Aber das ist gerade so, wie wenn sie sagten, Gott könne bewirken, daß aus der Natur des Dreiecks nicht folge, daß dessen drei Winkel gleich zwei rechten seien, was widersinning ist.

BARUCH DE SPINOZA: Ethik, Erläuterung zu Theorem 17, Korollar 2.

Welche Geometrie gilt?

Prof. Dr. Manfred Lehn

Meine sehr geehrten Damen und Herren, [1]

wenn ich im Rahmen dieser Arbeitstagung über Modellbildung und Geometrie spreche, so wird wohl niemand von mir erwarten, daß ich Ihnen ausgearbeitete Vorschläge für Unterrichtseinheiten zu diesem Thema vorstelle. Dazu bin ich, der ich ja nie an einer Schule unterrichtet habe, einerseits nicht kompetent, und andererseits gibt es schon mannigfache und wohldokumentierte Quellen für detaillierte Fallstudien[2].

Stattdessen möchte ich über Geometrie und ihre geschichtliche Entwicklung als einen lang angelegten Modellbildungsprozeß sprechen. In diesem Sinne ist Geometrie Modellbildung im Großen, und zwar im ganz Großen, sowohl im räumlichen wie im zeitlichen Sinne. Die Geometrie handelt nämlich von Modellen für die Welt, angefangen von unserer nächsten Umwelt und Problemen der Feldmessung, für die Erde dann und ihre Vermessung, und berührt schließlich grundsätzliche Fragen über die Struktur des Universums in unermeßlich großen astronomischen wie in unermeßlich kleinen subatomaren Dimensionen. Und der zeitliche Rahmen für diese Modellbildung ist die gesamte Kulturgeschichte der Menschheit und noch lange nicht abgeschlossen.

Ich will zunächst in schnellen Schritten die Geschichte der Geometrie unter dem sehr eingeengten Blick auf das Parallelenaxiom und das Problem nichteuklidischer, gekrümmter und höherdimensionaler Geometrien durchgehen.

Danach möchte ich kurz erläutern, warum ich glaube, daß diese Fragen für den Unterricht interessant sind, und so auch diesen Vortrag auf der heutigen Veranstaltung rechtfertigen.

Und ich will schließlich anhand einiger konkreter Beispiele zeigen, daß ich hier keine Luftschlösser baue, sondern daß es auch im Rahmen des Unterrichts möglich sein sollte, entsprechend ausgewählte Fragen anzusprechen.

Das *Motto* des Vortrags stammt aus den Erläuterungen des siebzehnten Lehrsatzes aus der Ethik des BARUCH DE SPINOZA, einem Zeitgenossen LEIBNIZ', welcher von der Willensfreiheit Gottes handelt: *Gott handelt lediglich nach dem Willen*

[1] Dies ist die ausformulierte Fassung eines Vortrags im Rahmen der Lehrerfortbildung zum Thema Modellbildung im Oktober 2005 an der Johannes Gutenberg–Universität Mainz mit allen Bildern und Diagrammen, ergänzt um einige Fußnoten.

[2] ... worauf Herr Schmidt in seinem Vortrag hingewiesen hat.

seiner Natur und von niemand gezwungen. In der Ethik entwirft SPINOZA ein pantheistisches Gottesbild, das zu seiner Zeit auf heftige Ablehnung stieß und erst bei GOETHE und in seiner Generation großen Einfluß gewann. Die Bedeutung des Zitats ist etwa die folgende: Bekanntlich ist die Summe der Innenwinkel des Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln, und dies folgt so notwendig aus den Eigenschaftes des Dreiecks, daß selbst der Wille Gottes das nicht ändern könnte. Im Kontext der Philosophie SPINOZAs verschwindet allerdings das theologische Problem, das dadurch entsteht, daß hier gleichsam die Allmacht oder der freie Wille Gottes angezweifelt werden. Ich habe das Motto nicht vorangestellt, um philosophische Fragen zu diskutieren, sondern weil mich die Idee amüsiert, daß für SPINOZA der Innenwinkelsatz offenbar einen Wahrheitsgehalt von solcher Unmittelbarkeit hat, daß man die schwierigsten theologischen Fragen daran messen kann.

1 Die Geschichte der Geometrie im Zeitraffer

Lassen wir die Geschichte der Geometrie in groben Zügen revue passieren. Wir nehmen dabei einige Ungenauigkeiten und Verzerrungen der Einfachheit halber und um des dramatischen Effekts willen hin. Der Hauptheld der Erzählung ist das Parallelenaxiom.

Üblicherweise wird das Problem der Landverteilung oder der Neuvermessung von Feldern im alten Ägypten nach Nilüberschwemmungen als der Anfang der Geometrie betrachtet. Sicher kannten die Ägypter und Babylonier bereits zahlreiche geometrische Methoden und Lehrsätze. Es blieb den Griechen vorbehalten, die axiomatische Methode zu erfinden: Präzise Definitionen ersetzen Umschreibungen, die Begründung entwickelt sich zum Beweis, und Axiome ersetzen Tatsachen. Die Elemente des EUKLID bilden den klassischen Höhepunkt dieser Entwicklung; sie schließen die erste Phase des Modellbildungsprozesses ab.

Gestatten Sie mir eine Zwischenbemerkung: Ich glaube, daß der Modellbildungsprozeß, der darin besteht, mentale Bilder und Theorien unserer räumlichen Umwelt zu entwickeln, viel älter ist, und zwar in entwicklungsgeschichtlichen Dimensionen. Ich könnte mir vorstellen, daß grundsätzliche Erkenntnisse über unsere Umwelt fest in unserem Kopf verdrahtet und angeboren sind, und nicht von jedem Kleinkind neu erworben werden, etwa die Dreidimensionalität des Raumes, Stetigkeitskonzepte, Vorstellungen zur Extrapolation des Raumes um Hindernisse herum usw. Und wer von unseren affenartigen Vorfahren nicht genug euklidische Geometrie beherrschte, um sich in den Baumwipfeln eines tropischen Urwalds von Ast zu Ast zu schwingen, fiel herunter und brach sich das Genick, bevor sich seine ungeometrischen Gene fortpflanzen konnten.[3] Wenn dem so wäre, würde es etwas Licht auf die Frage werfen, warum sich gekrümmte oder höherdimensionale Räume so sehr

[3] Der Gedanke ist vielleicht weder originell noch richtig. Vielleicht habe ich ähnliches einmal irgendwo gelesen, und ich wüßte auch gern, ob an dieser Spekulation etwas dran ist.

unserer Vorstellungswelt entziehen, und KANT die Vorstellung vom Raum als vor aller Erfahrung einstufen konnte.

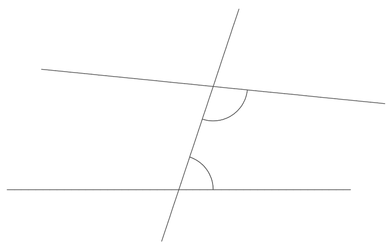
Doch zurück zur Geometrie: Hier sind die ersten fünf Postulate oder Axiome aus dem ersten Buch der Elemente des EUKLID:

„Gefordert soll sein,

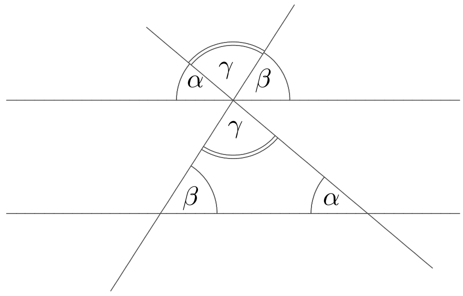
1. *daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,*
2. *daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,*
3. *daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,*
4. *daß alle rechten Winkel einander gleich sind,*
5. *und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“*

Jedes der ersten vier Postulate formuliert eine Alltagserfahrung, eine Binsenweisheit, und wenn EUKLID schreibt: „Gefordert soll sein ...“, so ist man geneigt zu sagen: Gut, genehmigt! Klar, mach nur weiter!

Beim fünften Postulat stimmt das nicht ganz, es unterscheidet sich doch sehr von den ersten vier. Es ist zunächst einmal ziemlich kompliziert, so kompliziert, daß man zwei- oder dreimal lesen muß, um zu verstehen, was eigentlich gemeint ist. Hier hilft eine kleine Zeichnung, an der die Bedeutung klar wird:



Es gibt andere Aussagen, von denen man zeigen kann, daß sie zum Parallelenaxiom äquivalent sind. Eine solche Aussage ist die, daß es zu jeder Geraden und jedem Punkt außerhalb der Geraden genau eine Parallele gibt, die durch diesen Punkt verläuft. Es ist natürlich genau diese Umformulierung, die dem Parallelenaxiom seinen Namen gegeben hat. Der Innenwinkelsatz ist eine andere, äquivalente Formulierung: Im ebenen Dreieck ist die Summe der Winkel gleich zwei Rechten. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich daraus, daß man aus dem Parallenaxiom zunächst Aussagen über Stufen- und Gegenwinkel herleitet und dann das folgende Diagramm betrachtet:



Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem 5. Postulat und dem Innenwinkelsatz besteht darin, daß der Innenwinkelsatz prinzipiell durch Messung überprüfbar, oder besser: falsifizierbar ist. Aber wie will man entscheiden, ob sich zwei parallel aussehende Geraden nicht doch irgendwann schneiden?

> Es gingen zwei Parallelen ins Endlose hinaus,
> zwei kerzengerade Seelen und aus solidem Haus.
>
> Sie wollten sich nicht schneiden bis an ihr seliges Grab:
> Das war nun einmal der beiden geheimer Stolz und Stab.
>
> Doch als sie zehn Lichtjahre gewandert neben sich hin,
> da wards dem einsamen Paare nicht irdisch mehr zu Sinn.
>
> Warn sie noch Parallelen? Sie wußten selber nicht,—
> sie flossen nur wie zwei Seelen zusammen durch ewiges Licht.
>
> Das ewige Licht durchdrang sie, da wurden sie eins in ihm;
> die Ewigkeit umschlang sie als wie zwei Seraphim.

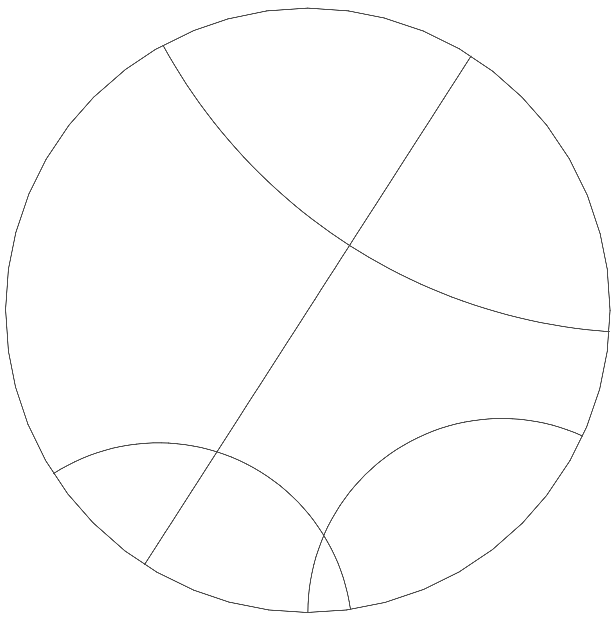
Ch. Morgenstern: Die zwei Parallelen

Wir halten fest: Um 300 v. Chr. schreibt Euklid in Alexandria die Elemente. Als Theorie unserer räumlichen Umwelt ist das Buch außerordentlich erfolgreich. Für mehr als zwei Jahrtausende ist es als geometrisches Lehrbuch unübertroffen und bildet die Grundlage für Vermessungslehre, Statik, Architektur und Maschinenbau. Seine methodische Wirkung ist ungeheuer: Bis zum heutigen Tag bestimmt der Dreiklang von Definition, Satz, Beweis die Struktur mathematischer Texte.

Gleichzeitig setzt eine modellinterne, innermathematische, rein ästhetisch motivierte Kritik ein: Das Parallelenpostulat ist einfach zu kompliziert. Es mutet eher nach einem Lehrsatz an als nach einem Axiom. Es hat daher schon früh vergebliche Versuche gegeben, das Postulat tatsächlich aus den anderen Postulaten herzuleiten und damit seines Status als Axiom zu entkleiden. Dieser Ansatz findet einen vorläufigen Höhepunkt in Giovanni Sacchieri. Im Jahre 1733 erscheint sein Werk *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, d.h. *Euklid von allen Makeln befreit*. Sein Grundansatz wie der vieler früherer Arbeiten besteht darin, das Parallelenaxiom fallen zu lassen, oder gar das Gegenteil anzunehmen und zu sehen, wie weit man damit kommt. Er leitet also immer neue Aussagen immer ungewöhnlicheren Inhalts her, bis er bei einem Lehrsatz ankommt, der ihm so absurd erscheint, daß er wie bei einem Widerspruchsbeweis, einer *reductio ad absurdum* schließt: Wir haben einen Widerspruch hergeleitet, also war die Ausgangsannahme falsch.

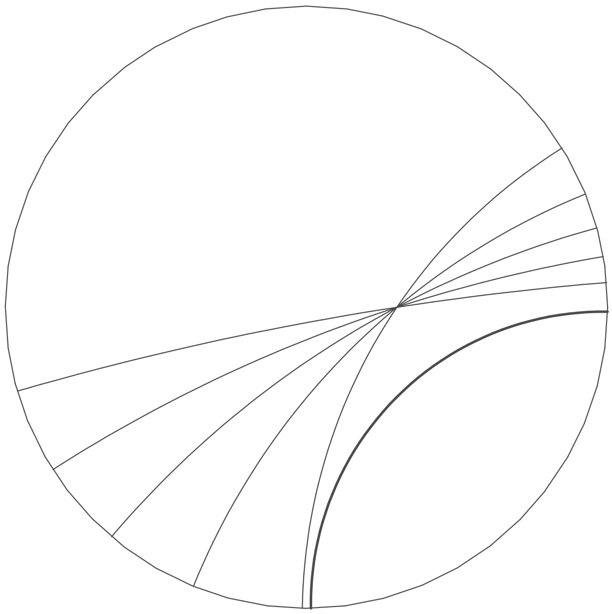
Dabei macht er sich eines logischen Fehlers schuldig: Denn sein Widerspruchsbeweis fußt am Ende ja eben nicht auf einem Widerspruch innerhalb der Argumentation, sondern appelliert an „offenkundige“ anschauliche Unsinnigkeit des Ergebnisses. Auf dem Weg dorthin hat SACCHIERI aber viele Lehrsätze einer neuen Art von Geometrie hergeleitet, und es fehlt fast nur noch der intellektuelle Mut, die alten Vorurteile über Bord zu werfen, die Dinge beim Namen zu nennen, und die neue Geometrie als gleichberechtigt anzuerkennen. Diese Stufe nehmen ein Jahrhundert später fast gleichzeitig vier Geometer an verschiedenen Stellen in Europa: Um 1825 verhelfen F. SCHWEIKART, F. TAURINUS, J. BOLYAI, und N. LOBATSCHEWSKI der hyperbolischen Geometrie zum eigenständigen Dasein. Über die Frage der Gleichzeitigkeit und Unabhängigkeit und die Rolle von C. F. GAUSS ist viel geschrieben worden, das soll uns aber hier nicht interessieren.

Man kann sich mit dem folgenden Modell von H. POINCARÉ und F. KLEIN eine Idee von einer hyperbolischen Geometrie verschaffen:

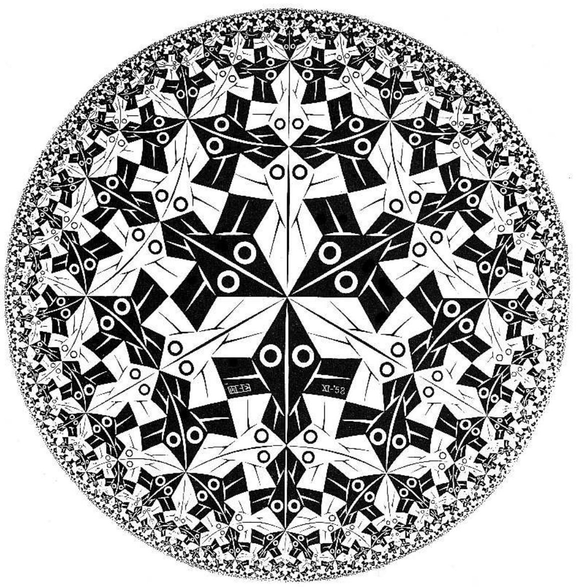


Die Punkte in dieser Geometrie sind alle Punkte im Innern des Kreises, die auf dem Rand gehören nicht dazu. Unter einer hyperbolischen Gerade wollen wir alle Geradenstücke verstehen, die durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, sowie alle Kreisbögen, die den Rand senkrecht schneiden. Ich habe vier solche hyperbolische Geraden eingezeichnet. Man lasse sich nicht durch die äußerliche Verschiedenheit der Strecke und der Kreisbögen täuschen: Für die hyperbolische Geometrie sind sie ganz gleichwertig. Es ist eine schöne Übung in (euklidischer!) Geometrie, sich zu überlegen, daß sich zwei hyperbolische Geraden höchstens in einem Punkt schneiden und daß durch je zwei verschiedene hyperbolische Punkte genau eine hyperbolische Gerade geht, und wie man diese wohl mit Zirkel und Lineal konstruieren würde.

In anderer Hinsicht unterscheidet sich die neue Geometrie sehr von der alten: Zum Beispiel gibt es zu einer hyperbolischen Geraden und einem Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, unendlich viele Parallelen:



Übrigens ist die hyperbolische Ebene keineswegs endlich und begrenzt, sondern sieht nur in diesem euklidischen Modell so aus. Das wird sehr schön durch den folgenden Holzschnitt[4] *Kreislimit II* des Niederländers M.C. Escher illustriert,

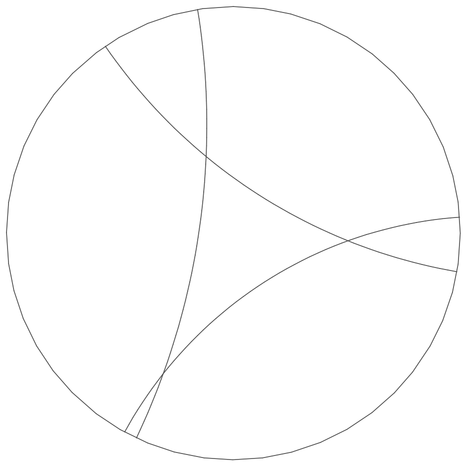


auf dem im hyperbolischen Sinne stets gleich große Objekte perspektivisch kleiner erscheinen, je mehr sie sich dem Horizont des Modells nähern.[5]

[4]Dieses Bild von ESCHER ist übrigens, wie manche andere auch, keine spontane künstlerische Neuentdeckung der hyperbolischen Geometrie, sondern durch die Arbeiten und den Briefwechsel mit dem Mathematiker H.S.M. COXETER inspiriert.

[5]Wie auch im wirklichen Leben: Der Horizont des Meeres ist nur eine gedachte Grenze, kei-

Schauen wir uns schließlich an, was aus dem Innenwinkelsatz geworden ist. Unter dem Winkel, den zwei sich schneidende hyperbolische Geraden bilden, wollen wir dabei den Winkel ihrer (euklidischen) Tangenten verstehen. Hier ist ein hyperbolisches Dreieck.



Wir sehen sofort, daß der Innenwinkelsatz falsch sein muß: Gegenüber den euklidischen Verbindungsstrecken zwischen den drei Schnittpunkten erscheinen die hyperbolischen Strecken ein wenig eingebeult. Die Summe der Innenwinkel wird darum *kleiner* als zwei Rechte, oder π, wenn wir im Bogenmaß messen, ausfallen. Und wie sagt doch SPINOZA: „*..., wie aus der Natur des Dreiecks von Ewigkeit her und in alle Ewigkeit folgt, daß dessen drei Winkel gleich zwei rechten sind.*“

Angesichts der drohenden theologischen Konsequenzen und der Tatsache, daß wir jetzt zwei Geometrien zur Auswahl haben, die euklidische und die hyperbolische, gelangt man zwangsläufig zu der Frage, die diesem Vortrag seinen Titel gibt: Welche Geometrie ist denn nun richtig? Bei genauerer Betrachtung hat diese Frage einen mathematischen und einen physikalischen Aspekt:

Der erste berührt die Denkbarkeit der neuen Geometrie. Ist die hyperbolische Geometrie widerspruchsfrei denkbar? Wir erinnern uns, daß SACCHIERI dies etwas vorschnell verneinte, während BOLYAI und LOBATSCHEWSKI, um die bekanntesten zu nennen, die Frage bejahten. Aber wie kann man sicher sein, daß sich die hyperbolische Theorie nicht doch noch als inkonsistent erweist, daß nicht weitere Überlegungen eines Tages echte innere Widersprüche aufweisen? Diese Frage ist zunächst rein modellimmanent und von der Frage der physikalischen Wirklichkeit unabhängig. Sie wird durch das POINCARÉ–KLEINsche Modell so beantwortet: Insofern die euklidische Geometrie widerspruchsfrei und damit denkbar ist, denn man kann ja auch daran zu zweifeln beginnen, so gilt dies auch für die hyperbolische Geometrie, denn wir haben im Rahmen der ersteren ein Modell für die letztere angegeben.[6]

ne wirkliche, das Meer hört am Horizont nicht auf, und Schiffe, die sich dem Horizont nähern, erscheinen immer kleiner. Aber hier reden wir bereits über eine andere, die projektive Geometrie.

[6] Das ist etwa so wie bei der Einführung der komplexen Zahlen, die ihre vollen Bürgerrechte auch

Nachdem wir so die Denkbarkeit der hyperbolischen Geometrie eingesehen haben, kommt die wirklich physikalische Frage, welche der beiden nun zulässigen Geometrien für die Beschreibung der wirklichen Welt die richtige ist? Diese Frage läßt sich im Gegensatz zur vorigen nicht mehr durch bloßes Nachdenken entscheiden, sondern nur durch Nachdenken und Messung.

Der Name GAUSS ist bereits mehrfach gefallen. CARL-FRIEDRICH GAUSS hat nach eigenem Bekunden in Briefen an den Vater von BOLYAI schon etwa 20 Jahre früher die Unabhängigkeit der hyperbolischen Geometrie begriffen, aber nie zu diesem Thema veröffentlicht, angeblich aus Angst vor dem Gespött seiner Kritiker. Jedenfalls hat er wohl die Frage nach der physikalischen Geltung zum ersten Mal aufgeworfen und im Rahmen der Vermessung des Königreichs Hannover, mit der er betraut war, einem ersten Test unterzogen. Wenn wir an unser hyperbolisches Dreieck und die Summe der Innenwinkel denken, so ist klar oder doch zumindest plausibel, daß der Defekt der Winkelsumme um so größer ausfallen sollte, je größer das Dreieck ist. GAUSS konnte im Verlauf seiner Landesvermessung Dreiecke ausmessen, die größer waren als alle je zuvor betrachteten, etwa zwischen Inselsberg, Hoher Hagen und Brocken. Aus heutiger Sicht ist klar, daß selbst dieses große Dreieck viel zu klein war, um einen merklichen Effekt hervorzubringen, und so überrascht nicht, daß GAUSS' Messungen ergaben: Innerhalb der Meßgenauigkeit ist Niedersachsen euklidisch![7] Inspiriert durch die Probleme der Erdkrümmung hat GAUSS eine Theorie im Raum gekrümmter Flächen entwickelt und als erster verstanden, daß bestimmte Aspekte von Krümmung intrinsische Eigenschaften der Fläche sind, und nicht von der Art abhängen, wie die Fläche im Raum liegt.

Lassen Sie mich versuchen, den Unterschied zwischen intrinsischen und extrinsischen Eigenschaften an zwei einfachen Beispielen zu illustrieren. Stellen Sie sich zunächst einen nur halb aufgeblasenen Fußball aus einem einigermaßen flexiblen Material vor. Dann fällt es leicht, den Ball in einem kleinen Bereich eben zu machen, etwa indem man den Ball gegen eine Wand drückt. Es ist banal zu bemerken, daß es natürlich nicht gelingt, den Ball als ganzes flachzudrücken. Die lokale Krümmung hängt von der Art ab, wie der Ball im Raum liegt, durch Drücken und Drehen können wir die Krümmung nur verschieben, je flacher der Ball an einer Stelle wird, desto gekrümmter wird er an einer anderen Stelle. Das Gesamtmaß der Krümmung bleibt immer gleich, es ist eine intrinsische, innere Eigenschaft des Balls, die Teil seines Ballseins ist, und nicht von der Art abhängt, wie der Ball im Raum liegt. Für

erst in dem Augenblick erhielten, wo WESSEL, ARGAND und GAUSS ihnen Punkte in der Ebene zuordneten, ganz so wie wir reelle Zahlen als Punkte auf der Zahlengerade auffassen. Das bedeutet Rechtfertigung durch ein geometrisches Modell. Tatsächlich ist die mit DESCARTES begonnene „Koordinatisierung“ der Geometrie heute so weit getrieben, daß wir in den ersten Semestern an der Universität wie auch in der Oberstufe Punkte in der Ebene und im Raum gar nicht mehr anders als als Zahlentupel im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ auffassen, d.h. umgekehrt Geometrie durch ein arithmetisches Modell rechtfertigen.

[7] Dies ist nicht mit den Problemen zu vermischen, die sich aus der Erdkrümmung ergeben!

das zweite Beispiel denken Sie bitte an einen Würfel im Raum und seinen ebenen Netzplan aus sechs Quadraten, die nach bekanntem Muster an den Kanten verklebt werden, um den Würfel zu ergeben. Eine extrinsische Eigenschaft des Würfels ist der diagonale Abstand zweier Würfelpunkte, sozusagen quer durch den Raum gemessen; eine intrinsische Eigenschaft der Abstand derselben Punkte außen am Würfel entlang gemessen. Um den räumlichen Abstand zu bestimmen, müssen wir den Würfel im Raum zusammensetzen, entweder wirklich oder gedanklich. Für den Abstand entlang der Oberfläche genügt das ebene Netz zuammen mit der Information, wie man von einem Quadrat durch Überschreiten einer Kante und Wiedereintritt an einer anderen Kante ins „benachbarte" Quadrat gelangt. Daraus läßt sich alles für die Abstandsfrage relevante herleiten.

Die nächste Stufe nimmt Bernhard Riemann 1854 in seinem Habilitationsvortrag *Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen.* Darin entwickelt er das Konzept der *Mannigfaltigkeit* systematisch aus der Idee kleiner lokaler Raumkeime heraus, die zusammengesetzt erst das gesamte geometrische Gebilde liefern. Ganz wie beim Würfel und seinem Netzplan genügen die lokalen Raumkeime und die Kenntnis, wie sie ineinander übergehen, um die gesamte Mannigfaltigkeit zu beschreiben. Die Frage, wie und in welcher Weise diese Mannigfaltigkeit in einem größeren Raum drinsitzt, wird gar nicht erst aufgeworfen, und deshalb ist diese Theorie wie geschaffen, um Räume beliebiger Krümmung und beliebiger Dimension zu behandeln.

Dieses mathematische Instrument wird durch A. Einstein und die allgemeine Relativitätstheorie 1915 zum mathematisch–physikalischen Modell für den „wirklichen" Raum: Danach ist der wirkliche Raum nicht euklidisch, sondern gekrümmt, wenn auch nur unmerklich, denn die Krümmung hängt an jeder Stelle von der vorhandenen Masse ab und wird erst in Gegenwart sehr großer Massen von Planeten und Sternen und bei sehr großer Entfernungen relevant. Das führt etwa dazu, daß Lichtstrahlen, die nahe an der Sonne vorbeilaufen, abgelenkt werden. Diese Folgerung wurde von dem britischen Astronomen Eddinton 1919 dem Experiment unterworfen und glänzend bestätigt.

Ich will auf die weitere Entwicklung kosmischer Theorien und Modelle nicht eingehen, sondern einen gewagten Sprung in die 80er Jahre des 20. Jahrhunderts und in den subatomaren Bereich machen, weil es mir erlaubt, nicht nur von gekrümmten, sondern auch höherdimensionalen Räumen zu sprechen. Eines der Hauptprobleme der heutigen theoretischen Physik besteht darin, eine einheitliche Theorie für alle vier Grundkräfte, also Elektromagnetismus, starke und schwache Wechselwirkung und die Gravitation zu entwickeln. Ein solcher Ansatz ist die Stringtheorie. Ich sollte gleich zu Beginn sagen, daß viele Physiker, vielleicht sogar die Mehrheit, die Relevanz dieser Theorie bestreiten, weil sie Aussagen über Elementarteilchen in Energiebereichen macht, die weit weg von jedem derzeitigen oder denkbaren Experiment sind, daß sie andererseits unter Mathematikern auf großes Interesse stößt, weil das Nachdenken über Stringtheorien Türen in ganz neue mathematische Gebiete mit völlig unerwarteten Zusammenhängen aufgestoßen hat. Wie dem auch sei: Jedenfalls ist einem stringtheoretischen Modell zufolge unsere Welt nicht drei- oder vierdimensional, wenn man die Zeit mitrechnet, wie man das seit EINSTEIN und MINKOWSKI üblicherwiese tut, sondern zehndimensional. Was soll man sich nun darunter vorstellen?

Lassen Sie mich wieder mit einem Vergleich beginnen: Wenn ich auf dieses Blatt Papier etwas schreibe oder zeichne, so ist für mich zunächst seine Zweidimensionalität wichtig: Es hat eine Breite und Höhe, exakt A4 nach der DIN-Norm. Natürlich wissen wir, daß es in Wirklichkeit dreidimensional ist, es hat nämlich auch eine Dicke, die aber erst wichtig wird, wenn wir viele Papierblätter aufeinander stapeln. Allerdings hat die Extradimension und das Material auch Konsequenzen für das Papier im Großen, etwa seine Biegsamkeit oder die Art, wie Tinte darauf verläuft oder ins Papier einzieht. Eine Ameise, die über das Papier läuft, bemerkt nur die zweidimensionale Ausdehnung.

In ähnlicher Weise werden wir aufgefordert, uns die Welt zehndimensional vorzustellen, wobei vier Dimensionen groß und ausgebreitet sind, eben unsere altbekannten drei Raumdimensionen und die Zeit, und sechs Dimensionen sehr klein und in sich gekrümmt und geschlossen sind wie ein Ball. Die Ameisen in diesem Beispiel, die nur die vier großen Dimensionen sehen, sind erstens natürlich wir selbst, aber auch viel kleinere Teilchen bis auf atomares Niveau herunter. Erst gewisse subatomare Teilchen, die man sich in einem vielleicht etwas zu naiven Bild als in sich geschlossene, schwingende Saiten vorstellt, spüren die Geometrie der übrigen sechs Dimensionen, dies aber dann so sehr, daß es geradezu die Geometrie dieser sechs Dimensionen und die Art, wie sie sich denn krümmen und zusammenschließen, sind, die der Theorie zufolge die physikalischen Eigenschaften der Elementarteilchen bestimmen. Im Detail ist dies alles schwierige Materie und in ständigem Wandel begriffen. Es hat daher wenig Sinn, sich weiter in oberflächliche Spekulationen zu vertiefen. Indem ich meinen Streifzug an dieser Stelle abbreche, möchte ich zusammenfassend die folgenden Punkte hervorheben:

Euklidische Geometrie ist ein hervorragendes und seit Jahrtausenden bewährtes Modell zur Beschreibung unserer nahen räumlichen Umwelt. In sehr großen astronomischen wie auch sehr kleinen subatomaren Bereichen ist die Theorie falsch. Stattdessen benötigen wir zu einer besseren Beschreibung gekrümmte und höherdimensionale Räume. Das Studium solcher Räume und ihrer Eigenschaften ist Aufgabe des Mathematikers. Die Geschichte der Geometrie entsteht aus einem Wechselspiel aus mathematikinternen Entwicklungen und Wechselwirkungen durch Einflüsse von außen. Geometrische Lehrsätze sind nicht absolut, sondern kontextabhängig, insbesondere gibt es viele in sich konsistente Geometrien. Geometrie, verstanden als die Wissenschaft von der Gesamtheit aller dieser Geometrien, ist keine abgeschlossene und tote, sondern offene, lebendige und sehr spannende Wissenschaft.

2 Gekrümmte Räume in der Schule?

Ich behaupte, daß Fragen der folgenden Art für Schüler relevant sein können, und zwar nicht nur in Leistungs- oder Spezialkursen:

1. Was ist ein gekrümmter Raum?
2. Was ist nichteuklidische Geometrie?
3. Welche Geometrie ist die richtige?
4. Was ist die vierte Dimension?

Für diese These möchte ich fünf Begründungen anführen:

Der philosophisch-mystische Einschlag der Frage nach Raum und Zeit, nach der vierten oder gar der fünften Dimension, sind bestens geeignet, die natürliche Neugier und das Interesse der Schüler zu wecken. Ich glaube fest, daß eine intensive Doppelstunde über die vierte Dimension einen nachhaltigeren Effekt hat als fünf Stunden Kurvendiskussion.

Nichtflache Geometrien und das Reden über Raum und Zeit und höhere Dimensionen gehören zur virtuellen Erfahrungswelt vieler Schüler. Viele kennen die paradoxen Bilder von Escher und Magritte. Die Zeitungen sind im Einsteinjahr voll von Erwähnungen gekrümmter Räume. Science Fiction-Filme und -Bücher reden in größter Selbstverständlichkeit von Schwarzen Löchern oder Wurmlöchern und ähnlichem krausen Zeug. Nichtorientierbare Möbiusbänder finden sich schon in Bastelanleitungen für Grundschüler.

Die Reflexion von Geometrie vor dem geschilderten Hintergrund macht die Einbindung von Geometrie in die kulturelle Entwicklung der Menschheit deutlich. Geometrie verliert ihren statischen Aspekt und wird zum offenen Prozeß. Es scheint mir auch wichtig, daß Schüler mit der Erfahrung konfrontiert werden, daß es eine Geometrie jenseits der Schulmathematik gibt, ist doch die schlimmste und zugleich häufigste Frage, die ein Mathematiker von einem Laien zu hören bekommt: Was gibt es denn in der Mathematik überhaupt noch zu forschen? Dabei kann man manche Fragen tatsächlich ein Stück weit behandeln, bei anderen kann es schon wertvoll sein, sie aufzuwerfen, auch wenn sich die Antworten dem Verständnis entziehen.

Es kann nicht schaden, wenn wir von der Standardschablone des Mathematikunterrichts, daß er nämlich langweilig ist, weil er sich in Rechenverfahren erschöpft, oder sogar schädlich, weil er einfache Alltagsweisheiten durch die Einführung komplizierter Kalküle bis zur Unverständlichkeit verzerrt, wegkommen. Wir sollten eine Geschichte zu erzählen haben.

Durch die Betrachtung alternativer Geometrien werden sattsam bekannte Selbstverständlichkeiten plötzlich fragwürdig. Der Sinn einer sauberen Begriffsbildung und des Beweises gewinnt eine ganz neue Bedeutung.

Und schließlich behaupte ich: Es ist machbar! Ohne das bleibt alles andere Wunschdenken. Deshalb möcht ich in der verbleibenden Zeit an ausgewählten Beispielen zeigen, wie man Fragen jenseits der zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Geometrie ansprechen könnte. Dabei ist alles erlaubt: Man kann mit Händen und Füßen reden. Man darf mehr Fragen aufwerfen als man beantworten kann. Man kann quantitativ oder qualitativ arbeiten, man kann in Analogien und Metaphern reden und man kann Geschichten erzählen.

3 Beispiele

3.1 Winkelsumme im sphärischen Dreieck

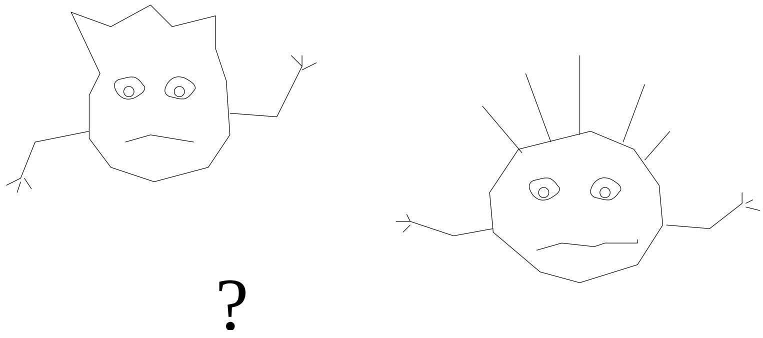
Eine weitere Geometrie neben der euklidischen und der hyperbolischen und eine, die im Gegensatz zur letzteren ebenfalls tausende von Jahren alt ist, ist die Geometrie der Kugeloberfläche. Dabei ist die Anwendung auf Navigation und Erdmessung eher neueren Datums, der eigentliche Ursprung der sphärischen Geometrie ist die Astronomie.

Im Gegensatz zur hyperbolischen Geometrie werden hier aber noch mehr Axiome falsch als nur das Parallelenaxiom. Zunächst müssen wir sagen, was wir unter einer sphärischen Geraden verstehen wollen. Nun, der kürzeste Weg von der Nordhalbkugel des Globus zur Südhalbkugel folgt einem Meridiankreis, und wenn wir die Sonderrolle von Nord- und Südpol außer Acht lassen, werden wir allgemein erkennen, daß kürzeste Verbindungen zwischen Punkten entlang Großkreisen laufen, das sind die größten Kreise, die auf der Kugel liegen. Sie lassen sich auch als Schnittkurven der Sphäre mit einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt beschreiben. Jetzt ist sofort klar, daß es zu einem Großkreis durch einen Punkt außerhalb überhaupt keine Parallele gibt, denn je zwei Großkreise schneiden sich. Das Parallelenaxiom ist wieder falsch, diesmal in einem anderen Sinne als im hyperbolischen Falle. Auch ein anderes Axiom ist falsch: Durch zwei verschiedene Punkte gibt es zwar im allgemeinen genau einen Großkreis, allerdings mit der Ausnahme, daß durch zwei einander genau gegenüberliegende, sogenannte antipodische Punkte unendlich viele Großkreise gehen. Außerdem schneiden sich zwei beliebige Großkreise nicht in einem, sondern in zwei Punkten.[8] Die sphärische Geometrie hat also gegenüber der euklidischen gleich mehrere Defekte, dafür hat sie andere schöne Eigenschaften, von

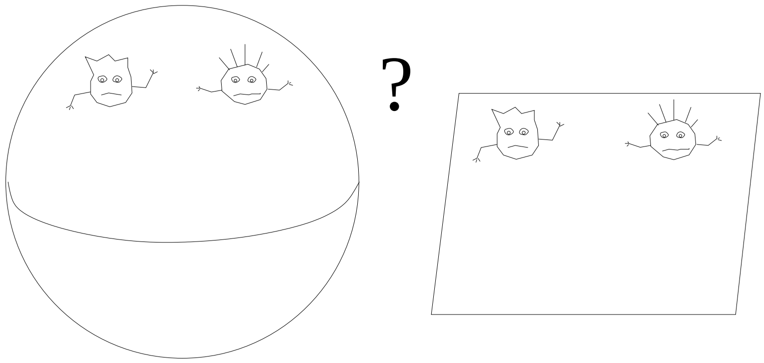
[8] Alle diese Unannehmlichkeiten lassen sich durch einen Kunstgriff reparieren: Wir definieren den Begriff „Punkt“ folgendermaßen um: Wir wollen unter einem *Punkt* ein Paar antipodischer Punkte verstehen. Dann schneiden sich zwei Großkreise in einem (!) *Punkt*. Außerdem gibt es durch zwei *Punkte* (also im räumlichen Sinne vier Punkte!) genau einen Großkreis. Damit haben wir die Gültigkeit dieser beiden Gesetze wieder hergestellt. Allerdings haben wir diese Reparatur teuer erkauft. Die neue Geometrie ist nicht mehr orientiert, die Begriffe links und rechts verlieren ihren Sinn: Man kann vom rechten Ufer eines Großkreises zum linken wandern, ohne den Großkreis zu überschreiten...

denen ich eine herausgreifen will.

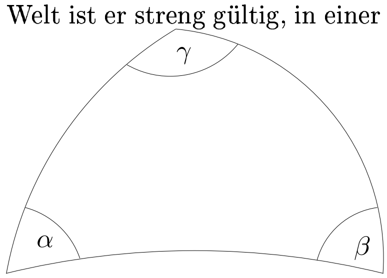
Zuvor möchte ich Ihnen Max und Moritz vorstellen:



Max und Moritz sind Flachländer, d.h. es sind zweidimensionale Wesen, die einer flachen zweidimensionalen Welt leben, und die Vorstellung, daß es eine dritte Dimension nicht nur als mathematisches Abstraktum, sondern in Wirklichkeit geben soll, ist ihnen durchaus fremd. Wie man ihren Gesichtern ansieht, sind sie etwas ratlos. Vor kurzem ist ein flachländischer Wissenschaftler mit der spektakulären These an die Öffentlichkeit getreten, Flachland sei nicht wirklich flach, sondern gekrümmt. Nun sind Max und Moritz selbst Mathematiker genug, um zu wissen, was das genau bedeuten könnte. Und so präzisiert sich ihr Problem dahin zu entscheiden, ob sie auf der Oberfläche einer Kugelwelt leben oder nicht doch auf einer flachen, ebenen Welt:

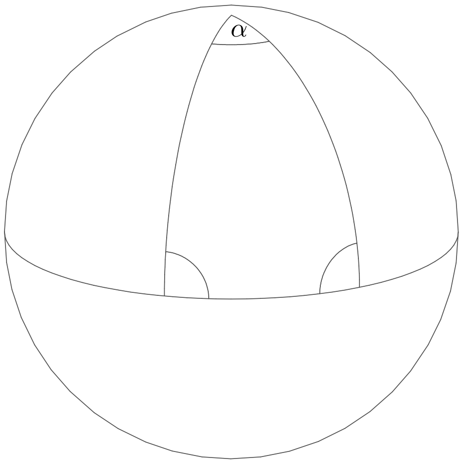


Ihre Idee, wie man die Frage entscheiden könnte, greift auf den alten Innenwinkelsatz zurück. Als streng zweidimensionaler Lehrsatz ist er Max und Moritz natürlich bekannt. In einer ebenen Welt ist er streng gültig, in einer gekrümmten Welt falsch:



Auf der Kugeloberfläche sind Dreiecke ein wenig nach außen ausgebeult, also genau umgekehrt wie im hyperbolischen Fall. Die Summe der Innenwinkel ist größer als

π. Und je größer das Dreieck, desto größer ist der Überschuß. Ohne jede Rechnung wird das deutlich, wenn wir ein Dreieck wählen, wo ein Punkt auf dem Nordpol und zwei Punkte auf dem Äquator liegen. Dann haben wir am Äquator zweimal einen rechten Winkel, und der Überschuß ist genau der Winkel, der von den beiden Meridianbögen am Nordpol eingeschlossen wird.

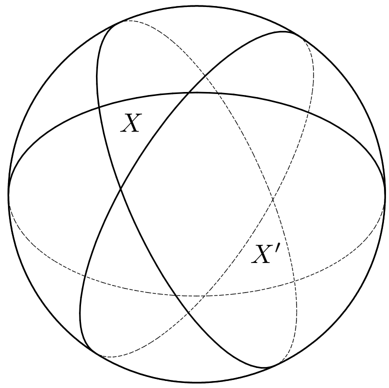


Interessant ist nun, daß wir die qualitative Beziehung zwischen Größe des Kugeldreiecks und Winkelüberschuß exakt machen können. Es gilt nämlich der überraschende Satz:

$$\boxed{\text{Winkelüberschuß} \quad = \quad \text{Flächeninhalt}}$$

Dabei gehen wir davon aus, daß die Winkel im Bogenmaß gemessen werden und daß die Kugel den Radius 1 hat, andernfalls muß man auf der linken Seite noch mit dem Quadrat des Radius multiplizieren. Das ist ein wunderschöner Satz[9]. Noch interessanter ist, daß es für diesen Satz einen elementaren, fast rechnungsfreien Beweis gibt. Den will ich Ihnen nicht vorenthalten. Zunächst einmal ist es ein altbekanntes Rezept, daß man Sätze, die man beweisen will, erst einmal auf Spezialfälle anwendet, besonders auf extreme Spezialfälle. Tun wir das mit dem eben angesprochenen Poldreieck: Die gesamte Kugel hat die Oberfläche 4π, die obere Hälfte also 2π, ein Teilstück daraus mit dem Winkel α am Nordpol also den $\frac{\alpha}{2\pi}$-ten Teil davon, macht α. Und das ist genau der Überschuß, wie vom Satz behauptet. Als nächstes appelliere ich an Ihre Vorstellungskraft sich klar zu machen, daß zu jedem Dreieck X, das von drei Großkreisen ausgeschnitten wird, genau gegenüber ein genau gleich großes antipodisches Dreieck X' gehört:

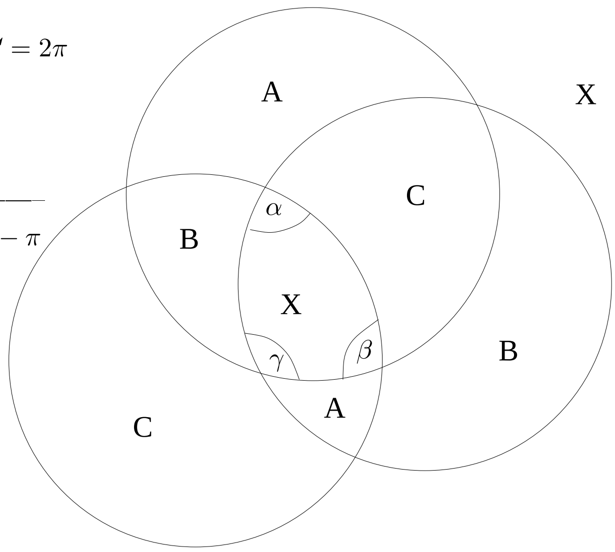
[9] In der hyperbolischen Geometrie gilt ein ganz analoger Satz: Der „Unterschuß“, also die Differenz zwischen π und der (kleineren) Winkelsumme ist proportional zum Flächeninhalt. Dieser Satz ist aber nicht ganz so elementar zu beweisen wie sein sphärisches Analogon. Er hat nebenbei eine merkwürdige Konsequenz: Da die Winkelsumme sicher nicht kleiner als 0 werden kann, ist der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks nach oben durch $C\pi$ beschränkt, wo C eine modellabhängige Konstante ist. Dreiecke können also nicht beliebig groß werden!



Genauer gesagt, zerfällt die gesamte Kugeloberfläche in insgesamt vier Paare von Kugeldreiecken. Wir projizieren nun von einem Punkt in X' aus die Oberfläche in eine Ebene, ganz so wie auf den Antarktiskarten in einem Schulatlas. Dabei gibt es natürlich Verzerrungen, aber das interessiert uns nicht, denn die Projektion dient nicht zum Rechnen, sondern ist nur dafür da, den Überblick zu behalten:

Beweis:
$X + A + B + C = 2\pi$
$X + A = 2\alpha$
$X + B = 2\beta$
$X + C = 2\gamma$

$X = \alpha + \beta + \gamma - \pi$



In der Mitte sehen wir das Antarktisdreieck X, ganz außen und völlig verzerrt das gleich große arktische Dreieck X. Flächen mit gleichem Buchstaben bezeichnen antipodische und daher gleich große sphärische Dreiecke. Jeder Kreis schließt eine Halbsphäre ein und hat den Flächeninhalt 2π. Das liefert die Gleichung $A + B + C + X = 2\pi$. Außerdem bildet X zusammen mit jedem der Dreiecke A, B und C ein Zweieck, das genau den doppelten Flächeninhalt der oben besprochenen Poldreiecke hat. Das liefert die Gleichungen $A + X = 2\alpha$, $B + X = 2\beta$, $C + X = 2\gamma$. Das ist ein sehr einfaches Gleichungssystem, aus dem wir durch Addition und Subtraktion die Identität $X = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ herleiten. Fertig!

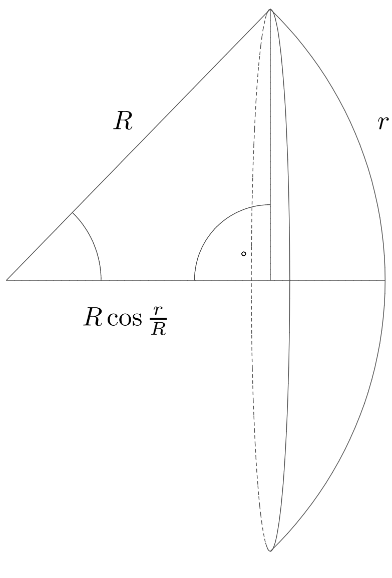
Soviel zur Winkelsumme am sphärischen Dreieck. Und um zu Max und Moritz zurückzukommen: eine mögliche Strategie, eine Entscheidung herbeizuführen, bestünde für sie also darin, wie seinerzeit GAUSS auf dem Hohen Hagen die Winkelsumme in einem möglichst großen Dreieck möglichst genau zu messen. Wenn die Differenz zu π unterhalb der Meßgenauigkeit liegt, können sie schließen, daß Flachland entweder wirklich flach ist oder die Krümmung sehr gering ausfallen muß. Weicht die Winkelsumme dagegen von π merklich ab, muß Flachland krumm sein. Das Experiment auszuführen, überlassen Max und Moritz getrost ihren Physikerkollegen.

3.2 Kreisumfang und Kreisfläche

Wie groß ist das Verhältnis von Kreisumfang U zum Durchmesser $d = 2r$? Ich denke, alle Schüler wissen, vielleicht nicht mit diesen Worten, daß dieses Verhältnis eine universelle mathematische Konstante ist, die auf der ganzen Welt mit dem Buchstaben π, dem Anfang des griechischen Wortes für den Umfang, bezeichnet wird. Jeder kennt die ersten drei Ziffern 3,14, und geduldige Menschen haben aberwitzig viele Stellen per Hand und mit dem Computer berechnet.

Wie groß ist das Verhältnis von Kreisfläche F zum Quadrat des Radius? Die Antwort ist wieder π, dasselbe π wie vorher. Ist das eigentlich selbstverständlich? Woher weiß man das? Muß man das eigentlich noch beweisen, oder ist das trivial? Und wer kennt noch den Beweis?

Nach allem, was ich bisher erzählt habe, wird es Sie nicht überraschen zu hören, daß all dies in der sphärischen und in der hyperbolischen Geometrie falsch ist. Die sphärische Geometrie ist unmittelbarer zugänglich, und ich will den Sachverhalt hier erläutern:



Ich habe auf einer Kugel vom Radius R außen an der Kugel entlang von einem fest gewählten Punkt aus die Strecke r abgetragen und den Kreis auf der Kugeloberfläche gezogen. Es ist aus dem Bild sofort klar, daß der Umfang dieses Kreises nicht von r sondern dem Lot auf die Achse durch den gewählten Punkt bestimmt wird. Der halbe Öffnungswinkel ist im Bogenmaß durch r/R gegeben, das Lot also durch $R\sin(r/R)$ und damit der Umfang durch $2\pi R\sin(r/R)$. Für das Verhältnis von Umfang und doppeltem Radius finden wir so die Beziehung

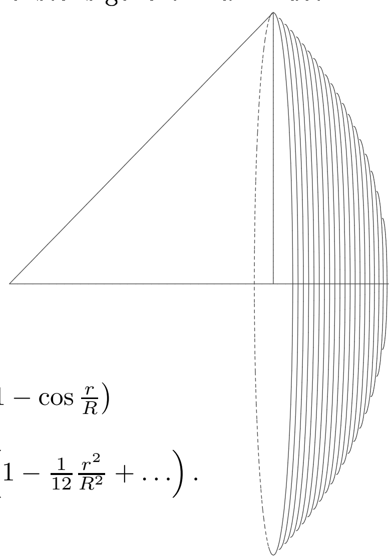
$$\frac{U}{2r} = \pi\frac{R}{r}\sin\frac{r}{R},$$

und mit der Reihenentwicklung der Sinusfunktion $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots$ erhalten wir

$$\frac{U}{2r} = \pi - \frac{\pi r^2}{6R^2} + \ldots.$$

Wenn r also sehr klein gegen R ist, ist das Verhältnis ungefähr π, sobald aber r gegen R anwächst, wird das Verhältnis deutlich kleiner. Jedenfalls ist es keine Konstante mehr! Übrigens ist ohne jede Rechnung durch bloßes Hinschauen zu sehen, daß das Verhältnis kleiner als π ist, und wenn man sich an das bereits erwähnte Prinzip hält, sich stets auch extreme Fälle anzuschauen, so wird alles noch deutlicher, sobald der Kreis zum Großkreis wird oder gar wieder zu schrumpfen anfängt.

Wie steht es mit dem Flächeninhalt des Kreises aus? Dazu muß man den Inhalt einer Rotationsfläche ausrechnen, was vielleicht nicht mehr ganz selbstverständlich zum Kanon des Oberstufenstoffs gehört. Man findet:



$$F = 2\pi R^2\left(1 - \cos\tfrac{r}{R}\right)$$

$$F/r^2 \approx \pi\cdot\left(1 - \tfrac{1}{12}\tfrac{r^2}{R^2} + \ldots\right).$$

Das Verhältnis ist natürlich wieder keine Konstante mehr, es ist vor allem verschieden von dem gerade berechneten Verhältnis $U/2r$. Erst im Grenzübergang $r \to 0$ werden beide zu π und damit gleich.

Mir geht es wohlgemerkt nicht um die konkrete Auswertung des Integrals, sondern die ihr vorausgehende und sich anschließende Diskussion, die dann natürlich der Integralauswertung einen über die bloße Einübung von Rechenfertigkeiten hinausgehenden Sinn gibt: *Daß $U/2r$ und F/r^2 in der Ebene durch dieselbe konstante Zahl gegeben sind, ist keine Selbstverständlichkeit. In einem gekrümmten Raum* *kann man allein durch eine intrinsische Messung, für die man nicht aus der Kugeloberfläche heraustreten muß und die deshalb auch von Max und Moritz ausgeführt werden könnte, die Krümmung bestimmen, im Beispiel der Radius R! Was wäre das dreidimensionale Analogon?*

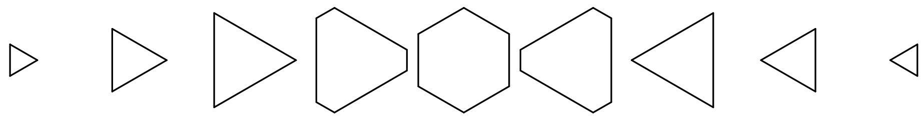
3.3 Die vierte Dimension

In diesem letzten Beispiel möchte ich Fragen erwähnen, die man im Zusammenhang mit der vierten Dimension stellen kann. Jede Diskussion über „die vierte Dimension“ sollte natürlich mit einer Demystikfikation beginnen, was diese vierte Dimension alles nicht ist, und insbesondere die Zeit ausblenden. Das muß man sorgfältig machen, damit man reinen Tisch für die nachfolgende Diskussion hat.

Eine Möglichkeit besteht nun darin, den Analogieschluß von 3 auf 4 in der Koordinatenschreibweise zu machen, und von Vektoren mit drei Komponenten auf Vektoren mit vier oder mehr Komponenten überzugehen. Dann hat man sofort das ganze Arsenal der Vektorrechnung zur Verfügung.

Ein anderer Weg, und den will ich andiskutieren, besteht darin, kombinatorische Fragen in den Vordergrund zu stellen: Die Seiten eines Quadrats sind Strecken, die Seiten(flächen) eines Würfels sind Quadrate, was sind dann die Seiten(körper?) des vierdimensionalen Analogons? Eine Strecke hat zwei Ecken, ein Quadrat vier, ein Würfel acht; wieviele Ecken hat dann ein vierdimensionaler Würfel? Wenn man nun doch mit Koordinaten arbeitet, kann man die hier erarbeitete Heuristik exakt machen, indem man die Koordinaten für die 16 vermuteten Ecken hinschreibt. Dasselbe Spiel kann man mit Dreieck und Tetraeder spielen. Die höherdimensionalen Analoga zu Dreieck und Tetraeder nennt man übrigens Simplexe.

Auf ein Buch von ABBOTT, das ich Ihnen am Ende noch vorstellen werde, geht wohl die Idee zurück, das Problem, wie man sich vierdimensionale Geometrie vorstellen soll, zu erläutern, indem man stattdessen über das entsprechende Problem spricht, wie sich Max und Moritz und andere Flachländer die dritte Dimension vorstellen soll. Was würde ein Flachländer sehen, wenn eine dreidimensionale Kugel plötzlich von oben nach unten durch Flachland durchfällt? In dem Augenblick, wo die Kugel die Ebene berührt, sehen die Flachländer einen Punkt, der sich allmählich vergrößert und zu einem Kreis auswächst, der irgendwann wieder zu schrumpfen beginnt, zu einem Punkt wird und schließlich ganz verschwindet. Was würden also wir sehen, wenn vor uns eine vierdimensionale Kugel durch unseren Raum fiele? Und jetzt fängt der Spaß an: Was sehen Flachländer, wenn ein Würfel durch Flachland fiele? Wenn der Würfel parallel zu Ebene ausgerichtet ist, etwas sehr langweiliges: Erst nichts, dann lange Zeit ein Quadrat, und plötzlich wieder nichts. Und wenn der Würfel mit der Spitze zuerst kommt? Ich denke, an dieser Stelle müssen wir alle schon etwas nachdenken, bevor wir auf die richtige Lösung kommen. Ich habe einige Erscheinungsformen stroboskopartig herausgegriffen und hier hingezeichnet, die Zeit läuft von links nach rechts:



Das Auftauchen des Sechsecks ist sicher für die meisten Schüler eine große Überraschung und zu weiteren Diskussionen Anlaß geben.

Und jetzt kommt die eigentliche Herausforderung: Was sehen wir, wenn ein vierdimensionaler Würfel mit der Spitze voran durch unseren dreidimensionalen Raum fällt? Lassen Sie mich mit dieser Frage meinen Vortrags schließen und nur noch erwähnen, daß mein Kollege van Straten diese Frage einem Oberstufenkurs im Rahmen eines Kursbesuchs an der Universität vorgelegt hat und daß die Schüler in Gruppenarbeit sehr wohl in der Lage waren, nach einigem mentalen Ausprobieren und vielen Diskussionen auf die richtige Lösung zu kommen.

4 Anhang: Literaturhinweise

Ich möchte Ihnen einige Büchern zur Lektüre empfehlen, die Ihnen vielleicht weitere Anregungen zum behandelten Thema geben. Als erstes fällt mir ein:

1. Egmont Colerus, *Vom Punkt zur vierten Dimension.*

Ein wunderschönes Buch, das in unterhaltsamem Ton über euklidische und projektive Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, das Parallelenaxiom und schließlich die vierte Dimension redet. Ein Buch, das ich in der Mittelstufe zu lesen begann. Soviel ich weiß, ist es schon seit einiger Zeit nicht mehr gedruckt worden, und man muß antiquarisch danach suchen.

Die folgenden drei Bücher gehören in gewissem Sinne zusammen.

2. Edwin E. Abbot, *Flatland, a Romance in many dimensions.* Deutsch: Flächenland, erschienen bei Franzbecker Salzdetf.
3. Dionys Burger, *Sylvestergespräche eines Sechsecks.* Aulis Verlag Deubner.
4. Ian Stewart, *Flacherland, die unglaubliche Reise der Vicky Line durch Raum und Zeit.*

Das Buch von Abbot stammt aus dem ausgehenden 19. Jahrhundert und ist ein absoluter Klassiker. Die Bücher von Burger und Stewart aus unserer Zeit sind zwei verschiedene Fortsetzungen des Buches von Abbot, die dort anknüpfen, wo Abbot endet. Flatland ist eine Welt von zweidimensionalen Wesen: allesamt Polygone, so wie auch der Ich-Erzähler, der sich als Quadrat vorstellt. Das Buch ist nebenbei eine Satire auf die viktorianische Gesellschaft, und so gibt es auch in Flachland eine strenge gesellschaftliche Hierarchie, wobei sich die Stellung eines jeden Einzelnen nach der Zahl seiner Ecken richtet. Und Frauen haben mit gar nur zwei Ecken als rein eindimensionale Strecken gar nichts zu sagen. Eines Tages stößt die schon oben zitierte dreidimensionale Kugel in die Wohnstube des Erzählers... Abbot bringt also das Problem des höherdimensionalen Raumes seinen Lesern dadurch näher, daß er selbst eine Dimension absteigt und über die Schwierigkeiten schreibt, die zweidimensionale Wesen haben würden, sich eine dritte Dimension vorzustellen. Burger greift auf dasselbe methodische Konzept zurück, um über gekrümmte Räume und allgemeine Relativitätstheorie zu reden. Der Hauptheld der Geschichte ist ein Sechseck, der Enkel besagten Quadrats. Stewart geht noch einen Schritt weiter und macht neben höherdimensionalen und gekrümmten Räumen alle modernen Theorien zum Thema, die aus der klassischen Geometrie entstanden sind: Topologie, endliche Geometrie, Fraktale Welten. Dabei nimmt er sich leider bei jedem Thema sehr wenig Zeit und hetzt seine Figuren durchs Phantasieuniversum. Ganz zeitgemäß ist die frauenfeindliche viktorianische Welt von Flachland inzwischen (fast) emanzipiert und die Hauptheldin des Buches ist ein Mädchen, eben Vicky Line.

Hier noch eine gründliche Geschichte der Geometrie aus der Feder von zwei Mathematikhistorikern mit zwei hübsch zusammenpassenden Namen:

5. Scriba, Schreiber: 5000 Jahre Geometrie, Springer Verlag.

Mich hat etwas verstört, daß gerade die hochspannende Entwicklung der Geometrie im 20. Jahrhundert fast völlig zu kurz kommt. Stattdessen heben die Autoren auf Entwicklungen ab, die nach meiner Einschätzung zwar auch wichtig sind, wie etwa die der Maßtheorie und Funktionalanalysis, die aber nicht die Hauptrichtungen wiedergeben. Differentialgeometrie, algebraische Topologie und algebraische Geometrie kommen fast gar nicht vor. Vielleicht kommt hier mehr der etwas einseitige Blickwinkel der Autoren zum Ausdruck. Wenn aber Geometrie als lebendige Wissenschaft präsentiert werden soll, dann darf man eben nicht bei Zirkel und Lineal stehen bleiben. Aber das ist nur Mäkelei: es ist ein sehr brauchbares und lesenswertes Buch.

Die folgenden Sachbücher sind eher physikalisch orientiert.

6. Leonard Mlodinow, *Das Fenster zum Universum*. Campus.

7. Brian Greene, *Das elegante Universum*. Siedler, Berliner Taschenbuch-Verlag.

8. Max Born, *Die Relativitätstheorie Einsteins*. Springer.

Das Buch von Mlodinow leistet das, was der Untertitel *Eine kleine Geschichte der Geometrie* anzeigt. Das Buch von Greene war vor einigen Jahren ein Bestseller. Greene beschreibt darin für den Laien einige zentrale Ideen der Stringtheorie. Das zweite Drittel des Buches gibt einen forschungsgeschichtlich hochspannenden Einblick hinter die Kulissen und in die Interaktion zwischen Stringtheorikern und algebraischen Geometern. Das Buch von Max Born ist ein Klassiker. Von den genannten ist es das wissenschaftlichste: es enthält ziemlich viele Formeln, für aufgeweckte Oberstufenschüler sehr wohl zugänglich.

Und etwas weniger wissenschaftlich fallen mir zum Thema Erdvermessung schließlich noch eine kürzlich erschienene romanhafte Doppelbiographie über Gauß und Alexander von Humboldt und ein Sachbuch mit selbsterklärendem Titel ein:

10. Daniel Kehlmann, *Die Vermessung der Welt*. Rowohlt.

11. John Keay, Expedition Great Arc. Die abenteuerliche Vermessung des indischen Subkontinents. Campus.