p(M) \rightarrow A^p(M)$ heißt Lieableitung in Richtung des Vektorfelds X .

Lemma 5.7 — Die Lieableitung hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$ für Funktionen $f \in C^\infty(M)$,
2. $\mathcal{L}_X(d\omega) = d\mathcal{L}_X(\omega)$,

$$3. \mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathcal{L}_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X(\omega_2),$$

$$4. \mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d \text{ (Cartanformel).}$$

Dabei bezeichnet $i_X : A^p(M) \rightarrow A^{p-1}(M)$ die innere Multiplikation mit einem Vektorfeld: $(i_X \omega)(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega(X, v_1, \dots, v_{p-1})$.

Wenn $\Phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, gibt es die Möglichkeit, ein Vektorfeld $X \in \Theta(M)$ nach N zu verschieben. Wir definieren

$$\Phi_* X(y) := T_{\Phi^{-1}(y)} \Phi(X(\Phi^{-1}(y)))$$

für jedes $y \in N$. Anders gesagt: $\Phi_* X$ ist das eindeutig bestimmte Vektorfeld mit der Eigenschaft $\Phi^*(\Phi_* X(f)) = X(\Phi^*(f))$ für jede Funktion $f \in C^\infty(N)$. Insbesondere sind X und $\Phi_* X$ Φ -verträglich.

Wir wenden die Konstruktion speziell auf den Fall an, daß der Diffeomorphismus $\Phi = \Phi_s^Y : M \rightarrow M$ durch den Fluß eines Vektorfelds Y gegeben ist.

Lemma 5.8 — Es seien $X, Y \in \Theta(M)$ globale Vektorfelder. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} \Phi_{s*}^Y(X) = \Phi_{s*}^Y([X, Y])$$

auf dem Bild von Φ_s .

Beweis. Es sei f eine differenzierbare Funktion. Wir leiten

$$\Phi_s^{Y*}(\Phi_{s*}^Y(X)(f)) = X(\Phi_s^{Y*}(f))$$

nach s an der Stelle $s = 0$ ab. Wegen $\Phi_0^Y = \text{id}$, erhält man

$$Y(X(f)) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Phi_{s*}^Y(X) \right)(f) = X(Y(f)),$$

also $\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Phi_{s*}^Y(X) = [X, Y]$. Für beliebige s folgt die Behauptung aus der Relation $\Phi_{s+h}^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_h^Y$. $\square$

Lemma 5.9 — Es seien $X, Y \in \Theta(M)$ globale Vektorfelder. Dann gilt für das Vektorfeld $X_s := \Phi_{s*}^Y(X)$:

$$(\Phi_s^Y) \circ \Phi_t^X \circ (\Phi_s^Y)^{-1} = \Phi_t^{X_s},$$

wann immer eine Seite definiert ist.

Beweis. Das folgt aus Lemma 5.5, weil X und X_s Φ_s^Y -verträglich sind. $\square$

Mit denselben Bezeichnungen:

Lemma 5.10 — Genau dann gilt $\Phi_s^Y \circ \Phi_t^X = \Phi_t^{X_s} \circ \Phi_s^Y$, wann immer beide Seiten definiert sind, wenn $[X, Y] = 0$.

Beweis. Nach Lemma 5.9 genügt es zu zeigen, daß $X_s = X$ für alle s genau dann, wenn $[X, Y] = 0$. Nun gilt nach Lemma 5.8 die Identität

$$\partial X_s / \partial s = \Phi_{s*}^Y([X, Y]).$$

Wenn $X_s = X$ und damit konstant ist, verschwindet die linke Seite, und es folgt $[X, Y] = 0$. Ist umgekehrt $[X, Y] = 0$, so genügt X_s der gewöhnlichen Differentialgleichung $\partial X_s / \partial s = 0$ mit der Anfangsbedingung $X_0 = X$. Daraus folgt $X_s = X$ für alle s (und auf dem Bild von Φ_s^Y). $\square$

5.3 Exponentialabbildung

Definition 5.11 — Es sei G eine Liegruppe. Eine 1-Parametergruppe von G ist ein Homomorphismus $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$.

Lemma 5.12 — Es sei G eine Liegruppe.

1. Zu jedem Vektor $X \in \text{Lie}(G)$ gibt es genau eine 1-Parametergruppe $\alpha^X : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit $\dot{\alpha}^X(0) = X$.
2. Es sei Φ^X der maximale Fluß auf G zum linksinvarianten Vektorfeld ξ^X mit $\tilde{X}(e) = X$. Dann ist Φ^X auf $\mathbb{R} \times G$ definiert, und $\Phi^X(t, g) = g\alpha^X(t)$.

Beweis. Es sei $X \in \text{Lie}(G)$, ξ^X das zugehörige linksinvariante Vektorfeld und $\Phi : U \rightarrow G$ der auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times G$ definierte maximale Fluß, schließlich $\alpha(t) := \Phi(t, e)$, $t \in I_e$, die maximale Integralkurve durch das Neutralelement.

Dann hat die Abbildung $\Psi(g, t) := g\alpha(t)$ für alle $t \in I_e$ wegen der Linksinvarianz von ξ^X die Eigenschaft:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(g, s) = T_{\alpha(s)} \ell_g \dot{\alpha}(s) = T_{\alpha(s)} \ell_g (\xi^X(\alpha(s))) = \xi^X(g\alpha(s)) = \xi^X(\Psi(g, t)),$$

d.h. Ψ hat die definierenden Eigenschaften von Φ und stimmt daher mit Φ überein. Das bedeutet $\Phi(g, t) = g\alpha(t)$ für alle $t \in I_e$. Insbesondere haben die Integralkurven durch alle Punkte $g \in G$ dasselbe Definitionsintervall. Nach einer früheren Überlegung ist dann Φ auf ganz $\mathbb{R} \times G$ definiert. Insbesondere ist auch $\alpha(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, und

$$\alpha(s+t) = \Phi(s+t, e) = \Phi(t, \Phi(s, e)) = \Phi(s, e)\alpha(t) = \alpha(s)\alpha(t),$$

d.h. α ist eine 1-Parametergruppe mit $\dot{\alpha}(0) = \xi^X(e) = X$.

Ist andererseits β eine 1-Parametergruppe mit $\dot{\beta}(0) = X$, so erhält man durch Differenzieren der Beziehung $\beta(s+t) = \beta(s)\beta(t)$ nach t , daß $\dot{\beta}(s) = T_e \ell_{\beta(s)} \dot{\beta}(0) = T_e \ell_{\beta(s)}(X) = \xi^X(\beta(s))$. Folglich ist β die Integralkurve zum Vektorfeld ξ^X durch das Neutralelement und muß mit α übereinstimmen. $\square$

Definition 5.13 — Es sei G eine Liegruppe. Die Abbildung

$$\exp : \operatorname{Lie}(G) \rightarrow G, \quad X \mapsto \alpha^X(1) = \Phi_1^X(e),$$

heißt Exponentialabbildung.

Lemma 5.14 — $T_e \exp = \operatorname{id}_{\operatorname{Lie}(G)}$.

Beweis. Für jeden Vektor X und $t \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha^X(t) = \alpha^{tX}(1)$. Insbesondere hat man $T_0 \exp(X) = \partial \exp(tX) / \partial t|_{t=0} = \dot{\alpha}^X(0) = X$. $\square$

Nach dem Jacobikriterium gibt es offene Umgebungen $U \subset \operatorname{Lie}(G)$ der 0 und $V \subset G$ von e derart, daß $\exp : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Die Umkehrabbildung $\log := (\exp|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ heißt lokaler Logarithmus.

Satz 5.15 — Für jeden Homomorphismus von Liegruppen $\varphi : G \rightarrow H$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Lie}(G) & \xrightarrow{T_e \varphi} & \operatorname{Lie}(H) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Beweis. Es sei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ eine 1-Parametergruppe mit $\dot{\alpha}(0) = X$. Dann ist $\beta := \varphi \circ \alpha$ eine 1-Parametergruppe mit $\dot{\beta}(0) = T_e \varphi(X)$. Es folgt: $\exp(T_e \varphi(X)) = \beta(1) = \varphi(\alpha(1)) = \varphi(\exp(X))$. $\square$

Wir verwenden die Exponentialabbildung, um zu zeigen, daß abgeschlossene Untergruppen von Liegruppen automatisch selbst Liegruppen sind:

Satz 5.16 — Es sei G eine Liegruppe. Eine abstrakte Untergruppe $H \subset G$ ist genau dann abgeschlossen, wenn H eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist.

Beweis. Es sei $H \subset G$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, also insbesondere lokal abgeschlossen. Aber jede lokal abgeschlossene Untergruppe in einer topologischen Gruppe ist abgeschlossen.

Es sei umgekehrt H abgeschlossen. Es genügt zu zeigen, daß es eine Umgebung des Einselements gibt, in der H eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist ein Diffeomorphismus $\exp : U \rightarrow U'$ von einer Umgebung U der 0 auf eine Umgebung U' von e . Es sei $\log := (\exp|_U)^{-1} : U' \rightarrow U$ die Umkehrabbildung. Wir wählen außerdem auf $\mathfrak{g}$ ein Skalarprodukt.

Es sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ die Menge aller Elemente X für die es ein $t \in \mathbb{R}$ und eine Folge h_n in U mit den folgenden Eigenschaften gibt: $\exp(h_n) \in H$, $\lim_n h_n = 0$, $\lim_n t h_n / |h_n| = X$. Wenn H diskret ist, ist $\mathfrak{h}$ leer und im Übrigen nichts zu zeigen.

Es sei also H nicht diskret. Es gibt dann eine Folge (k_n) in $H \setminus \{e\}$, die gegen e konvergiert. Für hinreichend großes n liegen alle k_n in U' . Es sei $h_n := \log(k_n)$. Dann konvergiert h_n gegen 0. Die Folge $h_n / |h_n|$ hat in der Einheitssphäre von $\mathfrak{h}$ einen

Häufungspunkt, konvergiert also nach Übergang zu einer Teilfolge gegen ein X in der Einheitssphäre. Dieses X liegt in $\mathfrak{h}$. Insbesondere ist $\mathfrak{h}$ nicht leer.

Aus der Definition ist klar, daß $\mathfrak{h}$ mit einem Element X auch alle reellen Vielfachen von X enthält, d.h. $\mathfrak{h}$ ist ein Kegel.

Ist $X = \lim_n th_n/|h_n|$ gegeben, so kann man wegen $h_n \rightarrow 0$ ganze Zahlen m_n mit $m_n|h_n| \rightarrow t$ finden. Es konvergiert dann $m_n h_n$ gegen X , also auch $\exp(m_n h_n) = \exp(h_n)_{m_n}^m$ gegen $\exp(X)$. Alle Elemente $\exp(h_n)^{m_n}$ liegen in H , und weil H als abgeschlossen angenommen ist, auch $\exp(X)$. Das zeigt, daß $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$.

Es sei $W \subset U$ eine offene Umgebung von 0 mit der Eigenschaft, daß die $\exp(W)^2 \subset U'$. Dann ist die Abbildung $u : W \times W \rightarrow U'$, $u(w, w') = \log(\exp(w)\exp(w'))$ wohldefiniert und differenzierbar und hat das Differential $D_0 u = \text{pr}_1 + \text{pr}_2 : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Deshalb konvergiert für $X, X' \in \mathfrak{h}$ die Folge $n \log(\exp(X/n)\exp(X'/n))$ gegen $X + X'$. Für $h_n := \log(\exp(X/n)\exp(X'/n))$ gilt also $\exp(h_n) \in H$, $h_n \rightarrow 0$ und $nh_n \rightarrow X + X'$. Das zeigt, daß $X + X' \in \mathfrak{h}$. Folglich ist $\mathfrak{h}$ ein reeller Unterraum von $\mathfrak{g}$.

Es sei nun k_n eine Folge in $H \setminus \{e\}$, die gegen e konvergiert. Es bleibt zu zeigen, daß die Folge für große n in $\exp(\mathfrak{h} \cap U)$ liegt. Andernfalls existiert eine Folge k_n in $H \setminus \exp(\mathfrak{h} \cap U)$, die gegen e konvergiert. Die Ableitung im Ursprung der Abbildung $u : \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp \rightarrow G$ mit $u(h', h'') = \exp(h')\exp(h'')$ ist die Identität, so daß u in der Umgebung der 0 ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung $e \in G$ ist. Es sei $h_n := u^{-1}(k_n)$ und $h_n = h'_n + h''_n$ die orthogonale Zerlegung mit $h'_n \in \mathfrak{h}$ und $h''_n \in \mathfrak{h}^\perp$. Weil $H \ni k_n = u(h_n) = \exp(h'_n)\exp(h''_n)$ und weil $\exp(h'_n) \in \exp(\mathfrak{h}) \subset H$, liege auch die Punkte $\exp(h''_n)$ in H . Demnach ist (h''_n) eine Nullfolge in $\mathfrak{h}$ mit $\exp(h''_n) \in H$. Mit demselben Argument wie oben konvergiert (h''_n) nach Übergang zu einer Teilfolge gegen ein Element X in der Einheitssphäre von $\mathfrak{h}^\perp$, das nach Definition von $\mathfrak{h}$ aber auch in $\mathfrak{h}$ liegen müßte. Widerspruch.

Das zeigt: Für eine geeignete Umgebung $V \subset U \subset \mathfrak{h}$ der 0 und ihr Bild $V' := \exp(V) \subset U' \subset G$ gilt $\exp(V \cap \mathfrak{h}) = V' \cap H$. Demnach ist $\exp$ eine lokale Parametrisierung und $\log$ eine lokale Karte für H bei e . $\square$

Folgerung 5.17 — Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein stetiger Homomorphismus von Liegruppen, so ist φ differenzierbar.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $H := \{(g, g') \in G \times G' \mid \varphi(g) = g'\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $G \times G'$, nämlich die Faser über dem Neutralelement der stetigen Abbildung $G \times G' \rightarrow G'$, $(g, g') \mapsto g'\varphi(g^{-1})$. Nach Satz 5.16 ist H eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von G . Die Projektion $\text{pr}_1 : H \rightarrow G$ ist bijektiv, und differenzierbar und hat daher einen regulären Wert g . In einer Umgebung von $(g, \varphi(g))$ ist also pr_1 ein Diffeomorphismus, und $\varphi = \text{pr}_2 \circ (\text{pr}_1)^{-1}$ ist in einer Umgebung von g differenzierbar. Aber dann ist φ überall differenzierbar. $\square$

Bemerkung 5.18 — Für allgemeine Liegruppen ist die Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ nicht surjektiv. Das ist aus trivialen Gründen klar, wenn G nicht zusammenhängend ist. Aber Surjektivität ist auch für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nicht gegeben: Die komplexen Eigenwerte einer Matrix $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sind entweder von der Form $(\lambda, -\lambda)$ oder $(i\lambda, -i\lambda)$, die komplexen Eigenwerte von $\exp(tx)$ haben also die Form $(e^{t\lambda}, e^{-t\lambda})$ bzw. $(e^{it\lambda}, e^{-it\lambda})$, sind also entweder positive reelle Zahlen oder komplexe Zahlen vom Betrag 1. In $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gibt es aber auch Matrizen, deren Eigenwerte negative reelle Zahlen $\neq -1$ sind, und solche Matrizen können nicht im Bild Exponentialabbildung liegen.

5.4 Die adjungierte Darstellung

Es sei G eine Liegruppe und $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ihre Liealgebra. Für ein $g \in G$ bezeichne $c_g : G \rightarrow G$, $x \mapsto gxg^{-1}$, die Konjugation. Die Konjugation ist ein Automorphismus von G . Das Differential in $e \in G$ ist deshalb ein Automorphismus der Liealgebra $\mathfrak{g}$. Man erhält eine Abbildung

$$\mathrm{Ad} : G \mapsto \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), \mathrm{Ad} g := T_e c_g.$$

Wegen $c_{hg} = c_h \circ c_g$ ist $\mathrm{Ad} hg = \mathrm{Ad} h \cdot \mathrm{Ad} g$, d.h. die Abbildung Ad ist ein Homomorphismus und definiert eine Darstellung der Gruppe G auf ihrer Liealgebra, die sogenannte adjungierte Darstellung. Das Differential

$$\mathrm{ad} := T_e \mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{aut}(\mathfrak{g})$$

ist eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf sich. Diese Darstellung heißt ebenfalls adjungierte Darstellung.

Lemma 5.19 — $\mathrm{ad} X(Y) = [X, Y]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Die Ableitung von $c_{\exp(tX)}(\exp(sY)) = \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX)$ nach dem Parameter s in $s = 0$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y) &= r_{\exp(-tX)*} \ell_{\exp(tX)}(\xi^Y)(e) = r_{\exp(-tX)*}(\xi^Y)(e) \\ &= (\Phi_{-t}^X)_*(\xi^Y)(e). \end{aligned}$$

Die Ableitung nach t in $t = 0$ ergibt nach Lemma 5.8 die Beziehung

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = -[\xi^Y, \xi^X](e) = [X, Y],$$

was zu zeigen war. □

Satz 5.20 — Eine zusammenhängende Liegruppe ist genau dann kommutativ, wenn die Lieklammer auf ihrer Liealgebra verschwindet. In diesem Falle ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Ferner gibt es dann lineare unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ im Kern von $\exp$ mit der Eigenschaft, daß die Exponentialabbildung einen Gruppenisomorphismus $\mathfrak{g}/\Lambda \rightarrow G$ induziert, wobei $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_n$. Insbesondere ist G isomorph zu $(S^1)^n \times \mathbb{R}^{\dim(G)-n}$.

Beweis. Es sei G eine zusammenhängende Liegruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Liealgebra. Wenn G kommutativ ist, ist die Konjugation mit einem beliebigen Element stets die Identität, daraus folgt, daß $\text{Ad } g = \text{id}_G$ für alle $g \in G$ und $\text{ad } x = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Deshalb verschindet die Lieklammer.

Es gelte umgekehrt $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$. Dann kommutieren die zugehörigen Flüsse nach Lemma 5.10. Insbesondere gilt $\exp(sx)\exp(ty) = \exp(ty)\exp(sx)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\alpha(t) = \exp(tx)\exp(ty)$ ist wegen der Relation

$$\begin{aligned}\alpha(t+s) &= \exp(tx)\exp(sx)\exp(ty)\exp(sy) \\ &= \exp(tx)\exp(ty)\exp(sx)\exp(sy) \\ &= \alpha(t)\alpha(s)\end{aligned}$$

eine 1-Parametergruppe von G mit $\dot{\alpha}(0) = x + y$. Da 1-Parametergruppen durch ihren Geschwindigkeitsvektor am Neutralelement eindeutig charakterisiert sind, gilt $\alpha(t) = \exp(t(x+y)) = \exp(tx)\exp(ty)$. Speziell für $t = 0$ erhält man $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Das zeigt, daß $\exp$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Weil $\exp$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist die Gruppenmultiplikation von G zunächst in einer Umgebung U von e kommutativ, dann auch auf allen Produkten $U \cdots U$. Weil G zusammenhängend ist, wird G von den Mengen U^n für $n \rightarrow \infty$ ausgeschöpft. Daraus folgt erstens, daß G kommutativ ist, und zweitens, daß $\exp$ surjektiv ist.

Es sei nun $\Lambda \subset \mathfrak{g}$ der Kern von $\exp$. Weil die Exponentialabbildung lokal ein Diffeomorphismus ist, ist Λ eine diskrete Untergruppe. Jede diskrete Untergruppe wird als $\mathbb{Z}$ -Modul von linear unabhängigen Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aufgespannt, d.h. $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_n$. Der Homomorphiesatz liefert einen Isomorphismus $\overline{\exp} : \mathfrak{g}/\Lambda \rightarrow G$. $\square$

Im Beweis wurde das folgende Lemma verwendet:

Lemma 5.21 — *Es sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\Lambda \subset V$ eine diskrete Untergruppe. Dann gibt es linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ mit $\Lambda = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{Z}}$.*

Dabei verstehen wir unter dem von der leeren Menge aufgespannten $\mathbb{Z}$ -Modul die triviale Gruppe $\{0\}$.

Beweis. Wir versehen V mit einem Skalarprodukt. Weil Λ diskret ist, gibt es in jeder kompakten Kugel $B_r(0)$ höchstens endlich viele Elemente. Falls $\Lambda = 0$, ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es ein Element $v_1 \in \Lambda \setminus \{0\}$, dessen Norm minimal unter allen nichttrivialen Elementen von V ist.

Es sei nun $p : V \rightarrow V' = \langle v_1 \rangle^\perp$ die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}v_1$ und $\Lambda' := p(\Lambda)$. Zu jedem $v' \in \Lambda'$ gibt es dann ein $v \in \Lambda$ mit $v' = v - \lambda v_1$. Indem man gegebenenfalls v durch $v + mv_1$ für geeignetes $m \in \mathbb{Z}$ ersetzt, kann man stets annehmen, daß $|\lambda| \leq 1/2$. Insbesondere liegt $\Lambda' \cap B_r(x)$ stets im Bild von $\Lambda \cap B_{r+1}(x)$ und ist daher endlich. Folglich ist Λ' eine diskrete Untergruppe in V' .

Nach Induktion über $\dim(V')$ können wir annehmen, daß es ein $\mathbb{R}$ -linear unabhängiges Erzeugersystem $\bar{v}'_2, \dots, v'_n$ von Λ' gibt. Wir wählen beliebige $v_2, \dots, v_n \in \Lambda$ mit $p(v_i) = v'_i$. Dann ist $v_1, \dots, v_n$ ein $\mathbb{R}$ -linear unabhängiges Erzeugersystem von Λ . $\square$

Satz 5.22 — *Eine kompakte komplexe Liegruppe G ist kommutativ und von der Form $G \cong \mathfrak{g}/\Lambda$ für ein Gitter $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2 \dim_{\mathbb{C}}(G)}$.*

Beweis. Unter der Voraussetzung, daß G eine komplexe Liegruppe ist, ist die adjungierte Darstellung $Ad : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ holomorph. Wenn G kompakt ist, muß die Abbildung nach dem Maximumsprinzip konstant sein. Folglich ist $\mathfrak{g}$ abelsch. Nach dem vorigen Satz gibt es einen Isomorphismus $\overline{\exp} : \mathfrak{g}/\Lambda \rightarrow G$, wobei Λ den Kern der Exponentialabbildung bezeichnet. Weil G kompakt ist, muß $\mathfrak{g}$ ein Gitter von maximalem Rang $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(G)$ sein. $\square$

§6 Das Haarsche Integral

6.1 Invariante Integration

Wir setzen für den gesamten Abschnitt voraus, daß G eine lokalkompakte Hausdorffsche topologische Gruppe ist. Mit $C(G)$ sei die Algebra der reellwertigen stetigen Funktionen auf G bezeichnet, mit $C_c(G)$ die Unter algebra derjenigen Funktionen f , deren Träger $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}}$ kompakt ist.

Die Gruppe G operiert auf $C(G)$ und $C_c(G)$ linear durch Links- bzw. Rechts translation wie folgt:

$$\lambda_y(f)(x) := f(y^{-1}x) \quad \text{und} \quad \rho_y(f)(x) = f(xy), \quad x, y \in G, f \in C(G).$$

Beides sind Wirkungen von links. Die Supremumsnorms $\|f\|_\infty := \sup_{x \in G} |f(x)|$ ist sowohl links- wie rechtstranslationsinvariant.

Definition 6.1 — Ein linksinvariantes Haarintegral auf G ist eine nichttriviale lineare Abbildung $\int : C_c(G) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\int$ ist positiv, d.h. $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$.
2. $\int$ ist linkstranslationsinvariant, d.h. $\int f = \int \lambda_y f$ für alle $y \in G$.

Analog definiert man den Begriff eines rechtsinvarianten Haarintegrals. Der folgende Satz geht in seiner ursprünglichen Fassung auf den ungarischen Mathematiker Alfréd Haar¹ zurück, der ihn unter stärkeren Anforderungen an die Gruppe G formuliert und bewiesen hat. Verallgemeinerungen stammen von John von Neumann² und André Weil³.

Satz 6.2 (Haar, von Neumann, Weil) — *Es sei G eine lokalkompakte separierte topologische Gruppe. Dann gibt es bis auf eine multiplikative Konstante genau ein linksinvariantes bzw. rechtsinvariantes Haarsches Integral auf G .*

Es ist klar, daß jedes positive Vielfache $c \int$ eines Haarintegrals $\int$ wieder ein Haarintegral ist. Der Satz sagt also, daß linksinvariante Haarintegrale bis auf diese triviale Mehrdeutigkeit eindeutig sind. Im Falle einer kompakten Gruppe G gibt es eine natürliche Normierungsmöglichkeit: Jede konstante Funktion ist nun lokalkompakt, und wir können ein linksinvariantes Haarintegral durch die Forderung $\int 1 = 1$ normieren.

Ist $I : C_c(G) \rightarrow \mathbb{R}$ ein linksinvariantes Haarsches Maß, so können wir I auf die übliche Weise auf $C_c(G, \mathbb{C})$ komplexlinear erweitern:

$$I(f) := I(\text{Re}(f)) + I(\text{Im}(f))i \in \mathbb{C}.$$

¹Alfréd Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Ann. of Math. 34 (1933), 147 — 169.

²John von Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. Ann. of Math. 34 (1933), 170 — 179.

³André Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Actualités Scientifiques et Industrielles 869, (1940). Paris, Hermann.

Satz 6.3 — Die Erweiterung $I : C_c(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. (Linkstranslationsinvarianz) $I(f) = I(\lambda_g f)$ für alle $g \in G$.
2. (Linearität) $I(cf) = cI(f)$ für alle $c \in \mathbb{C}$.
3. (Realität) $I(\bar{f}) = \overline{I(f)}$.
4. (Positivität) $I(f) \geq 0$ für $f \geq 0$.
5. $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Beweis. Zur letzten Aussage: Falls $I(f) = 0$, ist nichts zu zeigen. Andernfalls sei $I(f) = re^{i\phi}$, so daß

$$|I(f)| = r = I(f)e^{-i\phi} = I(fe^{-i\phi}) = I(\operatorname{Re}(fe^{-i\phi})) \leq I(|fe^{-i\phi}|) = I(|f|).$$

□

Im Folgenden betrachten wir nur linksinvariante Haarsche Integrale. Den Beweis des Satzes für rechtsinvariante Integrale führt man entweder gleich, oder führt die Aussage mittels des folgenden Tricks auf die Behauptung für linksinvariante Integrale zurück: Es sei G' die Gruppe G mit der entgegengesetzten Multiplikation: $a * b := ba$. Jedes linksinvariante Integral auf G' ist dann ein rechtsinvariantes Integral auf G .

Im Weiteren wird häufig gebraucht, daß stetige Funktionen auf G mit kompaktem Träger im folgenden Sinne gleichmäßig stetig sind:

Lemma 6.4 (Gleichmäßige Stetigkeit) — Für jede Funktion $f \in C_c(G)$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U des Neutralelements mit der Eigenschaft, daß $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in G$ mit $yx^{-1} \in U$ oder $x^{-1}y \in U$.

Beweis. Die Abbildung $t : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x, y) := |f(y) - f(xy)|$, ist stetig. Deshalb ist für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Menge $V = t^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine offene Umgebung von $\{0\} \times G$. Es sei K eine kompakte Umgebung von $x = e$ in G . Für $x \in K$ folgt aus $f(xy) = f(y)$ also $xy \in \operatorname{supp}(f)$ und $y \in x^{-1} \operatorname{supp}(f)$. Die Menge $B \times B^{-1} \operatorname{supp}(f)$ ist kompakt. Nun ist $K \times G \setminus V$ eine abgeschlossene Untermenge von $B \times B^{-1} \operatorname{supp}(f)$ und deshalb kompakt, und $A := \operatorname{pr}_1(K \times G \setminus V)$ ist ebenfalls kompakt und enthält nicht e . Daher ist $U := K \setminus A$ eine Umgebung von e mit $U \times G \subset V$. Anders gesagt: Für $(x, y) \in U$ gilt $|f(y) - f(xy)| < \varepsilon$. Mit $z = xy$, also $x = zy^{-1}$ liest sich das so: $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $y, z \in G$ mit $zy^{-1} \in U$. Analog findet man eine Umgebung U' mit $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $z, y \in G$ mit $y^{-1}z \in U'$. Die Umgebung $U \cap U'$ leistet das Verlangte. □

Lemma 6.5 — Es sei U eine offene Umgebung des Neutralelements. Dann gibt es eine stetige Funktion $f \geq 0$ mit kompaktem Träger in U und $f(e) > 0$. Man kann auch erreichen, daß f zusätzlich symmetrisch ist, d.h. der Bedingung $f(x) = f(x^{-1})$ für alle $x \in G$ genügt.

Beweis. Weil G ein lokal kompakter Hausdorffraum ist, gibt es nach dem Satz von Uryson eine Funktion $f \in C_c(G)$ mit $f(e) \neq 0$ und $\text{supp}(f) \subset U \cap U^{-1}$. Die Abbildung $h(x) := f(x)^2 f(x^{-1})^2$ hat dieselben Eigenschaften ist zusätzlich nichtnegativ und symmetrisch. $\square$

6.2 Existenz eines linksinvarianten Haarintegrals

Referenzen:

1. André Weil: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Paris, 1940.
2. Jürgen Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie. Springer.
3. Hilgert, Neeb: Lie-Algebren und Lie-Gruppen. Vieweg.

Es sei G eine lokalkompakte Hausdorffsche topologische Gruppe. Wir bezeichnen mit $C_c(G)$ den Vektorraum der stetigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger. Der Träger einer stetigen Funktion f ist dabei wie üblich der Abschluß der Menge der Punkte, in denen f nicht verschwindet. Wir benötigen die folgenden Teilmengen: Die Menge $C_+ = \{f \in C_c(G) \mid f \geq 0 \text{ und } f \neq 0\}$ der nicht identisch verschwindenden nichtnegativen Funktionen, und für jede kompakte Menge $K \subset G$ die Menge $C_K = \{f \in C_+ \mid \text{supp}(f) \subset K\}$.

Die Grundidee bei der Definition des Lebesgueschen Maßes besteht ja darin, das äußere Maß einer Menge A als das Infimum der Summe der Volumina einer abzählbaren Menge von Quadern, die A überdecken, zu definieren. Dabei wird benutzt, daß für Quader das Volumen nur von den Kantenlängen abhängt und deshalb für alle Quader derselben Kantenlängen unabhängig von ihrer Lage im Raum gleich ist. Letztlich geht in die Konstruktion also wesentlich ein, daß der euklidische Raum homogen ist. Das Lebesguesche Maß ist von vornherein invariant unter Translationen. Bis auf einen Normierungsfaktor ist es durch die Translationsinvarianz auch eindeutig charakterisiert.

Es sei $g \in C_+$. Ist $g(x) > 0$, so ist die Menge $U = \{y \in G \mid g(y) > \frac{1}{2}g(x)\}$ offen und nicht leer. Es gibt also für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ endlich viele Gruppenelemente $x_1, \dots, x_s$ mit der Eigenschaft, daß $K \subset \bigcup_i x_i U$. Anwendet auf den Fall $K = \text{supp}(f)$, $f \in C_+$, bedeutet dies, daß es Gruppenelemente $x_1, \dots, x_s$ und reelle Zahlen $c_1, \dots, c_s \geq 0$ mit $f \leq \sum_i c_i \lambda_{x_i}(g)$ gibt. Wir setzen

$$(f : g) := \inf \left\{ c_1 + \dots + c_s \mid f \leq \sum_i c_i \lambda_{x_i}(g) \text{ für } x_1, \dots, x_s \in G \right\}.$$

Nach der Vorüberlegung ist die Menge, über die sich das Infimum erstreckt nicht leer. Deshalb hat man $0 \leq (f : g) < \infty$. Die folgenden Eigenschaften des Symbols $(f : g)$ sind unmittelbar aus der Definition klar:

1. $(cf : g) = c(f : g)$ für jedes $c > 0$.
2. $(f : g) \geq (k : g)$ wenn $f \geq k$.

$$3. (f + k : g) \leq (f : g) + (k : g).$$

$$4. (f : g) = (\lambda_x(f) : g) \text{ für alle } x \in G.$$

Daß $(f : g)$ nichttrivial ist, ergibt sich aus folgender Überlegung: Aus $f \leq \sum_i c_i \lambda_{x_i}(g)$ folgt durch Übergang zum Supremum: $\|f\| \leq \sum_i c_i \|\lambda_{x_i}(g)\|$, und weil die Supremumsnorm translationsinvariant ist, $\|f\| \leq (c_1 + \dots + c_s) \|g\|$. Deshalb gilt

$$5. (f : g) \geq \frac{\|f\|}{\|g\|}.$$

Wir messen mit $(f : g)$, wie gut sich f durch Translate von g abschätzen läßt. Um zu einem Ausdruck zu gelangen, der von der tatsächlichen Form von g unabhängig wird, gehen wir zu Funktionen von immer kleinerem Träger über. Es gilt:

$$6. (f : g) \leq (f : f_0)(f_0 : g) \text{ für } f, f_0, g \in C_+.$$

$$7. \frac{1}{(f_0 : f)} \leq \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \leq (f : f_0) \text{ für } f, f_0, g \in C_+.$$

Die zweite Aussage ist eine formale Konsequenz der ersten, die sich wiederum wie folgt ergibt: Hat man $f \leq \sum_i c_i \lambda_{x_i}(f_0)$ und $f_0 \leq \sum_j c'_j \lambda_{y_j}(g)$, so gilt auch $f \leq \sum_i \sum_j c_i c'_j \lambda_{x_i y_j}(f_0)$. Wegen $\sum_i \sum_j c_i c'_j = \sum_i c_i \sum_j c'_j$ folgt durch Übergang zum Infimum die Behauptung.

Wir betrachten in C_+ das System der Mengen C_K , wo K die kompakten Umgebungen des Neutralelements von G durchläuft. Dieses Mengensystem ist stabil unter endlichen Durchschnitten, denn $C_{K_1} \cap C_{K_2} = C_{K_1 \cap K_2}$, und wegen des Satzes von Uryson ist keine der Mengen C_K leer. Deshalb bilden die Obermengen dieser Mengen einen Filter in C_+ , den wir zu einem Ultrafilter F verfeinern.

Für zunächst festes $f \in C_+$ und $f_0 \in C_+$ betrachten wir die Abbildung

$$\alpha : C_+ \rightarrow [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)] \subset \mathbb{R}, \quad g \mapsto \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}.$$

Die Menge aller Obermengen der Mengen $\alpha(B)$, $B \in F$, bilden einen Ultrafilter $\alpha(F)$ auf dem Intervall $[(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$. Weil der Bildbereich kompakt ist, konvergiert der Filter $\alpha(F)$ gegen einen eindeutig bestimmten Grenzwert. Man setzt:

$$I(f) := \lim \alpha(F).$$

Man beachte, daß diese Zahl nicht nur von f , sondern auch von f_0 abhängt. Wir denken uns aber f_0 als fest gegeben und untersuchen nur die Abhängigkeit von f . Nach Konstruktion hat die Abbildung $I : C_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (bei festem f_0) die folgenden Eigenschaften:

$$1. I(cf) = cI(f) \text{ für alle } c \geq 0.$$

$$2. I(f) \geq I(f') \text{ für alle } f \geq f'.$$

$$3. I(\lambda_x(f)) = I(f) \text{ für alle } x \in G.$$

$$4. 0 < (f_0 : f)^{-1} \leq I(f) \leq (f : f_0).$$

5. $I(f + f') \leq I(f) + I(f')$ für alle $f, f' \in C_+$.

Die letzte Eigenschaft läßt sich verschärfen:

Lemma 6.6 — Es gilt $I(f + f') = I(f) + I(f')$ für $f, f' \in C_+$

Beweis. Der Träger von $f + f'$ ist kompakt, und nach dem Satz von Uryson gibt es eine Funktion $h \in C_+$ mit $h|_{\text{supp}(f+f')} = 1$. Es sei $\varepsilon > 0$ und $p := f + f' + \varepsilon h$. Die Funktion p verschwindet in einer Umgebung des Trägers von $f + f'$ nicht. Deshalb können wir $\varphi := f/p$ und $\varphi' := f'/p$ als stetige Funktionen auf G auffassen, in dem wir sie außerhalb des Trägers von f bzw. f' trivial fortsetzen. Diese stetigen Funktionen haben kompakten Träger. Daher gibt es zu jedem $\eta > 0$ eine kompakte Umgebung V des Neutralelements mit

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| < \eta, \quad |\varphi'(y) - \varphi'(z)| < \eta \quad \text{für } y^{-1}z \in V.$$

Wählt man $g \in C_V$, so ist im Produkt

$$(\varphi(y) - \varphi(z))g(y^{-1}z)$$

entweder der zweite Faktor 0 oder der erste absolut durch ε beschränkt.

Angenommen, es besteht nun die Abschätzung $p \leq \sum_i c_i \lambda_{x_i}(g)$. Dann gilt auch:

$$f(x) = \varphi(x)p(x) \leq \sum_i c_i \varphi(x)g(x_i^{-1}x) \leq \sum_i c_i (\varphi(x_i) + \varepsilon)g(x_i^{-1}x).$$

Das führt auf die Abschätzung

$$(f : g) \leq \sum_i c_i (\eta + \varphi(x_i)).$$

Addiert man die analoge Abschätzung für f' , so bleibt:

$$(f : g) + (f' : g) \leq \sum_i c_i (2\eta + \varphi(x_i) + \varphi'(x_i)) \leq (2\eta + 1) \sum_i c_i$$

und im Übergang zum Infimum auf der rechten Seite:

$$(f : g) + (f' : g) \leq (1 + 2\eta)(p : g) = (1 + 2\eta)(f + f' + \varepsilon h : g)$$

für alle $g \in C_V$. Wir teilen durch $(f_0 : g)$ und betrachten den Grenzwert für kleinere K und damit kleinere η :

$$I(f) + I(f') \leq (f + f' + \varepsilon h).$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, erhält man die fehlende Abschätzung $I(f) + I(f') \leq I(f + f')$. $\square$

Lemma 6.7 — Es gibt genau ein linksinvariantes Haarsches Integral $I : C_c(G) \rightarrow \mathbb{R}$, das die bereits definierte Abbildung $I : C_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzt.

Beweis. Jede Funktion $f \in C_c(G)$ läßt sich als Differenz $f = f_1 - f_2$ mit Funktionen $f_1, f_2 \in C_+$ schreiben. Jedes lineare Funktional auf $C_c(G)$ ist daher durch seine Werte auf C_+ vollständig bestimmt. Sind $f = f_1 - f_2 = f'_1 - f'_2$ zwei verschiedenen Darstellungen, so folgt aus $f_1 + f'_2 = f_2 + f'_1$ weiter

$$I(f_1) + I(f'_2) = I(f_1 + f'_2) = I(f_2 + f'_1) = I(f_2) + I(f'_1).$$

Deshalb ist $I(f) := I(f_1) - I(f_2) = I(f'_1) - I(f'_2)$ wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, daß $I(f) \geq 0$, wenn $f \geq 0$. Aus $f \geq 0$ folgt entweder $f = 0$ und damit $I(f) = 0$ wegen der Additivität von f oder $f \in C_+$ und daher $I(f) > 0$ nach Konstruktion. $\square$

6.3 Eindeutigkeit des Haarschen Integrals

Ein linksinvariantes Haarsches Integral I haben wir oben durch Grenzübergang

$$I(f) = \lim_g \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}$$

konstruiert. Es ist durch die Eigenschaft $I(f_0) = 1$ normiert. Es bleibt zu zeigen, daß jedes weitere linksinvariante Haarsche Integral J ein skalares Vielfaches von I ist. Und wegen der angegebenen Normierung ist genauer zu zeigen, daß $J = J(f_0)I$.

Aus einer Abschätzung $f \leq \sum_i c_i \lambda_{x_i}(g)$ für $f, g \in C_+$ folgt sofort $J(f) \leq J(g) \sum_i c_i$ und damit

$$J(f) \leq J(g)(f : g).$$

Es sei nun $h \in C_+$ mit $h|_{\text{supp}(f)} = 1$. Für ein beliebiges $n \geq 1$ wählen wir $\varepsilon > 0$ mit $2\varepsilon(h : f) < \frac{1}{n}$. Es gibt dann eine Umgebung U des Neutralelements mit der Eigenschaft, daß $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $y^{-1}x \in U$.

Es sei $g \in C_+$ mit $\text{supp}(g) \subset U$ und der Eigenschaft $g(x) = g(x^{-1})$ für alle $x \in G$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)|g(y^{-1}x) \leq \varepsilon g(y^{-1}x),$$

und wegen der Symmetrie von g :

$$f(x)g(x^{-1}y) \leq f(y)g(y^{-1}x) + \varepsilon g(x^{-1}y).$$

Wir fassen diese Ausdrücke als Funktionen von y auf und wenden J an:

$$f(x)J(g) \leq J(f(y)g(y^{-1}x)) + \varepsilon J(g). \quad (6.1)$$

Es sei $\eta > 0$ mit $\eta J(f) < \varepsilon J(g)$. Es gibt dann eine offene Umgebung W des Neutralelements mit der Eigenschaft, daß $|g(y) - g(z)| < \eta$ für alle $y^{-1}z \in W$. Wir wählen stetige Funktionen $\chi_1, \dots, \chi_s \in C_+$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\text{supp}(\chi_k) \subset z_k W, \quad \sum_k \chi_k|_{\text{supp}(f)} = 1.$$

Dann gilt $f = \sum_k (f\chi_k)$ und somit

$$f(y)g(y^{-1}x) = \sum_k f(y)\chi_k(y)g(y^{-1}x) \leq \sum_k f(y)(\chi_k(y)(\eta + g(z_k^{-1}x))).$$

Wir wenden wieder J bezüglich y an:

$$J(f(y)g(y^{-1}x)) \leq \eta J(f) + \sum_k g(z_k^{-1}x)J(f\chi_k).$$

Kombiniert mit der früheren Abschätzung (6.1) erhält man

$$f(x) \leq 2\varepsilon + \sum_k \frac{J(f\chi_k)}{J(g)} g(z_k^{-1}x).$$

Tatsächlich gilt wegen $h|_{\text{supp}(f)} = 1$ die etwas schärfere Abschätzung

$$f(x) \leq 2\varepsilon h(x) + \sum_k \frac{J(f\chi_k)}{J(g)} g(z_k^{-1}x).$$

Die rechte Seite hat als Funktion x kompakten Träger. Es folgt:

$$(f : g) \leq 2\varepsilon(h : g) + \sum_k \frac{J(f\chi_k)}{J(g)} \leq 2\varepsilon(h : f)(f : g) + \frac{J(f)}{J(g)}.$$

Nach Wahl von ε ist $2\varepsilon(h : f) \leq 1/n$. Das führt auf die Abschätzung

$$\frac{J(f)}{J(g)} \leq (f : g) \leq \frac{n}{n-1} \frac{J(f)}{J(g)}.$$

Diese Abschätzung gilt für alle symmetrischen $g \in C_+$ mit Träger in $U = U(f, n)$.

Indem man U weiter verkleinert, erreicht man auf dieselbe Weise, dass zusätzlich

$$\frac{J(f_0)}{J(g)} \leq (f_0 : g) \leq \frac{n}{n-1} \frac{J(f_0)}{J(g)},$$

und dies führt auf

$$\frac{n-1}{n} \frac{J(f)}{J(f_0)} \leq \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \leq \frac{n}{n-1} \frac{J(f)}{J(f_0)}.$$

Im Limes über g bleibt

$$\frac{n-1}{n} \frac{J(f)}{J(f_0)} \leq I(f) \leq \frac{n}{n-1} \frac{J(f)}{J(f_0)},$$

und weil schließlich $n > 1$ beliebig gewählt war:

$$J(f) = I(f)J(f_0).$$

Folglich ist J ein positives skalares Vielfaches von I . □

Es sei nun G eine lokalkompakte Hausdorffsche topologische Gruppe und I ein linksinvariantes Haarintegral. Für jedes $y \in G$ ist dann auch $I \circ \rho_y$ ein linksinvariantes Haarintegral, weil Links- und Rechtstranslation vertauschende Operationen sind. Folglich gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

mit $I \circ \rho_y = \Delta(y)I$. Es ist klar, daß Δ unabhängig von der Normierung von I ist.

Lemma 6.8 — $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Wegen $\Delta(xy)I = I \circ \rho_{xy} = (I \circ \rho_x) \circ \rho_y = \Delta(x)I \circ \rho_y = \Delta(x)\Delta(y)I$ ist Δ ein Gruppenhomomorphismus. Es genügt daher, die Stetigkeit am Neutralelement nachzuweisen. Es sei $f \geq 0$ eine nichttriviale Funktion mit kompaktem Träger, K eine kompakte Umgebung von $\text{supp}(f)$ und $h \geq 0$ eine Funktion mit kompaktem Träger und $h|_{\text{supp } f} = 1$. Es gibt dann eine offene Umgebung U des Neutralelements mit $U \text{supp}(f) \subset K^\circ$. Insbesondere gilt $\text{supp}(\lambda_y f) \subset K$ für alle $y \in U$. Wir können gemäß Lemma 6.4 durch Verkleinern von U auch noch erreichen, daß $|f(x) - \rho_y f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in U$ und beliebige $x \in G$. Es folgt

$$|1 - \Delta(y)|I(f) = |I(f) - I(\rho_y f)| \leq |I(f - \rho_y f)| \leq \varepsilon I(h)$$

für alle $y \in U$. Damit ist Δ stetig. $\square$

Definition 6.9 — Die Gruppe G heißt unimodular, wenn $\Delta = 1$. Insbesondere ist jedes linksinvariante Integral für eine unimodulare Gruppe auch rechtsinvariant.

Kommutative Gruppen sind unimodular, weil Rechts- und Linkstranslation mit einem Element dasselbe ist.

Satz 6.10 — Kompakte Gruppen sind unimodular.

Beweis. Eine konstante Funktion $c \neq 0$ ist nämlich offensichtlich sowohl rechts- wie linkstranslationsinvariant. Deshalb folgt aus $\Delta(y)I(c) = I(\rho_y c) = I(c)$, daß $\Delta = 1$. $\square$

6.4 Das Haarintegral für Liegruppen

Die Existenz und Eindeutigkeit eines Haarintegrals ist einfach, wenn die Gruppe G eine Liegruppe ist. Für jedes $y \in G$ liefert das Differential $T\ell_y : T_e G \rightarrow T_y G$ der Linkstranslation ℓ_y eine kanonische Identifizierung von $T_y G$ mit der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G . Insbesondere erhält man so eine Trivialisierung $G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG$ des Tangentialbündels von G , und dasselbe gilt für alle anderen Tensorbündel, insbesondere für die Formen maximaler Ordnung: $G \times \Lambda^d \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^d T^* G$. Deshalb gibt es bis auf skalare Vielfache genau eine globale linkstranslationsinvariante Differentialform ω vom Grad $d = \dim G$. Dann ist $I(f) := \int f\omega$ ein Haarintegral. Ist zunächst μ irgendeine Volumenform auf G , so folgt aus dem Ansatz $\omega = h\mu$, daß die differenzierbare Funktion $h : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ die folgende Bedingung erfüllen muß:

$$h(y^{-1}x)\ell_y^* \mu(x) = \pm h(x)\mu(x),$$

und zwar für alle $x, y \in G$, wobei das Vorzeichen sich danach richtet, ob die Linksmultiplikation mit y die Orientierung von G erhält oder nicht. Wenn G zusammenhängend ist, ist dieses Vorzeichen immer $+1$.

Beispiele 6.11 —

1. Das Haarintegral auf $\mathbb{R}^n$ ist das Lebesgueintegral, $I(f) := \int f(x) d\mu(x)$. Es ist linke- wie rechtstranslationsinvariant.
2. Wir fassen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times n}$ auf und müssen nun $h : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ so bestimmen, daß $h(x)d\mu(x)$ linksinvariant wird. Nun ist

$$h(yx)d\mu(yx) = h(yx)|\det(y)^n|d\mu(x).$$

Wenn dieser Ausdruck gleich $h(x)d\mu(x)$ sein soll, muß bis auf einen freien Faktor gelten: $h(x) = 1/|\det(x)|^n$. Das linksinvariante Haarintegral ist deshalb durch

$$I(f) := \int_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} f(x) \frac{d\mu(x)}{|\det(x)|^n}$$

geben. Das rechtsinvariante Haarintegral sieht genauso aus. Demnach besitzt auch die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ein Haarintegral, das sowohl links- als auch rechtstranslationsinvariant ist.

3. Wir betrachten die affine Gruppe von $\mathbb{R}$, d.h. $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\times$. Ein einfaches Matrizenmodell für G ist die Menge der Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq 0 \right\}$$

Die Linksmultiplikation ist durch

$$\Phi_y(x) := (y_1, y_2)(x_1, x_2) = (y_1x_1, y_1x_2 + y_2)$$

gegeben und hat die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right| = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{vmatrix} = y_1^2.$$

Das linkstranslationsinvariante Haarintegral ist also

$$I_{\text{links}}(f) = \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}} f(x) \frac{d\mu(x)}{x_1^2}.$$

Die Rechtsmultiplikation hat aber die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \right| = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = |y_1|.$$

Das rechtstranslationsinvariante Haarintegral hat deshalb die abweichende Form

$$I_{\text{rechts}}(f) = \int_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}} f(x) \frac{d\mu(x)}{|x_1|}.$$

§7 Darstellungen

7.1 Grundbegriffe

Es sei G eine abstrakte Gruppe. Eine Darstellung von G auf einem k -Vektorraum V ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_k(V)$. Ein Morphismus $\varphi : V \rightarrow W$ von G -Darstellungen ist eine G -äquivalente k -lineare Abbildung. Die Morphismen von Darstellungen bilden einen k -Unterraum $\mathrm{Hom}_G(V, W) \subset \mathrm{Hom}_k(V, W)$.

Es sei $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_k(V)$ eine Darstellung. Ein Unterraum $V' \subset V$ ist invariant, wenn $g \cdot v' \in V'$ für alle $v' \in V'$. In diesem Falle ist $\rho' : G \rightarrow \mathrm{GL}_k(V')$, $\rho'(g) := \rho(g)|_{V'}$, eine Darstellung. Auf dem Faktorraum $V'' := V/V'$ wird durch $\rho''(g) := \overline{\rho(g)}$ eine Darstellung induziert. Ist $\varphi : V \rightarrow W$ ein Morphismus von Darstellungen, so sind $\ker(\varphi) \subset V$ und $\mathrm{im}(\varphi) \subset W$ Unterdarstellungen. Die G -Darstellungen bilden eine abelsche Kategorie $\mathrm{Rep}_k(G)$.

Eine Darstellung auf V heißt irreduzibel, wenn $V \neq 0$ und wenn es außer 0 und V keine Unterdarstellungen gibt.

Satz 7.1 (Lemma von Schur) — *Es seien V und W irreduzible Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper k .*

1. Sind V und W nicht isomorph, ist $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$.
2. $\mathrm{End}_G(V)$ ist ein endlichdimensionaler k -Schiefkörper.

Insbesondere ist $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}$, wenn $k = \mathbb{C}$, und $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, wenn $k = \mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $\alpha : V \rightarrow W$ eine äquivalente lineare Abbildung. Dann sind $\ker(\alpha) \subset V$ und $\mathrm{im}(\alpha) \subset W$ Unterdarstellungen, also jeweils gleich 0 oder gleich dem ganzen Raum. Deshalb ist α entweder die Nullabbildung oder zugleich injektiv und surjektiv. Das impliziert beide Behauptungen. $\square$

Lemma 7.2 — *Ist $V = \sum_{a \in I} V_a$ eine Summe aus irreduziblen Unterdarstellungen, so gibt es eine Teilmenge $J \subset I$ mit $V = \bigoplus_{a \in J} V_a$.*

Beweis. Es sei X die Menge aller Teilmengen $J \subset I$, für die die Summe $\sum_{a \in J} V_a$ direkt ist. Die Menge X ist nicht leer, denn sie enthält alle einelementigen Teilmengen von I . Sie ist durch Inklusion induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $J \in X$. Es sei $V' := \bigoplus_{a \in J} V_a \subset V$. Falls $V' \neq V$, gibt es ein $b \in I$ mit $V_b \not\subset V'$. Dann ist $V' \cap V_b$ eine echte Unterdarstellung von V_b und daher trivial, weil V_b irreduzibel ist. Aber das bedeutet $V' + V_b = V \oplus V_b$, so daß $J \cup \{b\}$ der Maximalität von J widerspricht. Also hat man in der Tat $V' = V$. $\square$

Sind V und W Darstellungen von G , so erhält man wie folgt natürliche Darstellungen von G auf $V \otimes W$ und $\mathrm{Hom}_k(V, W)$:

1. $g.(v \otimes w) := g.v \otimes g.w$ für $v \in V$ und $w \in W$.
2. $(g.\varphi)(v) := g.(\varphi(g^{-1}.v))$ für $v \in V$ und $\varphi \in \text{Hom}_k(V, W)$.

Ist V eine G -Darstellung, so ist die Menge der Invarianten

$$V^G := \{v \in V \mid g.v = v \text{ für alle } g \in G\}$$

ein invarianter Unterraum von V , und offenbar der größte Unterraum von V auf dem G trivial operiert. Zum Beispiel gilt $\text{Hom}_G(V, W) = \text{Hom}_k(V, W)^G$. Auf dem Faktorraum

$$V_G := V / \langle v - g.v \mid v \in V, g \in G \rangle,$$

dem Raum der Koinvarianten, operiert G trivial. Es ist der größte Faktorraum, auf dem G trivial operiert.

Lemma 7.3 — Ist $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von G -Darstellungen, so sind die Sequenzen $0 \rightarrow U^G \rightarrow V^G \rightarrow W^G$ und $U_G \rightarrow V_G \rightarrow W_G \rightarrow 0$ exakt. $\square$

Die folgenden Beispiele zeigen, daß die Abbildungen $V^G \rightarrow W^G$ bzw. $U_G \rightarrow V_G$ im Allgemeinen nicht surjektiv bzw. injektiv sind:

1. Es sei $k = \mathbb{C}$. Die additive Gruppe $\mathbb{G}_a(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}, +)$ operiert auf $V = \mathbb{C}^2$ vermöge $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Der Unterraum $U := \mathbb{C} \oplus 0$ ist invariant, und die Gruppe operiert trivial auf U und auf $W := V/U$. Deshalb sind die Abbildung $U^G \rightarrow V^G$ und $V_G \rightarrow W_G$ Isomorphismen. Andererseits hat man $W^G = \mathbb{C}$ und $U_G = \mathbb{C}$.
2. Es sei $k = \mathbb{F}_2$. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2$ operiert auf $V = \mathbb{F}_2^2$ vermöge $\bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wieder ist $U = \mathbb{F}_2 \oplus 0$ ein invarianter Unterraum mit invarianter Faktordarstellung $W = V/U$ mit denselben Konsequenzen für den Übergang von der exakten Sequenz $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ zu Invarianten bzw. Koinvarianten.

Dieselben Beispiele zeigen auf ein weitergehendes Phänomen hin: Ist $V' \subset V$ eine Unterdarstellung, so gibt es im Allgemeinen keinen invarianten komplementären Unterraum.

Es sei nun G eine topologische Gruppe, V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine lineare Darstellung $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ist genau dann stetig, wenn für jeden Vektor $v \in V$ und jede Linearform $\varphi \in V^*$ die Abbildung $f_{\varphi, v}(g) := \varphi(g.v)$ eine stetige Funktion auf G ist. Bezeichnet $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und bezeichnen $f_{ij}(g)$ die Matrixkoeffizienten, die durch

$$g.v_i = \sum_j f_{ji}(g)v_j$$

charakterisiert sind, so ist ρ genau dann stetig, wenn alle f_{ij} stetige Funktionen sind. Daß die Abbildung $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, bedeutet für die Matrixkoeffizienten die Relation

$$\sum_j f_{ji}(hg)v_j = h(g(v_i)) = \sum_k f_{ki}(g)h(v_k) = \sum_{j,k} f_{jk}(h)f_{ki}(g)v_j,$$

also

$$f_{ji}(hg) = \sum_k f_{jk}(h)f_{ki}(g).$$

Wenn ρ stetig ist, gilt dasselbe für ρ' und ρ'' .

7.2 Reynoldsoperator

Es sei G eine kompakte topologische Gruppe und

$$I(f) =: \int_G f(g) dg$$

das durch die Normierung $\int_G dg = 1$ eindeutig bestimmte links- und rechtsinvariante Haarintegral auf G . Es sei weiter V eine stetige G -Darstellung, gegeben durch die Matrixkoeffizienten

$$g.v_i = \sum_j f_{ji}(g)v_j$$

bezüglich einer Basis $v_1, \dots, v_n$. Die Abbildung

$$v = \sum_i \lambda_i v_i \mapsto E_V(v) := \int_G g.v dg := \sum_{i,j} \lambda_i \int_G f_{ji}(g) dg v_j$$

heißt Reynoldsoperator.

Lemma 7.4 — $E_V : V \rightarrow V$ ist $\mathbb{R}$ -linear, G -äquivariant und eine Projektion auf V^G .

Beweis. Es ist klar, daß E_V $\mathbb{R}$ -linear ist. Und wenn $v \in V^G$, hat man $g.v = v$ für alle $g \in G$. Deshalb ist

$$E_V(v) = \int_G g.v dg = \int_G dg \cdot v = v,$$

d.h. $E_V|_{V^G} = \text{id}_{V^G}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} E_V(h.v_i) &= \sum_j f_{ji}(h)E_V(v_j) = \sum_{j,k} f_{ji}(h) \int_G f_{kj}(g) dg v_k \\ &= \sum_{j,k} \int_G f_{kj}(g) f_{ji}(h) dg v_k = \sum_k \int_G f_{ki}(gh) dg v_k \\ &= \sum_k \int_G (\rho_h f_{ki})(g) dg v_k = \sum_k \int_G f_{ki}(g) dg v_k \\ &= E_V(v_i) \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt ging die Rechtsinvarianz des Haarschen Maßes ein. Analog hat man

$$\begin{aligned}
 h.E_V(v_i) &= \sum_j \int_G f_{ji}(g) dg h.v_j = \sum_{j,k} \int_G f_{ji}(G) dg f_{kj}(h) v_k \\
 &= \sum_{k,j} \int_G f_{kj}(h) f_{ji}(g) dg v_k = \sum_k \int_G f_{ki}(hg) dg v_k \\
 &= \sum_k \int_G (\ell_{h^{-1}} f_{ki})(g) dg v_k = \sum_k \int_G f_{ki}(g) dg v_k \\
 &= E_V(v_i)
 \end{aligned}$$

Diesmal wurde die Linksinvariant gebraucht. Aus den beiden Rechnungen sieht man, daß $E_V(v_i)$ in V^G liegt und daß E_V äquivariant ist. Zusammengenommen sagt dies, daß E_V ein äquivarianter Projektor auf V^G ist. $\square$

Lemma 7.5 — *Es sei $\alpha : V \rightarrow W$ eine G -äquivariante Abbildung zwischen stetigen endlichdimensionalen G -Darstellungen. Dann gilt $\alpha(V^G) \subset W^G$, und die Abbildungen α und $\alpha|_{V^G}$ kommutieren mit dem Reynoldsoperator, d.h. es gilt $\alpha|_{V^G} \circ E_V = E_W \circ \alpha$.*

Beweis. Für $v \in V^G$ hat man $g.v = v$ für alle $g \in G$, also $\alpha(v) = \alpha(g.v) = g.\alpha(v)$. Insbesondere ist $\alpha(v)$ wieder G -invariant, d.h. $\alpha(V^G) \subset W^G$. Es seien $\{v_i\}$ und $\{w_j\}$ Basen von V bzw. W und $\alpha(v_i) = \sum_j \alpha_{ji} w_j$. Weiter gelte $g.v_i = \sum_k f_{ki}(g) v_k$ und $g.w_j = \sum_m h_{mj}(g) w_m$ mit stetigen Funktionen f_{ki} und h_{mj} auf G . Daß α äquivariant ist, bedeutet $\alpha(g.v_i) = g.\alpha(v_i)$, was sich in $\sum_j \alpha_{kj} f_{ji}(g) = \sum_m h_{km}(g) \alpha_{mi}$ übersetzt. Damit hat man

$$\begin{aligned}
 E_W(\alpha(v_i)) &= \sum_m \int_G h_{km}(g) \alpha_{mi} dg w_k = \sum_j \int_G \alpha_{kj} f_{ji}(g) dg w_k \\
 &= \sum_j \alpha \left(\int_G f_{ji}(g) dg v_j \right) = \alpha(E_V(v_i)).
 \end{aligned}$$

$\square$

Satz 7.6 — *Es sei V eine endlichdimensionale stetige G -Darstellung und V' ein G -invarianter Unterraum in V . Dann gibt es zu V' ein G -invariantes Komplement V'' .*

Beweis. Wir versehen $W := \text{Hom}(V, V')$ und $U := \text{End}(V')$ mit den üblichen Wirkungen $(gw)(v) = g(w(g^{-1}(v)))$ und $(ga)(v) = g(a(g^{-1}(v)))$. Die Projektion $\pi : W \rightarrow U$, $\pi(w) := w|_{V'}$, ist G -äquivariant. Es sei nun $p \in W$ eine beliebige k -lineare Projektion von V auf V' , so daß $\pi(p) = \text{id}_{V'}$. Weil π äquivariant ist, vertauscht π mit dem Reynoldsoperator. Für $\bar{p} := E_W(p)$ folgt:

$$\pi(\bar{p}) = \pi(E_W(p)) = E_U(\pi(p)) = E_U(\text{id}_{V'}) = \text{id}_{V'},$$

weil die Identität auf V' eine äquivalente Abbildung ist. Deshalb ist $\bar{p} : V \rightarrow V'$ eine Projektion, und daß $\bar{p}$ als Element in W invariant ist, bedeutet genau, daß die Projektion $\bar{p} : V \rightarrow V'$ äquvariant ist. Damit ergibt sich, daß $V'' := \ker(\bar{p})$ ein G -invariantes Komplement zu V' ist. $\square$

Satz 7.7 — *Es sei G eine kompakte topologische Gruppe. Jede stetige endlichdimensionale G -Darstellung ist direkte Summe von irreduziblen Unterdarstellungen. Die Kategorie der stetigen endlichdimensionalen G -Darstellungen ist halbeinfach.*

Beweis. Es sei $V \neq 0$ eine stetige endlichdimensionale G -Darstellung. Entweder ist V selbst irreduzibel, oder es gibt echte G -invariante Unterräume. In diesem Falle sei V' ein nichttrivialer invarianter Unterraum minimaler Dimension. Dann ist V' irreduzibel. Außerdem gibt es nach dem Satz ein äquvariantes Komplement V'' . Mit Induktion über die Dimension der Darstellung können wir ohne Einschränkung annehmen, daß die Behauptung für V'' schon gezeigt ist. Dann gilt die Behauptung auch für V . $\square$

Folgerung 7.8 — *Es sei G eine kompakte topologische Gruppe. Dann sind die Funktoren $V \mapsto V^G$ und $V \mapsto V_G$ von der Kategorie der stetigen endlichdimensionalen G -Darstellungen in die Kategorie der $\mathbb{R}$ -Vektorräume exakt.* $\square$

Es seien nun V und W endlichdimensionale stetige G -Darstellungen und dabei V irreduzibel. Die Auswertungsabbildung

$$e_V : \text{Hom}_k^G(V, W) \otimes V \longrightarrow W, a \otimes v \mapsto a(v),$$

ist äquvariant. Dabei operiert G auf der linken Seite nur auf dem Faktor V . Der k -Vektorraum $\text{Hom}_k^G(V, W)$ ist in natürlicher Weise ein $\text{End}_G(V)$ -Rechtsmodul:

$$(a\Phi)(v) := a(\Phi(v))$$

für $\Phi \in \text{End}_G(V)$, $a \in \text{Hom}_k^G(V, W)$ und $v \in V$. Offenbar gilt $e_V(a \otimes \Phi(v)) = e_V(a\Phi \otimes v)$. Deshalb faktorisiert e durch eine gekürzte Auswertungsabbildung auf dem Tensorprodukt über dem Endomorphismenring:

$$\bar{e}_V : \text{Hom}_k^G(V, W) \otimes_{\text{End}_G(V)} V \longrightarrow W.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Lemma 7.9 — *Es seien V und W endlichdimensionale stetige Darstellungen und V irreduzibel. Jede zu V isomorphe Unterdarstellung von W liegt im Bild von $\bar{e}_V : \text{Hom}_k^G(V, W) \otimes_{\text{End}_G(V)} V \rightarrow W$. Die Abbildung $\bar{e}_V$ ist injektiv. Das Bild heißt die V -isotypische Komponenten von W .*

Beweis. Wir zerlegen W in der Form $W = V^{\oplus m} \oplus U$, wobei U eine direkte Summe aus zu V nicht isomorphen irreduziblen Darstellungen ist. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_k^G(V, W) = \mathrm{Hom}_k^G(V^{\oplus m}) = \mathrm{End}_G(V)^{\oplus m}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Hom}_k^G(V, W) \otimes_{\mathrm{End}_G(V)} V \cong \mathrm{End}_G(V)^{\oplus m} \otimes_{\mathrm{End}_G(V)} V \cong V^{\oplus m}$, und die Auswertungsabbildung $\bar{e}_V$ wird unter diesem Isomorphismus zur identischen Abbildung von $V^{\oplus m}$ auf den ersten Summanden von W . $\square$

Folgerung 7.10 — Es sei W eine stetige endlichdimensionale G -Darstellung. Dann ist die Abbildung

$$\bar{e} : \bigoplus_V \mathrm{Hom}_k^G(V, W) \otimes_{\mathrm{End}_G(V)} V \longrightarrow W,$$

wobei die Summe über ein Vertretersystem von Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen läuft, ein Isomorphismus von Darstellungen.

Lemma 7.11 — Es sei $(-, -) : V \times V \rightarrow k$, ein beliebiges Skalarprodukt auf einer endlichdimensionalen stetigen G -Darstellung. Dann ist

$$\langle v, w \rangle = \int_G (gv, gw) dg$$

ein G -invariantes Skalarprodukt, d.h. es gilt $\langle hv, hw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und $g \in G$.

§8 Der Satz von Peter und Weyl

8.1 Fourierreihen

Um die Frage, unter welchen Bedingungen sich eine Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ als eine Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

schreiben läßt und in welchem Sinne dies zu verstehen ist, hat es lange Debatten gegeben, die den folgenden Ursprung hatten: Die Wellengleichung für die schwingende Saite der Länge π nimmt mit Randbedingungen die Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f(0) = f(\pi) = 0$$

an, wobei v eine Materialkonstante ist, die die Dimension einer Geschwindigkeit hat. D'Alembert gab für die allgemeine Lösung

$$f(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt)$$

an, wo $g(x)$ und $h(x)$ beliebige zweimal differenzierbare Funktionen sind. Der Term $g(x - vt)$ beschreibt eine mit der Geschwindigkeit v nach rechts laufende Welle, der Term $h(x + vt)$ eine entsprechend nach links laufende Welle. Die Randbedingungen erfordern $g(-vt) + h(vt) = 0$, also $h(x) = -g(-x)$, und $g(\pi - vt) + h(\pi + vt) = g(\pi - vt) - g(-\pi - vt) = 0$, also $g(x) = g(x + 2\pi)$ für alle x . Die Lösung nimmt also die Form

$$f(x, t) = g(x - vt) - g(-x - vt)$$

für eine beliebige zweimal differenzierbare 2π -periodische Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an. Dagegen kommt Daniel Bernoulli durch Trennung der Variablen in der Differentialgleichung, d.h. mit dem Ansatz $f(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$ auf die Lösungen

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \sin(nv(t + t_n)).$$

Vergleicht man die beiden Ansätze, so erhält man für $t = 0$ die Aussage

$$g(x) - g(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nvt_n) \sin(nx).$$

Das eine beliebige Funktion auf der linken Seite sich als Reihe in 'glatten' trigonometrischen Funktionen entwickeln lassen sollte stieß bei Euler und seinen Zeitgenossen auf Unglauben.

Joseph Fourier behauptet in seinem Buch *Théorie analytique de la Chaleur* (1822), daß sich jede beliebige (reelle) Funktion auf $[0, 2\pi]$ durch eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

darstellen lasse. Unter beliebig versteht er dabei, wie aus dem Kontext klar wird, eine Funktion, deren Graph sich zeichnen läßt, die aber nicht notwendig durch eine bestimmte analytische Formel gegeben sein muß. Er spricht also wohl von in unserem Sinne stetigen Funktionen. Er geht ausdrücklich darauf ein, daß die linke und die rechte Seite nur auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ verglichen werden, daß es also sehr wohl so sein kann, daß die beiden Seiten außerhalb des Intervalls weit auseinanderfallen, falls f etwa durch einen analytischen Ausdruck, eine Formel, gegeben ist. Bei Fourier findet sich auch die Integraldarstellung der Koeffizienten a_n und b_n .

Man muß streng genommen präzisieren, was man darunter versteht, wenn man von der Darstellung einer Funktion durch ihre Fourierreihe spricht. Fourier selbst hat sicherlich wenigstens punktweise Konvergenz gemeint. Gegen seine Argumentation hat es von Anfang an Widerspruch gegeben. Daß die punktweise Konvergenz der Fourierreihe für allgemeine stetige Funktionen tatsächlich nicht gegeben ist, hat man allerdings erst viel später erkannt.

Die Diskussion wird durch den Übergang ins Komplexe etwas handlicher: Wir betrachten also Reihen der Form

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}.$$

Die bestmögliche Approximation einer stetigen Funktion f im quadratischen Mittel, also bezüglich der L^2 -Norm, durch ein sogenanntes *trigonometrisches Polynom*

$$\sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx}$$

ist bekanntlich durch die Wahl

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy$$

gegeben. Es liegt daher nahe zu fragen, ob und wie die Funktionenfolge

$$S_n f(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \right] dy$$

gegen f konvergiert. Man muß hier sorgfältig zwischen den folgenden Aussagen für eine 2π -periodische stetige Funktion f unterscheiden:

1. Es gibt eine Folge trigonometrischer Polynome, die gegen f in der L_2 -Norm, gleichmäßig oder nur punktweise konvergiert.
2. Die explizit gegebene Folge $S_n f$ konvergiert gegen f in der L_2 -Norm, gleichmäßig oder punktweise.

Die erste Aussage ist in allen Varianten richtig und läßt sich auch so ausdrücken: Die trigonometrischen Polynome liegen im Raum der 2π -periodischen stetigen Funktionen

dicht sowohl bezüglich der L_2 -Norm wie bezüglich der Supremumsnorm. Das ist eine Konsequenz des nachfolgenden Satzes von Fejér 8.8. Wenn die trigonometrischen Polynome dicht bezüglich der L_2 -Norm sind, bilden sie auch eine Orthonormalbasis. Deshalb konvergiert auch $S_n f$ in der L_2 -Norm gegen f .

Nach einem Satz von Dirichlet⁴ konvergiert $S_n f \rightarrow f$ punktweise, wenn die Funktion nur endlich viele Maxima und Minima hat, oder was auf dasselbe hinausläuft, wenn die Funktion stückweise monoton ist. Nun hat Camille Jordan⁵ gezeigt, daß sich eine stetig Funktion genau dann als Differenz zweier monotoner Funktionen schreiben läßt, wenn die Funktion endliche Variation hat. Insbesondere hat man auch für Funktionen mit endlicher Variation punktweise Konvergenz der Fourierreihe.

Paul du Bois-Reymond⁶ hat das erste Beispiel einer stetigen Funktion f angegeben, für die $S_n f$ nicht punktweise gegen f konvergiert.

8.1.1 Die Sätze von Dirichlet und Jordan

Es bezeichne

$$K_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ik(x)} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

den sogenannten Dirichlet-Kern. An den Stellen $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ wird K_n stetig mit dem Wert $2n + 1$ fortgesetzt. Dann gilt gemäß der obigen Rechnung

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \right] dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) K_n(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) K_n(z) dz, \end{aligned}$$

und unmittelbar aus der Definition von K_n folgt

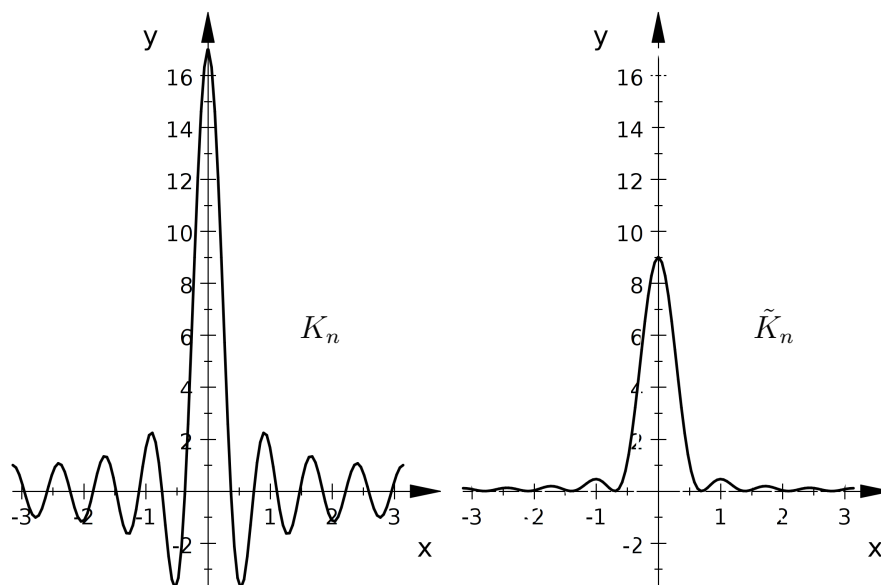
$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 2\pi.$$

Der Graph des Dirichlet-Kerns hat die folgende Gestalt:

⁴Pierre Gustave Lejeune-Dirichlet: Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, No 4, 1829, p. 157 - 169.

⁵Camille Jordan, Sur la série de Fourier. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 92 (1881) 228 - 230.

⁶Paul du Bois-Reymond: Ueber die Fourierschen Reihen, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität Göttingen, No 21, 1873, p. 571 - 584.

Graph des Dirichlet-Kerns für $n = 8$ Graph des Fejer-Kerns für $n = 8$

Wichtig zu bemerken ist, daß die Amplitude der Oszillation von K_n auch für große n nie unter 1 fällt, lediglich die Frequenz wird immer größer.

Lemma 8.1 — Es sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von g existiert ein $\delta > 0$ so, daß $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ für alle $x, x' \in [a, b]$ mit $|x - x'| < \delta$. Es gilt dann

$$\int_a^b g(x) \sin(nx) dx \leq \varepsilon(b-a) + \delta \|g\|_\infty$$

sobald $n > 2\pi/\delta$. Das sieht man wie folgt: Zerlegt man $[a, b]$ in die Intervalle $[t_i, t_{i-1}]$ für $i = 1, \dots, N := \lfloor \frac{n(b-a)}{2\pi} \rfloor$ und $[t_N, b]$, so liegen Maximum und Minimum von g auf den ersten N Intervallen jeweils um höchstens ε auseinander. Der Beitrag zum Integral ist also beschränkt durch $\varepsilon(t_i - t_{i-1})$. Der Beitrag des letzten Intervalls läßt sich grob durch das Produkt von $\|g\|_\infty$ und die Intervallbreite abschätzen.

Aus der Abschätzung folgt die Behauptung. $\square$

Wendet man das Lemma auf

$$2\pi S_n f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z)}{\sin(\frac{z}{2})} \sin((n+\frac{1}{2})z) dz$$

an, so folgt, daß das Konvergenzverhalten der Folge $S_n f(x)$ vollständig durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-h}^h f(x+z) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})} dz$$

für beliebig kleine h bestimmt wird und daher nur von den Werten von f in einer beliebig kleinen Umgebung $U_h(x)$ abhängt.

Satz 8.2 — Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare 2π -periodische Funktion. Dann konvergiert $S_n f$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen f .

Beweis. Man hat

$$2\pi(S_n f(x) - f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{\sin(\frac{z}{2})} \sin((n + \frac{1}{2})z) dz.$$

Weil f differenzierbar ist, setzt sich die Funktion $g(x, z) := (f(x+z) - f(x))/\sin(z/2)$ stetig mit dem Wert $2f'(x)$ in $z = 0$ fort. Die Funktion g ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Mit dem Argument aus Lemma 8.1 folgt die Behauptung. $\square$

Satz 8.3 — Die trigonometrischen Polynome liegen dicht im Raum der 2π -periodischen stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der Supremumsnorm und a fortiori bezüglich der L^2 -Norm.

Beweis. Es sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit den folgenden Eigenschaften: $h \geq 0$, $\text{supp}(h) \subset (-1, 1)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} h(z) dz = 1$. Für $\varepsilon > 0$ bezeichne dann $h_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon} h(z/\varepsilon)$. Die Funktion h_ε ist immer noch nichtnegativ mit Integral 1, hat aber Träger in $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Für jede stetige Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$u_\varepsilon(x) := (u * h_\varepsilon)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x-z) h_\varepsilon(z) dz$$

eine glatte Funktion, und $u_\varepsilon \rightarrow u$ punktweise für $\varepsilon \rightarrow 0$. Wenn u gleichmäßig stetig ist (z.B. wenn u kompakten Träger hat oder periodisch ist), konvergiert u_ε gleichmäßig gegen u . Hat u kompakten Träger oder ist u periodisch, so gilt dasselbe für jedes u_ε .

Mit diesem Argument folgt: Zu jeder 2π -periodischen stetigen Funktion u und zu jedem $\eta > 0$ gibt es eine 2π -periodische glatte Funktion v mit $\|u - v\|_\infty < \eta/2$. Zu v gibt es nach Satz 8.2 ein n mit $\|S_n v - v\|_\infty < \eta/2$. Es folgt $\|u - S_n v\|_\infty < \eta$. Das beweist, daß sich jede 2π -periodische Funktion durch trigonometrische Polynome in der Supremumsnorm approximieren läßt. $\square$

Satz 8.4 (Dirichlet) — Für eine 2π -periodische stetige und stückweise monotone Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert $S_n f$ punktweise gegen f für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Wir zerlegen das Integral

$$2\pi S_n f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})z)}{\sin \frac{z}{2}} dz$$

in vier Integrale über die Teilintervalle $[-\pi, -\delta]$, $[-\delta, 0]$, $[0, \delta]$, $[\delta, \pi]$. Für $n \rightarrow \infty$ verschwinden die Beiträge des ersten und des vierten Integrals nach Lemma 8.1. Die

Beiträge des zweiten und des dritten behandelt man auf die folgende Weise. Es genügt dabei, das dritte Integral zu betrachten und zu zeigen:

$$\pi f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta f(x+z) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})z)}{\sin \frac{z}{2}} dz.$$

Dabei ist stets $\delta \in (0, \pi/2)$, um Sonderbetrachtungen zu vermeiden.

Wählt man δ hinreichend klein, ist f auf $[0, \delta]$ nach Voraussetzung monoton. Ersetzt man nötigenfalls f durch $-f$, kann man annehmen, daß $f|_{[0, \delta]}$ monoton fallend ist. Und indem man nötigenfalls f durch $f + C$ für eine hinreichend große Konstante C ersetzt, ist ohne Einschränkung zusätzlich $f|_{[0, \delta]}$ positiv. Damit ist $f(x+z)/\sin(z/2)$ auf $(0, \delta)$ eine positive, streng monoton fallende Funktion.

Wir setzen $t_{nm} := \frac{2\pi}{2n+1}m$ für $m \in \mathbb{N}_0$. Es sei M maximal mit $t_{nM} \leq \delta$. Der Integrationsbereich $[0, \delta]$ zerfällt in die Teilintervalle $[t_{nm}, t_{n(m+1)}]$ mit $m = 0, \dots, M-1$, sowie den Rest $[t_{nM}, \delta]$. Die Terme $P_{nm} := (-1)^m \int_{t_{nm}}^{t_{n(m+1)}} K_n(z) dz$, $m = 0, \dots, M$, sind positiv und streng monoton fallend. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es Stellen $z_{nm} \in [t_{nm}, t_{n(m+1)}]$ und ein $\lambda \in (0, 1]$ mit

$$\int_0^\delta f(z) K_n(z) dz = f(z_{n0})P_{n0} - f(z_{n1})P_{n1} + \dots + (-1)^M \lambda f(z_{nM})P_{nM}.$$

Dirichlet fixiert nun ein gerades $\ell \in \mathbb{N}$. Für hinreichend große n wird $M > \ell$, und das Integral zerfällt in die Teile

$$I_1 := f(z_{n0})P_{n0} - f(z_{n1})P_{n1} + \dots - f(z_{n(\ell-1)})P_{n(\ell-1)}$$

und

$$I_2 := f(z_{n\ell})P_{n\ell} - \dots + (-1)^\ell \lambda f(z_{nM})P_{nM}.$$

Die zweite Summe hat für wachsendes n nicht nur variable Terme sondern auch eine wachsende Anzahl von Termen. Weil es aber eine Wechselsumme über eine monoton fallende Folge von positiven Termen ist, ist sie durch den ersten Term beschränkt. Also

$$0 \leq I_2 \leq f(z_{n\ell})P_{n\ell}.$$

Für festes m und $n \rightarrow \infty$ geht z_{nm} gegen 0, also $f(z_{nm})$ gegen $f(0)$. Wir betrachten das Verhalten der Integrale P_{nm} für $n \rightarrow \infty$:

$$P_{nm} = (-1)^m \int_{t_{nm}}^{t_{n(m+1)}} K_n(z) dz = (-1)^m \int_{\pi m}^{\pi(m+1)} \frac{\sin u}{\frac{2n+1}{2} \sin \frac{u}{2n+1}} du.$$

Offenbar ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{nm} = (-1)^m 2 \int_{\pi m}^{\pi(m+1)} \frac{\sin u}{u} du =: p_m.$$

Dann hat man $p_0 > p_1 > p_2 > \dots$ und

$$p_0 - p_1 + p_2 - \dots = 2 \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \pi.$$

Zu vorgegebenem ε existiert dann ein n_0 so, daß für $n \geq n_0$ gilt:

$$|I_1 - f(0)(p_0 - p_1 + \dots - p_{\ell-1})| < \varepsilon, \quad |I_2| \leq f(0)p_\ell + \varepsilon.$$

Also

$$\left| \int_0^h f(z)K_n(z)dz - f(0)\pi \right| \leq 2\varepsilon + 2f(0)p_\ell \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Weil ε beliebig klein und ℓ beliebig groß gewählt werden können, folgt die behauptete Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h f(z)K_n(z)dz = \pi f(0).$$

□

Camille Jordan hat den Anwendungsbereich des Satzes von Dirichlet wie folgt erweitert: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat endliche oder beschränkte Variation, wenn

$$V(f) := \sup_{a=t_0 < \dots < t_n=b} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty.$$

Es ist klar, daß eine stückweise monotone stetige Funktion endliche Variation hat. Für eine stetige Funktion von endlicher Variation definiert Jordan:

$$F(t) := V(f|_{[a,t]}) \quad \text{für } t \in [a, b].$$

Dann ist F stetig und monoton wachsend, und $G := F - f$ ist ebenfalls stetig und monoton wachsend, d.h. f besitzt eine Darstellung $f = F - G$ als Differenz zweier monoton wachsender stetiger Funktionen. Das zeigt:

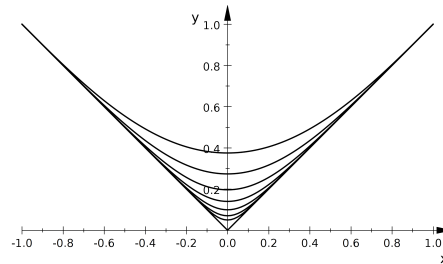
Satz 8.5 (Dirichlet-Jordan) — Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von endlicher Variation, so konvergiert die Fourierreihe $S_n f$ für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen f . □

8.1.2 Der Satz von Stone-Weierstraß

Daß die trigonometrischen Polynome dicht im Raum der 2π -periodischen Funktionen liegen, kann man auch abstrakt aus dem Satz von Stone-Weierstraß schließen.

Lemma 8.6 — Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n t^n$ konvergiert gleichmäßig auf $[-1, 1]$ gegen $\sqrt{1+t}$. Insbesondere konvergiert die Polynomfolge $p_n(x) := \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k (x^2 - 1)^k$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ gegen den Absolutbetrag $|x|$. □

Das folgende Bild zeigt die Graphen der Funktionen $p_1, p_2, p_4, \dots, p_{128}$ und den Absolutbetrag:



Satz 8.7 (Stone-Weierstraß) — Es sei K eine kompakte Menge, $C(K)$ die $\mathbb{R}$ -Algebra der stetigen Funktionen $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm, und $C(K, \mathbb{C}) := C(K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

1. Eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra $A \subset C(K)$ ist dicht, wenn $1 \in A$ und wenn A Punkte trennt, d.h. wenn es zu verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in K$ eine Funktion $f \in A$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$ gibt.
2. Eine $\mathbb{C}$ -Unteralgebra $A \subset C(K, \mathbb{C})$ ist dicht, wenn A die Konstanten enthält, Punkte trennt und abgeschlossen unter komplexer Konjugation ist.

Beweis. Es sei zunächst $A \subset C(K)$ eine reelle Unteralgebra mit den in 1. geforderten Eigenschaften und B der Abschluß von A in $C(K)$.

Für jede Funktion $f \in B$ liegen die Werte von $f/\|f\|$ im Intervall $[-1, 1]$. Folglich konvergiert die Funktionenfolge $f_n := \|f\|p_n(f/\|f\|)$ gleichmäßig gegen $|f|$. Da alle f_n in B liegen und B abgeschlossen ist, liegt auch $|f|$ in B .

Mit $f_1, f_2 \in B$ liegen dann auch $\max\{f_1, f_2\} := \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$ und $\min\{f_1, f_2\} := \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|)$ in B , und induktiv gilt dasselbe für eine beliebige Anzahl von Funktionen in B .

Weil A Punkte trennt, gibt es zu verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in K$ eine Funktion $f \in A$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Gibt man sich beliebige Werte $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ vor, so kann man deshalb immer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ finden, daß die Funktion $\tilde{f} := \lambda_1 + \lambda_2 f$ die Eigenschaft $\tilde{f}(x_1) = y_1$ und $\tilde{f}(x_2) = y_2$ hat.

Mit diesen Vorüberlegungen kommen wir zur eigentlichen Beweisidee. Es sei $g \in C(K)$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für jedes Punktepaar $x, y \in K$ gibt es eine Funktion $f_y^x \in B$ mit $f_y^x(x) = g(x)$ und $f_y^x(y) = g(y)$. Weil beide Funktionen stetig sind, gibt es außerdem eine offene Umgebung U_y^x von y mit der Eigenschaft, daß $f_y^x(z) \leq g(z) + \varepsilon$ für alle $z \in U_y^x$. Bei festem $x \in K$ bilden die offenen Mengen $\{U_y^x\}_{y \in K}$ eine offene Überdeckung von K . Weil K kompakt ist, gibt es Punkte $y_1, \dots, y_m$ so, daß $K = \bigcup_{i=1}^m U_{y_i}^x$. Die Funktion $f^x := \min\{f_{y_i}^x \mid i = 1, \dots, m\}$ hat die folgenden Eigenschaften: $f^x \in B$, $f^x(x) = g(x)$ und $f^x(z) \leq g(z) + \varepsilon$ für alle $z \in K$. Weil f^x und g stetig sind, gibt es weiter eine offene Umgebung V^x von x mit der Eigenschaft, daß $f^x(z) > g(z) - \varepsilon$ für alle $z \in V^x$. Die Mengen $\{V^x \mid x \in K\}$ bilden eine offene Überdeckung von K . Es gibt daher Punkte $x_1, \dots, x_n$ so, daß $K = \bigcup_{i=1}^n V^{x_i}$.

Die Funktion $f := \max\{f^{x_1}, \dots, f^{x_n}\}$ liegt in B und hat die Eigenschaften $-\varepsilon < f(z) - g(z) < \varepsilon$ für alle $z \in K$. Demnach läßt sich g beliebig gut durch Funktionen in B gleichmäßig approximieren. Das zeigt $C(K) = B$.

Der komplexe Falle läßt sich darauf zurückführen. Weil A nun nach Voraussetzung mit jeder Funktion f auch $\bar{f}$ enthält, enthält A auch $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$. Deshalb ist A von der Form $A = A_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, wenn $A_0 \subset A$ die Unter algebra der reellen Funktionen bezeichnet. Nun erfüllt $A_0 \subset C(K)$ die Voraussetzungen aus Teil 1 und liegt deshalb dicht in $C(K)$. Folglich liegt auch A dicht in $C(K, \mathbb{C})$. $\square$

Anwendung auf trigonometrische Polynome. Wir identifizieren 2π -periodische stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit stetigen Funktionen auf dem Einheitskreis. Dabei werden die Funktionen $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ und $e^{i\theta}$ mit den reellen bzw. komplexen Koordinatenfunktionen x, y und $z = x + iy$ identifiziert. Der Raum der reellen bzw. komplexen trigonometrischen Polynome ist daher durch die Algebren $A := \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1) \subset C(S^1, \mathbb{R})$ bzw. $B := \mathbb{C}[z, z^{-1}] \subset C(S^1, \mathbb{C})$ gegeben. Sowohl A als auch B enthalten die Konstanten, wegen $\bar{z}|_{S^1} = z^{-1}|_{S^1}$ ist B abgeschlossen unter Konjugation, und A wie B trennen Punkte, denn dazu genügen schon die Funktionen x und y bzw. z . Mit dem Satz von Stone-Weierstraß folgt, daß A und B dicht in $C(S^1, \mathbb{R})$ bzw. $C(S^1, \mathbb{C})$ bezüglich der Supremumsnorm sind. Dies beweist erneut Satz 8.3.

Dieses Resultat ist insofern schwächer als der im nächsten Abschnitt behandelte Satz von Fejér, als keine Folge in A bzw. B konstruiert wird, die gegen eine vorgegebene Funktion konvergiert.

8.1.3 Der Satz von Fejér

Den einfachsten Beweis von Satz 8.3 erhält man mit dem folgenden Satz von Fejér:

Satz 8.8 (Fejér)— *Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische stetige Funktion. Dann konvergiert das Cesaro-Mittel*

$$\tilde{S}_n f := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \tilde{K}_n(x-y) dy$$

gleichmäßig gegen f . Dabei bezeichnet

$$\tilde{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

den sogenannten Fejér-Kern.

Beweis. Für das Cesaro-Mittel erhält man durch Mittelung über den Dirichlet-Kern:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n K_k(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \tilde{K}_n(x-y) dy \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

Der Graph des Fejér-Kerns ist auf Seite 92 abgebildet. Wie für den Dirichletkern gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{K}_n(z) dz = 2\pi.$$

Weil $\tilde{K}_n$ ebenfalls 2π -periodisch und außerdem symmetrisch ist, hat man nach geeigneter Koordinatensubstitution:

$$\tilde{S}_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \tilde{K}_n(z) dz$$

Die Funktion f ist gleichmäßig stetig. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ so, daß $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ sobald $|x - x'| < 2\delta$. Wir zerlegen das Integral

$$2\pi(\tilde{S}_n f(x) - f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-z) - f(x)) \tilde{K}_n(z) dz$$

in die Beiträge über den Intervallen $[-\pi, -\delta]$, $[\delta, \pi]$ und $[-\delta, \delta]$. Über den beiden ersten Intervallen ist $|f(x-z) - f(x)|$ beschränkt durch $2\|f\|_{\infty}$, auf dem dritten durch ε . Deshalb gilt

$$\begin{aligned} 2\pi|\tilde{S}_n f(x) - f(x)| &\leq 4\|f\|_{\infty} \int_{\delta}^{\pi} \tilde{K}_n(z) dz + 2\varepsilon \int_0^{\delta} \tilde{K}_n(z) dz \\ &\leq \varepsilon + (4\|f\|_{\infty} + 2\varepsilon) \int_{\delta}^{\pi} \tilde{K}_n(z) dz. \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}z)}{\sin^2(\frac{z}{2})} dz = 0.$$

für jedes δ mit $0 < \delta < \pi$. Tatsächlich ist der Integrand beschränkt durch

$$\frac{1}{(n+1) \sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

und geht gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. □

8.2 Funktionalanalytische Hilfsmittel

Literatur:

Gilbarg, Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.

Hirzebruch, Scharlau: Funktionalanalysis.

Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt relativkompakt, wenn ihr Abschluß kompakt ist.

Satz 8.9 (Arzela-Ascoli) — Es sei X eine kompakte Menge, (Y, d) ein metrischer Raum und $C^0(X, Y)$ die Menge der stetigen Funktionen von X nach Y mit der Metrik $\delta(f, f') := \sup\{d(f(x), f'(x)) \mid x \in X\}$. Es sei $F \subset C^0(X, Y)$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $x \in X$ ist $\{f(x) \mid f \in F\}$ relativkompakt in Y .
2. F ist gleichgradig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung $U(x, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft, daß $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in U(x, \varepsilon)$ und alle $f \in F$.

Dann ist F relativkompakt in $C^0(X, Y)$.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ bilden die Mengen $U(x, \varepsilon)$, $x \in X$, eine offene Überdeckung von X . Weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Punkte $x_{n1}, \dots, x_{nk_n}$ mit der Eigenschaft, daß die Mengen $U_{ni} := U(x_{ni}, \frac{1}{n})$, $i = 1, \dots, k_n$, eine endliche Überdeckung von X bilden.

Weil $C^0(X, Y)$ selbst ein metrischer Raum ist, genügt es zu zeigen, daß jede Folge (f_m) mit Werten in F in $C^0(X, Y)$ konvergiert. Wir konstruieren rekursiv Teilfolgen $(f_m^{(\ell)})$ wie folgt: Es sei $f_m^{(0)} = f_m$ und $y_1, y_2, \dots$ eine Abzählung der Punkte $\{x_{ni}\}$. Es sei nun $\ell \geq 0$ und die Folge $(f_m^{(\ell)})$ schon konstruiert mit der Eigenschaft, daß der Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m^{(\ell)}(y_n)$ für alle $1 \leq n \leq k \leq \ell$ existiert. Nach Voraussetzung ist die Menge $\{f_m^{(\ell)}(y_{\ell+1}) \mid m \in \mathbb{N}\}$ relativkompakt in Y . Deshalb gibt es eine Teilfolge $(f_m^{(\ell+1)})$ der Folge $(f_m^{(\ell)})$, die in $y_{\ell+1}$ konvergiert. In den Punkten $y_1, \dots, y_\ell$ konvergiert sie ohnehin. Die Diagonalfolge $g_n := f_n^{(n)}$ konvergiert dann in allen Punkten y_ℓ .

Es sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon/3$ gewählt. Es gibt für die endlich vielen Punkte $x_{n1}, \dots, x_{nk_n}$ einen gemeinsamen Index m_0 so, daß für alle $m, m' \geq m_0$ und alle $i = 1, \dots, k_n$ gilt: $d(g_m(x_{ni}), g_{m'}(x_{ni})) < \varepsilon/3$. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, k_n\}$ mit $x \in U_{ni}$, und nach Konstruktion der U_{ni} gilt $d(f(x), f(x_{ni})) < 1/n$ für alle $f \in F$. Daraus folgt für $m, m' \geq m_0$ mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(g_m(x), g_{m'}(x)) &\leq d(g_m(x), g_m(x_{ni})) + d(g_m(x_{ni}), g_{m'}(x_{ni})) \\ &\quad + d(g_{m'}(x_{ni}), g_{m'}(x)) \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da x beliebig war, erhält man

$$\delta(g_m, g_{m'}) < \varepsilon \quad \text{für alle } m, m' \geq m_0. \quad (8.1)$$

Die Folge (g_m) ist also eine Cauchyfolge in $C^0(X, Y)$. Nach Voraussetzung 1. des Satzes konvergiert sie zunächst punktweise gegen eine Funktion $g : X \rightarrow Y$. Indem man in der Ungleichung (8.1) den Grenzübergang $m' \rightarrow \infty$ vollzieht, erhält man

$d(g_m(x), g(x)) \leq \varepsilon$ für alle $x \in X$ und alle $m \geq m_0$. Das bedeutet, daß die Folge (g_m) gleichmäßig gegen g konvergiert. Insbesondere ist g selbst stetig und liegt in $C^0(X, Y)$. Das war zu zeigen. $\square$

Lemma 8.10 (Riesz) — *Es sei V ein normierter reeller oder komplexer Vektorraum und $W \subsetneq V$ ein echter abgeschlossener Teilraum. Dann gibt es zu jedem $\theta \in (0, 1)$ einen Vektor v_θ mit $\|v_\theta\| = 1$ und $d(v_\theta, W) := \inf\{\|v_\theta - w\| \mid w \in W\} \geq \theta$.*

Beweis. Es sei $v \in V \setminus W$. Dann gibt es einen Punkt $w \in W$ mit $\|v - w\| \leq d(v, W)/\theta$. Für den normierten Vektor $v_\theta := (v - w)/\|v - w\|$ folgt nun: $d(v_\theta, W) = d(v, W)/\|v - w\| \geq \theta$. $\square$

Eine lineare Abbildung $K : E \rightarrow F$ zwischen (reellen oder komplexen) normierten Räumen ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist, d.h. wenn es eine Konstante $C > 0$ mit $\|Kx\|_F \leq C\|x\|_E$ für alle $x \in E$ gibt. In diesem Falle ist $\|K\| := \sup\{\|Kx\|_F \mid x \in E \text{ mit } \|x\|_E = 1\}$ endlich und heißt die Norm von K . Eine solche stetige lineare Abbildung $K : E \rightarrow F$ heißt kompakt, wenn sie beschränkte Mengen in relativkompakte Mengen abbildet. Offenbar ist dies äquivalent dazu, daß das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel in E unter K relativkompakt ist.

Satz 8.11 — *Es sei E ein normierter Vektorraum und $K : E \rightarrow E$ kompakt. Dann ist für jedes $\lambda \neq 0$ der Eigenraum E_λ zum Eigenwert λ endlichdimensional, und die Eigenwerte von K häufen sich höchstens bei 0.*

Beweis. Andernfalls gibt es eine Folge (x_n) von linear unabhängigen Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_n \neq 0$ mit $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$. Es sei θ_n eine Folge von Zahlen in $(0, 1)$ mit $\theta_n \rightarrow 1$. Nach dem Lemma von Riesz gibt es zu jedem n einen Eigenvektor $y_n \in M_n := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ zum Eigenwert λ_n mit $\|y_n\| = 1$ und $d(y_n, M_{n-1}) \geq \theta_n$. Da die Folge y_n beschränkt und K kompakt ist, können wir nach Übergang zu einer Teilfolge und Umbezeichnung annehmen, daß die Folge der $Ky_n = \lambda_n y_n$ konvergiert. Andererseits ist $y_{n-1} \in M_{n-1}$, so daß $\|\lambda_n y_n - \lambda_{n-1} y_{n-1}\| \geq |\lambda_n| \cdot d(y_n, M_{n-1}) \geq |\lambda_n| \theta_n$. Für $n \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen $|\lambda| > 0$, Widerspruch. $\square$

Es sei $\mathcal{H}$ ein (reeller oder komplexer) Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und zugehöriger Norm $\| - \|$. Eine lineare Abbildung $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt symmetrisch, wenn $\langle x, Ky \rangle = \langle Kx, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.

Satz 8.12 — *Es sei $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine kompakte symmetrische lineare Abbildung auf einem Hilbertraum. Dann gilt:*

1. $\|K\| = \sup\{|\langle Kx, x \rangle| \mid x \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\| = 1\}$.
2. *Es gibt einen Eigenvektor zum Eigenwert $\|K\|$ oder $-\|K\|$.*

3. Bezeichnet $\mathcal{H}_\lambda$ den Eigenraum von K zum Eigenwert λ , so ist der Unterraum $\bigoplus_\lambda \mathcal{H}_\lambda$ dicht in $\mathcal{H}$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß K nicht die Nullabbildung ist, daß also $\|K\| > 0$.

1. Es sei $M := \sup\{|\langle Kx, x \rangle| \mid x \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\| = 1\}$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man $|\langle Kx, x \rangle| \leq \|Kx\| \cdot \|x\| \leq \|K\| \cdot \|x\|^2$, also $M \leq \|K\|$. Weil K symmetrisch ist, kann man für beliebige Vektoren $x, y \in \mathcal{H}$ schreiben:

$$\langle K(x+y), x+y \rangle = \langle Kx, x \rangle + 2\operatorname{Re}\langle Kx, y \rangle + \langle Ky, y \rangle.$$

Wir wählen eine Folge von normierten Vektoren x_n mit $\|Kx_n\| \rightarrow \|K\|$ und setzen $y_n := Kx_n / \|Kx_n\|$. Durch Subtraktion der zwei Gleichungen

$$\langle K(x_n \pm y_n), x_n \pm y_n \rangle = \langle Kx_n, x_n \rangle \pm 2\operatorname{Re}\langle Kx_n, y_n \rangle + \langle Ky_n, y_n \rangle$$

erhalten wir die Identität

$$\langle K(x_n + y_n), x_n + y_n \rangle - \langle K(x_n - y_n), x_n - y_n \rangle = 4\operatorname{Re}\langle Kx_n, y_n \rangle = 4\|Kx_n\|.$$

Die rechte Seite geht für $n \rightarrow \infty$ gegen $4\|K\|$. Die linke Seite läßt sich nach Definition von M und unter Verwendung der Parallelogrammgleichung durch

$$M\|x_n + y_n\|^2 + M\|x_n - y_n\|^2 = 2M(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) = 4M$$

nach oben abschätzen. Das zeigt die fehlende Ungleichung $\|K\| \leq M$.

2. Nach Teil 1 existiert eine Folge von normierten Vektoren x_n mit $|\langle Kx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|K\|$ für $n \rightarrow \infty$. Weil K kompakt ist, kann ohne Einschränkung annehmen, daß $z := \lim Kx_n$ existiert. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $\langle Kx_n, x_n \rangle$ gegen ein $s \neq 0$ mit $|s| = \|K\|$. Es gilt nun

$$\|Kx_n - sx_n\|^2 = \|Kx_n\|^2 - 2s\langle Kx_n, x_n \rangle + s^2\|x_n\|^2.$$

Für $n \rightarrow \infty$ bleibt die linke Seite stets ≥ 0 , die rechte Seite geht gegen $\|z\|^2 - \|K\|^2 \leq 0$. Zusammengenommen zeigt dies: $0 = \lim_n \|Kx_n - sx_n\|$. Daraus folgt, daß auch die Folge x_n konvergiert, etwa gegen x , und daß $Kx - sx = 0$.

3. Angenommen, der Abschluß V von $\bigoplus_\lambda \mathcal{H}_\lambda$ ist ein echter Unterraum. Dann ist das orthogonale Komplement $V^\perp$ nicht der Nullraum. Es ist klar, daß K den Raum V in sich abbildet. Weil K symmetrisch ist, bildet K auch $V^\perp$ in sich ab. Damit ist die Einschränkung $K|_{V^\perp}$ ein symmetrischer nichttrivialer kompakter Operator und besitzt nach Teil 2. einen Eigenvektor. Aber der müßte schon in V liegen. Widerspruch. $\square$

8.3 Der Satz von Peter und Weyl

Es sei weiterhin $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und G eine kompakte topologische Gruppe. Wir betrachten eine stetige Darstellung $G \rightarrow \operatorname{GL}(V)$ auf einem endlichdimensionalen k -Vektorraum V . Für jeden Vektor v und jede Linearform $\varphi \in V^*$ ist $f_{\varphi,v}(g) := \varphi(g(v))$

eine stetige Funktion auf G . Dies definiert eine lineare Abbildung

$$s_V : V^* \otimes_k V \longrightarrow C^0(G, k).$$

Die Gruppe G operiert auf dem Tensorprodukt $V^* \otimes V$ auf dem linken wie auf dem rechten Faktor. Um griffige Bezeichnungen zu haben, nennen wir die Wirkungen $\lambda_g(\varphi \otimes v) := \varphi \circ g^{-1} \otimes v$ und $\rho_g(\varphi \otimes v) := \varphi \otimes g(v)$ Linkstranslation bzw. Rechtstranslation. Die Abbildung s_V ist äquivariant sowohl bezüglich der Links- und wie der Rechtstranslation.

Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V , $v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$ die dazu duale Basis. Dann sind die Funktionen $f_{ji} := f_{v_j^*, v_i}$ durch Eigenschaft

$$g \cdot v_i = \sum_j f_{ji}(g) v_j$$

charakterisiert. Die Elemente im Bild von s_V sind also Linearkombinationen der Matrixeinträge f_{ij} . Sie genügen der Identität

$$f_{ji}(gh) = \sum_k f_{jk}(g) f_{ki}(h).$$

Wir betrachten die Menge aller Funktionen der Form $f_{\varphi, v}$:

$$T(G, k) := \{f_{\varphi, v} \mid v \in V, \varphi \in V^*, V \text{ eine stetige endlichdimensionale Darstellung}\}.$$

Satz 8.13 (Peter und Weyl) — Die Menge $T(G, k)$ ist dicht in $C^0(G, k)$ sowohl bezüglich der euklidischen Norm $\| \cdot \|_2$ wie der Supremumsnorm $\| \cdot \|_\infty$.

Beispiel 8.14 — Alle komplexen irreduziblen stetigen endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe $G = S^1$ sind eindimensional und von der Form $\rho_m(z) := z^m$, $m \in \mathbb{Z}$. Die zugehörigen Matrixelemente sind die Funktionen $z \mapsto z^m$ für $m \in \mathbb{Z}$. Der Satz von Peter-Weyl reduziert sich zum Satz über Approximation von periodischen Funktionen durch Fourierreihen: Jede stetige Funktion $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ läßt sich in der Supremumsnorm wie in der L^2 -Norm durch Laurentpolynome $\sum_{-n}^n f_m z^m$ approximieren. Es gilt $T(S^1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

Die stetigen irreduziblen reellen Darstellungen von S^1 sind die zweidimensionalen reellen Darstellungen, die den komplexen Darstellungen $z \mapsto z^n$, $n \neq 1$ zugrundeliegen, und die triviale Darstellung. Also

$$z = e^{i\theta} \mapsto 1 \quad \text{bzw.} \quad z = e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Matrixkoeffizienten sind also 1 und $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ für $n \geq 1$. Es gilt $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ mit $x = \cos(\theta)$ und $y = \sin(\theta)$.

Zur Vorbereitung des Beweises des Satzes von Peter und Weyl sammeln wir Eigenschaften von $T(G, k)$: Dazu bezeichne $S : C(G, k) \rightarrow C(G, k)$ die sogenannte antipodische Abbildung $S(f)(g) := f(g^{-1})$.

Lemma 8.15 — $T(G, k)$ ist eine k -Unteralgebra von $C(G, k)$, die invariant unter Links- und Rechtstranslation, der antipodischen Abbildung und im Falle $k = \mathbb{C}$ abgeschlossen unter komplexer Konjugation ist.

Beweis. Es gilt $af_{\varphi, v} = f_{a\varphi, v} = f_{\varphi, av}$ für jedes $a \in k$. Deshalb ist $T(G, k)$ abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren aus dem Grundkörper k ist. Für Funktionen $f_i = f_{\varphi_i, v_i}$ mit $v_i \in V_i$, $\varphi_i \in V_i^*$, $i = 1, 2$ gilt $f_1 + f_2 = f_{\varphi_1 \oplus \varphi_2, v_1 \oplus v_2}$ und $f_1 \cdot f_2 = f_{\varphi_1 \otimes \varphi_2, v_1 \otimes v_2}$. Deshalb ist $T(G, k)$ eine k -Unteralgebra von $C(G, k)$.

Weiter gilt $\lambda_g f_{\varphi, v} = f_{\varphi g^{-1}, v}$ und $\rho_g f_{\varphi, v} = f_{\varphi, gv}$. Deshalb ist $T(G, k)$ invariant unter Rechts- und Linkstranslation.

Wir identifizieren V mit $(V^*)^*$ und folgern: $S(f_{\varphi, v})(g) = \varphi(g^{-1} \cdot v) = (g \cdot \varphi)(v) = f_{v, \varphi}(g)$. Damit ist $T(G, k)$ invariant unter S .

Es sei V eine endlichdimensionale stetige G -Darstellung und $\langle -, - \rangle$ ein invariantes Skalarprodukt. Dann ist $v \mapsto \langle v, - \rangle$ ein k -linearer Isomorphismus $\tau : \bar{V} \rightarrow V^*$. Dieser Isomorphismus ist G -äquivariant:

$$\tau(gv)(w) = \langle gv, w \rangle = \langle v, g^{-1}w \rangle = (\tau(v) \circ g^{-1})(w).$$

Nun gilt:

$$\overline{f_{\tau(v), w}}(g) = \overline{\langle v, gw \rangle} = \langle gw, v \rangle = \langle w, g^{-1}v \rangle = S(f_{\tau(w), v})(g).$$

Deshalb ist $T(G, \mathbb{C})$ auch invariant unter komplexer Konjugation. $\square$

Lemma 8.16 — Eine stetige Funktion $f \in C(G, k)$ liegt genau dann in $T(G, k)$, wenn es einen endlichdimensionalen Unterraum $V \subset C^0(G, k)$ gibt, der f enthält und linkstranslationsinvariant oder rechtstranslationsinvariant ist.

Beweis. Jede Funktion in $T(G, k)$ der Form $f_{\varphi, v}$ mit $v \in V$, $\varphi \in V^*$, liegt in einem links- wie rechtstranslationsinvariant endlichdimensionalen Unterraum, nämlich dem Bild von $V^* \otimes_{\text{End}_G(V)} V$. Es sei umgekehrt $W \subset T(G, k)$ ein endlichdimensionaler rechtstranslationsinvarianter Unterraum. Die induzierte Darstellung von G auf W ist stetig. Wir wählen eine Basis $w_1, \dots, w_n$ und erhalten eine Matrixdarstellung $f_{ji}(g)$ durch die Bedingung

$$w_i(xg) = \sum_j f_{ji}(g)w_j(x).$$

Daraus ergibt sich

$$w_i(y) = \sum_j f_{ji}(x^{-1}y)w_j(x) = \sum_{j,k} f_{ki}(y) (f_{jk}(x^{-1})w_j(x))$$

Durch Mittelung über x , d.h. Integration $\int_G dx$, erhält man eine Linearkombination

$$w_i(y) = \sum_{jk} c_k f_{ki}(y) \quad \text{mit Koeffizienten } c_k := \sum_j \int_G f_{jk}(x^{-1})w_j(x)dx.$$

Demnach liegen alle Basisvektoren w_i von W in $T(G, k)$. Analog argumentiert man, wenn W linkstranslationsinvariant ist. $\square$

Es sei V_i eine irreduzible Darstellung und $D_i = \text{End}_G(V_i)$ der zugehörige Schiefkörper der äquivarianten Endomorphismen. Wir haben oben eine Abbildung

$$s_i : V_i^* \otimes_{D_i} V_i \rightarrow C(G, k), \quad \varphi \otimes v \mapsto f_{\varphi, v},$$

definiert und gesehen, daß s_i äquivariant ist bezüglich der Wirkung von $G \times G$ ist, wenn der erste Faktor G durch Linkstranslation und der zweite Faktor G durch Rechtstranslation wirkt.

Lemma 8.17 — *Für jede endlichdimensionale stetige irreduzible Darstellung V_i ist $V_i^* \otimes_{D_i} V_i$ eine irreduzible $G \times G$ -Darstellung. Insbesondere ist s_i injektiv.*

Beweis. Es sei $U_i = V_i^* \otimes_{D_i} V_i$. Die Auswertungsabbildung $\text{Hom}_{1 \times G}(V_i, U) \otimes_{D_i} V_i \rightarrow U$ ist ein Isomorphismus. Die natürliche Abbildung $a : V_i^* \rightarrow \text{Hom}_{1 \times G}(V_i, U)$ mit $a(\varphi) : v \mapsto \varphi \otimes v$ wird nach Tensorieren mit V_i über dem Schiefkörper D_i zu einem Isomorphismus und ist deshalb selbst ein Isomorphismus. Außerdem ist a äquivariant bezüglich der Gruppe $G \times 1$. Es sei nun $W \subset V_i^* \otimes_{D_i} V_i$ ein $G \times G$ -Untermodul. Als $1 \times G$ -Modul ist W eine direkte Summe von Kopien von V_i . Deshalb gibt einen Homomorphismus $u \in \text{Hom}_{1 \times G}(V_i, U)$, dessen Bild ganz in W liegt. Aber weil V_i^* selbst auch irreduzibel ist, erzeugt die Bahn von $u \in V_i^*$ unter $G \times 1$ den ganzen Raum V_i^* . Demnach liegt das ganze Bild von $V_i^* \otimes V_i$ in W . $\square$

Lemma 8.18 (Orthogonalitätsrelationen) — *Die $G \times G$ -Untermoduln $V_i^* \otimes_{D_i} V_i \subset T(G, k)$, wo V_i ein Vertretersystem von endlichdimensionalen stetigen irreduziblen Darstellungen durchläuft, sind paarweise orthogonal bezüglich dem Skalarprodukt auf $C(G, k)$. Insbesondere ist die aus den einzelnen s_i zusammengesetzte Abbildung*

$$s : \bigoplus_i V_i^* \otimes_{D_i} V_i \longrightarrow T(G, k)$$

ein Isomorphismus von $G \times G$ -Darstellungen.

Beweis. Es seien V und W endlichdimensionale stetige irreduzible G -Darstellungen mit Orthonormalbasen $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_m$ bezüglich gewählter G -invarianter Skalarprodukte $\langle -, - \rangle_V$ bzw. $\langle -, - \rangle_W$. Wir betrachten für irgendwelche festen Indizes j und q die Abbildung

$$a : V \rightarrow W, \quad a(v) = \langle v_j, v \rangle w_q$$

und ihr Bild $b := E_{\text{Hom}(V, W)}(a)$ unter der Reynoldsabbildung. Die $b(v_i) = \sum_p b_{pi} w_p$

definierten Matrixkoeffizienten b_{pi} berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} b_{pi} &= \langle w_p, b(v_i) \rangle_W = \langle w_p, \int_G g \cdot a(g^{-1}v_i) dg \rangle_W \\ &= \int_G \langle w_p, g \cdot w_q \rangle_W \langle v_j, g^{-1}v_i \rangle_W dg = \int_G \overline{\langle v_i, g \cdot v_j \rangle_V} \langle w_p, g \cdot w_q \rangle_W dg \\ &= \langle v_{ij}, w_{pq} \rangle_{C(G,k)} \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck das Skalarprodukt für die Matrixeinträge $v_{ij}, w_{pq} \in T(G, k)$ der Wirkung von G auf V bzw. W bezüglich der angegebenen Basen ist. Nun ist die Abbildung b durch den Mittelungsprozeß G -äquivariant geworden und muß nach dem Schurschen Lemma verschwinden. Daraus folgt: $\langle v_{ij}, w_{pq} \rangle_{C(G,k)} = 0$ und insgesamt

$$V^* \otimes_{\text{End}_G(V)} V \perp W^* \otimes_{\text{End}_G(W)} W.$$

Insbesondere ist s injektiv. Es bleibt zu zeigen, daß s auch surjektiv ist. Ist $V = \bigoplus_i V_i^{n_i}$ die isotypische Zerlegung einer endlichdimensionalen stetigen G -Darstellung, so ist $\text{End}_G(V) = \bigoplus_i M_{n_i}(D_i)$ und $V^* \otimes_{\text{End}_G(V)} V \cong \bigoplus_i V_i^* \otimes_{D_i} V_i$. Daher liegt jede Funktion der Form $f_{\varphi, v}$ schon im Bild von s . $\square$

Lemma 8.19 — Es sei $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $a : G \times G \rightarrow k$ eine stetige Funktion. Dann ist $K_a : L^2(G, k) \rightarrow C^0(G, k)$, $f \mapsto \hat{f}$, mit

$$\hat{f}(x) = \int_G a(x, g) f(g) dg$$

wohldefiniert, k -linear und kompakt. Gilt zusätzlich $\overline{a(x, g)} = a(g, x)$ für alle $x, g \in G$, so ist der mit der Identität zusammengesetzte Operator

$$K'_a : L^2(G, k) \rightarrow C^0(G, k) \rightarrow L^2(G, k)$$

kompakt und symmetrisch. Insbesondere ist die Summe der Eigenräume von K'_a dicht in $L^2(G, k)$.

Beweis. Es sei $a : G \times G \rightarrow k$ eine stetige Funktion.

1. Schritt. Für jede stetige Funktion $f : G \rightarrow k$ wird durch

$$\hat{f}(x) := \int_G a(x, g) f(g) dg$$

eine Funktion $\hat{f} : G \rightarrow k$ definiert. Weil $\{x\} \times G$ kompakt ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von x mit der Eigenschaft, daß $|a(y, g) - a(x, g)| < \varepsilon$ für alle $g \in G$ und $y \in U$. Für solche y gilt also

$$|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \int_G |a(x, g) - a(y, g)| |f(g)| dg \leq \varepsilon \|f\|_2. \quad (8.2)$$

Das zeigt, daß $\hat{f}$ eine stetige Funktion ist. Die Abbildung

$$C^0(G, k) \rightarrow C^0(G, k), \quad f \mapsto \hat{f},$$

ist k -linear, und setzt sich auf Grund der Abschätzung

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \sup\{|a(x, g)| \mid x, g \in G\} \cdot \|f\|_2 \quad (8.3)$$

zu einer stetigen Abbildung $K_a : L^2(G, k) \rightarrow C^0(G, k)$ fort.

2. Schritt. Um zu sehen, daß $K_a : L^2(G, k) \rightarrow C^0(G, k)$ kompakt ist, genügt es zu verifizieren, daß für jede Folge von Funktionen $f_n \in L^2(G, k)$ mit $\|f_n\|_2 \leq 1$ die Bildfolge $\hat{f}_n := K_a(f_n) \in C^0(G, k)$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli erfüllt. Die erste Voraussetzung ist durch die Abschätzung (8.3) erfüllt, die zweite durch die Abschätzung (8.2). Nach Satz 8.9 ist K_a in der Tat kompakt. Somit ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$K'_a : L^2(G, k) \rightarrow C^0(G, k) \rightarrow L^2(G, k)$$

kompakt.

3. Schritt. Es sei jetzt $a : G \times G \rightarrow k$ zusätzlich der Bedingung $a(x, g) = \overline{a(g, x)}$ für alle $x, g \in G$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle K'_a f, f' \rangle &= \int_G \overline{\int_G a(x, g) f(g) dg} f'(x) dx \\ &= \int_G \int_G a(g, x) \overline{f(g)} f'(x) dg dx, && \text{weil } a \text{ hermitesch ist,} \\ &= \int_G \overline{f(g)} \left(\int_G a(g, x) f'(x) dx \right) dg && \text{nach dem Satz von Fubini,} \\ &= \langle f, K'_a f' \rangle. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: K'_a ist ein symmetrischer kompakter Operator. $\square$

Lemma 8.20 — Es sei $\delta : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit der Eigenschaft $\delta(x) = \delta(x^{-1})$ für alle $x \in G$. Dann ist der Operator $K : L^2(G, k) \rightarrow C^0(G, k)$ mit

$$(Kf)(x) := \int_G \delta(xg^{-1}) f(g) dg$$

kompakt und symmetrisch. Es bezeichne $\mathcal{H}_\lambda$ den Eigenraum zum Eigenwert λ der zusammengesetzten Abbildung $K : L^2(G, k) \rightarrow L^2(G, k)$. Dann gilt

1. K vertauscht mit Rechtstranslation, d.h. $\rho_g(Kf) = K(\rho_g f)$ für alle $g \in G$.
2. Für jedes $\lambda \in k$ ist $\mathcal{H}_\lambda$ rechtstranslationsinvariant. Insbesondere gilt $\mathcal{H}_\lambda \subset T(G, k)$ für alle $\lambda \neq 0$.
3. $K(L^2(G, k)) \subset \overline{T(G, k)}$.

Beweis. Die Abbildung $G \times G \rightarrow k, (x, y) \mapsto \delta(xy^{-1})$ ist stetig und symmetrisch. Deshalb ist K kompakt und symmetrisch. Weiter gilt

$$(\rho_h Kf)(x) = \int_G \delta(xhg^{-1}) f(g) dg = \int_G \delta(xy^{-1}) f(yh) dy = K(\rho_h f)(x).$$

für alle $f \in L^2(G, k)$, $h, x \in G$. Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{H}_\lambda$:

$$K(\rho_h f) = \rho_h(Kf) = \rho_h(\lambda f) = \lambda \rho_h f.$$

Demnach ist $\mathcal{H}_\lambda$ invariant unter rechtstranslation. Weil K kompakt ist, ist $\mathcal{H}_\lambda$ für $\lambda \neq 0$ endlichdimensional. Weil der Eigenraum auch rechtstranslationsinvariant ist, liegt er nach Lemma 8.16 in $T(G, k)$. Weiter ist $L^2(G, k) = \overline{\bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}_\lambda}$ nach Satz 8.12. Daraus folgt

$$K(L^2(G, k)) \subset \overline{K\left(\bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}_\lambda\right)} \subset \overline{\bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathcal{H}_\lambda} \subset \overline{T(G, k)},$$

weil K auf allen $\mathcal{H}_\lambda$ mit $\lambda \neq 0$ ein Isomorphismus ist. $\square$

Beweis des Satzes von Peter-Weyl: Es genügt zu zeigen, daß $T(G, k)$ dicht in $C^0(G, k)$ bezüglich der Supremumsnorm ist. A fortiori ist $T(G, k)$ dann auch bezüglich der L^2 -Norm dicht in $C^0(G, k)$ und in $L^2(G, k)$.

Es genügt weiter, zu jedem $f \in C^0(G, k)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $\delta : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\delta(x) = \delta(x^{-1})$ und der Eigenschaft zu finden, daß für den zugehörigen Operator $Kf(x) = \int_G \delta(xg^{-1})f(g)dg$ gilt $\|f - Kf\|_\infty < \varepsilon$, denn nach Lemma 8.20 liegt Kf im Abschluß von $T(G, k)$.

Es seien also $f \in C^0(G, k)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil $\{e\} \times G \subset G \times G$ kompakt und $(y, x) \mapsto f(yx)$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U von $e \in G$ derart, daß $|f(x) - f(yx)| < \varepsilon$ für alle $x \in G$ und alle $y \in U$. Wir wählen eine offene Umgebung V von e mit $V = V^{-1}$ und $V^2 \subset U$. Nach dem Satz von Uryson gibt es eine stetige Abbildung $\sigma : G \rightarrow [0, 1]$ mit $\sigma(e) = 1$ und $\sigma|_{G \setminus U} = 0$. Es sei $c > 0$ eine Konstante. Dann hat die Abbildung $\delta(x) := c\sigma(x)\sigma(x^{-1})$ die folgenden Eigenschaften: $\delta(x) \geq 0$, $\delta(e) > 0$, $\delta(x) = 0$ für alle $x \notin U$ und $\delta(y) = \delta(y^{-1})$. Durch geeignete Wahl von c kann man zusätzlich erreichen, daß $\int_G \delta = 1$. Nun können wir den Abstand zwischen f und $Kf(x) = \int_G \delta(xg^{-1})f(g)dg$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |f(x) - Kf(x)| &= \left| \int_G f(x)\delta(y^{-1})dy - \int_G f(g)\delta(xg^{-1})dg \right| \\ &\leq \int_G |f(x) - f(yx)|\delta(y^{-1})dy \end{aligned}$$

Im letzten Integral ist im Integranden entweder $y \notin U$ und $\delta(y^{-1}) = 0$ oder $y \in U$ und somit $|f(x) - f(yx)| < \varepsilon$ für alle $x \in G$. Es folgt:

$$|f(x) - Kf(x)| \leq \varepsilon \int_G \delta(y^{-1})dy = \varepsilon,$$

also ist $\|f - Kf\|_\infty \leq \varepsilon$. $\square$

Beispiel 8.21 — Es sei G eine endliche Gruppe. Jede endlichdimensionale Darstellung ist stetig. Jede irreduzible Darstellung ist endlichdimensional. Es gibt endlich viele irreduzible Darstellungen $V_i, i = 1, \dots, s$, und eine $G \times G$ -äquivalenten Isomorphismus

von k -Algebren

$$C(G, k) = \bigoplus_i^s V_i^* \otimes_{D_i} V_i,$$

wo $D_i = \text{End}_k^G(V_i)$. Im Falle $k = \mathbb{C}$ ist $D_i = \mathbb{C}$ für alle i und

$$|G| = \sum_i \dim(V_i)^2.$$

§9 Die Komplexifizierung einer kompakten Liegruppe

Im gesamten Abschnitt bezeichne G eine kompakte reelle Liegruppe und k den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

9.1 Treue Darstellungen

Satz 9.1 — *Es sei G eine kompakte topologische Gruppe mit der Eigenschaft, daß jede absteigende Kette $G \supset G' \supset G'' \supset \dots$ von abgeschlossenen Normalteilern stationär wird. Dann besitzt G eine treue stetige endlichdimensionale Darstellung über k für $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst: Ist G eine kompakte topologische Gruppe mit einer stetigen endlichdimensionalen Darstellung $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, dann gibt es eine andere stetige endlichdimensionale Darstellung $\rho' : G \rightarrow \mathrm{GL}(V')$ mit kleinerem Kern, $\ker(\rho') \subsetneq \ker(\rho)$. Durch Iteration des Arguments und unter Ausnutzung der Annahme über Ketten abgeschlossener Normalteiler ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Es sei also $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine nicht treue Darstellung. Dann gibt es in $G' = \ker(\rho)$ einen Punkt $x \neq e$. Wir wählen eine stetige Funktion $f : G \rightarrow k$ mit $f(x) = 1$ und $f(e) = 0$. Nach dem Satz von Peter-Weyl läßt sich f beliebig gut durch eine Funktion aus $T(G, k)$ approximieren. Es gibt also eine endlichdimensionale stetige Darstellung W und eine stetige Funktion $h \in \mathrm{im}(s_W)$ mit $|h(x)| > 1/2$ und $|h(e)| < 1/2$. Auf dem Kern der Darstellung $G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ ist jede Funktion in $\mathrm{im}(s_W)$ konstant. Deshalb liegt x nicht in diesem Kern. Insbesondere ist der Kern der Darstellung $\rho' : G \rightarrow \mathrm{GL}(V \oplus W)$ eine echte Untergruppe von $\ker(\rho)$. $\square$

Folgerung 9.2 — *Jede kompakte Liegruppe G besitzt eine treue Darstellung in $\mathrm{O}(n)$ für geeignetes n .*

Beweis. Kompakte Liegruppen erfüllen die Voraussetzung des Satzes, weil in einer strikt absteigenden Kette jeder abgeschlossene Normalteiler einer kompakten Liegruppe entweder eine kleinere Dimension oder weniger Zusammenhangskomponenten als die nächstgrößere Gruppe hat. Deshalb gibt es eine stetige treue Darstellung $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ für eine endlichdimensionale reelle Darstellung V . Durch Mittelung eines beliebigen Skalarproduktes erhält man ein G -invariantes Skalarprodukt q . Das Bild von G liegt dann in der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(V, q)$. $\square$

Satz 9.3 — *Es sei G eine kompakte Liegruppe und $r : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ eine treue Darstellung. Dann wird $T(G, k)$ als k -Algebra von den Koeffizienten r_{ij} erzeugt.*

Beweis. Nach geeignetem Basiswechsel kann man davon ausgehen, daß r Werte in $\mathrm{O}(n)$ bzw. $\mathrm{U}(n)$ nimmt. Es sei $A \subset T(G, k)$ die von den r_{ij} erzeugte k -Algebra.

Weil die Darstellung treu ist, trennt A Punkte auf G . Außerdem ist A invariant unter komplexer Konjugation. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist deshalb A dicht in $T(G, k)$ bezüglich der Supremumsnorm und erst recht in der L_2 -Norm.

Weil A invariant unter Links- und Rechtstranslation ist, gilt $A = \bigoplus_{i \in J} V_i^* \otimes_{D_i} V_i$ für eine Teilmenge J aller irreduziblen Darstellungen, aus denen sich $T(G, k)$ zusammensetzt. Und weil A in der L_2 -Norm dicht ist, muß J schon alle Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen umfassen. Das zeigt $A = T(G, k)$. $\square$

9.2 Hopfalgebren

Algebren. Es sei k ein Körper. Eine k -Algebra ist ein k -Vektorraum V zusammen mit einer Multiplikation, d.h. einer linearen Abbildung $m : V \otimes_k V \rightarrow V$. Die Multiplikation ist assoziativ, wenn $m \circ (m \otimes \text{id}) = m \circ (\text{id} \otimes m) : V \otimes V \otimes V \rightarrow V$, und kommutativ, wenn $m \circ T = m$, wobei $T : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, $v \otimes v' \mapsto v' \otimes v$, die Vertauschungsabbildung bezeichnet. Eine lineare Abbildung $e : k \rightarrow V$ ist eine Einsabbildung, wenn $\text{id} = m \circ (e \otimes \text{id}) : V \cong k \otimes V \rightarrow V \otimes V \rightarrow V$ und analog $\text{id} = m \circ (\text{id} \otimes e)$.

Koalgebren. Der Begriff der Koalgebra entsteht aus dem der Algebra durch Umdrehen aller Pfeile. Eine k -Koalgebra ist also ein k -Vektorraum V zusammen mit einer Komultiplikation, d.h. einer linearen Abbildung $\mu : V \rightarrow V \otimes V$. Die Komultiplikation ist koassoziativ, wenn $(\mu \otimes \text{id}) \circ \mu = (\text{id} \otimes \mu) \circ \mu$, und kokommutativ, wenn $T \circ \mu = \mu$. Und eine lineare Abbildung $\varepsilon : V \rightarrow k$ ist eine Koeins, wenn $(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \mu = \text{id} = (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \mu$. Ein Homomorphismus von Koalgebren $f : V \rightarrow W$ ist eine lineare Abbildung mit $\mu_W \circ f = (f \otimes f) \circ \mu_V$.

Jede Komultiplikation μ auf V definiert auf dem Dualraum V^* eine Multiplikation $m : V^* \otimes V^* \rightarrow (V \otimes V)^* \xrightarrow{\mu^*} V^*$. Ebenso erhält man aus einer Koeins $\varepsilon : V \rightarrow k$ durch Dualisieren eine Eins $e = \varepsilon^* : k \rightarrow V^*$.

Umgekehrt erhält man aus einer Multiplikation $m : V \otimes V \rightarrow V$ nur unter zusätzlichen Annahmen eine Komultiplikation auf V^* , etwa wenn V endlichdimensional ist, weil dann die natürliche Abbildung $V^* \otimes V^* \rightarrow (V \otimes V)^*$ ein Isomorphismus und damit umkehrbar ist. Wenn V ein $\mathbb{N}_0$ -graduierter Vektorraum mit endlichdimensionalen Summanden V_n ist und wenn m homogen vom Grad 0 ist, erhält man eine Komultiplikation auf $V' := \bigoplus_{n \geq 0} V_n^*$.

Hopfalgebren. Eine Hopfalgebra ist ein k -Vektorraum H mit einer assoziativen Multiplikation m mit Eins e und einer koassoziativen Komultiplikation μ mit Koeins ε , die den folgenden Verträglichkeitsbedingungen genügen:

1. $(m \otimes m) \circ (\text{id} \otimes T \otimes \text{id}) \circ (\mu \otimes \mu) = \mu \otimes m$, d.h. μ ist ein Algebrenhomomorphismus von H nach $H \otimes H$ bezüglich der durch m definierten Algebrenstrukturen, oder

äquivalent: m ist ein Koalgebrenhomomorphismus von $H \otimes H$ nach H bezüglich der durch μ definierten Koalgebrenstrukturen auf H und $H \otimes H$.

2. $\mu \circ e = e \otimes e$, d.h. $e : k \rightarrow V$ ist ein Koalgebrenhomomorphismus bezüglich der durch μ definierten Koalgebrenstruktur auf V .
3. $\varepsilon \circ m = \varepsilon \otimes \varepsilon$, d.h. $\varepsilon : V \rightarrow k$ ist ein Algebrenhomomorphismus bezüglich der durch m definierten Algebrenstruktur auf V .

Gelegentlich wird eine zusätzliche Struktur $S : V \rightarrow V$, die sogenannte antipodische Abbildung, in die Definition einer Hopfalgebra aufgenommen. Das ist eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften $S^2 = \text{id}$ sowie $m \circ (S \times \text{id}) \circ \mu = \text{id}$ und $m \circ (\text{id} \times S) \circ \mu = \text{id}$.

Beispiel 9.4 — Es sei V ein k -Vektorraum und $TV = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ die von V frei erzeugte assoziative k -Algebra. Wegen der universellen Eigenschaft von TV gibt es genau einen k -Algebrenhomomorphismus $\mu : TV \rightarrow TV \otimes TV$, der die lineare Abbildung $v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$ fortsetzt, und ebenso genau einen k -Algebrenhomomorphismus $\varepsilon : TV \rightarrow k$, der die lineare Abbildung $v \mapsto 0$ fortsetzt. Man verifiziert mit Hilfe der universellen Eigenschaft von TV , daß $(TV, m, e, \mu, \varepsilon)$ eine Hopfalgebra ist.

Es sei $\text{Sym}(V) \subset TV$ der Unterraum der symmetrischen Tensoren und $TV \rightarrow SV$ der Faktorraum der symmetrisierten Tensoren. Dann erbt $\text{Sym}(V)$ eine kokommutative Multiplikation mit Koeins und SV eine kommutative Multiplikation mit Eins. Beachte: Die Komposition $\text{Sym}(V) \rightarrow TV \rightarrow SV$ ist nur dann ein Isomorphismus, wenn $\text{char}(k) = 0$.

Beispiel 9.5 (Die Kohomologie topologischer Gruppen) — Für jeden topologischen Raum Z ist die Kohomologie $H^*(Z, k)$ mit dem Cup-Produkt eine graduiert kommutative assoziative k -Algebra mit 1. Es sei jetzt Z eine topologische Gruppe mit Multiplikation $m : Z \times Z$, Neutralelement $e \in Z$ und Invertierungsabbildung $i : Z \rightarrow Z$. Dann definieren die Abbildungen $\mu := m^* : H^*(Z, k) \rightarrow H^*(Z \times Z, k) = H^*(Z, k) \times H^*(Z, k)$, $\varepsilon : H^*(Z, k) \rightarrow H^*(e, k) = k$ zusammen mit $S := i^* : H^*(Z, k) \rightarrow H^*(Z, k)$ eine Hopfalgebrenstruktur auf $H^*(Z, k)$.

9.3 Die Hopfalgebrenstruktur auf $T(G, k)$

Wir haben auf $T(G, k)$ bereits eine antipodische Abbildung definiert: $S(f)(g) = f(g^{-1})$. Als Koeins verwenden wir die Abbildung $\varepsilon : T(G, k) \rightarrow k$, $f \mapsto f(e)$.

Lemma 9.6 — Es sei G eine kompakte Liegruppe.

1. Für jedes $f \in T(G, k)$ liegt die Abbildung $\mu(f)(g_1, g_2) := f(g_1 g_2)$ im Tensorprodukt $T(G, k) \otimes T(G, k)$, d.h. es gibt Funktionen f'_i und f''_i , $i = 1, \dots, n$ mit $f(g_1 g_2) = \sum_i f'_i(g_1) f''_i(g_2)$.

2. $T(G, k)$ ist mit der k -Algebrenstruktur und den Abbildungen S, ε, μ eine Hopfalgebra.

Beweis. 1. Zu jedem $f \in T(G, k)$ gibt es eine endlichdimensionale Darstellung V mit $f \in V^* \otimes_{\text{End}_G(V)} V \subset T(G, k)$. Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $g.v_i = \sum_j f_{ji}(g)v_j$ die zugehörige Matrixdarstellung. Dann ist f eine gewisse Linearkombination der Matrixeinträge f_{ji} . Für diese gilt

$$f_{ji}(gh) = \sum_k f_{jk}(g)f_{ki}(h).$$

Das zeigt:

$$\mu(f_{ji}) = \sum_i f_{jk} \otimes f_{ki} \in T(G, k) \otimes T(G, k).$$

2. Nachrechnen. □

Es sei weiterhin G eine kompakte Liegruppe. Für $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei

$$G_k := \{\varphi : T(G, k) \rightarrow k \mid \text{ein } k\text{-Algebrenhomomorphismus}\}.$$

Nach Konstruktion besitzt G_k eine Einbettung

$$j : G_k \longrightarrow \prod_{f \in T(G, k)} \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto (\varphi(f))_f.$$

Wir versehen G_k mit der Teilraumtopologie des Produktes vermöge der Einbettung j . Das bedeutet: Eine Abbildung $h : X \rightarrow G_k$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $f \in T(G, k)$ die Auswertungsabbildung $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(x)(f)$ stetig ist.

Wir definieren weiter auf G_k eine Verknüpfung durch

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(f) := (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\mu(f)).$$

D.h. wenn $\mu(f) = \sum_i f'_i \otimes f''_i$, dann ist $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(f) = \sum_i \varphi_1(f'_i)\varphi_2(f''_i)$.

Satz 9.7 — Es sei G eine kompakte Liegruppe, $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1. G_k ist eine topologische Gruppe.
2. Die kanonische Abbildung $i_k : G \rightarrow G_k, i_k(g)(f) := f(g)$, ist ein injektiver stetiger Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Für $f \in T(G, k)$ schreiben wir $\mu(f) =: \sum_j f'_j \otimes f''_j$.

Dann hat man $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(f) = \sum_j \varphi_1(f'_j)\varphi_2(f''_j)$. Die Abbildungen $\varphi_1 \mapsto \varphi_1(f'_j)$ und $\varphi_2 \mapsto \varphi_2(f''_j)$ sind definitionsgemäß stetig, also auch die Abbildung $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(f)$. Folglich ist die Verknüpfung $\cdot$ auf G_k stetig. Weil μ eine koassoziative Multiplikation auf $T(G, k)$ ist, ist die Verknüpfung $\cdot$ auf G_k assoziativ.

Es sei $e_k \in G_k$ die Abbildung $e_k(f) := f(e)$. Es folgt

$$(\varphi \cdot e_k)(f) = \sum_j \varphi(f'_j)f''_j(e) = \varphi\left(\sum_j f'_j f''_j(e)\right).$$

Nun ist $(\sum_j f'_j f''_j(e))(g) = \sum_j f'_j(g) f''_j(e) = f(g \cdot e) = f(g)$ für jedes $g \in G$, also $\sum_j f'_j f''_j(e) = f$. Die Rechnung zeigt: $\varphi \cdot e_k = \varphi$. Analog sieht man $e_k \cdot \varphi = \varphi$. Mit anderen Worten: e_k ist ein Neutralelement der Verknüpfung auf G_k .

Weiter setzen wir $\varphi^{-1}(f) := \varphi(S(f))$. Offensichtlich ist die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ stetig. Daß S eine antipodische Abbildung auf $T(G, k)$ ist, bedeutet gerade, daß $m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \mu = \varepsilon$. Also

$$\begin{aligned} (\varphi \cdot \varphi^{-1})(f) &= (\varphi \otimes \varphi^{-1})(\mu(f)) = (\varphi \otimes \varphi)(\text{id} \otimes S)(\mu(f)) \\ &= \varphi((m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \mu)(f)) = \varphi(\varepsilon(f) \cdot 1) = e_k(f). \end{aligned}$$

Analog sieht man $\varphi^{-1} \cdot \varphi = e_k$. Folglich ist φ^{-1} ein multiplikatives Inverses zu φ . Alles zusammengenommen zeigen diese Rechnungen, daß G_k eine topologische Gruppe ist.

Nach Definition der Topologie auf G_k ist i_k stetig. Außerdem gilt

$$(i_k(g_1) \cdot i_k(g_2))(f) = (i_k(g_1) \otimes i_k(g_2))(\mu(f)) = \mu(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2) = i_k(g_1 g_2)(f).$$

Deshalb ist i_k ein Gruppenhomomorphismus.

Weil $T(G, k)$ Punkte in G trennt, ist i_k injektiv. $\square$

Lemma 9.8 — 1. Es sei $r : G \rightarrow \text{GL}_n(k)$ eine endlichdimensionale stetige Darstellung. Durch $\tilde{r}_{k\ell}(\varphi) := \varphi(r_{k\ell})$ wird ein stetiger Homomorphismus $\tilde{r} : G_k \rightarrow \text{GL}_n(k)$ mit $r = \tilde{r} \circ i_k$ definiert.

2. Ist $r : G \rightarrow \text{O}(n)$ eine endlichdimensionale stetige Darstellung, so gilt auch $\tilde{r}(G_{\mathbb{R}}) \subset \text{O}(n)$. 3. Ist $r : G \rightarrow \text{GL}_n(k)$ treu, so gilt dasselbe für $\tilde{r}$.

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Zu 2: Nach Annahme gilt $\sum_j r_{ij} r_{ik} = \delta_{jk}$ für alle j, k . Es folgt

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \tilde{r}_{ij} \tilde{r}_{ik}\right)(\varphi) &= \sum_i \tilde{r}_{ij}(\varphi) \tilde{r}_{ik}(\varphi) = \sum_i \varphi(r_{ij}) \varphi(r_{ik}) \\ &= \varphi\left(\sum_i r_{ij} r_{ik}\right) = \varphi(\delta_{jk}) = \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Zu 3: Wenn r treu ist, wird $T(G, k)$ durch die Koeffizientenfunktionen r_{ij} erzeugt. Stimmen also zwei Algebrenhomomorphismen auf allen r_{ij} überein, so sind sie schon gleich. Anders gesagt, die Funktionen $\tilde{r}_{ij}$ trennen Punkte in $G_{\mathbb{R}}$. $\square$

Lemma 9.9 — Es sei G eine kompakte Liegruppe. Dann ist $G_{\mathbb{R}}$ kompakt.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Einbettung $r : G \rightarrow \text{O}(n)$ für ein geeignetes n . Die Koeffizienten r_{ij} nehmen also auf G nur Werte zwischen -1 und 1 an. Weil die Koeffizienten r_{ij} die gesamte Algebra $T(G, \mathbb{R})$ erzeugen, ist jede Funktion $f \in T(G, \mathbb{R})$ auf G beschränkt. Demnach liegt das Bild von $G_{\mathbb{R}}$ schon in der kompakten Menge (Tychonov)

$$\prod_{f \in T(G, \mathbb{R})} [-\|f\|_{\infty}, +\|f\|_{\infty}].$$

Es genügt daher zu zeigen, daß $G_{\mathbb{R}}$ abgeschlossen in dieser Menge ist. Aber $G_{\mathbb{R}}$ wird durch die folgenden Bedingungen definiert: Ein Tupel (φ_f) gehört genau dann zu $G_{\mathbb{R}}$, wenn $\varphi_{f_1} + \varphi_{f_2} = \varphi_{f_1+f_2}$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_{\lambda f} = \lambda \varphi_f$ und $\varphi_{f_1} \varphi_{f_2} = \varphi_{f_1 f_2}$. Jede dieser Bedingungen definiert eine abgeschlossene Teilmenge, und $G_{\mathbb{R}}$ ist der Durchschnitt aller dieser abgeschlossenen Teilmengen und daher abgeschlossen. $\square$

Satz 9.10 — Die Abbildung $i_{\mathbb{R}} : G \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen.

Beweis. Wir wissen, daß $i_{\mathbb{R}}$ ein stetigen injektiver Homomorphismus von topologischen Gruppen ist. Die Abbildung $f \mapsto f \circ i_{\mathbb{R}}$ definiert einen Einschränkungshomomorphismus $\text{res} : T(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \rightarrow T(G, \mathbb{R})$. Umgekehrt hat man eine Abbildung $\alpha : T(G, \mathbb{R}) \rightarrow T(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ durch $\alpha(f)(\varphi) = \varphi(f)$. Offensichtlich ist $\text{res} \circ \alpha = \text{id}_{T(G, \mathbb{R})}$. Es sei nun $r : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ eine treue Darstellung. Wir haben oben gesehen, daß dann auch die induzierte Darstellung $\tilde{r} : G_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ treu ist, so daß die Funktionen $\tilde{r}_{ij} = \alpha(r_{ij})$ Punkte in $G_{\mathbb{R}}$ trennen. Insbesondere liegt $\alpha(T(G, \mathbb{R}))$ dicht in $T(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$. Das Bild ist aber links- wie rechtstranslationsinvariant, also gleich $T(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$. Daraus folgt, daß $i_{\mathbb{R}}$ bijektiv und somit ein Homöomorphismus ist. $\square$

9.4 Die Komplexifizierung von G

Es sei durchgängig G eine kompakte Liegruppe.

Jede Funktion $f_{\varphi, v} \in T(G, \mathbb{R})$ mit $v \in V$, $\varphi \in V^*$ für eine reelle Darstellung V läßt sich auch als eine Funktion desselben Typs für die komplexifizierte Darstellung $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ auffassen. Dies definiert eine injektive Abbildung $T(G, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow T(G, \mathbb{C})$. Ist umgekehrt W eine komplexe Darstellung mit Matrixeinträgen $f_{ij} \in T(G, \mathbb{C})$, dann sind die Matrixeinträge der zugrundeliegenden reellen Darstellung von der Form $\text{Re}(f_{ij})$ und $\text{Im}(f_{ij})$. Da $T(G, \mathbb{C})$ invariant unter komplexer Konjugation ist, liegen mit jeder Funktion auch deren Real- und Imaginärteil in $T(G, \mathbb{C})$. Das zeigt:

$$T(G, \mathbb{C}) = T(G, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Auf der Menge $G_{\mathbb{C}}$ aller $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismen $\varphi : T(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ wird durch

$$\bar{\varphi}(f) := \overline{\varphi(\bar{f})}$$

eine Involution definiert: Es ist klar, daß $\bar{\varphi}$ selbst wieder ein $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus ist und daß $\bar{\bar{\varphi}} = \varphi$. Außerdem gilt: $\bar{e}_{\mathbb{C}} = e_{\mathbb{C}}$ und $\bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 = \overline{\varphi_1 \cdot \varphi_2}$, denn

$$(\bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2)(f) = \sum_j \bar{\varphi}_1(f'_j) \bar{\varphi}_2(f''_j) = \sum_j \overline{\varphi_1(f'_j) \varphi_2(f''_j)} = \overline{(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\bar{f})} = \overline{\varphi_1 \cdot \varphi_2}(f).$$

Satz 9.11 — Die Abbildung $G_{\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}$, $\varphi \mapsto (\varphi_{\mathbb{C}} : \lambda f \mapsto \lambda \varphi(f))$, mit $f \in T(G, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ist ein Isomorphismus auf die Untergruppe aller $\varphi \in G_{\mathbb{C}}$ mit $\varphi = \bar{\varphi}$.

Beweis. Jeder $\mathbb{R}$ -Algebrenhomomorphismus $\varphi : T(G, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\mathbb{C}$ -lineare Fortsetzung einen $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus $\varphi_{\mathbb{C}} : T(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\bar{\varphi}_{\mathbb{C}} = \varphi_{\mathbb{C}}$. Ist umgekehrt $\psi \in T(G, \mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus mit $\bar{\psi} = \psi$, so hat man für jede reellwertige Funktion $f \in T(G, \mathbb{C})$ die Gleichung $\psi(f) = \bar{\psi}(f) = \bar{\psi}(\bar{f}) = \overline{\psi(\bar{f})}$, also $\psi(f) \in \mathbb{R}$, d.h. ψ liegt im Bild von $T(G, \mathbb{R})$. Nach Konstruktion ist die Abbildung $G_{\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}$ stetig und injektiv und deshalb ein Homöomorphismus aufs Bild. $\square$

Es sei $r : G \rightarrow \mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine treue unitäre Darstellung von G , es sei $\tilde{r} : G_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die zugehörige treue Fortsetzung. Dann wird $T(G, \mathbb{C})$ von den Einträgen r_{ij} und ihren komplex Konjugierten $\bar{r}_{ij}$ erzeugt!

Die Algebra $T(G, \mathbb{C})$ ist endlich erzeugt, etwa von den Funktionen $x_1, \dots, x_n$. Der Kern des surjektiven Ringhomomorphismus

$$\pi : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow T(G, \mathbb{C}), X_i \mapsto x_i$$

ist endlich erzeugt (Hilbertscher Basissatz), etwa $\ker(\pi) = (u_1, \dots, u_m) =: J$. Es sei $V(J) \subset \mathbb{C}^n$ die Nullstellenmenge des Ideals J . Die Punkte in $V(J)$ entsprechen bijektiv den maximalen Idealen $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/J \cong T(G, \mathbb{C})$ und damit den Algebrenhomomorphismen $\varphi : T(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ (Hilbertscher Nullstellensatz). Deshalb ist die Abbildung

$$a : G_{\mathbb{C}} \rightarrow V(J), \varphi \mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$$

eine stetige Bijektion. Schreibt man umgekehrt eine Funktion $f \in T(G, \mathbb{C})$ in der Form $f = p(x_1, \dots, x_n)$ für ein geeignetes Polynom p , das bis auf Elemente in J eindeutig ist, so ist die Umkehrabbildung $a : V(J) \rightarrow G_{\mathbb{C}}$, komponiert mit der Auswertung $G_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ in f nichts anderes als die Einschränkung von f auf $G_{\mathbb{C}}$, also stetig. Das zeigt:

$$G_{\mathbb{C}} \rightarrow V(J)$$

ist ein Homöomorphismus, wenn $V(J)$ die metrische Topologie des $\mathbb{C}^n$ trägt. Die Abbildung ist dann automatisch auch reell differenzierbar, und sogar holomorph. Zusammengefaßt:

Satz 9.12 — Die Komplexifizierung $G_{\mathbb{C}}$ einer kompakten topologischen Gruppe G ist eine algebraische Gruppe.

Es sei allgemein $H \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und daher eine komplexe Lieuntergruppe mit $H^* = H$.

Lemma 9.13 — Es sei $H \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine algebraische Untergruppe mit der Eigenschaft $H^* = H$. Ist $g \in H$ und ist $g = uh$ die Polarzerlegung in eine unitäre Matrix u und eine positiv definite hermitesche Matrix h , so liegen auch u und h in H .

Beweis. Es sei $S := g^*g \in H$. Weil S positiv hermitesch ist, gibt es eine unitäre Matrix Q und eine positiv definite Diagonalmatrix D mit $S = Q^*DQ$. Insbesondere liegt D in der algebraischen Untergruppe $\tilde{H} = QHQ^* \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Es seien $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß $\exp(y_i) = D_{ii}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann verschwindet $p(\exp(my_1), \dots, \exp(my_n))$ für jedes Polynom p im Verschwindungsideal von $\tilde{H}$ und jede ganze Zahl m , weil $D^m \in H$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Multipliziert man diesen Ausdruck aus, so erhält man

$$\tilde{p}(t) := p(\exp(ty_1), \dots, \exp(ty_n)) = \sum_j \alpha_j e^{\beta_j t}$$

mit irgendwelchen Einträgen $\alpha_j \in \mathbb{C}$ und $\beta_j \geq 0$.

Lemma 9.14 — Aus $\tilde{p}(m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ folgt $\tilde{p}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß in dem Ausdruck

$$\tilde{p}(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{\beta_j t}$$

alle Exponenten β_j paarweise verschieden sind. Die Matrix $(\exp^{k\beta_j})_{j,k=1,\dots,N}$ ist eine Vandermonde-Matrix mit Determinante $\prod_{k < \ell} (\exp^{\beta_k} - \exp^{\beta_\ell}) \neq 0$. Deshalb müssen alle α_j verschwinden. $\square$

Insbesondere gilt $\tilde{p}(1/2) = 0$. Deshalb verschwindet p auf der eindeutig bestimmten positiv definiten Wurzel $\sqrt{D}$. Anders gesagt: $\sqrt{D}$ ist eine gemeinsame Nullstelle des Verschwindungsideals von $\tilde{H}$ und liegt somit in $\tilde{H}$ und $h := Q^*\sqrt{D}Q$ ist eine Wurzel aus S und liegt in H . Schließlich liegt auch die unitäre Matrix $u = gh^{-1}$ in H . $\square$

§10 Invariantentheorie

Literatur: Newstead, Hilbert, Mukai, Mumford.

In der einfachsten Form lautet die Hauptaufgabe der klassischen Invariantentheorie wie folgt: Gegen sei eine lineare algebraische Gruppe G und eine reguläre endlichdimensionale Darstellung V von G .

1. Bestimme alle invarianten Funktionen $f \in \mathbb{C}[V]$, d.h. alle regulären Funktionen $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f^g = f$ für alle $g \in G$. Es ist klar, daß mit f und h auch $f + h$ und $f \cdot h$ invariant sind. Allgemeiner ist $\mathbb{C}[V]^G \subset \mathbb{C}[V]$ eine $\mathbb{C}$ -Unteralgebra. Genauer wird nach einem Erzeugersystem für die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathbb{C}[V]^G$ gefragt.
2. Ist ein Erzeugersystem f_λ , $\lambda \in \Lambda$ gegeben, bestimme alle Relationen zwischen den Erzeugern, das sind die Elemente im Kern des Homomorphismus $\Phi : \mathbb{C}[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}] \rightarrow \mathbb{C}[V]^G$, $X_\lambda \mapsto f_\lambda$. Genauer wird nach einem Erzeugersystem für das Ideal $\ker(\Phi)$ gefragt.

Beispiel 10.1 — Ein einfaches Beispiel ist die Wirkung von $\mathbb{Z}/2$ auf $V = \mathbb{C}^2$ durch Vorzeichenwechsel. Bezeichnet τ den Erzeuger von $\mathbb{Z}/2$ und z_1 und z_2 die Standardkoordinatenfunktionen auf $\mathbb{C}^2$, so ist also $z_i^\tau = -z_i$. Ein homogenes Polynom $f(z_1, z_2)$ ist genau dann invariant, wenn der Grad gerade ist. Deshalb wird $\mathbb{C}[\mathbb{C}^2]^{\mathbb{Z}/2}$ von den Funktionen $a = z_1^2$, $b = z_1 z_2$ und $c = z_2^2$ erzeugt, und die Relationen zwischen diesen Invarianten werden von $ac - b^2$ erzeugt. Es gilt also $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\mathbb{Z}/2} = \mathbb{C}[a, b, c]/(ac - b^2)$.

Beispiel 10.2 — Ein anderes bekanntes Beispiel aus der Algebra ist die Permutationswirkung der symmetrischen Gruppe S_n auf $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Der Invariantenring wird hier von den elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ erzeugt, zwischen denen keine Relationen bestehen, die also algebraisch unabhängig sind.

Beispiel 10.3 — Ein im 19. Jahrhundert viel untersuchtes Problem ist das der Kovarianten von binären Formen. Die Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ operiert in natürlicher Weise auf $\mathbb{C}^2$ und dem Koordinatenring $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ wie folgt: $x_i^g = \sum_j g_{ij} x_j$. Eine binäre Form vom Grad d ist eine Funktion

$$a = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} a_i x_1^{d-i} x_2^i.$$

Wenn die Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ auf dem Tupel $(a_0, \dots, a_d)$ so operieren soll, daß der Ausdruck a invariant bleibt, muß gelten

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} a_i^g x_1^{d-i} x_2^i &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} a_i (x_1^{g^{-1}})^{d-i} (x_2^{g^{-1}})^i \\ &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} a_i (g_{11}x_1 - g_{21}x_2)^{d-i} (-g_{12}x_1 + g_{22}x_2)^i \end{aligned}$$

Man findet jetzt a_i^g durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich. Zum Beispiel ergibt sich für $d = 2$ und

$$a = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$$

die Wirkung

$$\begin{aligned} a_0^g &= a_0g_{11}^2 - 2a_1g_{11}g_{12} + a_2g_{12}^2, \\ a_1^g &= -g_{11}g_{21}a_0 + (g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21})a_1 - g_{21}g_{22}a_2, \\ a_2^g &= g_{21}^2a_0 - 2g_{21}g_{22}a_1 + g_{22}^2a_2. \end{aligned}$$

Unter einer binären Invarianten vom Grad d versteht man eine invariante Funktion in den Koeffizienten $a_0, \dots, a_d$ der Form a , und allgemeiner ist eine Kovariante eine invariante Funktion in $a_0, \dots, a_d, x_1, x_2$. Nach Konstruktion ist a selbst eine Kovariante.

Im Falle $d = 1$ ist $a = a_0x_1 + a_1x_2$ die einzige Kovariante in dem Sinne, daß jede andere Kovariante ein Polynom in a ist.

Im Falle $d = 2$ kommt zu $a = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$ die Diskriminante $D := a_0a_2 - a_1^2$ als Invariante hinzu.

Man zeigt allgemein, daß mit zwei Kovarianten f_1 und f_2 auch die Jacobimatrix $J(f_1, f_2) := \det(\partial f_i / \partial x_j)$ und mit einer Kovarianten f auch die Determinante der Hessematrix $H(f) := \det(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$ Kovarianten sind. So erhält man im Falle $d = 2$ aus der Kovarianten a die Kovariante $H(a) = 4D$.

Schon der Fall $d = 3$ ist komplizierter. Aus der Kovarianten

$$a = a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3$$

erhält man $H(a) = 36H$ mit

$$H = (a_0a_2 - a_1^2)x_1^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)x_1x_2 + (a_1a_3 - a_2^2)x_2^2.$$

Aus H erhält man durch erneute Bildung der Hessedeterminanten bis auf das Vorzeichen genau die Diskriminante von a , d.h. $H(H) = -D$ mit der Invarianten

$$D := a_0^2a_3^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2.$$

Ein weitere Kovariante liefert $J(a, H) = 3J$ mit

$$\begin{aligned} J &= (a_3a_0^2 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)x_1^3 + 3(a_1^2a_2 + a_0a_1a_3 - 2a_0a_2^2)x_1^2x_2 \\ &\quad + 3(a_1^2a_3 - a_1a_2^2 - a_0a_2a_3)x_1x_2^2 + (3a_1a_2a_3 - 2a_2^3 - a_0a_3^2)x_2^3. \end{aligned}$$

Die Kovarianten a, H, D und J erzeugen den Ring aller Kovarianten und genügen der einzigen Relation

$$4H^3 + J^2 = a^2D.$$

Beispiel 10.4 (Lösen kubischer Gleichungen) — Man kann die Kovarianten H und D einer kubischen binären Form a benutzen, um kubische Gleichungen zu lösen. Die Suche nach Nullstellen eines Polynoms $a_0X^3 + 3a_1X^2 + 3a_2X + a_3$ ist nämlich äquivalent zum Problem, die Form $a = a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3$ zu faktorisieren.

Wir bilden $H = b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2$ mit $b_0 = a_0a_2 - a_1^2$, $b_1 = a_0a_3 - a_1a_2$ und $b_2 = a_1a_3 - a_2^2$ und die Diskriminante $D = b_1^2 - 4b_0b_2$. Die Koeffizienten von H genügen den Relationen

$$a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 = 0. \quad (10.1)$$

Wir unterscheiden die Fälle:

1. $H = 0$. Falls $a_0 \neq 0$, wählen wir c_0 mit $c_0^3 = a_0$ und setzen $c_1 := a_1/c_0^2$. Falls $a_0 = 0$, aber $a_3 \neq 0$, wählen wir c_1 mit $c_1^3 = a_3$ und setzen $c_0 := a_2/c_1^2$. Falls $a_0 = a_3 = 0$, setzen wir $c_0 = c_1 = 0$. In jedem Falle gilt nun $a = (c_0x_1 + c_1x_2)^3$. Die kubische Gleichung hat also einen dreifachen Faktor.
2. $H \neq 0$, aber $D = 0$. Dann hat H einen doppelten Faktor $\xi_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$. Man wählt $\xi_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$ so, daß $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ die Determinante 1 hat. In den neuen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 hat man $a = A_0\xi_1^3 + 3A_1\xi_1^2\xi_2 + 3A_2\xi_1\xi_2^2 + A_3\xi_2^3$ und $H = \lambda\xi_1^2$, so daß $A_0A_3 - A_1A_2$ und $A_1A_3 - A_2^2$ verschwinden müssen. Aus den Relationen (10.1) folgt $A_2 = A_3 = 0$ und somit $a = (A_0\xi_1 + A_1\xi_2)\xi_1^2$. Die Form a zerlegt sich also in einen doppelten Faktor und einen davon linear unabhängigen.
3. $D \neq 0$. Dann besitzt H eine Faktorisierung $H = \lambda\xi_1\xi_2$ in zwei linear unabhängige Faktoren $\xi_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$ und $\xi_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$, die so normiert werden, daß $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1$. Schreibt man wie im vorigen Fall a und H in den neuen Koordinaten, so folgt aus $H = \lambda\xi_1\xi_2$, daß $A_0A_2 - A_1^2$ und $A_1A_3 - A_2^2$ verschwinden müssen. Aus den Relationen (10.1) folgt nun $A_1 = A_2 = 0$ und somit $a = A_0\xi_1^3 + A_3\xi_2^3 = \prod_{k=0}^2 (c_0\xi_1 + \rho^k c_1\xi_2)$ mit dritten Wurzeln c_0 aus A_0 und c_1 aus A_3 und einer primitiven dritten Einheitswurzel ρ . Die Form a hat also drei linear unabhängige Faktoren.

In jedem Falle läßt sich also an der Hesseform H zu a sofort ablesen, welcher der möglichen Faktorisierungsfälle eintritt, und eine Faktorisierung von H führt zu einer Faktorisierung von a . $\square$

10.1 Invarianten für die klassischen Weylgruppen

Die klassischen Weylgruppen vom Typ A_ℓ , B_ℓ und D_ℓ sind die Gruppen $W(A_\ell) = S_{\ell+1}$, $W(B_\ell) = (\mathbb{Z}/2)^\ell \rtimes S_\ell$ und $W(D_\ell) = (\mathbb{Z}/2)_0^\ell \rtimes S_\ell$. Wir nehmen den Begriff Weylgruppe zunächst als Bezeichnung hin. Der Zusammenhang zu den Liegruppen

$SL_{\ell+1}(\mathbb{C})$, $SO_{2\ell+1}(\mathbb{C})$ und $SO_{2\ell}$ wird sich später ergeben. Alle Gruppen operieren auf einem ℓ -dimensionalen Raum, und zwar wie folgt:

Typ A. Die Symmetrische Gruppe $S_{\ell+1}$ operiert auf $\mathbb{C}^{\ell+1}$ durch Permutation der Koeffizienten. Der Raum zerlegt sich in zwei irreduzible Komponenten: Die Diagonale $D := \{x \mid x_1 = \dots = x_{\ell+1}\}$ und die Hyperebene $H = \{x \mid x_1 + \dots + x_{\ell+1} = 0\}$. Der Koordinatenring von $\mathbb{C}^{\ell+1}$ ist der Polynomring mit den Unbestimmten $x_1, \dots, x_{\ell+1}$. Der Invariantenring der Unterring, der von den elementarsymmetrischen Polynomen $\sigma_1, \dots, \sigma_{\ell+1}$ erzeugt wird. Koordinatenring und Invariantenring von H erhält man einfach durch Herausdividieren der Invarianten σ_1 , d.h. $\mathbb{C}[H]^{W(A_\ell)} = \mathbb{C}[\sigma_2, \dots, \sigma_{\ell+1}]$.

Typ B. Die Weylgruppe $W(B_\ell)$ ist das semidirekte Produkt $(\mathbb{Z}/2)^\ell \rtimes S_\ell$. (Allgemein nennt man Gruppen der Form $G^n \rtimes S_n$, wo S_n durch Permutation der Faktoren auf dem Normalteiler G^n operiert, Kranzprodukte und schreibt $G \wr S_n$.) Der Normalteiler $(\mathbb{Z}/2)^\ell$ operiert auf $\mathbb{C}^\ell$ durch Vorzeichenwechsel auf den einzelnen Koordinaten, S_ℓ durch Permutation der Koordinaten.

Wann immer man allgemein in einer Gruppe G einen Normalteiler N hat, kann man die Invarianten einer Wirkung auf einer Menge X , einem Ring R etc schrittweise berechnet: Es gibt eine wohldefinierte Wirkung der Faktorgruppe G/N auf der Menge X^N , und $(X^N)^{G/N} = X^G$.

Im vorliegenden Fall sind die Invarianten der Wirkung von $(\mathbb{Z})^\ell$ offensichtlich die Polynome in $x_1, \dots, x_\ell$ in den jede Koordinate nur mit geradem Exponenten vorkommt, d.h. $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_\ell]^{(\mathbb{Z}/2)^\ell} = \mathbb{C}[x_1^2, \dots, x_\ell^2]$. Die Invarianten unter G sind also die elementarsymmetrischen Polynome in den Quadraten der Koordinaten:

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_\ell]^{W(B_\ell)} = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_\ell], \quad t_i = \sigma_i(x_1^2, \dots, x_\ell^2).$$

Typ C. Die Weylgruppe $W(D_\ell)$ ist eine Untergruppe von $W(B_\ell)$. Wir bezeichnen mit $(\mathbb{Z}/2)_0^\ell \subset (\mathbb{Z}/2)^\ell$ die Untergruppe aller ℓ -Tupel, deren Summe 0 ist. Diese Untergruppe ist offensichtlich invariant unter der Wirkung der symmetrischen Gruppe, und so erhält man ein semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/2)_0^\ell \rtimes S_\ell$. Die Wirkung auf $\mathbb{C}^\ell$ ist dieselbe wie die Wirkung von $W(B_\ell)$. Der Normalteiler $(\mathbb{Z}/2)_0^\ell$ wird von denjenigen Operationen erzeugt, die gleichzeitig Vorzeichenwechsel an zwei verschiedenen Koordinaten vornehmen. Man überzeugt sich leicht, daß die Invarianten genau von den Quadraten der Koordinaten $x_1^2, \dots, x_\ell^2$ und dem Produkt $x_1 \cdots x_\ell$ erzeugt werden. Zwischen diesen Invarianten besteht eine Relation: $(x_1 \cdots x_\ell)^2 = x_1^2 \cdots x_\ell^2$. Da $x_1 \cdots x_\ell$ bereits invariant unter S_ℓ ist, erhält man insgesamt die Invarianten $t_1, \dots, t_\ell, x_1 \cdots x_\ell$. Wegen $(x_1 \cdots x_\ell)^2 = t_\ell$, ist t_ℓ überflüssig. Man erhält:

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_\ell]^{W(D_\ell)} = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_{\ell-1}, x_1 \cdots x_\ell], \quad t_i = \sigma_i(x_1^2, \dots, x_\ell^2).$$

In allen drei Fällen gibt es keine Relationen zwischen den Invarianten. Das ist ein allgemeines Ergebnis von Chevalley und Shephard-Todd, auf das wir später zurückkommen.

10.2 Das 14. Hilbertsche Problem

Hilbert formulierte auf dem Pariser Kongreß von 1900 eine Reihe von Problemen, von denen das 14. Problem der Invariantentheorie gewidmet ist. In Hilberts Vortrag ist die Frage etwas allgemeiner formuliert und schließt die folgende Fassung als Spezialfall ein: Ist $\mathbb{C}[V]^G$ endlich erzeugt?

Eine Gruppe linear algebraische Gruppe G über einem Körper k heißt linear reduktiv, wenn es zu jedem invarianten Unterraum in einer regulären Darstellung ein invariantes Komplement gibt. Eine Darstellung V heißt dabei regulär, wenn $\dim_k V < \infty$ und wenn $G \rightarrow \mathrm{GL}_k(V)$ eine reguläre Abbildung ist.

Satz 10.5 — *Es sei G linear reduktiv. Dann zerfällt jede reguläre Darstellung in eine direkte Summe von irreduziblen regulären Darstellungen.*

Folgerung 10.6 — *Es sei G linear reduktiv.*

1. *Zu jeder regulären Darstellung V gibt es genau eine äquivariante Projektion $E_V : V \rightarrow V^G$.*
2. *Ist $f : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von regulären Darstellungen, so gilt $E_W \circ f = f \circ E_V$. Ist außerdem f surjektiv, so ist auch $f : V^G \rightarrow W^G$ surjektiv.*

Eine Darstellung V heißt rational, wenn jeder Vektor $v \in V$ in einer endlichdimensionalen regulären Unterdarstellung von V liegt. Dasselbe gilt dann auch für jede endliche Teilmenge von V . Für eine rationale Darstellung V ist der Reynoldsoperator $E_V : V \rightarrow V^G$, der auf jeder endlichdimensionalen regulären Unterdarstellung $W \subset V$ durch $E_V|_W := E_W$ gegeben ist, wohldefiniert. Das folgt aus Teil 2 der Folgerung.

Es sei A eine k -Algebra mit einer k -linearen rationalen G -Wirkung, die die Algebrenstruktur erhält, d.h. $(fh)^g = f^g + h^g$. Dann ist $A^G \subset A$ eine k -Unteralgebra.

Lemma 10.7 — *Für jede Invariante $h \in A^G$ und jedes $f \in A$ gilt $E_A(fh) = hE_A(f)$.*

Beweis. Die Multiplikation mit h ist eine äquivariante Abbildung $A \rightarrow A$ und deshalb mit dem Reynoldsoperator verträglich. $\square$

Satz 10.8 (Hilbert) — *Es sei G linear reduktiv und W eine reguläre Darstellung. Dann ist der Invariantenring $(S^*W)^G$ endlich erzeugt.*

Beweis. Ist $f \in (S^*W)^G$ invariant, so auch jede homogene Komponente von f . Der Reynoldsoperator E ist offenbar graderhaltend. Es sei $I \subset S^*W_+$ das Ideal, das von allen homogenen Invarianten von positivem Grad erzeugt wird, und $f_1, \dots, f_n$ ein endliches Erzeugersystem aus homogenen Invarianten. Ein solches existiert nach dem Hilbertschen Basissatz. Wir zeigen, daß $(S^*W)^G$ als k -Algebra von $f_1, \dots, f_n$

erzeugt wird. Andernfalls gibt es eine Invariante f , die nicht in der k -Algebra $A = k[f_1, \dots, f_n]$ liegt. Dann liegt auch wenigstens eine homogene Komponente von f nicht in A . Ohne Einschränkung sei f eine homogene Invariante von minimalem Grad, die nicht in A liegt. Weil $f \in I$, gibt es $h_1, \dots, h_n \in A$ mit $f = \sum_i h_i f_i$. Ohne Einschränkung sind die h_i homogen vom Grad $\deg(h_i) = \deg(f) - \deg(f_i) < \deg(f)$. Eine Anwendung des Reynoldoperators liefert $f = \sum_i f_i E(h_i)$. Die Elemente $E(h_i)$ sind homogen, invariant und von kleinerem Grad als f . Nach Wahl von f müssen alle $E(h_i)$ in A liegen. Also gilt dasselbe für f . Widerspruch. $\square$

Folgerung 10.9 — *Es sei G linear reaktiv und A eine endlich erzeugte k -Algebra mit rationaler G -Wirkung. Dann ist A^G endlich erzeugt als k -Algebra.*

Beweis. Weil die Wirkung rational ist, gibt es eine endlichdimensionale reguläre Unterdarstellung $W \subset A$ die ein gegebenes endliches Erzeugersystem enthält. Der natürliche Homomorphismus $S^*W \rightarrow A$ ist äquivariant und surjektiv. Dann ist auch $(S^*W)^G \rightarrow A^G$ surjektiv, und somit A^G endlich erzeugt, weil $(S^*W)^G$ endlich erzeugt ist. $\square$

Satz 10.10 (Nagata)— *Es sei $N = n^2 \geq 16$ und $G \subset \mathbb{C}^N$ ein allgemeiner Unterraum der Kodimension 3, der auf $R = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n]$ durch Scherung operiert: $g \cdot p_i = p_i$ und $g \cdot q_i = q_i + g_i p_i$. Dann ist R^G nicht endlich erzeugt.*

Mukai hat diesen Satz dahingehend verschärft, daß die Behauptung sogar für $N = 9$ gilt. Wir beweisen diese Verschärfung von Mukai und folgen dabei seinem Buch

§11 Liealgebren

Wir nehmen für den gesamten Abschnitt über Liealgebren an, daß der Grundkörper K die Charakteristik 0 hat.

11.1 Liealgebren, Unteralgebren und Ideale

Definition 11.1 — Eine Lieklammer auf einem K -Vektorraum $\mathfrak{g}$ ist eine K -bilineare Abbildung $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. $[-, -]$ ist alternierend: Für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt $[x, x] = 0$.
2. $[-, -]$ genügt der Jacobi-Identität⁷:
Für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Eine Liealgebra über K ist ein K -Vektorraum $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer Lieklammer. Ein Homomorphismus von Liealgebren $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ist eine K -lineare Abbildung mit $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$. Ein Homomorphismus ist ein Isomorphismus, wenn φ bijektiv ist. In diesem Falle ist φ^{-1} ebenfalls ein Isomorphismus. Ein Untervektorraum $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ist eine Unterliealgebra, wenn $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, und ein Ideal, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.

Es folgt aus der einfachen Rechnung

$$[x, y] + [y, x] = [x + y, x + y] - [x, x] - [y, y] = 0,$$

daß jede alternierende Bilinearform schiefssymmetrisch ist. Da die Charakteristik des Grundkörpers nicht 2 ist, gilt auch die Umkehrung. Weil $[-, -]$ alternierend ist, gibt es in Liealgebren keinen Unterschied zwischen Links- und Rechtsidealen.

Die Einträge in den drei Summanden der Jacobiidentität sind zyklisch vertauscht. In dieser Form läßt sich die Identität leicht merken. Mit Hilfe der Schiefssymmetrie kann man die Jacobiidentität auf vielfache Weise umschreiben. Beim praktischen Rechnen ist die folgende Variante oft brauchbarer:

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g} : \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Die Nullabbildung $[x, y] = 0$ für alle x, y erfüllt trivialerweise alle Voraussetzungen einer Lieklammer. Eine Liealgebra mit trivialer Lieklammer heißt abelsch.

Beispiel 11.2 — Das fundamentale Beispiel einer nichtabelschen Liealgebra ist der Vektorraum $K^{n \times n}$ der $n \times n$ -Matrizen mit Werten in K versehen mit der Lieklammer

$$[A, B] := AB - BA, \quad A, B \in K^{n \times n}.$$

Wir bezeichnen diese Liealgebra mit $\mathfrak{gl}_n(K)$, um sie von der assoziativen Algebra $K^{n \times n}$ zu unterscheiden.

⁷Carl Gustav Jacob Jacobi, * 10.12.1804 † 18.2.1851

Beispiel 11.3 — Der Raum $\Theta(M)$ der globalen differenzierbaren Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine unendlichdimensionale reelle Liealgebra bezüglich der Klammer $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$.

Beispiel 11.4 — Es sei G eine reelle Liegruppe und $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = T_e G$ der Tangentialraum an das Neutralelement. Der Raum der linksinvarianten Vektorfelder $\Theta(G)^{\text{inv}} \subset \Theta(G)$ ist eine Unterliealgebra. Die Auswertungsabbildung $\varepsilon : \Theta(G)^{\text{inv}} \rightarrow \mathfrak{g}, X \mapsto X(e)$, ist ein Vektorraumisomorphismus, und durch Übertragung der Lieklammer wird $\mathfrak{g}$ zu einer reellen Liealgebra. Im Falle $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ ist diese Lieklammer genau der gewöhnliche Kommutator von Matrizen. Dasselbe gilt folglich auch für jede abgeschlossene Lieuntergruppe von $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Unter einer klassischen Liealgebra versteht man eine der folgenden Liealgebren:

$$A_n: \mathfrak{sl}_{n+1}(K) = \{A \in \mathfrak{gl}_{n+1}(K) \mid \text{tr}(A) = 0\}.$$

$$B_n: \mathfrak{so}(Q) := \{A \in \mathfrak{gl}_{2n+1}(K) \mid A^t Q + Q A = 0\}, \text{ wobei } Q \text{ eine nicht ausgeartete symmetrische Matrix ist von ungeradem Rang ist.}$$

$$C_n: \mathfrak{sp}(\Omega) := \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(K) \mid A^t \Omega + \Omega A = 0\}, \text{ wobei } \Omega \text{ eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Matrix ist, notwendigerweise von geradem Rang.}$$

$$D_n: \mathfrak{so}(Q) := \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(K) \mid A^t Q + Q A = 0\}, \text{ wobei } Q \text{ eine nicht ausgeartete symmetrische Matrix von geradem Rang ist.}$$

Die Gründe, die Fälle B und D getrennt aufzulisten, werden sich später erschließen. Im Typ C_n führen verschiedene Wahlen der schiefsymmetrischen Matrix Ω zu isomorphen Liealgebren. In der Regel wählt man

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

und bezeichnet die zugehörige Liealgebra mit $\mathfrak{sp}_{2n}$. Bei den Typen B und D können verschiedene symmetrische Matrizen Q zu nicht isomorphen Liealgebren führen, wenn der Körper K nicht algebraisch abgeschlossen ist. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, können alle nicht ausgearteten symmetrischen Matrizen durch Basiswechsel $Q \mapsto S^t Q S$ ineinander transformiert werden. Die zugehörigen Liealgebren sind also alle isomorph. Typische Normierungen von Q sind

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ oder } I' = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & / & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Beispiel 11.5 — Allgemeiner sei A eine assoziative Algebra, d.h. ein K -Vektorraum mit einer assoziativen K -bilinearen Abbildung $\circ : A \times A \rightarrow A$. Wir setzen aber nicht voraus, daß es eine Eins gibt oder daß die Multiplikation kommutativ ist. Wir definieren auf A eine Klammer durch

$$[a, b] := a \circ b - b \circ a.$$

Es ist klar, daß diese Klammer alternierend ist. Dank der Assoziativität von $\circ$ genügt $[-, -]$ der Jacobiidentität.

Beispiel 11.6 — Es sei A eine nicht notwendig assoziative K -Algebra. Eine K -lineare Abbildung $\delta : A \rightarrow A$ ist eine Derivation, wenn δ der Leibnizregel genügt: $\delta(ab) = \delta(a) \circ b + a \circ \delta(b)$. Der Raum $\text{Der}(A) \subset \mathfrak{gl}_K(A)$ aller Derivationen ist ein Liealgebra mit der Klammer $[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$.

Beispiel 11.7 (Witt-Algebra) — Es sei $A = K[t, t^{-1}]$ der Polynomring in einer Unbestimmten t , in dem das Element t invertiert ist. Eine Derivation $\delta : A \rightarrow A$ ist durch die Angabe von $\delta(t)$ bereits vollständig bestimmt. Denn induktiv folgt aus der Leibnizregel

$$\delta(t^n) = \sum_{i=1}^n t^{i-1} \delta(t) t^{n-i}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Beispiel ist A kommutativ, und man darf t und $\delta(t)$ vertauschen. Man erhält so $\delta(t^n) = nt^{n-1}\delta(t)$ zunächst für alle natürlichen Zahlen. Benutzt man

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + \delta(1) \cdot 1 = 2\delta(1) = 0$$

und

$$0 = \delta(1) = \delta(t \cdot t^{-1}) = \delta(t)t^{-1} + t\delta(t^{-1})$$

also $\delta(t^{-1}) = -t^{-2}\delta(t)$, so bekommt man $\delta(t^n) = nt^{n-1}\delta(t)$ für alle ganzen Zahlen n . Wir setzen zur Abkürzung $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$. Die Abbildung

$$A \rightarrow \text{Der}_K(A), f \mapsto (f\partial_t : g \mapsto fg')$$

ist ein Vektorraumisomorphismus. Die Lieklammer auf $\text{Der}_K(A)$ ist durch die Gleichung

$$[f\partial_t, g\partial_t] = (fg' - gf')\partial_t$$

gegeben. Der Raum der Derivationen besitzt eine Basis aus Elementen

$$L_n := -t^{n+1}\partial_t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Und mit Hilfe dieser Basis läßt sich die Lieklammer auch so charakterisieren:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m}.$$

Die Algebra $\text{Der}_K(K[t, t^{-1}])$ heißt Witt-Algebra⁸. Eine zentrale Erweiterung der Witt-Algebra, die Virasoro-Algebra⁹, wird uns später im Detail beschäftigen.

⁸Ernst Witt *1911 †1991

⁹Miguel Virasoro

Beispiel 11.8 — Die direkte Summe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ zweier Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ ist in natürlicher Weise wieder eine Liealgebra, wenn man die Lieklammer komponentenweise definiert:

$$[(x, a), (y, b)] := ([x, y], [a, b])$$

mit $x, y \in \mathfrak{g}$ und $a, b \in \mathfrak{h}$. Genauso können wir für eine Familie $\{\mathfrak{g}_i\}_{i \in I}$ von Liealgebren eine Lieklammer auf dem direkten Produkt $\prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ und der direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ definieren. Ein Spezialfall dieser Konstruktion ist der Raum der Abbildungen $E := \text{Abb}(X, \mathfrak{g})$ von einer beliebigen Menge X in eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit komponentenweise definierter Klammer, d.h.

$$[f, g](x) := [f(x), g(x)]$$

für $f, g \in \text{Abb}(X, \mathfrak{g})$ und $x \in X$.

Sind U und V Unterräume in $\mathfrak{g}$, so bezeichne $[U, V]$ den von allen Elementen $[u, v]$ erzeugten Unterraum in $\mathfrak{g}$, wo u die Elemente in U und v die Elemente von V durchläuft. Die analoge Bezeichnung werden wir von jetzt an für beliebige bilineare Abbildungen $V' \times V'' \rightarrow V$ stillschweigend verwenden.

Lemma 11.9 — Es sei $\varphi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ ein Homomorphismus von Liealgebren. Dann ist $\ker(\varphi)$ ein Ideal in $\mathfrak{a}$ und $\text{im}(\varphi)$ eine Unterliealgebra in $\mathfrak{b}$.

Beweis. Ist $x \in \ker(\varphi)$ und $y \in \mathfrak{a}$ beliebig, so folgt

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [0, \varphi(y)] = 0.$$

D.h. $[x, y] \in \ker(\varphi)$. Das beweist die erste Aussage. Die zweite Aussage ist klar. $\square$

Satz 11.10 (Homomorphiesatz) — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal.

1. Es sei $\bar{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ der Quotientenvektorraum und $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ die Projektion. Dann ist $[\pi(x), \pi(y)] := \pi([x, y])$ wohldefiniert und eine Lieklammer auf $\bar{\mathfrak{g}}$. Bezüglich dieser Liealgebrenstruktur ist π ein Homomorphismus.
2. Es sei $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}$ ein Homomorphismus von Liealgebren. Ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{b}$ von Liealgebren mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ existiert genau dann, wenn $\mathfrak{a} \subset \ker(\varphi)$.

Beweis. Ad 1. Gilt $\pi(x) = \pi(x')$ und $\pi(y) = \pi(y')$ so gibt es $a, b \in \mathfrak{a}$ mit $x' = x + a$ und $y' = y + b$. Es folgt:

$$[x', y'] = [x + a, y + b] = [x, y] + [x, b] + [a, y + b].$$

Wegen der Idealeigenschaft von $\mathfrak{a}$ gilt $[x, b] + [a, y + b] \in \mathfrak{a}$, so daß $\pi([x, y]) = \pi([x', y'])$. Darum ist die Lieklammer auf $\bar{\mathfrak{g}}$ wohldefiniert. Nach Konstruktion ist π ein Homomorphismus.

Ad 2. Ist $\bar{\varphi}$ ein Homomorphismus mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, so folgt $\mathfrak{a} = \ker(\pi) \subset \ker(\varphi)$. Wir nehmen umgekehrt an, es gelte $\mathfrak{a} \subset \ker(\varphi)$. Für $x, x' \in \mathfrak{g}$ mit $\pi(x) = \pi(x')$ gilt dann $\varphi(x) - \varphi(x') = \varphi(x - x') \in \varphi(\mathfrak{a}) = 0$. Deshalb ist $\bar{\varphi}(\pi(x)) := \varphi(x)$ wohldefiniert und erfüllt nach Konstruktion die Bedingung $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$. Daß die so definierte Abbildung $\bar{\varphi} : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{b}$ ein Homomorphismus ist, ist klar. $\square$

Lemma 11.11 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Der Untervektorraum

$$Z(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{g}\}$$

heißt das Zentrum von $\mathfrak{g}$. Das Zentrum ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$.

Lemma 11.12 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1. Ist $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Idealen in $\mathfrak{g}$, so sind auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ und die Summe $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ Ideale in $\mathfrak{g}$.
2. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in $\mathfrak{g}$, so ist auch $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$.

Definition 11.13 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Das Ideal $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ heißt abgeleitete (oder derivierte) Liealgebra von $\mathfrak{g}$. Offenbar ist $\mathfrak{g}'$ das kleinste Ideal in $\mathfrak{g}$ mit abelschem Quotienten. Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt vollkommen (oder perfekt), wenn $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

11.2 Darstellungen

Definition 11.14 — Eine Darstellung einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf einem Vektorraum V ist ein Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Alternativ ist $\rho : \mathfrak{g} \times V \rightarrow V$, $x.v := \rho(x)(v)$, eine Abbildung mit den Eigenschaften

1. $x.(\alpha v) = \alpha(x.v) = (\alpha x).v$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in K$ und $v \in V$,
2. $(x + y).v = x.v + y.v$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$,
3. $[x, y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Man sagt auch, V sei ein $\mathfrak{g}$ -Modul oder $\mathfrak{g}$ operiere linear auf V .

Ein Unterraum $W \subset V$ einer Darstellung ist $\mathfrak{g}$ -invariant oder eine Unterdarstellung, wenn $x.W \subset W$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Eine Darstellung V ist irreduzibel, wenn $V \neq 0$ und wenn 0 und V die einzigen Unterdarstellung von V sind. Eine Darstellung ist trivial, wenn $\rho = 0$.

Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen Darstellungen ist ein Homomorphismus oder kurz $\mathfrak{g}$ -linear, wenn für alle $x \in \mathfrak{g}$ und alle $v \in V$ gilt $f(x.v) = x.f(v)$. Die Menge der $\mathfrak{g}$ -Homomorphismen wird mit $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ bezeichnet. Es ist klar, daß $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ ein Untervektorraum von $\text{Hom}(V, W)$ ist.

Für die gesamte Theorie der Liealgebren ist das Verständnis der Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(K)$ von fundamentaler Bedeutung. Die Liealgebra $\mathfrak{sl}_2(K)$ hat die Basis

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Kommutatorrelationen

$$[h, x] = 2x, \quad [x, y] = h, \quad [h, y] = -2y.$$

Wir zerlegen den Polynomring $V = K[z_1, z_2]$ in seine homogenen Komponenten $V_n = \langle z_1^n, z_1^{n-1}z_2, \dots, z_2^n \rangle$. Auf V operieren die folgenden formalen Differentialoperatoren:

$$X = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad H = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad Y = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

Man rechnet leicht nach, daß $[H, X] = 2X$, $[X, Y] = H$, $[H, Y] = -2Y$. Deshalb definiert $x \mapsto X$, $h \mapsto H$ und $y \mapsto Y$ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(K)$ auf V . Diese Darstellung erhält die Graduierung, d.h. jeder Untervektorraum V_n ist invariant unter $\mathfrak{sl}_2(K)$.

Lemma 11.15 — Die Darstellungen V_n sind irreduzibel.

Beweis. Angenommen, $W \subset V_n$ ist eine nichttriviale Unterdarstellung und $f \in W$ ein nicht verschwindendes Polynom vom Grad n . Dann liegen auch alle $X^m(f)$, $m \in \mathbb{N}$ in W . Durch hinreichend häufige Anwendung von X erreicht man, daß $X^m(f)$ ein Vielfaches des Monoms z_1^n ist. Indem man hierauf wiederum Y iteriert anwendet, findet man alle Monome $z_1^i z_2^{n-i}$ in W . Das zeigt $V = W$. $\square$

Tatsächlich erschöpft sich mit V_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, die Liste der irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(K)$.

Satz 11.16 — Jede $n + 1$ -dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(K)$ ist isomorph zu V_n .

Beweis. Es sei V eine $n + 1$ -dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(K)$. Wir nehmen zunächst an, daß h einen Eigenvektor in V besitzt. Da V endlichdimensional ist, gibt es einen Eigenwert μ , der maximal in dem Sinne ist, daß $\mu + 2$ kein Eigenwert von h ist. Es sei v_0 ein Eigenvektor von h zum Eigenwert μ . Dann ist

$$h.(x.v_0) = [h, x]v_0 + x.(h.v_0) = 2x.v_0 + \mu x.v_0 = (\mu + 2)x.v_0.$$

Da $\mu + 2$ nach Annahme kein Eigenwert ist, ist $x.v_0 = 0$. Es sei

$$v_i := \frac{y^i}{i!} v_0$$

für $i = \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} h.v_i = \frac{1}{i!} h y^i v_0 &= \frac{1}{i!} \left(y^i h v_0 + \sum_{j=1}^i y^{j-1} [h, y] y^{i-j} v_0 \right) \\ &= \frac{1}{i!} (\mu - 2i) y^i v_0 = (\mu - 2i) v_i. \end{aligned}$$

Die Vektoren v_i sind also gleich 0 oder Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Es sei N die kleinste Zahl derart, daß $v_{N+1} = 0$. Dann sind $v_0, \dots, v_N$ linear unabhängig. Nach Konstruktion gilt $h v_i = (\mu - 2i) v_i$, $y v_i = (i + 1) v_{i+1}$ und

$$i! x.v_i = x.y^i v_0 \quad (11.1)$$

$$= y^i x v_0 + \sum_{j=1}^i y^{j-1} [x, y] y^{i-j} v_0 \quad (11.2)$$

$$= \sum_{j=1}^i y^{j-1} h y^{i-j} v_0 \quad (11.3)$$

$$= \sum_{j=1}^i (\mu - 2(i - j)) y^i v_0 = i(\mu + 1 - i) y^{i-1} v_0 \quad (11.4)$$

Das bedeutet $x.v_i = (\mu + 1 - i) v_{i-1}$ für alle $i > 0$. Daraus folgt zunächst, daß der von allen v_i aufgespannte Unterraum in V auch eine Unterdarstellung ist und wegen der Irreduzibilität von V ganz V sein muß, so daß $N = \dim(V) - 1 = n$. Zum anderen ist nach Konstruktion $v_{N+1} = 0$, und die Rechnung zeigt in dieser Situation $0 = x.v_{N+1} = (\mu - N) v_N$, also auch $\mu = N = n$. Damit gelten die Rechenregeln

$$x.v_i = (n + 1 - i) v_{i-1}, \quad h.v_i = (n - 2i) v_i, \quad y.v_i = (i + 1) v_{i+1}.$$

Man erhält jetzt einen Isomorphismus $V \rightarrow V_n$ durch die Abbildung

$$v_i \mapsto \frac{z_1^{n-i} z_2^i}{(n-i)! i!}$$

Wir hatten oben angenommen, daß h auf V Eigenwerte besitzt. Falls das nicht schon der Fall ist, können wir dies durch Körpererweiterung immer erreichen. Es sei also $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K und $\bar{V} = \bar{K} \otimes_K V$ die durch Skalarerweiterung entstandene Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\bar{K})$. Nun braucht $\bar{V}$ nicht mehr irreduzibel zu sein. In jedem Falle gibt es aber darin eine irreduzible Unterdarstellung $W \subset \bar{V}$. Nach dem obigen Argument hat h auf W sogar ganzzahlige Eigenwerte. Die kann man aber schon vor der Körpererweiterung am charakteristischen Polynom der Wirkung von h auf V ablesen. Die Körpererweiterung war also in jedem Falle unnötig. $\square$

Beispiel 11.17 (Heisenberg-Liealgebra) — Es sei $\mathfrak{h}$ ein dreidimensionaler k -Vektorraum mit einer Basis p, q und c . Darauf definieren wir eine Lieklammer durch $[p, q] = c$ und

$[x, c] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{h}$. Alle anderen Klammerausdrücke sind durch Schiefsymmetrie und Jacobiidentität bereits festgelegt. Außerdem ist leicht zu sehen, daß man tatsächlich eine wohldefinierte Klammer auf $\mathfrak{h}$ erhält, die die Liealgebrenaxiome erfüllt. Die Liealgebra $\mathfrak{h}$ besitzt unter anderem die folgenden Darstellungen.

1. $\mathfrak{h}$ operiert auf k^2 durch die Matrizen

$$p \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathfrak{h}$ operiert auf dem unendlichdimensionalen Vektorraum $k[x]$ der Polynome in der Unbestimmten x vermöge der Zuordnung

$$p \mapsto (f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}), \quad q \mapsto (f \mapsto xf), \quad c \mapsto \text{id}_{k[x]}.$$

Beide Darstellungen sind irreduzibel. □

Beispiel 11.18 (Die adjungierte Darstellung) — Für alle Strukturuntersuchungen von Liealgebren ist es von entscheidender Bedeutung, daß jede Liealgebra auf sich selbst operiert, d.h. daß jede Liealgebra eine Darstellung ihrer selbst bildet:

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k . Dann ist für jedes $x \in \mathfrak{g}$ die Abbildung

$$\text{ad } x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, y \mapsto [x, y]$$

linear. Gleichzeitig gilt wegen der Jacobiidentität

$$[\text{ad } x, \text{ad } y](z) = \text{ad } x \circ \text{ad } y(z) - \text{ad } y \circ \text{ad } x(z) \quad (11.5)$$

$$= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z] \quad (11.6)$$

$$= \text{ad}[x, y](z). \quad (11.7)$$

Das bedeutet, daß die Abbildung $\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x \mapsto \text{ad } x$, eine Darstellung ist, die sogenannten adjungierte Darstellung. Die Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung sind genau die Ideale von $\mathfrak{g}$. Das Bild $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ist eine Unterlgebra, die adjungierte Liealgebra von $\mathfrak{g}$. Genauer besteht eine Inklusionskette

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \text{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

denn eine erneute Umformulierung der Jacobiidentität ist

$$\text{ad } x([y, z]) = [\text{ad } x(y), z] + [y, \text{ad } x(z)].$$

Der Kern von ad ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und besteht aus allen Elementen x mit der Eigenschaft, daß $[x, y] = 0$ für alle $y \in \mathfrak{g}$. Mit anderen Worten: $\ker(\text{ad}) = Z(\mathfrak{g})$. Das Bild von ad ist ein Ideal in $\text{Der}(\mathfrak{g})$, denn

$$[\delta, \text{ad } x](z) = \delta([x, z]) - [x, \delta(z)] = [\delta(x), z] = \text{ad}(\delta(x))(z)$$

für $\delta \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ und $x, z \in \mathfrak{g}$, so daß also

$$[\delta, \text{ad } x] = \text{ad } \delta(x).$$

Im Folgenden treten häufig folgende Variationen dieses Themas auf:

Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so bildet $\text{ad } x$, $x \in \mathfrak{g}$, das Ideal $\mathfrak{a}$ in sich ab. Deshalb ist $\mathfrak{a}$ eine Unterdarstellung der adjungierten Darstellung, und es gibt eine induzierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf dem Quotientenraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ lediglich eine Unteralegebra, so sind $\mathfrak{h}$, die Liealgebra $\mathfrak{g}$ selbst und der Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ noch Darstellungen von $\mathfrak{h}$, wenn auch nicht mehr von $\mathfrak{g}$. $\square$

Wir besprechen einige kanonische Konstruktionen auf Darstellungen.

Faktordarstellungen. Ist $V' \subset V$ eine Unterdarstellung, so erbt der Quotientenraum $V'' := V/V'$ die Struktur einer Darstellung: Bezeichnet $[v] \in V''$ die Restklasse von $v \in V$, so hängt

$$x.[v] := [x.v]$$

nicht von der Wahl des Repräsentanten v ab. Dies definiert eine Operation von $\mathfrak{g}$ auf V'' , die durch die Forderung, daß die Restklassenabbildung $V \rightarrow V''$, $v \mapsto [v]$, ein Homomorphismus ist, eindeutig bestimmt ist.

Kern und Kokern von Homomorphismen. Ist $\varphi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen von $\mathfrak{g}$, so sind $\ker(\varphi)$ und $\text{im}(\varphi)$ Unterdarstellungen in V bzw. W , und folglich wird auch $\text{coker}(\varphi)$ in natürlicher Weise zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$. Man erhält eine exakte Sequenz von Darstellungen

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} W \longrightarrow \text{coker}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Invarianten. Es sei V eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$. Ein Vektor $v \in V$ heißt $\mathfrak{g}$ -invariant oder kurz invariant, wenn $x.v = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Die Menge $V^{\mathfrak{g}}$ der invarianten Vektoren ist eine Unterdarstellung von V , und zwar die größte triviale Unterdarstellung von V .

Koinvarianten. Es sei V eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $V' \subset V$ der Untervektorraum, der von allen Vektoren der Form $x.v$ mit $v \in V$ und $x \in \mathfrak{g}$ aufgespannt wird. Es ist klar, daß V' eine Unterdarstellung von V ist. Der Quotientenraum $V_{\mathfrak{g}} := V/V'$ heißt Raum der Koinvarianten von $\mathfrak{g}$ auf V . Es folgt unmittelbar aus der Konstruktion, daß $V_{\mathfrak{g}}$ eine triviale Darstellung ist. Es sei nun W eine triviale Darstellung und $\varphi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen. Dann liegt V' im Kern von φ . Jeder solche Homomorphismus faktorisiert daher über $V_{\mathfrak{g}}$. In diesem Sinne ist $V \rightarrow V_{\mathfrak{g}}$ der größte triviale Quotient von V .

Hom-Räume und duale Darstellung. Es seien V und W Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Dann operiert $\mathfrak{g}$ wie folgt auf dem Raum der K -linearen Abbildungen $\text{Hom}(V, W)$: Ist $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$ und $x \in \mathfrak{g}$, so sei $x.\varphi$ die lineare Abbildung

$$(x.\varphi)(v) = x.(\varphi(v)) - \varphi(x.v).$$

Man rechnet nach, daß dies tatsächlich eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $\text{Hom}(V, W)$ definiert. Außerdem ist φ genau dann invariant als Element in $\text{Hom}(V, W)$, wenn $\varphi : V \rightarrow W$ $\mathfrak{g}$ -äquivariant ist, es sich also bei φ um einen $\mathfrak{g}$ -Modulhomomorphismus handelt. Symbolisch ausgedrückt heißt das:

$$\text{Hom}_K(V, W)^{\mathfrak{g}} = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W).$$

Ein Spezialfall dieser Konstruktion ist die duale Darstellung von V . Wir lassen $\mathfrak{g}$ trivial auf dem Grundkörper operieren. Dann ist die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $V^* = \text{Hom}(V, K)$ gegeben durch:

$$(x.f)(v) = -f(x.v)$$

für $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ und $f \in V^*$.

Tensor-Produkte. In ähnlicher Weise kann man auch das Tensorprodukt $V \otimes W$ zweier Darstellungen V und W wieder zu einer Darstellung machen: Für $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$, $w \in W$, setzt man

$$x.(v \otimes w) := (v.x) \otimes w + v \otimes (x.w)$$

Die $\mathfrak{g}$ -Modulstruktur auf $\text{Hom}(V, W)$ und $V \otimes W$ ist mit allen natürlichen Homomorphismen verträglich. Sind etwa U , V und W Darstellungen, so ist die Abbildung

$$\text{Hom}(V, W) \otimes \text{Hom}_K(U, V) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}(U, W)$$

ein Homomorphismus von Darstellungen. Spezialfälle sind die Auswertungsabbildung

$$\text{Hom}(V, W) \otimes V \longrightarrow W$$

und der Isomorphismus $V \otimes V^* \rightarrow \text{End}(V)$.

Symmetrische und äußere Produkte. Symmetrische Produkte $S^n V$ und äußere Produkte $\Lambda^n V$ erben als Quotienten von $V^{\otimes n}$ eine natürliche Struktur als $\mathfrak{g}$ -Darstellungen:

$$x.(v_1 \cdots v_n) = \sum_{i=1}^n v_1 \cdots (x.v_i) \cdots v_n,$$

$$x.(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{i=1}^n v_1 \wedge \cdots \wedge (x.v_i) \wedge \cdots \wedge v_n.$$

Die kanonischen Abbildungen $S^n V \otimes S^m V \xrightarrow{\cdot} S^{n+m} V$ und $\Lambda^n V \otimes \Lambda^m V \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{n+m} V$ sind äquivariant.

11.3 Derivationen und Automorphismen

Wir gehen zurück in die allgemeine Situation einer K -Algebra A mit einer bilinearen aber nicht notwendig kommutativen oder assoziativen Verknüpfung $A \times A \rightarrow A$. Die Menge

$$\text{Aut}(A) = \{f \in \text{GL}_k(A) \mid f(ab) = f(a)f(b)\}$$

ist eine algebraische Untergruppe der $\text{GL}_k(A)$. Ihr Tangentialraum an das Neutral-element, die Identität auf A , erhält man durch Differenzieren der Relation $f(ab) = f(a)f(b)$ nach f :

$$T_{\text{id}} \text{Aut}(A) = \{\delta \in \text{End}_k(A) \mid \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)\} = \text{Der}(A).$$

Durch wiederholtes Anwenden der Leibnizregel erhält man für eine Derivation $\delta \in \text{Der}_k(A)$ und Elemente $a, b \in A$ die Beziehung

$$\delta^n(ab) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \delta^i(a) \delta^{n-i}(b), \quad (11.8)$$

oder etwas symmetrischer geschrieben

$$\frac{\delta^n(ab)}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{\delta^i(a)}{i!} \frac{\delta^j(b)}{j!}. \quad (11.9)$$

Die Formel lädt dazu ein, beide Seiten aufzusummieren und zur Exponentialfunktion überzugehen. Das ist in den folgenden Fällen möglich:

1. Falls $\delta^N(a) = 0 = \delta^N(b)$ für hinreichend großes N , so folgt auch $\delta^N(ab) = 0$ für hinreichend großes N , und wir können die Gleichung (11.9) über alle $n \in \mathbb{N}_0$ aufsummieren:

$$\exp(\delta)(ab) = \exp(\delta)(a) \cdot \exp(\delta)(b) \quad (11.10)$$

Die formale Summe $\exp(\delta) = \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n}{n!}$ ist als Element in $\text{End}_k(A)$ wohldefiniert, wenn für jedes $a \in A$ eine natürliche Zahl N mit $\delta^N(a) = 0$ existiert. Einen Endomorphismus mit dieser Eigenschaft nennt man lokal nilpotent. Für eine lokal nilpotente Derivation δ ist also $\exp(\delta)$ wohldefiniert und ein K -linearer Endomorphismus von A . Tatsächlich gilt mehr: Sind nämlich δ und δ' lokal nilpotente Derivationen, die kommutieren, so ist auch die Summe $\delta + \delta'$ lokal nilpotent, und es gilt die Beziehung

$$\frac{(\delta + \delta')^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{\delta^i}{i!} \frac{(\delta')^j}{j!}.$$

Es folgt $\exp(\delta + \delta') = \exp(\delta) \exp(\delta')$. Das ist natürlich speziell auf $\delta' := -\delta$ anwendbar und führt auf die Identität $\exp(\delta) \exp(-\delta) = \exp(0) = \text{id}_A$. Insbesondere ist $\exp(\delta)$ ein Automorphismus von A .

2. Der Grundkörper K ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und δ ist beschränkt bezüglich einer Norm auf A . Falls A endlichdimensional ist, sind alle Normen äquivalent und jeder Endomorphismus von A ist beschränkt. In diesem Falle konvergiert die Reihe $\exp(\delta)(a) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \delta^n(a)$ in der Norm. Die übrigen Aussagen des ersten Falls gelten analog.

Wir können dieses Konzept speziell auf Liealgebren anwenden. Für jedes lokal nilpotente $\text{ad } x$ ist die Abbildung $\exp(\text{ad } x)$ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$.

Definition 11.19 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ heißt *ad-nilpotent*, wenn $\text{ad } x$ nilpotent ist. Die von allen Automorphismus der Form $\exp(\text{ad } x)$ mit ad-nilpotentem $x \in \mathfrak{g}$ erzeugte Untergruppe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ von $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ heißt Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{g}$, ihre Elemente innere Automorphismen.

Man sieht leicht:

Satz 11.20 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent und φ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann gilt

$$\varphi \circ \exp(\text{ad } x) \circ \varphi^{-1} = \exp(\text{ad } \varphi(x)).$$

Insbesondere ist $\text{Int}(\mathfrak{g})$ ein Normalteiler in $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. □

§12 Nilpotente Liealgebren und Cartanunteralgebren

Endlichdimensionale Liealgebren lassen sich in einen sogenannten auflösbaren und einen halbeinfachen Anteil zerlegen. Der auflösbare Teil ist dabei eindeutig bestimmt, der halbeinfache bis auf Isomorphie, allerdings nicht als Unterliealgebra. In späteren Kapiteln interessieren wir uns besonders für halbeinfache Liealgebren, ihre Struktur, Klassifikation und Darstellungstheorie. Auf dem Weg dorthin spielen nilpotente und auflösbare Liealgebren gleichwohl eine wichtige technische Rolle.

Wir betrachten ab diesem Abschnitt alle Liealgebren und Darstellungen über $\mathbb{C}$.

12.1 Nilpotente Liealgebren

Eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $x : V \rightarrow V$ heißt bekanntlich nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ gibt. Ist nun $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra und $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellungs, so sagen wir, ein Element $x \in \mathfrak{g}$ sei ρ -nilpotent, wenn die lineare Abbildung $\rho(x) : V \rightarrow V$ nilpotent ist. Von besonderer Wichtigkeit ist dabei der Fall der adjungierten Darstellung. Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ ist also ad-nilpotent, wenn $\text{ad}(x)^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Ist $\mathfrak{g}$ eine Unterlgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, so haben wir zwei Begriffe von Nilpotenz für $x \in \mathfrak{g}$: Zum einen für x als Endomorphismus auf V , und zum anderen für die lineare Abbildung $\text{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Lemma 12.1 — Es sei $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unterlgebra. Dann gilt für $x \in \mathfrak{g}$:

$$x \text{ nilpotent} \quad \Rightarrow \quad x \text{ ad-nilpotent.} \quad (12.1)$$

Die umgekehrte Implikation ist im allgemeinen falsch.

Beweis. Es bezeichne $\ell_x, r_x : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit x . Dann sind ℓ_x und r_x einerseits nilpotente Abbildungen, zum anderen kommutieren sie miteinander. Darum ist auch ihre Differenz $\text{ad}(x) = \ell_x - r_x$ nilpotent als Element in $\mathfrak{gl}(\text{End}(V))$ und a fortiori auch als Element in $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Dass die Umkehrung der Implikation nicht gilt, sieht man am Beispiel der eindimensionalen Unterlgebra in $\mathfrak{gl}(V)$, die von einem nicht nilpotenten Endomorphismus x aufgespannt wird. Diese Unterlgebra ist trivialerweise abelsch, also x ad-nilpotent. $\square$

Definition 12.2 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die absteigende Zentralreihe ist rekursiv durch $\mathcal{C}^1 \mathfrak{g} := \mathfrak{g}$ und $\mathcal{C}^{k+1} \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k \mathfrak{g}]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert. Eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{C}^n \mathfrak{g} = 0$ gibt.

Beispiel 12.3 — Das Muster aller nilpotenten Liealgebren bildet die Liealgebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen. Es sei V ein Vektorraum der Dimension $\ell < \infty$ und

$$D : \quad 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{\ell-1} \subset V_\ell = V$$

eine Fahne in V . Dann ist $\mathfrak{n}(D) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(V_i) \subset V_{i-1} \text{ für alle } i = 1, \dots, \ell\}$ eine nilpotente Unterálgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Es gilt nämlich

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{n}(D)) = \{f \mid f(V_i) \subset V_{i-k} \text{ für alle } i = k, \dots, \ell\}$$

Die Inklusion $\subset$ sieht man dabei sofort, und daß sogar Gleichheit gilt, kann man durch Betrachtung geeigneter Matrizen verifizieren. $\square$

Lemma 12.4 — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lieálgebra.*

1. Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so sind auch alle Unterálgebren und alle homomorphen Bilder von $\mathfrak{g}$ nilpotent.
2. Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so ist das Zenrum $Z(\mathfrak{g})$ nicht trivial.
3. $\mathfrak{g}$ ist genau dann nilpotent, wenn $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nilpotent ist.

Beweis. Zu 1: Jeder Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ von Lieálgebren liefert lineare Abbildungen $\mathcal{C}^k(\varphi) : \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_1) \rightarrow \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}_2)$. Ist φ injektiv oder surjektiv, so gilt dasselbe für $\mathcal{C}^k(\varphi)$. Demnach vererbt sich Nilpotenz von $\mathfrak{g}_2$ auf $\mathfrak{g}_1$, wenn φ injektiv ist, und umgekehrt von $\mathfrak{g}_1$ auf $\mathfrak{g}_2$, wenn φ surjektiv ist.

Zu 2: Es sei k maximal mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) \neq 0$. Dann gilt $0 = \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k(\mathfrak{g})]$, und das bedeutet, daß $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) \subset Z(\mathfrak{g})$.

Zu 3: Wenn $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, so muß $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ nach Teil 1 nilpotent sein. Umgekehrt bedeutet $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = 0$, daß $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) \subset Z(\mathfrak{g})$, und hieraus folgt $\mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = 0$. Damit ist $\mathfrak{g}$ nilpotent. $\square$

Lemma 12.5 — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lieálgebra.*

1. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$, so ist auch $\mathcal{C}^k \mathfrak{a}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Ideal.
2. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nilpotente Ideale, so ist auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nilpotentes Ideal.

Beweis. Aussage 1 folgt aus Lemma 11.12.2.

Zu 2: Wir setzen $\mathcal{C}^0(\mathfrak{a}) := \mathfrak{g}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ und zeigen induktiv, daß

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subset \sum_{i+j=n} \mathcal{C}^i(\mathfrak{a}) \cap \mathcal{C}^j(\mathfrak{b}).$$

Das ist offenbar für $n = 0$ und $n = 1$ richtig, und folgt für alle n durch eine einfache Induktion. Gilt nun $\mathcal{C}^n(\mathfrak{a}) = 0 = \mathcal{C}^m(\mathfrak{b}) = 0$ für gewisse $n, m \in \mathbb{N}$, so folgt $\mathcal{C}^{n+m-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = 0$. $\square$

Die letzte Aussage des Lemmas hat eine wichtige Konsequenz: Ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lieálgebra, und ist $\mathfrak{n}$ irgendein bezüglich Inklusion maximales nilpotentes Ideal, so muß $\mathfrak{n}$ bereits alle anderen nilpotenten Ideale enthalten, weil man andernfalls $\mathfrak{n}$ durch Addition eines anderen nilpotenten Ideals vergrößern könnte. Es gibt demnach ein eindeutig bestimmtes maximales nilpotentes Ideal in $\mathfrak{g}$.

Definition 12.6 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Das eindeutig bestimmte größte nilpotente Ideal in $\mathfrak{g}$ heißt das *Nilradikal* von $\mathfrak{g}$ und wird mit $\text{nil}(\mathfrak{g})$ bezeichnet.

Satz 12.7 — Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V durch nilpotente Elemente.

1. Dann gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $x.v = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.
2. Es gibt eine Fahne D in V mit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}(D)$.

Inbesondere ist $\varphi(\mathfrak{g})$ nilpotent.

Beweis. Indem man $\mathfrak{g}$ durch das Bild unter φ ersetzt, kann man sich auf den Fall zurückziehen, daß $\dim(\mathfrak{g})$ endlichdimensional ist. Wir beweisen Aussage 1 durch Induktion nach $\dim(\mathfrak{g})$. Falls $\mathfrak{g}$ eindimensional ist, wird $\mathfrak{g}$ von einem einzigen nilpotenten Endomorphismus f aufgespannt, und jeder Eigenvektor von $\varphi(f)$ leistet das Verlangte.

Es sei nun $\dim(\mathfrak{g}) > 1$. Dann besitzt $\mathfrak{g}$ echte Unteralgebren, denn jedes Element $x \neq 0$ spannt eine solche auf. Es sei $\mathfrak{a}$ eine echte Unteralgebra von maximaler Dimension. Die Elemente in $\mathfrak{a}$ sind nilpotent, also erst recht ad-nilpotent. Darum operiert $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ mit nilpotenten Endomorphismen. Nach Induktionsannahme existiert ein Element $z \in \mathfrak{g}$, dessen Restklasse $\bar{z} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ein simultaner Eigenvektor für alle $x \in \mathfrak{a}$ ist. Das bedeutet $[\mathfrak{a}, z] \subset \mathfrak{a}$. Insbesondere ist $\mathfrak{a} \oplus \mathbb{C}z$ eine Unteralgebra in $\mathfrak{g}$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a} \oplus \mathbb{C}z = \mathfrak{g}$, und $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$ der Kodimension 1. Es sei $V' = \{v \in V \mid \mathfrak{a}.v = 0\}$. Nach Induktionsannahme ist V' nicht leer. Nun gilt für $x \in \mathfrak{a}$ und $v \in V'$, daß $x.(z.v) = [x, z].v + z.(x.v) = 0 + 0 = 0$. Das bedeutet $z(V') \subset V'$. Es sei nun $v \in V$ ein Eigenvektor von z . Dann ist v ein simultaner Eigenvektor für $\mathfrak{g}$.

Teil 2 des Satzes folgt nun durch Induktion nach $\dim(V)$: Es sei $v \in V$ ein simultaner Eigenvektor für $\mathfrak{g}$. Wir setzen $V_1 := \mathbb{C}v$. Induktiv existiert eine Fahne $\bar{D}$ auf $\bar{V} = V/V_1$, mit $\mathfrak{g}\bar{V}_i \subset \bar{V}_{i-1}$. Es sei V_{i+1} das Urbild von $\bar{V}_i$ unter der Projektion $V \rightarrow \bar{V}$. Dann hat die Fahne $D = (V_i)_{i=0, \dots, \ell}$ die verlangten Eigenschaften. $\square$

Satz 12.8 (Satz von Engel) — Eine endlichdimensionale Liealgebra ist genau dann nilpotent, wenn jedes Element ad-nilpotent ist.

Beweis. Wenn $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, folgt aus $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ auch, daß $\text{ad}(x)^{k-1} = 0$ für jedes $x \in \mathfrak{g}$. Es sei umgekehrt jedes $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent ist. Nach Satz 12.7 ist die Algebra $\text{ad}(\mathfrak{g})$ nilpotent, nach Lemma 12.4 auch $\mathfrak{g}$. $\square$

Für einen Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ und einen Skalar $\alpha \in k$ betrachten wir die Räume

$$V_\alpha(f) := \ker(f - \alpha \text{id}_V) \quad \text{und} \quad V^\alpha(f) := \bigcup_{n \geq 0} \ker(f - \alpha \text{id}_V)^n.$$

Der Raum $V_\alpha(f)$ ist genau dann $\neq 0$, wenn auch $V^\alpha(f) \neq 0$. In diesem Falle ist α ein Eigenwert von f , $V_\alpha(f)$ heißt der Eigenraum und $V^\alpha(f)$ der Hauptraum von f zu α . Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, besteht eine Summenzerlegung

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} V^\alpha(f).$$

Ist weiter $W \subset V$ ein f -stabiler Unterraum, d.h. $f(W) \subset W$, so gilt $W_\alpha(f) = W \cap V_\alpha(f)$ und $W^\alpha(f) = W \cap V^\alpha(f)$.

Satz 12.9 — *Es sei $\mathfrak{h}$ eine nilpotente Liealgebra und V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{h}$. Für jede Linearform $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ ist*

$$V^\alpha(\mathfrak{h}) := \bigcap_{h \in \mathfrak{h}} V^{\alpha(h)}(h)$$

ein $\mathfrak{h}$ -Untermodul von V . Es gilt

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} V^\alpha(\mathfrak{h}).$$

Beweis. Es seien $f, g \in \mathfrak{h}$ und $v \in V^\lambda(g)$. Es gibt dann natürliche Zahlen n_1, n_2 mit der Eigenschaft, daß $(g - \lambda \text{id}_V)^{n_1}(v) = 0$ und $(\text{ad } g)^{n_2}(f) = 0$. Es folgt:

$$(g - \lambda \text{id}_V)^n(f(v)) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\text{ad } g)^i(f)(g - \lambda \text{id}_V)^{n-i}(v).$$

Sobald $n \geq n_1 + n_2$, ist in jedem Summanden entweder $i \geq n_2$, also $(\text{ad } g)^i(f) = 0$, oder $n - i \geq n_1$ und somit $(g - \lambda \text{id}_V)^{n-i}(v) = 0$. Das zeigt $f(v) \in V^\beta(\mathfrak{h})$. Daraus folgt, daß für jede Abbildung $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ die Räume

$$V^\alpha(\mathfrak{h}) := \bigcup_{f \in \mathfrak{h}} V^{\alpha(f)}(f)$$

stabil unter allen Elementen von $\mathfrak{h}$ sind, und daß

$$V = \bigoplus_{\alpha: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}} V^\alpha(\mathfrak{h}).$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ linear ist, wenn $V^\alpha(\mathfrak{h}) \neq 0$. Dazu bezeichne $p : V \rightarrow V^\alpha(\mathfrak{h})$ eine Projektion. Dann gilt für jedes $f \in \mathfrak{h}$:

$$\alpha(f) \dim(V^\alpha(\mathfrak{h})) = \text{tr}(f|_{V^\alpha(\mathfrak{h})}) = \text{tr}(f \circ p)$$

Folglich ist $\alpha(h) = \frac{1}{\dim V^\alpha(\mathfrak{h})} \text{tr}(h \circ p)$ linear. □

12.2 Cartanunteralgebren

Im gesamten Unterabschnitt ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale komplexe Liealgebra. Für einen Untervektorraum $U \subset \mathfrak{g}$ bezeichnet $N_{\mathfrak{g}}(U) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, U] \subset U\}$ den Normalisator von U . Wenn U eine Unteralgebra ist, gilt $U \subset N_{\mathfrak{g}}(U)$, und $N_{\mathfrak{g}}(U)$ ist selbst eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Außerdem ist dann $U \subset N_{\mathfrak{g}}(U)$ ein Ideal.

Definition 12.10 — Eine Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ heißt *Cartanunteralgebra*, wenn

1. $\mathfrak{h}$ nilpotent ist und wenn
2. $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ gilt, also $\mathfrak{h}$ selbstnormalisierend ist.

Lemma 12.11 — Es sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine nilpotente Unteralgebra. Dann gilt für die Hauptraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$$

von $\mathfrak{g}$ bezüglich der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{h}$:

1. $[\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^{\beta}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h})$. Insbesondere ist $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, und alle Haupträume $\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$ sind Darstellungen von $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Außerdem sind alle $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$, $\alpha \neq 0$, *ad-nilpotent*.
2. $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}))$.
3. $\mathfrak{h}$ ist genau dann eine Cartanunteralgebra, wenn $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$.

Die Existenz der Hauptraumzerlegung ist nach Satz 12.9 sichergestellt.

Beweis. Ad 1: Aus der Jacobiidentität folgt für beliebige $x \in \mathfrak{h}$, $y, z \in \mathfrak{g}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$(\operatorname{ad} x - (\alpha + \beta))([y, z]) = [(\operatorname{ad} x - \alpha)(y), z] + [y, (\operatorname{ad} x - \beta)(z)].$$

Induktiv erhält man

$$(\operatorname{ad} x - (\alpha + \beta))^n([y, z]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\operatorname{ad} x - \alpha)^k(y), (\operatorname{ad} x - \beta)^{n-k}(z)].$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Falls also $(\operatorname{ad} x - \alpha)^{n_1}(y) = 0$ und $(\operatorname{ad} x - \beta)^{n_2}(z) = 0$, so gilt auch

$$(\operatorname{ad} x - (\alpha + \beta))^{n_1+n_2}([y, z]) = 0.$$

Das zeigt $[\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^{\beta}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h})$. Die übrigen Aussagen im Teil 1 des Satzes folgen unmittelbar.

Ad 2: Es sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Dann gehört x offenbar selbst zum Hauptraum $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Daraus folgt $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ und $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})) \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Weil $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ eine Unteralgebra ist, gilt auch die umgekehrte Inklusion $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}))$.

Ad 3. Angenommen, $\mathfrak{h}$ ist eine Cartanunteralgebra und $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h} \neq 0$. Weil $\mathfrak{h}$ nach Annahme auf $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h} =: V$ nur mit dem Eigenwert 0 operiert, gibt es nach Satz 12.7 wirklich ein $x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$, dessen Restklasse in $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$ ein simultaner Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist. Dieses x normalisiert $\mathfrak{h}$, ohne zu $\mathfrak{h}$ zu gehören. Widerspruch. $\square$

Das Lemma gilt speziell für die eindimensionale abelsche Unter algebra, die von einem beliebigen Element $x \in \mathfrak{g}$ aufgespannt wird. Die Dimension von $\mathfrak{g}^0(x)$ ist gleich der Nullstellenordnung des charakteristischen Polynoms $\chi_{\text{ad } x}(T)$ an der Stelle $T = 0$. Wir betrachten die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}[T] \quad (12.2)$$

$$x \mapsto \chi_{\text{ad } x}(T) = T^d + a_{d-1}(x)T^{d-1} + \dots + a_1(x)T + a_0(x), \quad (12.3)$$

wobei $d = \dim(\mathfrak{g})$. Die Koeffizienten $a_i(x)$ sind polynomiale Funktionen vom Grad $d - i$ in x .

Definition 12.12 — Die Zahl $\ell := \min\{j \mid \exists x \in \mathfrak{g} : a_j(x) \neq 0\}$ heißt *Rang* von $\mathfrak{g}$.

Für jedes $x \in \mathfrak{g}$ gilt zumindest $\text{ad } x(x) = 0$. Deshalb gilt $1 \leq \ell \leq \dim(\mathfrak{g})$ für $\mathfrak{g} \neq 0$. Wenn $\ell = \dim(\mathfrak{g})$, operiert jedes $x \in \mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}$ nilpotent. Nach dem Satz von Engel 12.8 ist dann $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Liealgebra, und die Umkehrung gilt erst recht.

Es sei also im Folgenden $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra der Dimension d und vom Rang ℓ . Nach Definition ist $a_\ell : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ eine polynomiale Funktion vom Grad $d - \ell$, die nicht identisch verschwindet.

Definition 12.13 — Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ heißt *regulär*, wenn $a_\ell(x) \neq 0$. Die Menge der regulären Elemente in $\mathfrak{g}$ wird mit $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ bezeichnet.

Lemma 12.14 — Die Menge $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ ist nicht leer. Sie ist offen und dicht in $\mathfrak{g}$ bezüglich der Zariskitopologie. Insbesondere ist $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ irreduzibel. In der metrischen Topologie ist $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ wegzusammenhängend.

Beweis. Die Menge $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ ist nach Konstruktion sicher nicht leer. Als Komplement der Nullstellenmenge einer polynomialen Funktion ist sie offen und dicht in der Zariskitopologie. Sind x und y verschiedene Punkte in $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ und L die komplexe Gerade, die durch x und y geht, so ist das Komplement von $L \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ in L die Nullstellenmenge einer polynomialen Funktion, also eine endliche Menge. Deshalb lassen sich x und y durch einen reellen stetigen Weg verbinden, der diese Punkte nicht trifft. Deshalb ist $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ wegzusammenhängend. In der Zariskitopologie ist der affine Raum $\mathfrak{g}$ irreduzibel und daher jede nicht leere offene Menge dicht. $\square$

Satz 12.15 — Jede endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ besitzt eine Cartanunteralgebra. Genauer gilt: Für jedes $x \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ ist $\mathfrak{g}^0(x)$ eine Cartanunteralgebra.

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ und $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^0(x)$. Dann ist $\text{ad } x$ auf $\mathfrak{h}$ nilpotent, während alle Eigenwerte der induzierten Operation von $\text{ad } x$ auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ von Null verschieden sind. Insbesondere ist die Menge

$$V = \{y \in \mathfrak{h} \mid \text{ad } y \text{ ist auf } \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \text{ invertierbar.}\}$$

nicht leer, denn sie enthält x . Das Komplement von V in $\mathfrak{g}$ ist durch eine Determinantenbedingung gegeben. Deshalb ist V sogar offen und dicht in $\mathfrak{g}$.

Es sei nun $U := \{y \in \mathfrak{h} \mid \text{ad } y|_{\mathfrak{h}} \text{ ist nicht nilpotent.}\}$. Angenommen, U ist nicht leer. Dann ist U sogar offen und dicht in $\mathfrak{h}$, und der Durchschnitt mit V ist nicht leer. Es sei $y \in U \cap V$. Das bedeutet, daß die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0 von $\text{ad } y$ auf $\mathfrak{h}$ höchstens $\ell - 1$ ist, weil $\text{ad } y$ dort nicht nilpotent operiert, und auf $\bar{\mathfrak{g}}$ sogar gleich 0 ist, weil hier $\text{ad } y$ invertierbar operiert. Aber das würde bedeuten, daß $\dim \mathfrak{g}^0(y) < \ell$, im Widerspruch zur Definition von ℓ .

Wir schließen, daß U leer ist, daß also jedes Element von $\mathfrak{h}$ nilpotent auf $\mathfrak{h}$ operiert. Nach dem Satz von Engel 12.8 ist $\mathfrak{h}$ eine nilpotente Liealgebra. Da nach Lemma 12.11 die Liealgebra $\mathfrak{h}$ auch selbstnormalisierend ist, folgt die Behauptung. $\square$

Im Folgenden sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartanunteralgebra. Dann existiert nach Lemma 12.11 eine Hauptraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$$

mit einer endlichen Teilmenge

$$R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}) \neq 0\},$$

Definition 12.16 — Die so charakterisierte Menge $R \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ heißt die Menge der Wurzeln von $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Es bezeichne

$$\mathfrak{h}_{\text{reg}} := \mathfrak{h} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \ker(\alpha).$$

Als Komplement von endlich vielen Hyperebenen ist $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$ nicht leer und offen und dicht in $\mathfrak{h}$. Jedes $y \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}$ invertierbar auf $\tilde{\mathfrak{g}} := \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$. Andererseits ist jedes $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $\alpha \in R$, ad -nilpotent, so daß $\exp(\text{ad } x)$ ein wohldefinierter Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist. Wir definieren eine polynomiale (!) Abbildung

$$\tilde{\Phi} : \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \text{Int}(\mathfrak{g}), \sum_{\alpha \in R} x_{\alpha} \mapsto \prod_{\alpha \in R} \exp(\text{ad } x_{\alpha}).$$

Die Automorphismen, die in dem Produktausdruck erscheinen, kommutieren natürlich im allgemeinen nicht. Man muß also eine Numerierung von R wählen, um dem Produkt einen Sinn zu geben, was wir hiermit tun. Die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}, (y, x) \mapsto \tilde{\Phi}(x)(y)$$

ist polynomiell, und hat im Punkt $(y, 0)$ das Differential

$$D\Phi_{(y,0)} : \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}, (\eta, \xi) \mapsto (\eta, [\xi, y]),$$

also $D\Phi_{(y,0)} = \text{id}_{\mathfrak{h}} \oplus (-\text{ad}_y|_{\tilde{\mathfrak{g}}})$. Insbesondere ist Φ in $(y, 0)$ lokal biholomorph bzw. étale im Sinne der algebraischen Geometrie, wenn $y \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}$. Insbesondere enthält $\text{Int}(\mathfrak{g})(\mathfrak{h}_{\text{reg}})$ eine offene Umgebung jedes Punktes $y \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}$ und ist deshalb insgesamt offen.

Satz 12.17 — *Die Gruppe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ der inneren Automorphismen von $\mathfrak{g}$ operiert transitiv auf der Menge der Cartanunteralgebren von $\mathfrak{g}$. Insbesondere ist jede Cartanunteralgebra von der Form $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(x)$ für ein $x \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartanunteralgebra. Dann ist $\text{Int}(\mathfrak{g})(\mathfrak{h}_{\text{reg}})$ offen. Weil $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ offen und dicht in $\mathfrak{g}$ ist, ist der Durchschnitt $\text{Int}(\mathfrak{g})(\mathfrak{h}_{\text{reg}}) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ nicht leer und enthält etwa $z = \phi(h)$ mit $h \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}$. Da andererseits $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ selbst invariant unter der Wirkung der Gruppe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ ist, hat man $h := \phi^{-1}(z) \in \mathfrak{h}_{\text{reg}} \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$. Für ein solches h erhält man sofort $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h)$, also insbesondere $\dim(\mathfrak{h}) = \ell$. Da andererseits für jedes $y \in \mathfrak{h}$ die Gleichheit $\mathfrak{g}_0(y) = \mathfrak{h}$ genau dann gilt, wenn $y \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}$, erhält man

$$\mathfrak{h}_{\text{reg}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}.$$

Sind nun $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ irgend zwei Cartanunteralgebren, so sind die Mengen $\text{Int}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}_{\text{reg}}$ und $\text{Int}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}'_{\text{reg}}$ offen und dicht in $\mathfrak{g}$ und haben deshalb einen nichtleeren Schnitt. Dieser enthalte etwa das Element $\varphi(h) = \varphi'(h')$. Dann ist $h = \Phi(h')$ mit $\Phi := \varphi^{-1}\varphi'$. Es folgt

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\Phi(h')) = \Phi(\mathfrak{g}^0(h')) = \Phi(\mathfrak{h}').$$

Das war zu zeigen. □

12.3 Jordan-Chevalley Zerlegung

Es sei V ein endlichdimensionaler k -Vektorraum und $A : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton liegt das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) := \det(t \cdot \text{id}_V - A)$$

im Kern der Auswertungsabbildung $\Phi : k[t] \rightarrow \text{End}(V)$, $f \mapsto f(A)$, wird also vom Minimalpolynom m_A geteilt. Die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow k[t] \xrightarrow{m_A} k[t] \xrightarrow{\Phi} \text{End}_k(V)$$

ändert sich beim Übergang zu einer Körpererweiterung $K \rightarrow K'$ nicht. Insbesondere ändern sich χ_A und m_A bei Skalarerweiterungen nicht.

Es seien $m_1, \dots, m_s$ die in m_A bzw. χ_A vorkommenden irreduziblen Faktoren, so daß

$$m_A = m_1^{n_1} \cdot \dots \cdot m_s^{n_s} \quad \text{und} \quad \chi_A = m_1^{a_1} \cdot \dots \cdot m_s^{a_s}$$

mit Exponenten $a_i \geq n_i \geq 1$ für $i = 1, \dots, s$. Die Polynome $m_i^{n_i}$, $i = 1, \dots, s$, sind paarweise teilerfremd. Mit dem euklidischen Algorithmus findet man Polynome f_i und g_i mit der Eigenschaft

$$1 = f_i m_i^{n_i} + g_i \frac{m_A}{m_i^{n_i}}.$$

Die Polynome $p_i := g_i m_A / m_i^{n_i}$, $i = 1, \dots, s$, haben die folgenden Eigenschaften

1. $p_i \equiv \delta_{ij} \pmod{m_j^{n_j}}$,
2. $p_i m_i^{n_i} \equiv 0 \pmod{m_A}$,
3. $\sum_{i=1}^s p_i \equiv 1 \pmod{m_A}$,
4. $p_i p_j \equiv \delta_{ij} p_i \pmod{m_A}$.

Werten wir die p_i in A aus, so erhalten wir Endomorphismen $p_i(A)$ mit den analogen Eigenschaften:

1. $\text{id}_V = p_1(A) + \dots + p_s(A)$,
2. $p_i(A)p_j(A) = \delta_{ij}p_i(A)$,
3. $m_i^{n_i}(A)p_i(A) = 0$.

Insbesondere zerfällt V in die direkte Summe der Haupträume $E_i := \text{im}(p_i(A))$. Jeder Hauptraum ist stabil unter A , da A und $p_i(A)$ vertauschen, und das Minimalpolynom von $A|_{E_i(A)}$ ist $m_i^{n_i}$.

Ein Endomorphismus A heißt bekanntlich nilpotent, wenn $A^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß alle Eigenwerte von A über einem algebraischen Abschluß von k Null sind. A ist diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn das Minimalpolynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Schließlich heißt A halbeinfach, wenn jeder A -invariante Unterraum $V' \subset V$ ein A -invariantes Komplement $V'' \subset V$ besitzt. Das ist äquivalent dazu, daß A nach geeigneter Körpererweiterung $k \rightarrow K$ diagonalisierbar über K ist. Und das ist genau dann möglich, wenn das Minimalpolynom separabel ist.

Satz 12.18 — Es sei $p \in k[X]$ ein separables Polynom. Dann existiert eine Folge von Polynomen $f_n \in k[X]$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit den folgenden Eigenschaften:

1. $f_0 = X$.
2. $f_n \equiv f_{n-1} \pmod{p^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. $p(f_n) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir konstruieren f_n rekursiv für alle n . Offenbar erfüllt $f_0 = X$ die Bedingung 3. Wir nehmen also an, es sei $n \geq 1$ und wir hätten 2 und 3 für $n - 1$ bereits erfüllt. Dann gilt nach Voraussetzung

$$f_{n-1} = X + ap \quad \text{und} \quad p(f_{n-1}) = bp^n$$

mit Polynomen $a, b \in k[X]$. Wir machen den Ansatz

$$f_n = f_{n-1} + cp^n$$

mit einem noch zu bestimmenden Polynom $c \in k[X]$. Dann ist die Bedingung 2 für f_n von vornherein erfüllt. In der Berechnung von $p(f_n)$ verwenden wir die Taylorformel einmal für $p(f_{n-1} + cp^n)$ und einmal für $p'(X + ap)$. Die Symbole R_1, R_2 etc. stehen für irgendwelche Polynome in $k[X]$.

$$\begin{aligned} p(f_n) &= p(f_{n-1} + cp^n) \\ &= p(f_{n-1}) + p'(f_{n-1})cp^n + R_1p^{2n} \\ &= bp^n + p'(X + ap)cp^n + R_1p^{2n} \\ &= (b + cp')p^n + R_2p^{n+1} \end{aligned}$$

Die Bedingung 3 des Satzes ist also äquivalent zu der Kongruenz

$$cp' \equiv -b \pmod{p}.$$

Da p und p' teilerfremd sind, ist diese Kongruenz immer nach c auflösbar. Damit ist ein f_n mit allen verlangten Eigenschaften gefunden. $\square$

Satz 12.19 (Jordan-Chevalley-Zerlegung) — Es sei $A \in \text{End}_k(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, daß jeder Primfaktor des charakteristischen Polynoms von A separabel ist. Dann existieren Endomorphismen $A_s, A_n \in \text{End}_k(V)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $A = A_s + A_n$,
2. A_s ist halbeinfach, A_n ist nilpotent
3. $[A_s, A_n] = 0$.

Die Zerlegung $A = A_s + A_n$ heißt Jordan-Chevalley-Zerlegung. A_s bzw. A_n heißt der halbeinfache bzw. nilpotente Anteil von A . Es gilt weiter:

4. A_s und A_n sind durch die Eigenschaften 1-3 eindeutig bestimmt.
5. Es gibt Polynome $p_s, p_n \in k[x]$ mit $A_s = p_s(A)$, $A_n = p_n(A)$ und $p_s(0) = p_n(0) = 0$.

6. Für alle $B \in \text{End}(V)$ mit $[A, B] = 0$ gilt $[A_s, B] = 0$ und $[A_n, B] = 0$.

7. Ist $W \subset V$ ein A -stabiler Unterraum, so gilt $A_s(W), A_n(W) \subset A(W)$.

Die Bedingung an das charakteristische Polynome ist automatisch erfüllt, wenn der Körper k vollkommen ist, weil dann jedes irreduzible Polynome separabel ist. Letzteres ist äquivalent zu der Forderung, dass entweder $\text{char}(k) = 0$, oder dass $\text{char}(k) = p > 0$ und k eine p -Wurzel von jedem seiner Elemente enthält.

Beweis des Satzes. Es sei p das Produkt aller Primfaktoren von χ_A und gegebenenfalls x , falls 0 kein Eigenwert von A ist. Nach Annahme ist p separabel. Außerdem gilt existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $m_A \mid p^j$.

Nach Satz 12.18 existiert ein Polynom f mit den Eigenschaften:

$$p^j \mid p(f) \quad \text{und} \quad p \mid f - x.$$

Wir setzen $p_s := f$ und $p_n := x - p_s$, und verifizieren die Behauptungen. Wegen $x \mid p$ folgt $x \mid f = p_s$ und $x \mid p_n$, so daß $p_s(0) = 0$ und $p_n(0) = 0$.

Wegen $m_A \mid p^j \mid p(f) = p(p_s)$ gilt $p(p_s(A)) = 0$. Demnach ist das Minimalpolynom von $p_s(A)$ ein Teiler von p und somit separabel, also $A_s := p_s(A)$ halbeinfach. Wegen $p \mid (x - f) = p_n$ und $m_A \mid p^j \mid p_n^j$ folgt $p_n(A)^j = 0$, d.h. $A_n := p_n(A)$ ist nilpotent.

Nach Konstruktion gilt $A = A_s + A_n$. Weil A_s und A_n als Polynome in A geschrieben sind, vertauschen sie untereinander und mit allen Endomorphismen B , die mit A vertauschen.

Weil $p_s(0) = p_n(0) = 0$, lassen sich A_s und A_n als Produkt aus A und einem Polynom in A schreiben. Sie bilden deshalb jeden A -stabilen Unterraum W nach $A(W)$ ab.

Es sei nun $A = S + N$ eine Zerlegung von A in einen halbeinfachen Endomorphismus S und einem nilpotenten Endomorphismus N , die untereinander vertauschen. Dann kommutieren S und N auch mit A und damit mit A_s und A_n . Aus der Identität $A = A_s + A_n = S + N$ erhält man $A_s - S = N - A_n$. Rechts steht eine Differenz von miteinander vertauschenden nilpotenter Elemente, die daher wieder nilpotent ist. Zwei kommutierende diagonalisierbare Endomorphismen sind simultan diagonalisierbar. Insbesondere ist ihre Differenz ebenfalls diagonalisierbar. Durch Übergang zu einer geeigneten Körpererweiterung sieht man so, daß die Differenz zweier kommutierender halbeinfacher Endomorphismen wieder halbeinfach ist. Der einzige zugleich halbeinfache und nilpotente Endomorphismus ist die Nullabbildung. Es folgt $0 = A_s - S = N - A_n$. $\square$

Satz 12.20 — Es sei A ein endlichdimensionaler k -Vektorraum mit einem k -bilinearen aber nicht notwendig kommutativen oder assoziativen Produkt $A \times A \rightarrow A$. Dann enthält der Unterraum $\text{Der}(A) \subset \text{End}(A)$ der Derivationen mit jedem Element f auch seinen halbeinfachen und nilpotenten Anteil f_s beziehungsweise f_n .

Beweis. Durch Übergang zum algebraischen Abschluß können wir ohne weiteres annehmen, daß alle halbeinfachen Endomorphismen diagonalisierbar sind. Es sei also $f \in \text{Der}(A)$ vorgegeben und $f = f_s + f_n$ die zugehörige Jordan-Chevalley Zerlegung. Es sei $V = \bigoplus_a V_a$ die Hauptraumzerlegung von f . D.h. V_a ist f -invariant und $f_s|_{V_a} = a \text{id}_{V_a}$. Nach Voraussetzung ist f eine Derivation. Deshalb gilt für Vektoren $v \in V_a$ und $w \in V_b$ die Beziehung

$$(f - (a + b))(v \cdot w) = (f - a)(v) \cdot w + v \cdot (f - b)(w),$$

Und induktiv folgt

$$(f - (a + b))^n(v \cdot w) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (f - a)^i(v) \cdot (f - b)^{n-i}(w).$$

Nach Konstruktion ist $f - a$ auf V_a nilpotent und ebenso $f - b$ auf V_b . Für hinreichend großes n verschwindet also die rechte Seite. Das zeigt, daß $v \cdot w$ im Hauptraum zum Eigenwert $a + b$ liegt, kurz: $V_a \cdot V_b \subset V_{a+b}$. Das bedeutet

$$f_s(v \cdot w) = (a + b)v \cdot w = (av) \cdot w + v \cdot (bw) = f_s(a) \cdot w + v \cdot f_s(w)$$

und zeigt, daß f_s und $f_n = f - f_s$ Derivation sind. $\square$

Satz 12.21 — *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unterálgebra. Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent oder halbeinfach als Endomorphismus auf V , so ist $\text{ad } x$ nilpotent beziehungsweise halbeinfach als Endomorphismus in $\text{End}(\mathfrak{g})$. Insbesondere gilt für jedes $x \in \mathfrak{g}$ die Beziehung*

$$\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s) \quad \text{und} \quad \text{ad}(x)_n = \text{ad}(x_n).$$

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Ist x halbeinfach, so gibt es eine Basis v_i von V mit $x.v_i = \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in k$. Es sei v^i die dazu duale Basis von V^* . Die Endomorphismen $v_{ij} = v_i \otimes v^j$ bilden eine Basis von $\text{End}(V)$. Es gilt:

$$[x, v_{ij}](v_m) = \delta_{jm}x(v_i) - v_{ij}(\alpha_m v_m) = (\alpha_i - \alpha_j)\delta_{jm}v_i = (\alpha_i - \alpha_j)v_{ij}(v_m).$$

Das zeigt, daß v_{ij} ein Eigenvektor von $\text{ad } x$ ist. Mit anderen Worten: $\text{ad } x$ ist diagonalisierbar. Da $\text{ad } x$ den Unterraum $\mathfrak{g}$ in sich abbildet, ist auch die Einschränkung $\text{ad } x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ halbeinfach. Für nilpotente x wurde die Behauptung schon in Lemma 12.1 gezeigt.

Die letzte Aussage ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Jordan-Chevalley-Zerlegung und der Tatsache, daß $\text{ad}(x_n)$ und $\text{ad}(x_s)$ nilpotent bzw. halbeinfach sind und vertauschen. $\square$

§13 Auflösbare Liealgebren und Cartankriterium

Alle Liealgebren sind über den komplexen Zahlen definiert und werden als endlichdimensional vorausgesetzt.

13.1 Auflösbare Liealgebren

Der Begriff der Auflösbarkeit ist nach dem analogen Begriff aus der Gruppentheorie modelliert. Über die Galoistheorie rührt er also letztlich von dem Problem der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale her.

Definition 13.1 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Die derivierte Reihe zu $\mathfrak{g}$ wird rekursiv durch $\mathcal{D}^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ und $\mathcal{D}^{k+1} \mathfrak{g} = [\mathcal{D}^k \mathfrak{g}, \mathcal{D}^k \mathfrak{g}]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert. $\mathfrak{g}$ heißt auflösbar, wenn $\mathcal{D}^n \mathfrak{g} = 0$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$.

Offenbar gilt $\mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}' = \mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$. Induktiv folgt $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist jede nilpotente Liealgebra auch auflösbar. Es gilt sogar schon: Ist $\mathfrak{g}'$ nilpotent, so ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Beispiel 13.2 — Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und

$$D : \quad 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{\ell-1} \subset V_{\ell} = V$$

eine Fahne in V . Dann ist $\mathfrak{b}(D) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(V_i) \subset V_i \text{ für alle } i = 1, \dots, \ell\}$ eine auflösbare Unterálgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Es gilt nämlich $\mathfrak{b}(D)' = \mathfrak{n}(D)$, und weil $\mathfrak{n}(D)$ nilpotent ist, ist $\mathfrak{b}(D)$ auflösbar, .

Lemma 13.3 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1. Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so ist auch $\mathcal{D}^k \mathfrak{a}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$.
2. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so sind auch alle Unterálgebren und alle homomorphen Bilder auflösbar.
3. Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal und ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, so ist auch $\mathfrak{g}$ selbst auflösbar.
4. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auflösbare Ideale in $\mathfrak{g}$, so ist auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein auflösbares Ideal.

Beweis. Aussage 1 folgt aus Lemma 11.12.2.

Der Beweis zu Aussage 2 folgt wörtlich dem Beweis von Lemma 12.4, wenn man an den relevanten Stellen $\mathcal{C}^k$ durch $\mathcal{D}^k$ ersetzt.

Zu 3: Nach Annahme existiert ein n mit $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$ und ein m mit $\mathcal{D}^m(\mathfrak{a}) = 0$. Nun bedeutet $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$ genau $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$. Es folgt $\mathcal{D}^{n+m}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^m(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{D}^m(\mathfrak{a}) = 0$.

Zu 4: Nach Annahme ist $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, und der Quotient $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{b}$, also nach Aussage 2 selbst auflösbar. Nach Aussage 3 ist auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auflösbar. $\square$

Analog zur Definition des Nilradikals folgt aus der letzten Aussage des Lemmas, daß in einer endlichdimensionalen Liealgebra die Summe aller auflösbaren Ideale wieder auflösbar ist.

Definition 13.4 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Das größte auflösbare Ideal in $\mathfrak{g}$ heißt das *Radikal* von $\mathfrak{g}$ und wird mit $\text{rad}(\mathfrak{g})$ bezeichnet.

Lemma 13.5 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. $\mathfrak{g}$ ist genau dann auflösbar, wenn es eine Fahne $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ gibt derart, daß $\mathfrak{g}_{i-1}$ für jedes i ein Ideal in $\mathfrak{g}_i$ ist.

Beweis. Es sei zunächst eine solche Fahne gegeben. Dann ist $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}$ eine eindimensionale Liealgebra, also trivialerweise abelsch. Insbesondere gilt $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i-1}$. Induktiv folgt, daß $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_{n+1-k}$. Für hinreichend großes k ist $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = 0$ und somit $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{g}$ auflösbar und $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Die Auflösbarekeit impliziert, daß $\mathfrak{g}'$ ein echtes Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. Nun ist zum einen $\mathfrak{g}'$ auflösbar, so daß wir nach Induktion über die Dimension der Liealgebra eine Fahne $\mathfrak{g}'_i$ mit den geforderten Eigenschaften für $\mathfrak{g}'$ finden können.

Zum anderen ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ abelsch, so daß jede Fahne von linearen Unterräumen in $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ bereits die verlangten Eigenschaften hat. Beide Fahnen setzen sich in der üblichen Weise zu einer Fahne für $\mathfrak{g}$ zusammen. Diese Fahne hat die verlangte Eigenschaft. $\square$

Aus der Definition der Begriffe ist unmittelbar klar, daß jede abelsche Liealgebra nilpotent und jede nilpotente Liealgebra auflösbar ist. Deshalb gibt es in jeder endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ eine Kette von kanonisch definierten Idealen

$$Z(\mathfrak{g}) \subset \text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

Unter jedem Automorphismus von $\mathfrak{g}$ werden diese Ideale in sich abgebildet.

Lemma 13.6 — Es sei V ein endlichdimensionaler k -Vektorraum, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unterliealgebra, und $\mathfrak{h}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Ferner sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein simultaner Eigenwert von $\mathfrak{h}$, d.h. es gebe einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, mit $x.v = \lambda(x).v$ für alle $x \in \mathfrak{h}$. Dann gilt: $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]) = 0$.

Beweis. Es sei $v \in V$ ein simultaner Eigenvektor von $\mathfrak{h}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Für ein beliebiges $z \in \mathfrak{g}$ betrachten wir den linearen Unterraum

$$W := k\langle v, z.v, z^2.v, \dots \rangle \subset V.$$

Für $x \in \mathfrak{h}$ folgt nun:

$$x.(z^n.v) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} z^{n-s}((- \text{ad } z)^s(x)).v \quad (13.1)$$

$$= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \lambda((- \text{ad } z)^s x) z^{n-s}.v \quad (13.2)$$

Beiträge zur Spur von $x|_W$ kommen nur vom Summanden zum Index $s = 0$. Es folgt

$$\mathrm{tr}(x|_W) = \lambda(x) \cdot \dim(W). \quad (13.3)$$

Aber z bildet ebenfalls W in sich ab. Wir wenden jetzt Formel (13.3) auf das Element $[x, z]$ an und erhalten:

$$0 = \mathrm{tr}([x|_W, z|_W]) = \mathrm{tr}([x, z]|_W) = \lambda([x, z]) \dim(W).$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz 13.7 (Satz von Lie) — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Liealgebra und $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung.*

1. *Es gibt einen simultanen Eigenvektor $v \in V$ für alle Elemente $x \in \mathfrak{g}$, d.h. es gibt ein $v \in V \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ mit $x.v = \lambda(x)v$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.*
2. *Es existiert eine Fahne D in V mit $\varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(D)$.*

Beweis. Nach Lemma 13.5 existiert ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ der Kodimension 1. Wir können induktiv annehmen, daß ein simultaner Eigenvektor $v \in V$ für $\mathfrak{a}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ existiert. Es sei $W \subset V$ der zugehörige Eigenraum, d.h. $W = \{v \in V \mid x.v = \lambda(x)v \text{ für alle } x \in \mathfrak{a}\}$. Es sei $z \in \mathfrak{g}$ so gewählt, daß $\mathfrak{a} \oplus \mathbb{C}z = \mathfrak{g}$. Für beliebige $w \in W$ und $x \in \mathfrak{a}$ folgt:

$$x.(z.w) = [x, z].w + z.(x.w) = \lambda([x, z]).w + \lambda(x)z.w.$$

Nach Lemma 13.6 verschwindet die Einschränkung von λ auf $[z, \mathfrak{a}]$. Es bleibt also nur $x.(z.v) = \lambda(x)z.v$ übrig. Das bedeutet, daß $z(W) \subset W$. Wir wählen einen Eigenwert μ mit Eigenvektor $w \in W$ für den Endomorphismus $z|_W$. Setzt man jetzt $\tilde{\lambda}(x + \alpha z) = \lambda(x) + \alpha\mu$ für alle $x \in \mathfrak{a}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt $y.w = \tilde{\lambda}(y)w$ für alle $y \in \mathfrak{g}$.

Aussage 2 folgt wieder durch Induktion nach $\dim(V)$, indem man die induzierte Darstellung auf $V/\langle w \rangle$ betrachtet. $\square$

Folgerung 13.8 — *Eine endlichdimensionale komplexe Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist.*

Beweis. Da $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ abelsch ist, folgt aus der Nilpotenz von $\mathfrak{g}'$ sofort die Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}$. Es sei umgekehrt $\mathfrak{g}$ auflösbar. Dann ist auch $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ auflösbar. Nach 13.7 stabilisiert $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ eine Fahne. Folglich ist $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})' = \mathfrak{g}'/(\mathfrak{g}' \cap Z(\mathfrak{g}))$ nilpotent. Nach Lemma 12.4 ist auch $\mathfrak{g}'$ nilpotent. $\square$

13.2 Invariante Bilinearformen

Es seien U, V, W Darstellungen einer Liealgebra $\mathfrak{g}$. Die induzierte Wirkung von $x \in \mathfrak{g}$ auf $f \in \text{Hom}(U \otimes V, W)$ ist bekanntlich durch $(x.f)(u \otimes v) = x.(f(u \otimes v)) - f((x.u) \otimes v) - f(u \otimes (x.v))$ gegeben. Insbesondere ist f genau dann invariant, wenn

$$x.f(u \otimes v) = f((x.u) \otimes v) + f(u \otimes (x.v)).$$

Speziell ist eine Bilinearform $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$ genau dann invariant, wenn $0 = \beta([x, y], z) + \beta(y, [x, z])$, was sich etwas symmetrischer als

$$\beta([y, x], z) = \beta(y, [x, z]) \quad \text{für alle } x, y, z \in \mathfrak{g}$$

schreibt. Das ist äquivalent dazu, daß die induzierte Abbildung $\beta' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ mit $\beta'(x)(y) = \beta(x, y)$ äquivariant ist.

Es sei $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$ eine symmetrische Bilinearform. Den Unterraum $\text{rad}(\beta) := \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g} : \beta(x, y) = 0\}$ nennt man das *Radikal* von β . Man sagt, β sei nicht ausgeartet, wenn $\text{rad}(\beta) = 0$. Äquivalent dazu ist die Forderung, daß β eine injektive Abbildung $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ induziert. Man überzeugt sich durch eine einzeilige Rechnung von dem folgenden Lemma.

Lemma 13.9 — *Es sei β eine invariante symmetrische Bilinearform auf der Liealgebra $\mathfrak{g}$. Dann ist $\text{rad}(\beta)$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$.*

Die folgende Konstruktion liefert eine sehr wichtige Klasse von symmetrischen invarianten Bilinearformen: Dazu sei $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung. Wir setzen

$$\beta_\varphi(x, y) := \beta_V(x, y) := \text{tr}(\varphi(x)\varphi(y)).$$

Es ist sofort klar, daß β_φ symmetrisch ist. Aber auch die Invarianz folgt schnell nach Einsetzen der relevanten Ausdrücke und aus der Tatsache, daß die Spur invariant unter zyklischen Vertauschungen ist:

$$\text{tr}(\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)) = \text{tr}(\varphi(y)\varphi(z)\varphi(x)).$$

Definition 13.10 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Die invariante symmetrische Bilinearform

$$\kappa(x, y) := \beta_{\text{ad}}(x, y) = \text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y))$$

auf $\mathfrak{g}$ heißt *Killingform*¹⁰ von $\mathfrak{g}$.

In Verbindung mit dem unten bewiesenen Cartankriterium wird die Killingform das entscheidende Hilfsmittel für die Strukturuntersuchungen von endlichdimensionalen Liealgebren werden.

¹⁰nach Wilhelm Killing, * 1847 † 1923

13.3 Das Cartankriterium

Satz 13.11 (Cartankriterium) — Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unteralgebra. Ist die Bilinearform β_V auf $\mathfrak{g}$ trivial, so ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Beweis. Es sei $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es genügt zu zeigen, daß alle $x \in \mathfrak{g}'$ nilpotente Endomorphismen auf V sind. Denn dann sind diese Elemente erst recht ad-nilpotent. Nach dem Satz von Engel ist $\mathfrak{g}'$ nilpotent, also $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Um das einzusehen, betrachten wir den Normalisator von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(V)$, d.h.

$$N := N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) := \{z \in \mathfrak{gl}(V) \mid [z, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}.$$

Jedes $x \in \mathfrak{g}'$ schreibt sich in der Form $x = \sum_i [x'_i, x''_i]$ mit $x'_i, x''_i \in \mathfrak{g}$. Für $z \in N$ folgt

$$\mathrm{tr}_V(xz) = \beta_V\left(\sum_i [x'_i, x''_i], z\right) = \sum_i \beta_V(x'_i, [x''_i, z]) = 0$$

nach Voraussetzung. Demnach ist N senkrecht zu $\mathfrak{g}'$ bezüglich der Bilinearform β_V .

Es sei nun $x = x_s + x_n$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Elements $x \in \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$. Dann ist $\mathrm{ad} x = \mathrm{ad} x_s + \mathrm{ad} x_n$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung von $\mathrm{ad} x$ in $\mathrm{End}(\mathfrak{gl}(V))$, und es gibt ein Polynom P mit $\mathrm{ad} x_s = P(\mathrm{ad} x)$.

Es sei $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x_s ,

$$x_s \cdot v_i = \lambda_i v_i.$$

Wir wollen zeigen, daß alle $\lambda_i = 0$ sind, denn dann ist $x_s = 0$ und somit $x = x_n$ nilpotent. Dazu betrachten wir den $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum $A \subset \mathbb{C}$, der von den $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ aufgespannt wird. Wir wollen zeigen, daß $\dim_{\mathbb{Q}}(A) = 0$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß jede $\mathbb{Q}$ -lineare Form $f : A \rightarrow \mathbb{Q}$ verschwindet.

Wir betrachten den Endomorphismus $z : V \rightarrow V$ mit $z.v_i := f(\lambda_i)v_i$. Dann gilt

$$\mathrm{ad}(x_x)(v_i \otimes v_j^*) = (\lambda_i - \lambda_j)v_i \otimes v_j^* \quad \text{und} \quad \mathrm{ad}(z)(v_i \otimes v_j^*) = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))v_i \otimes v_j^*$$

Nach den klassischen Interpolationssätzen gibt es ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[X]$ mit der Eigenschaft $Q(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$ für alle i, j . Damit folgt: $\mathrm{ad} z = Q(\mathrm{ad} x_s) = Q(P(\mathrm{ad} x))$. Nun war x aus der Liealgebra $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{g}$ als Unterraum in $\mathfrak{gl}(V)$ von $\mathrm{ad} x$ stabilisiert wird. Folglich gilt dasselbe von $\mathrm{ad} z$, was nur heißt, daß z im Normalisator N liegt. Weil $N \perp \mathfrak{g}'$, folgt

$$0 = \mathrm{tr}_V(xz) = \sum_{i=1}^m v_i^*(xz v_i) = \sum_{i=1}^m f(\lambda_i) v_i^*(x v_i) = \sum_{i=1}^m f(\lambda_i) \lambda_i.$$

Wenn wir hierauf f anwenden, erhalten wir $\sum_{i=1}^m f(\lambda_i)^2 = 0$, was $f = 0$ impliziert, da alle $f(\lambda_i)$ rationale Zahlen sind. $\square$

Folgerung 13.12 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. $\mathfrak{g}$ ist genau dann auflösbar, wenn $\kappa(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}) = 0$.

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so auch $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Es existiert eine Fahne D in $\mathfrak{g}$ mit $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(D)$ und $\text{ad}(\mathfrak{g}') = (\text{ad}(\mathfrak{g}))' \subset \mathfrak{n}(D)$. Für $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in \mathfrak{g}'$ folgt also: $\text{ad}(x)\text{ad}(y) \in \mathfrak{n}(D)$! Es ist damit klar, daß $\kappa(x, y) = \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) = 0$.

Ist umgekehrt $\kappa(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}) = 0$, so erst recht $\kappa(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}') = 0$. Nach dem Cartankriterium ist $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ auflösbar. Dann ist $\mathfrak{g}'$ auflösbar und schließlich auch $\mathfrak{g}$. $\square$

Folgerung 13.13 — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Dann gilt*

$$\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \text{rad}(\kappa) \subset \text{rad}(\mathfrak{g}).$$

Beweis. Es sei $x \in \text{nil}(\mathfrak{g})$ und $y \in \mathfrak{g}$ beliebig. Für jedes ℓ betrachten wir die Abbildung $(\text{ad}(x)\text{ad}(y))^\ell : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Es ist klar, daß das Bild dieser Abbildung in $\mathcal{D}^\ell(\text{nil}(\mathfrak{g}))$ liegt, also für hinreichend großes ℓ verschwindet. Damit ist der Endomorphismus $\text{ad}(x)\text{ad}(y)$ nilpotent und seine Spur $\text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) = \kappa(x, y)$ verschwindet. Das bedeutet, daß das Nilradikal im Radikal der Killingform liegt: $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \text{rad}(\kappa)$.

Es sei $\mathfrak{r} := \text{rad}(\kappa)$. Da $\mathfrak{r}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, wird $\mathfrak{g}$ von $\text{ad}(x)\text{ad}(y)$ nach $\mathfrak{r}$ abgebildet, wenn $x, y \in \mathfrak{r}$. Das impliziert, daß $0 = \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) = \text{tr}_{\mathfrak{r}}(\text{ad}(x)\text{ad}(y))$. Die erste Gleichheit gilt dabei natürlich nach Definition des Radikals! Mit anderen Worten, $0 = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}} = \kappa_{\mathfrak{r}}$. Wenn $\kappa_{\mathfrak{g}}$ und $\kappa_{\mathfrak{r}}$ die Killingformen der Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{r}$ bezeichnen. Aus dem Cartankriterium und der vorigen Folgerung schließt man, daß $\mathfrak{r}$ auflösbar ist und deshalb in $\text{rad}(\mathfrak{g})$ liegt. $\square$

13.4 Das Casimirelement

Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra und β eine nicht ausgeartete invariante symmetrische Bilinearform. Die assoziierte Abbildung $\beta' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ist ein Isomorphismus von Darstellungen. β' vermittelt die folgenden Isomorphismen von Darstellungen:

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \text{End}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* = (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^*.$$

Definition 13.14 — Das Element $c^\beta \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, das unter diesen Isomorphismen den Elementen $\text{id}_{\mathfrak{g}}$ bzw. β entspricht, heißt das *Casimirelement*¹¹ zu β .

Aus der Definition ist klar, daß c^β ein invariantes Element ist.

Lemma 13.15 — *Es sei β eine nicht ausgeartete, invariante, symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g}$. Ferner sei $\alpha_i, i = 1, \dots, d$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und α^i die bezüglich β duale Basis. Dann gilt:*

$$c^\beta = \sum_i \alpha_i \otimes \alpha^i.$$

Für jedes $x \in \mathfrak{g}$ gilt:

$$\sum_i [x, \alpha_i] \otimes \alpha^i + \sum_i \alpha_i \otimes [x, \alpha^i].$$

¹¹nach Hendrik Brugt Gerhard Casimir, *15.7.1909 †15.4.2001

Beweis. Es gibt eindeutig bestimmt Elemente b_i mit der Eigenschaft, daß $\text{id}_{\mathfrak{g}} = \sum_i \alpha_i \otimes \beta'(b_i)$. Das bedeutet explizit

$$x = \sum_i \alpha_i \beta'(b_i)(x) = \sum_i \alpha_i \beta(b_i, x).$$

Wendet man hierauf $\beta(a^i, -)$ an, so folgt $\beta(a^i, x) = \beta(b_i, x)$. Da x beliebig war, folgt $b_i = a^i$. Bis hierher wurde nur benutzt, daß β nicht ausgeartet ist. Die zweite Aussage des Lemmas besagt lediglich in expliziter Weise, daß das Element $c^\beta = \sum_i \alpha_i \otimes \alpha^i$ invariant ist. $\square$

13.5 Dreidimensionale Liealgebren

Es sei k ein beliebiger Körper der Charakteristik 0. Wir wollen in diesem Abschnitt die dreidimensionalen Liealgebren über k bis auf Isomorphie klassifizieren.

Es sei $\mathfrak{g}$ eine dreidimensionale Liealgebra über k und $r := \dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Die Zahl r kann die Werte 0, 1, 2 oder 3 annehmen. Wenn $r = 0$, ist $\mathfrak{g}$ offenbar abelsch.

Wir betrachten die Liealgebren

$$\mathfrak{n} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in k \right\}$$

und

$$\mathfrak{c} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\}$$

Satz 13.16 — Ist $r = 1$, so ist $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{g} \cong k \oplus \mathfrak{c}$.

Beweis. Es sei z ein Basiselement für das Ideal $\mathfrak{g}'$.

1. Fall: z ist zentral. Wir ergänzen z durch x und y zu einer Basis von $\mathfrak{g}$. Es muß gelten $[x, y] = \lambda z$ für ein $\lambda \neq 0$. Indem wir x durch x/λ ersetzen, können wir annehmen, daß $[x, y] = z$. Die Abbildung

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{b}$.

2. Fall: z ist nicht zentral. Es sei $W := \ker(\text{ad } z)$. Es sei $x \in \mathfrak{g} \setminus W$ so gewählt, daß $[x, z] = z$, und $y \in W \cap \ker(\text{ad } x)$, $y \neq 0$. Mit dieser Wahl gelten die Relationen:

$$[x, y] = 0, \quad [x, z] = z, \quad [y, z] = 0$$

Damit zerfällt $\mathfrak{g}$ in die direkte Summe $\mathfrak{g} = k\langle y \rangle \oplus k\langle x, z \rangle$, und

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus $k\langle x, z \rangle \rightarrow \mathfrak{c}$. $\square$

Satz 13.17 — Es sei $r = 2$. Dann gibt es ein $f \in M_2(k)$ so, daß $\mathfrak{g} \cong k^2 \rtimes_f k$. Zwei solche Liealgebren sind genau dann isomorph, wenn sich die zugehörigen Endomorphismen nur um einen skalaren Faktor oder Konjugation unterscheiden.

Beweis. Es sei $y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$.

1. Fall: $\mathfrak{g}'$ ist abelsch. Dann ist die Lieklammer von $\mathfrak{g}$ vollständig bestimmt durch die Abbildung $f := \text{ad } y \in \text{End}(\mathfrak{g}')$. Umgekehrt kommt jede Wahl einer solchen Abbildung wirklich vor. Die Wahl von y bestimmt f bis auf einen Skalar, die Wahl einer Basis identifiziert f mit einer Matrix. Diese ist eindeutig bis auf Konjugation.

2. Fall: $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{c}$. Wie oben bezeichnet $\mathfrak{c}$ die bis auf Isomorphie einzige nichttriviale Liealgebra der Dimension 2. Es sei x, z eine Basis von $\mathfrak{c}$ mit $[x, z] = z$. Die Abbildung $f := \text{ad } y|_{\mathfrak{c}}$ ist eine Derivation. Mit dem Ansatz $f(x) = ax + bz$, $f(z) = cx + dz$, erhalten wir die Bedingung

$$[ax + bz, z] + [x + cx + dz] = cx + dz,$$

woraus $(a + d)z = cx + dz$, also $a = c = 0$ folgt. Aber dann wäre $\mathfrak{g}'$ nur von z aufgespannt, im Widerspruch zur Annahme. Der zweite Fall kommt also gar nicht vor. $\square$

Satz 13.18 — 1. Es sei $\mathfrak{g}$ eine dreidimensionale vollkommene Liealgebra. Dann ist die Killingform κ auf $\mathfrak{g}$ nicht ausgeartet, und $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \kappa)$.

2. Es seien β und β' nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen auf k^3 . Es gilt $\mathfrak{so}(3, \beta) \cong \mathfrak{so}(3, \beta')$ genau dann, wenn β' ein skalares Vielfaches einer zu β isomorphen Bilinearform ist.

Beweis. Es sei $\mathfrak{g}$ eine dreidimensionale Liealgebra mit $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Eine solche Liealgebra kann kein echtes nichttriviales Ideal besitzen. Wäre $\mathfrak{a}$ ein Ideal und W ein komplementärer Untervektorraum, so würde $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a} + [W, W]$ gelten. Nun hat man entweder $\dim(\mathfrak{a}) = 1$, $\dim(W) = 2$ und $\dim[W, W] \leq 1$, oder man hat $\dim(\mathfrak{a}) = 2$, $\dim(W) = 1$ und $\dim[W, W] = 0$. In jedem Falle hat man den Widerspruch $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2$. Das hat zwei Konsequenzen:

Erstens ist die adjungierte Abbildung injektiv. Denn der Kern ist ein Ideal, also entweder gleich 0 oder gleich $\mathfrak{g}$, und letzteres ist ausgeschlossen, weil dann $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ wäre.

Zweitens ist die Killingform κ nicht ausgeartet, denn sonst wäre das Radikal von κ ein nichttriviales Ideal in $\mathfrak{g}$, also gleich 0 oder gleich $\mathfrak{g}$, und letzteres ist ausgeschlossen, weil nach dem Cartankriterium $\mathfrak{g}$ auflösbar und deshalb nicht vollkommen wäre.

Die adjungierte Abbildung ist ein Liealgebrenhomomorphismus $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \kappa)$. Die rechte Seite ist ebenfalls dreidimensional, und da wir schon gesehen haben, daß ad injektiv ist, gilt $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \kappa)$.

Es sei nun V ein dreidimensionaler Vektorraum und β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Wir wählen eine Basis $v_i, i = 1, 2, 3$, mit $\beta(v_i, v_j) = b_i \delta_{ij}$. Es sei v^i die duale Basis von V^* . Dann bilden die Elemente

$$A_{ij} := b_j^{-1} v^i \otimes v_j - b_i^{-1} v^j \otimes v_i$$

für $i < j$ eine Basis von $\mathfrak{so}(V, \beta)$. Die Abbildung $\mathfrak{so}(V, \beta) \longrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{so}(V, \beta), \kappa)$ ist ein Isomorphismus. Wir berechnen die Killingform für $\mathfrak{so}(V, \beta)$. Es stellt sich heraus, daß die Killingform bezüglich der Basis A_{12}, A_{13}, A_{23} diagonalisiert ist mit

$$\kappa(A_{ij}, A_{ij}) = \frac{8}{b_i b_j}$$

Nun ist klar, daß sich $\mathfrak{so}(V, \beta)$ nicht ändert, wenn man β mit einem nichttrivialen Skalar multipliziert. Durch Multiplikation mit $b_1 b_2 b_3 / 8$ geht die Form auf $\mathfrak{so}(V, \beta)$ in eine zu β isomorphe Form über. Das zeigt, daß man die Form β bis auf Isomorphie und Reskalierung aus $\mathfrak{so}(V, \beta)$ zurückgewinnen kann. Daraus folgt die zweite Aussage des Satzes. $\square$

Über den komplexen Zahlen gibt es bis auf Isomorphie nur eine dreidimensionale vollkommene Liealgebra:

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}),$$

wobei $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ für die orthogonale Liealgebra zur Standardform auf $\mathbb{C}^3$ steht.

Über den reellen Zahlen gibt es bis auf Isomorphie vier verschiedene nicht-ausgeartete symmetrische Formen, die bezüglich einer Orthogonalbasis durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

Die erste und die vierte, und die zweite und die dritte Form sind bis auf einen Faktor -1 äquivalent und definieren isomorphe Liealgebren. Über $\mathbb{R}$ gibt es daher zwei nichtisomorphe Liealgebren

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{su}(2).$$

Diese treten als Liealgebren zu den Gruppen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ bzw. deren doppelter Überlagerung $\mathrm{SU}(2)$ auf. Der signifikante Unterschied ist hier, daß $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ nicht kompakt ist, während $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ kompakte Gruppen sind. Das kann man an der Killingform ablesen: Die Killingform von $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ ist negativ definit. Deshalb ist $\mathrm{Int}(\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}))$ als Untergruppe von $\mathrm{SO}(\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}), \kappa)$ kompakt.

§14 Halbeinfache Liealgebren

14.1 Einfachheit und Halbeinfachheit

Eine endliche Gruppe heißt bekanntlich einfach, wenn sie keine Normalteiler außer der trivialen Untergruppe und der Gruppe selbst besitzt. Ähnlich heißt ein Ring mit 1 einfach, wenn das Nullideal und der Ring selbst die einzigen zweiseitigen Ideale sind.

Ganz analog definieren wir den Begriff der einfachen Liealgebra. Allerdings empfiehlt es sich, die eindimensionale abelsche Liealgebra auszuschließen, die sich meist anders verhält, als die übrigen einfachen Liealgebren. Deshalb definieren wir:

Definition 14.1 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra über dem Körper k . Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, wenn $\mathfrak{g}$ nicht abelsch ist und keine Ideale außer 0 und $\mathfrak{g}$ besitzt. $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathfrak{g}$ die direkte Summe einfacher Ideale ist.

Lemma 14.2 — Jede halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist vollkommen. Insbesondere gilt für jede endlichdimensionale Darstellung $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, daß $\varphi(\mathfrak{g})$ in $\mathfrak{sl}(V)$ enthalten ist. Ferner ist jede eindimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ trivial.

Beweis. Es sei zunächst $\mathfrak{g}$ einfach. Wäre $\mathfrak{g}$ nicht vollkommen, also $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein echtes Ideal, so müßte es verschwinden, weil $\mathfrak{g}$ einfach ist. Das aber ist ausgeschlossen, weil dann $\mathfrak{g}$ sogar abelsch wäre. Es sei nun $\mathfrak{g}$ halbeinfach, also etwa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_\ell$ mit einfachen Idealen $\mathfrak{g}_i$. Dann gilt $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ und $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = 0$ für $i \neq j$. Daraus folgt

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigoplus_{i=1}^{\ell} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}. \quad (14.1)$$

Das zeigt, daß $\mathfrak{g}$ vollkommen ist. Es sei nun $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung. Dann gilt:

$$\varphi(\mathfrak{g}) = \varphi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\varphi(\mathfrak{g}), \varphi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V). \quad (14.2)$$

Ist schließlich V eindimensional, so folgt $\varphi = 0$, weil $\mathfrak{sl}(V) = 0$. $\square$

Lemma 14.3 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_\ell$ eine direkte Summenzerlegung mit einfachen Idealen. Dann ist diese Zerlegung eindeutig bis auf Anordnung der Summanden. Jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ ist Summe einer Teilmenge dieser Summanden.

Beweis. Es sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_\ell$ eine Zerlegung in einfache Ideale. Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{a}$ die Summe der in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Ideale $\mathfrak{g}_i$ ist. Wir betrachten die Projektion $\text{pr}_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$. Das Bild von $\mathfrak{a}$ unter dieser Abbildung ist ein Ideal in $\mathfrak{g}_i$. Also entweder gleich 0 oder gleich $\mathfrak{g}_i$. Im ersten Falle liegt $\mathfrak{a}$ im Kern der Projektion, d.h. in $\bigoplus_{j \neq i} \mathfrak{g}_j$. Durch Induktion über die Anzahl ℓ

der Summanden in $\mathfrak{g}$ sind wir dann fertig. Wir können also umgekehrt annehmen, daß $\text{pr}_i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_i$ für jede Projektion pr_i , $i = 1, \dots, \ell$ ist. Nun gilt

$$\text{pr}_i([\mathfrak{g}_i, \mathfrak{a}]) = [\text{pr}_i(\mathfrak{g}_i), \text{pr}_i(\mathfrak{a})] = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i. \quad (14.3)$$

Das geht nur, wenn das Ideal $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{a}$ nicht trivial ist. Da $\mathfrak{g}_i$ einfach ist, muß das Ideal mit $\mathfrak{g}_i$ übereinstimmen. Somit liegt $\mathfrak{g}_i$ in $\mathfrak{a}$, und zwar für jedes i . Es folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

Da jedes Ideal sich also aus einer Summe der vorgegebenen Ideale zusammensetzt, muß jedes einfache Ideal mit einem der vorgegebenen Ideale identisch sein. Die Summenzerlegung ist also in der Tat eindeutig. $\square$

Folgerung 14.4 — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Dann ist jedes Ideal und jedes homomorphe Bild von $\mathfrak{g}$ halbeinfach.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ eine halbeinfache Liealgebra mit einfachen Summanden $\mathfrak{g}_i$. Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ gibt es dann eine Teilmenge $J \subset I$ mit $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in J} \mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \bigoplus_{i \in I \setminus J} \mathfrak{g}_i$. $\square$

Satz 14.5 — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.
2. $\text{rad}(\kappa) = 0$, d.h. die Killingform ist nicht ausgeartet.
3. $\text{nil}(\mathfrak{g}) = 0$.
4. $\mathfrak{g}$ enthält keine abelschen Ideale.
5. $\mathfrak{g}$ ist halbeinfach.

Beweis. Zunächst sind die Aussagen 1 bis 3 äquivalent: Aus den Inklusionsbeziehungen (nach Folgerung 13.13)

$$\text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \text{rad}(\kappa) \subset \text{rad}(\mathfrak{g}) \quad (14.4)$$

folgen nämlich die Implikationen $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sofort. Die Richtung $3 \Rightarrow 1$ sieht man so: Das Radikal $\text{rad}(\mathfrak{g})$ ist auflösbar; deshalb ist $\text{rad}(\mathfrak{g})'$ nilpotent und muß als Teilraum von $\text{nil}(\mathfrak{g})$ verschwinden. Aber dann ist $\text{rad}(\mathfrak{g})$ sogar abelsch, also erst recht nilpotent und muß auch verschwinden.

Jedes abelsche Ideal ist nilpotent, deshalb gilt $3 \Rightarrow 4$. Ist umgekehrt $0 \neq \mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal, und k minimal mit $\mathcal{D}^k \mathfrak{n} \neq 0$, so ist $\mathcal{D}^k \mathfrak{n}$ abelsch. Deshalb gilt auch $4 \Rightarrow 3$. Schließlich folgt aus Lemma 14.3, daß jedes abelsche Ideal einer halbeinfachen Liealgebra gleichzeitig halbeinfach und abelsch sein müßte, was unmöglich ist. Deshalb gilt $5 \Rightarrow 4$.

Es genügt jetzt zu zeigen, daß $1 \Rightarrow 5$. Entweder ist $\mathfrak{g}$ schon einfach, oder es gibt ein echtes Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$. Der bezüglich κ zu $\mathfrak{a}$ orthogonale Raum $\mathfrak{a}^\perp$ ist wieder ein Ideal, weil κ eine invariante Bilinearform ist. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Die Einschränkung $\kappa_{\mathfrak{b}} = \kappa|_{\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}}$ verschwindet, weil sogar $\kappa|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp} = 0$. Nach dem Cartankriterium ist $\mathfrak{b}$ auflösbar. Nach Voraussetzung 1 muß $\mathfrak{b}$ verschwinden. Wir haben schon gesehen, daß aus 1 auch folgt, daß κ nicht ausgeartet ist. Darum bedeutet $\mathfrak{b} = 0$, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. Notwendigerweise sind die Einschränkungen von κ auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^\perp$ nicht ausgeartet. Weiter gilt für jedes Ideal $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}$, daß $\kappa|_{\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}} = \kappa_{\mathfrak{c}}$. Das impliziert, daß die Killingformen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^\perp$ nicht ausgeartet sind. Wir können also induktiv den Satz auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^\perp$ anwenden und schließen, daß diese beiden Ideale halbeinfach sind. Folglich ist auch $\mathfrak{g}$ halbeinfach. $\square$

Satz 14.6 (Weyl) — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Dann gibt es zu jedem invarianten Unterraum in einer endlichdimensionalen Darstellung von $\mathfrak{g}$ ein invariantes Komplement. Insbesondere ist jede endlichdimensionale $\mathfrak{g}$ -Darstellung die direkte Summe von irreduziblen Unterdarstellungen.*

Beweis. Es sei V eine endlichdimensionale $\mathfrak{g}$ -Darstellung und $U \subset V$ ein invarianter Unterraum, $W = V/U$ die Faktordarstellung. Die kanonische Projektion $p : \text{Hom}(W, V) \rightarrow \text{End}(W)$ ist äquivariant. Deshalb ist das Urbild $V' = p^{-1}\langle \text{id}_W \rangle$ eine Unterdarstellung. Wenn die surjektive Abbildung $V' \rightarrow \langle \text{id}_W \rangle$ eine äquivariante Spaltung besitzt, so ist das Bild von id_W unter der Spaltung eine äquivariante Spaltung von $V \rightarrow W$. Es genügt deshalb, statt $V \rightarrow W$ die Abbildung $V' \rightarrow \mathbb{C}$ zu betrachten.

Man kann weiter annehmen, daß der Kern der Abbildung $V' \rightarrow \mathbb{C}$ irreduzibel ist. Im anderen Fall sei nämlich $W' \subset \ker(V' \rightarrow \mathbb{C})$ ein irreduzibler Unterraum. Dann projiziert V'/W' surjektiv auf $\mathbb{C}$, und nach Induktion über $\dim(V')$ können wir annehmen, daß es in V'/W' einen eindimensionalen invarianten Unterraum L gibt, der isomorph auf $\mathbb{C}$ geht. Es sei weiter $U \subset V'$ das Urbild von L unter der Projektion $V' \rightarrow V'/W'$. Dann ist die Einschränkung von $V' \rightarrow \mathbb{C}$ auf U immer noch surjektiv. Wieder mit Induktion über $\dim(V')$ findet man einen eindimensionalen Unterraum $M \subset U \subset V'$, der surjektiv auf $\mathbb{C}$ abbildet.

Es genügt also, den Satz für die folgende Konstellation zu beweisen: V ist eine $\mathfrak{g}$ -Darstellung, $W \subset V$ ist ein irreduzibler Unterraum und V/W ist die eindimensionale triviale Darstellung. Wir ersetzen nun die halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ durch ihr Bild in $\mathfrak{gl}(W)$. Wenn das Bild trivial ist, reduziert sich die exakte Sequenz von Darstellungen $0 \rightarrow W \rightarrow V \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$ zu einer exakten Sequenz von Vektorräumen und spaltet trivialerweise. Andernfalls ist das Bild eine halbeinfache Liealgebra, die der Bequemlichkeit halber wieder mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet sei. Die invariante symmetrische Bilinearform β_V auf $\mathfrak{g}$ ist nicht ausgeartet, weil sonst ihr Radikal ein nichttriviales auflösbares Ideal wäre. Es sei nun $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $x^1, \dots, x^n$ die dazu duale Basis, sowie $c := \sum_i x_i x^i \in \text{End}(V)$ das zugehörige Casimirelement. Das

Casimirelement vertauscht mit $\mathfrak{g}$ und bildet jeden invarianten Unterraum in sich ab. Insbesondere ist die Einschränkung auf W nach dem Lemma von Schur ein Skalar γ . Auf dem Komplement V/W operiert c trivial. Deshalb gilt einerseits $\mathrm{tr}_V(c) = \gamma \dim(W)$ und andererseits $\mathrm{tr}_V(c) = \mathrm{tr}_V(\sum_i x_i x^i) = \sum_i \beta_V(x_i, x^i) = \dim(\mathfrak{g})$. Das zeigt $\gamma = \dim(\mathfrak{g}) / \dim(W) \neq 0$. Demnach hat c den Eigenwert 0 genau mit Vielfachheit 1, und Kern von c ist ein invarianter Unterraum von V , der surjektiv auf $\mathbb{C}$ abbildet. $\square$

14.2 Jordan-Chevalley-Zerlegung

Satz 14.7 — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Dann ist die Adjunktionsabbildung*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \quad (14.5)$$

ein Isomorphismus. Das bedeutet, daß alle Derivationen von $\mathfrak{g}$ innere Derivationen sind.

Beweis. Der Kern von ad ist das Zentrum von $\mathfrak{g}$, also ein abelsches Ideal, und muß verschwinden. Die Abbildung ad ist daher injektiv, und wir können $\mathfrak{g}$ mit $\mathrm{ad} \mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ identifizieren.

Weiter ist bekanntlich $\mathrm{ad} \mathfrak{g}$ ein Ideal in $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$: Für jedes $x \in \mathfrak{g}$ und $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ gilt $[\delta, \mathrm{ad} x] = \mathrm{ad} \delta(x)$. Darum ist das orthogonale Komplement $I := (\mathrm{ad} \mathfrak{g})^\perp$ bezüglich der Killingform auf $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ebenfalls ein Ideal in $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Wegen $\kappa_{\mathrm{Der}(\mathfrak{g})}|_{\mathrm{ad} \mathfrak{g}} = \kappa_{\mathrm{ad} \mathfrak{g}}$ und $\mathrm{ad} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ ist die Einschränkung der Killingform von $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ auf $\mathrm{ad} \mathfrak{g}$ nicht ausgeartet. Dies impliziert, daß $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad} \mathfrak{g} \oplus I$.

Für $\delta \in I$ und $x \in \mathfrak{g}$ folgt $\mathrm{ad}(\delta(x)) = [\delta, \mathrm{ad} x] \in I \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = 0$. Weil ad injektiv ist, verschwindet $\delta(x) = 0$ für jedes x . Das zeigt $\delta = 0$ und letztlich $I = 0$. $\square$

Folgerung 14.8 — *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Dann gibt es zu jedem Element $x \in \mathfrak{g}$ Elemente $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $x = x_s + x_n$.
2. $\mathrm{ad} x_s$ ist halbeinfach, $\mathrm{ad} x_n$ ist nilpotent und $[x_s, x_n] = 0$.
3. Es gibt Polynome p_s und p_n ohne konstanten Term mit $\mathrm{ad} x_s = p_s(\mathrm{ad} x)$ und $\mathrm{ad} x_n = p_n(\mathrm{ad} x)$.
4. Die Zerlegung ist eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaften 1 und 2.

Beweis. Es sei $\mathrm{ad} x = f_s + f_n$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung von $\mathrm{ad} x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Nach Satz 12.20 liegen f_s und f_n bereits in $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, und nach Satz 14.7 gibt es eindeutig bestimmte $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ mit $\mathrm{ad} x_s = f_s$ und $\mathrm{ad} x_n = f_n$. $\square$

Definition 14.9 (abstrakte Jordan-Chevalley Zerlegung) — Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Die zu einem Element $x \in \mathfrak{g}$ gemäß der obigen Folgerung eindeutig zugeordneten Elemente x_s und x_n aus $\mathfrak{g}$ heißen der *halbeinfache* und der *nilpotente Anteil* von x . Die Zerlegung $x = x_s + x_n$ heißt *abstrakte Jordan-Chevalley Zerlegung* von x .

Folgerung 14.10 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra und $x, y \in \mathfrak{g}$ mit $[x, y] = 0$. Dann gilt $(x + y)_s = x_s + y_s$ und $(x + y)_n = x_n + y_n$.

Beweis. Wenn x und y kommutieren, so kommutieren auch x_s, x_n, y_s und y_n paarweise miteinander. Es folgt, daß $\text{ad}(x_s + y_s)$ halbeinfach ist, daß $(x_n + y_n)$ nilpotent ist, und daß $x_s + y_s$ und $x_n + y_n$ alle Eigenschaften der Jordan-Chevalley Zerlegung von $x + y$ haben. $\square$

14.3 Die Cartanzerlegung

Im Abschnitt 12.2 haben wir Hauptraumzerlegungen von Liealgebren bezüglich ihrer Cartanunteralgebren diskutiert. Für halbeinfache Liealgebren nimmt diese Zerlegung eine besonders schöne Form an. Im Folgenden sei der Grundkörper stets $\mathbb{C}$.

Satz 14.11 — Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra. Dann sind die folgenden Aussagen über eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ äquivalent.

1. $\mathfrak{h}$ ist ein Cartanunteralgebra.
2. $\mathfrak{h}$ ist maximal mit der Eigenschaft, daß alle $x \in \mathfrak{h}$ halbeinfach sind.

In diesem Falle gilt zusätzlich

3. $\mathfrak{h}$ ist eine maximale abelsche Unteralgebra.
4. $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ ist nicht ausgeartet.

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

1. Zunächst einmal enthält $\mathfrak{g}$ halbeinfache Elemente, denn bestünde $\mathfrak{g}$ nur aus ad-nilpotenten Elementen, so wäre $\mathfrak{g}$ nach dem Satz von Lie nilpotent, also trivial. Es gibt daher sicher maximale Unteralgebren aus halbeinfachen Elementen. Es sei $\mathfrak{h}$ eine solche. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{h}$ eine Cartanunteralgebra ist. Denn nach dem Konjugationssatz 12.17 sind dann alle anderen Cartanunteralgebren zu $\mathfrak{h}$ konjugiert unter der Gruppe $\text{Int}(\mathfrak{g})$ und bestehen deshalb ebenfalls aus halbeinfachen Elementen.

2. $\mathfrak{h}$ ist abelsch. Denn da jedes $x \in \mathfrak{h}$ halbeinfach ist, zerfällt $\mathfrak{h}$ in Eigenräume $\mathfrak{h} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{h}_{\lambda}(x)$, bezüglich der Operation von $\text{ad } x$. Es sei $y \in \mathfrak{h}_{\lambda}(x)$, d.h. $[x, y] = \lambda y$. Nun operiert y selbst ebenfalls halbeinfach auf $\mathfrak{h}$, und x zerlegt sich in eine Summe von Eigenvektoren $x = \sum_{\mu} x_{\mu}$, d.h.

$$\lambda y = [x, y] = - \sum_{\mu} \mu x_{\mu} \quad (14.6)$$

und

$$0 = [y, -\lambda y] = [y, \sum_{\mu} \mu x_{\mu}] = \sum_{\mu} \mu^2 x_{\mu}. \quad (14.7)$$

Das zeigt $x_{\mu} = 0$ für alle $\mu \neq 0$ und somit $[x, y] = 0$.

3. Als abelsche Liealgebra ist $\mathfrak{h}$ insbesondere auch nilpotent, und es gibt eine Hauptraumzerlegung $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{g}_{\alpha}$, wobei $\alpha \in \Lambda : \Leftrightarrow \mathfrak{g}_{\alpha} := \mathfrak{g}_{\alpha}(\mathfrak{h}) \neq 0$. Man beachte, daß hier die Haupträume sogar wirkliche Eigenräume zu simultanen Eigenwerten sind, weil alle Elemente in $\mathfrak{h}$ halbeinfach sind. Wir müssen zeigen, daß die Inklusion $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ eine Gleichheit ist.

4. Für $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ und $y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ gilt

$$\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y(\mathfrak{g}_{\gamma}) \subset \mathfrak{g}_{\gamma+\alpha+\beta}. \quad (14.8)$$

Deshalb gilt

$$\kappa(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0, \text{ falls } \alpha + \beta \neq 0. \quad (14.9)$$

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra und besitzt nach Satz 14.5 eine nicht ausgeartete Killingform. Kombiniert mit dem letzten Argument bedeutet das: $\mathfrak{g}_0$ steht senkrecht auf allen $\mathfrak{g}_{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, und $\kappa|_{\mathfrak{g}_0}$ ist nicht ausgeartet.

5. Es sei nun $x \in \mathfrak{g}_0$ gegeben. Da x mit $\mathfrak{h}$ kommutiert, gilt dies auch für den halbeinfachen und nilpotenten Anteil x_s bzw. x_n von x . Deshalb liegen x_s und x_n in $\mathfrak{g}_0$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$ liegt x_s allerdings schon in $\mathfrak{h}$.

Es sei nun $y \in \mathfrak{h}$ beliebig. Weil y und x_n kommutieren, folgt $(\operatorname{ad} x_n \operatorname{ad} y)^N = (\operatorname{ad} x_n)^N (\operatorname{ad} y)^N = 0$ für alle hinreichend großen N . Daher ist $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ nilpotent und $\kappa(x_n, y) = 0$. Das Argument zeigt, daß x_n im orthogonalen Komplement $\mathfrak{h}^{\perp}$ von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}_0$ liegt.

6. Das erlaubt die folgenden Schlüsse: Erstens gilt $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}^{\perp}$, weil jedes $x \in \mathfrak{g}_0$ die Zerlegung $x = x_s + x_n$ mit $x_s \in \mathfrak{h}$ und $x_n \in \mathfrak{h}^{\perp}$ besitzt. Zweitens muß diese Summenzerlegung sogar direkt sein, d.h. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$, weil die Killingform auf $\mathfrak{g}_0$ nicht ausgeartet ist und darum $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}^{\perp}$ genau komplementäre Dimension haben. Drittens schließlich ist die Einschränkung der Killingform auf $\mathfrak{h}$ und auf $\mathfrak{h}^{\perp}$ jeweils nicht ausgeartet.

7. Für jedes $x \in \mathfrak{h}^{\perp}$ liegt der nilpotente Anteil x_n ebenfalls in $\mathfrak{h}^{\perp}$, der halbeinfache also in $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = 0$. Jedes $x \in \mathfrak{h}^{\perp}$ ist also schon nilpotent. Aber dann ist auch $(\operatorname{ad} x)^2$ nilpotent und somit $\kappa(x, x) = 0$. Die Einschränkung der Killingform auf $\mathfrak{h}^{\perp}$ ist also zugleich symmetrisch, nicht ausgeartet und antisymmetrisch. Das erzwingt $\mathfrak{h}^{\perp} = 0$. $\square$

Aus dem Satz und seinem Beweis ergibt sich folgendes Bild:

Definition und Satz 14.12 (Cartanzerlegung) — Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra und $\mathfrak{h}$ eine Cartanunteralgebra. Dann besteht $\mathfrak{h}$ nur aus halbeinfachen Elementen. Die Menge R aller $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ mit

$$\mathfrak{g}_{\alpha} := \{x \in \mathfrak{g} \mid h.x = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\} \neq 0 \quad (14.10)$$

heißt das *Wurzelsystem* von $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, seine Elemente *Wurzeln*. Es gibt eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha}. \quad (14.11)$$

Die Killingform κ auf $\mathfrak{g}$ und seine Einschränkung auf $\mathfrak{h}$ sind nicht ausgeartet. Bezüglich κ gilt $\mathfrak{g}_{\alpha} \perp \mathfrak{g}_{\beta}$ für alle $\alpha \neq -\beta$ und $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{g}_{\alpha}$ für alle $\alpha \in R$. Weiter induziert κ induziert eine perfekte Paarung

$$\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow \mathbb{C} \quad (14.12)$$

für alle $\alpha \in R$. Insbesondere liegt mit α auch $-\alpha$ in R .

Wir beweisen eine Reihe von Lemmata über die Wurzeln R :

Lemma 14.13 — $\mathfrak{h}^*$ wird von R aufgespannt.

Beweis. Angenommen, $\langle R \rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{h}^*$ wäre ein echter Unterraum. Dann gäbe es ein nicht-triviales $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in R$. Ein solches h läge im Zentrum von $\mathfrak{g}$, weil es mit $\mathfrak{h}$ und allen Wurzelräumen $\mathfrak{g}_{\alpha}$ kommutierte. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, folgt $h = 0$. $\square$

Die Bilinearform $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ ist nicht ausgeartet, d.h. die Abbildung

$$\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*, \quad t \mapsto \kappa(t, -) \quad (14.13)$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere existiert zu jeder Wurzel α ein eindeutig bestimmtes Element $t_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ mit der Eigenschaft

$$\alpha(h) = \kappa(t_{\alpha}, h) \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{h}. \quad (14.14)$$

Lemma 14.14 — Für jede Wurzel α und $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gilt

$$[x, y] = \kappa(x, y) t_{\alpha}. \quad (14.15)$$

Beweis. Wir wissen, daß $[x, y] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Für ein beliebiges $h \in \mathfrak{h}$ folgt:

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \kappa(\alpha(h)x, y) = \alpha(h)\kappa(x, y).$$

Weil h beliebig war, bedeutet dies nach Definition von t_{α} , daß $[x, y] = \kappa(x, y)t_{\alpha}$. $\square$

Lemma 14.15 — Für jedes Wurzel $\alpha \in R$ gilt: $\alpha(t_{\alpha}) = \kappa(t_{\alpha}, t_{\alpha}) \neq 0$.

Beweis. Da $\mathfrak{g}_{\alpha}$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ bezüglich der Killingform zueinander dual sind, können wir $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ so wählen, daß $\kappa(x, y) = 1$, so daß die Relationen

$$[t_{\alpha}, x] = \alpha(t_{\alpha})x, \quad [t_{\alpha}, y] = -\alpha(t_{\alpha})y, \quad [x, y] = t_{\alpha} \quad (14.16)$$

gelten. Wenn $\alpha(t_{\alpha}) = 0$, hat die Unteralgebra $\mathfrak{s} := \langle x, y, t_{\alpha} \rangle_{\mathbb{C}}$ die Eigenschaften

$$\mathfrak{s}' := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathbb{C}\langle t_{\alpha} \rangle \quad \text{und} \quad [\mathfrak{s}, t_{\alpha}] = 0. \quad (14.17)$$

Insbesondere ist $\mathfrak{s}$ auflösbar. Nach dem Satz von Lie existiert eine Fahne D von $\mathfrak{g}$ mit $\text{ad}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{b}(D) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Dies impliziert $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{n}(D)$. Insbesondere wäre t_α ad-nilpotent, als Element in $\mathfrak{h}$ aber gleichzeitig halbeinfach. Das ist nur für $t_\alpha = 0$ möglich. Der Widerspruch zeigt, daß $\alpha(t_\alpha) \neq 0$. $\square$

Definition 14.16 — Für jede Wurzel $\alpha \in R$ sei

$$h_\alpha := \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha. \quad (14.18)$$

Aus der Definition ergibt sich sofort, daß $\alpha(h_\alpha) = 2$ und $h_{-\alpha} = -h_\alpha$. Wir wählen Elemente $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit

$$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}. \quad (14.19)$$

Für die Elemente x_α, y_α und h_α gelten dann die Kommutatorregeln

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \quad [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha, \quad [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha. \quad (14.20)$$

Der von x_α, h_α und y_α aufgespannte Unterraum ist eine zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ isomorphe Unter-
algebra von $\mathfrak{g}$, die wir mit $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ bezeichnen. So wie $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ definiert wurde, scheint die Unter-
algebra von der Wahl der Elemente x_α und y_α abzuhängen. Eine Konsequenz
des nächsten Lemmas ist, daß dies nicht der Fall ist.

Die Unter-
algebra $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ operiert auf $\mathfrak{g}$, und $\mathfrak{g}$ zerfällt in eine direkte Summe von
irreduziblen Unter-
darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$. Wir kennen die Struktur der Darstellungen
von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ bereits sehr genau und wenden diese Struktur-
ergebnisse auf $\mathfrak{g}$ an.

Lemma 14.17 —

1. Für alle Wurzeln α und β ist $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.
2. Die einzigen Wurzeln, die Vielfache einer Wurzel α sind, sind α und $-\alpha$.
3. Für alle Wurzeln α gilt $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

Beweis. Es seien α und β Wurzeln. h_α operiert auf $\mathfrak{g}_\beta$ mit dem Eigenwert $\beta(h_\alpha)$. Wir wissen aber, daß alle Gewichte einer endlichdimensionalen $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Darstellung ganzzahlig sein müssen. Das beweist die erste Aussage.

Angenommen α und $\lambda\alpha$ sind Wurzeln für ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dann ist nach der vorigen Überlegung $\lambda\alpha(h_\alpha) = 2\lambda$ eine ganze Zahl, also $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Vertauscht man die Rollen von α und $\lambda\alpha$, so folgt, daß auch $1/\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Es folgt, daß $\lambda \in \{\pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$.

Wir können nun ohne Einschränkung annehmen, α wäre die kleinste Wurzel in der Geraden $\mathbb{C}\alpha$ in dem Sinne, daß jede andere Wurzel in dieser Geraden hat die Form $\lambda\alpha$ mit $\lambda \in \{\pm 1, \pm 2\} =: B$ hat. Wir betrachten den $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ -Untermodul

$$W := \bigoplus_{n \in B} \mathfrak{g}_{n\alpha} \oplus \mathbb{C}\langle t_\alpha \rangle. \quad (14.21)$$

Alle Gewichte dieses Untermoduls sind gerade, weil $\alpha(h_\alpha) = 2$. Nach 14.6 wissen wir, daß dieser Vektorraum in eine direkte Summe von irreduziblen $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ -Moduln zerfällt. Die Anzahl der Summanden ist die Dimension des Gewichtsraums zum Gewicht 0. Aber dieser wird von t_α aufgespannt und ist eindimensional. Deshalb ist W selbst irreduzibel. Die Algebra $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ ist ein Untermodul in W und deshalb mit W identisch. Daraus folgt erstens, daß außer α und $-\alpha$ keine weiteren Wurzeln auf der Geraden durch α liegen, und daß zweitens die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ von x_α und y_α aufgespannt werden und darum eindimensional sind. $\square$

Wir transportieren die Killingform auf $\mathfrak{h}$ vermöge des Isomorphismus

$$\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*, \quad t \mapsto \kappa(t, -), \quad (14.22)$$

nach $\mathfrak{h}^*$ und setzen

$$(\alpha, \beta) := \kappa(t_\alpha, t_\beta). \quad (14.23)$$

Die so definierte Bilinearform $(-, -) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$ ist nicht ausgeartet. Für beliebige Wurzeln α, β gilt

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \beta(h_\alpha) = \kappa(t_\beta, h_\alpha) = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}. \quad (14.24)$$

und

$$\kappa(h_\alpha, h_\beta) = \frac{4}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}(\alpha, \beta). \quad (14.25)$$

Weil R den Dualraum $\mathfrak{h}^*$ aufspannt, können wir $\mathbb{C}$ -Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ von $\mathfrak{h}^*$ in R wählen. Es sei $E \subset \mathfrak{h}^*$ der von dieser Basis erzeugte $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum.

Satz 14.18 — 1. Alle Wurzeln $\alpha \in R$ liegen in E .

2. Die Einschränkung der Bilinearform $(-, -)$ auf E ist rational und positiv definit.

Beweis. Da κ nicht ausgeartet ist, ist auch die Bilinearform $(-, -)$ auf $\mathfrak{h}^*$ nicht ausgeartet. Damit ist die Matrix

$$A := ((\alpha_i \alpha_j))_{ij} \in M_n(\mathbb{C}) \quad (14.26)$$

invertierbar. Jede Wurzel $\beta \in R$ läßt sich als Linearkombination

$$\beta = \sum_i c_i \alpha_i \quad (14.27)$$

mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$ schreiben. Wir müssen zeigen, daß $c_i \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten die Matrizen

$$B := ((\alpha_i \alpha_j))_{ij} \in M_n(\mathbb{Z}) \quad (14.28)$$

und

$$D := \begin{pmatrix} \frac{2}{(\alpha_1, \alpha_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{2}{(\alpha_\ell, \alpha_\ell)} \end{pmatrix}. \quad (14.29)$$

Mit diesen Matrizen gilt $B = AD$. Insbesondere ist auch B invertierbar. Es folgt:

$$\mathbb{Z} \ni \langle \beta, \alpha_j \rangle = \sum_i c_i \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \sum_i c_i B_{ij} \quad (14.30)$$

und somit

$$c_i = \sum_j \langle \beta, \alpha_j \rangle B_{ji}^{-1} \in \mathbb{Q}. \quad (14.31)$$

Das zeigt $R \subset E$. Weil alle Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ eindimensional sind, folgt für $x, y \in \mathfrak{h}$, daß

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(x) \alpha(y), \quad (14.32)$$

und folglich für $\beta \in R$:

$$(\beta, \beta) = \kappa(t_\beta, t_\beta) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(t_\beta)^2 = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, \beta)^2. \quad (14.33)$$

Nach Multiplikation mit $4/(\beta, \beta)^2$ erhält man

$$\frac{4}{(\beta, \beta)} = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, \beta \rangle^2 \in \mathbb{Z}. \quad (14.34)$$

und somit $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$. Durch Polarisierung folgt, daß $(-, -)$ auf E rationale Werte annimmt. Nun folgt für beliebige $\beta \in E$:

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, \beta)^2 \geq 0. \quad (14.35)$$

Da $(-, -)$ auf $\mathfrak{h}^*$ nicht ausgeartet ist, kann auch $(-, -)|_E$ nicht ausgeartet sein. $\square$

14.4 Spiegelungen

Es seien x, h, y die Standarderzeuger von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Auf der Standarddarstellung $V(1) = \mathbb{C}\langle z_1, z_2 \rangle$ sind x, h und y bezüglich der Basis (z_1, z_2) durch die Matrizen

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.36)$$

gegeben. Die Elemente x und y operieren nilpotent auf jeder Darstellung V von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Insbesondere ist die Abbildung

$$\tau_V := \exp(x) \exp(-y) \exp(x) : V \rightarrow V \quad (14.37)$$

definiert. Speziell für die Standarddarstellung findet man

$$\tau_{V(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.38)$$

Auf $V(2) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist $\tau_{V(2)}$ ein innerer Automorphismus.

Für jeden Homomorphismus $f : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -Darstellungen gilt $\tau_W \circ f = f \circ \tau_V$. Wir lassen daher im Folgenden den Index V fallen und schreiben einfach $\tau = \tau_V$. Weiter gilt $\tau_{V \otimes W} = \tau_V \otimes \tau_W$. Da jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ eine Unterdarstellung von $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ ist, folgt, daß τ auf jeder Darstellung invertierbar ist.

Wegen $\tau(z_1) = -z_2$ und $\tau(z_2) = z_1$ können wir die Wirkung von τ auf $V(n) = S^n(V(1))$ mit der Basis $z_1^{n-i} z_2^i$ leicht ausrechnen:

$$\tau(z_1^{n-i} z_2^i) = (-1)^{n-i} z_1^i z_2^{n-i}. \quad (14.39)$$

Insbesondere gilt

$$\tau^2(z_1^{n-i} z_2^i) = (-1)^{n-2i} z_1^{n-i} z_2^i, \quad (14.40)$$

Speziell auf $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ selbst hat man $\tau(x) = y$, $\tau(h) = -h$ und $\tau(y) = x$. Zusammengefaßt:

Lemma 14.19 — *Es sei V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Die Abbildung $\tau : V \rightarrow V$ bildet λ -Eigenraum von h isomorph auf den $-\lambda$ -Eigenraum ab, und die Einschränkung von τ^2 auf den λ -Eigenraum ist die Multiplikation mit $(-1)^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.* $\square$

Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartanunteralgebra und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \quad (14.41)$$

die Wurzelzerlegung von $\mathfrak{g}$. Wir wählen für eine Wurzel $\alpha \in R$ Elemente $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ so aus, daß x_α , h_α und $y_\alpha = x_{-\alpha}$ ein Standardtripel bilden, das eine Kopie $\mathfrak{sl}_2(\alpha) \subset \mathfrak{g}$ von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ aufspannen. Wenn wir $\mathfrak{g}$ als Modul über $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ auffassen, erhalten wir eine Zerlegung in Unterdarstellungen:

$$\mathfrak{g} = \ker(\alpha) \oplus \mathfrak{sl}_2(\alpha) \oplus \bigoplus_{\beta \in R \setminus \mathbb{Z}\alpha} \mathfrak{g}_\beta. \quad (14.42)$$

Der innere Automorphismus

$$\tau_\alpha := \exp(\text{ad } x_\alpha) \exp(\text{ad } -y_\alpha) \exp(\text{ad } x_\alpha) \quad (14.43)$$

operiert darauf wie folgt:

$$\tau_\alpha|_{\ker(\alpha)} = \text{id}_{\ker(\alpha)}, \quad (14.44)$$

weil $\ker(\alpha)$ eine triviale $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ -Darstellung ist. Ferner

$$\tau_\alpha(h_\alpha) = -h_\alpha. \quad (14.45)$$

Das kann man zu der einen Gleichung

$$\tau_\alpha(h) = h - \alpha(h)h_\alpha \quad (14.46)$$

zusammenfassen. Schließlich gilt

$$\tau_\alpha^2|_{\mathfrak{h}} = \text{id}_{\mathfrak{h}} \quad \text{und} \quad \tau_\alpha^2|_{\mathfrak{g}_\beta} = (-1)^{\langle \beta, \alpha \rangle} \text{id}_{\mathfrak{g}_\beta}, \quad (14.47)$$

weil $\langle \beta, \alpha \rangle = \beta(h_\alpha)$ der Eigenwert von h_α auf $\mathfrak{g}_\beta$ ist.

Definition 14.20 — Für jede Wurzel α sei die Spiegelung

$$s_\alpha : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*, \quad x \mapsto x - \langle x, \alpha \rangle \alpha = x - 2 \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha, \quad (14.48)$$

definiert.

Satz 14.21 — Für alle Wurzeln $\alpha, \beta \in R$ ist $s_\alpha(\beta)$ wieder eine Wurzel, und es gilt

$$\tau_\alpha(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{s_\alpha(\beta)}. \quad (14.49)$$

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}_\beta$ und $h \in \mathfrak{h}$. Für $\alpha \in R$ und den oben definierten inneren Automorphismus τ_α folgt:

$$[h, \tau_\alpha(x)] = [\tau_\alpha^2(h), \tau_\alpha(x)] = \tau_\alpha([\tau(h), x]) \quad (14.50)$$

$$= \tau_\alpha([h - \alpha(h)h_\alpha, x]) = \tau_\alpha(\beta(h)x - \alpha(h)\beta(h_\alpha)x) \quad (14.51)$$

$$= (\beta - \beta(h_\alpha)\alpha)(h) \tau_\alpha(x). \quad (14.52)$$

Das bedeutet, daß $\tau_\alpha(x) \in \mathfrak{g}_{\beta - \beta(h_\alpha)\alpha}$. Nach Definition ist $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = s_\alpha(\beta)$. Es folgt, daß $s_\alpha(\beta)$ eine Wurzel ist, und ebenso die zweite Behauptung des Satzes. $\square$

Definition 14.22 — Es sei E ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $R \subset E$ heißt Wurzelsystem, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. R spannt E auf.
2. Für jedes $\alpha \in R$ ist $R \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{Q}} = \{-\alpha, \alpha\}$.
3. Für jedes $\alpha \in R$ existiert ein $\alpha^\vee \in E^*$ mit $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ und der Eigenschaft, daß die Spiegelung $s_\alpha(x) := x - \alpha^\vee(x)\alpha$ die Menge R in sich abbildet.
4. Für alle $\alpha, \beta \in R$ ist $\langle \beta, \alpha \rangle = \alpha^\vee(\beta)$ eine ganze Zahl.

Die Linearformen $\alpha^\vee$ heißen duale Wurzeln.

Insbesondere sehen wir: Für jedes Paar aus einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einer Cartanunteralgebra $\mathfrak{h}$ bilden die Wurzeln $R \subset \mathfrak{h}^*$ ein Wurzelsystem im $\mathbb{R}$ -Unterraum $\langle R \rangle_{\mathbb{R}}$. Dabei sind die dualen Wurzeln durch $\alpha^\vee(\lambda) := \lambda(h_\alpha)$ gegeben. Die nächste Aufgabe wird also darin bestehen, sich einen Überblick über die möglichen Wurzelsysteme zu verschaffen und zu untersuchen, welche Wurzelsysteme aus halbeinfachen Liealgebren entstehen und ob und wie sich eine halbeinfache Liealgebra aus ihrem Wurzelsystem rekonstruieren läßt.