

## Invarianz

Vortrag im Rahmen der Tagung *Leitlinien im Mathematikunterricht*  
am 29. September 2003 in Mainz.

Sehr geehrte Damen und Herren!

Lassen Sie mich mit einer Aufgabe beginnen. Die meisten von Ihnen kennen vermutlich das Einsiedlerspiel. Auf einem kreuzförmigen Spielbrett aus 33 Feldern liegen 32 Spielsteine; das Feld in der Mitte bleibt frei (Abb. 1). Nun darf gezogen oder eher gesprungen werden: bei jedem Zug darf mit

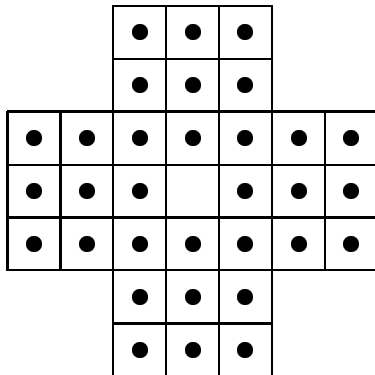


Abb. 1: Grundstellung

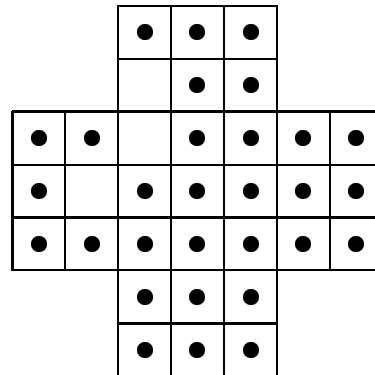


Abb. 2: Nach zwei Zügen

einem beliebigen Stein parallel zu den Achsen des Spielfeldes über einen Nachbarstein gesprungen werden, wenn das Feld dahinter frei ist. Der übersprungene Stein wird entfernt. Nach zwei Zügen kann das Brett etwa so aussehen wie in Abbildung 2. Am Ende soll nur ein Spielstein übrig bleiben und zwar auf dem Feld genau in der Mitte des Spielbretts. Ich will nun nicht über dieses Geduldspiel reden, sondern über die folgende Variante, die von John Conway stammt.

Conway ersetzt zunächst das kreuzförmige Spielbrett durch ein nach allen Seiten unbegrenztes Feld. Als Ausgangsstellung belegen wir alle Felder unterhalb einer gedachten waagerechten Linie mit Spielsteinen (Abb. 3). Wir haben ein Meer von Steinen vor uns und nennen die oberste Reihe der Kürze wegen den Horizont. Nun spielen wir nach den alten Regeln. Für den ersten Zug haben wir im Wesentlichen, d.h. bis auf die offensichtliche Symmetrie, nur eine Möglichkeit. Nach drei Zügen kann das Feld so aussehen wie in Abbildung 4.

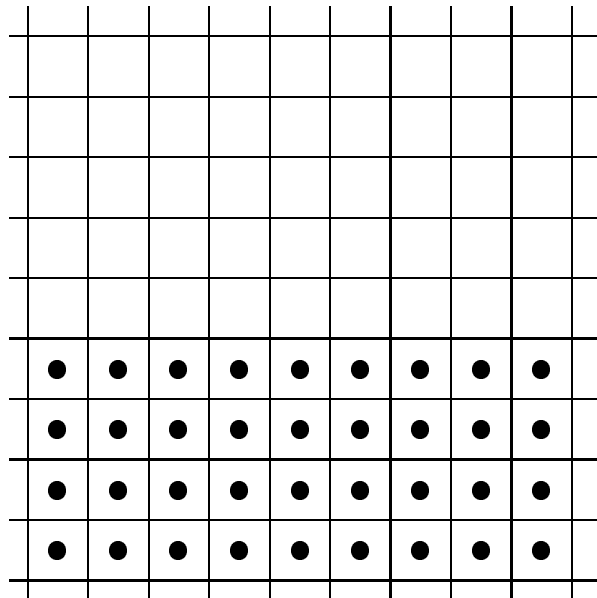


Abbildung 3: Grundstellung in Conways Aufgabe

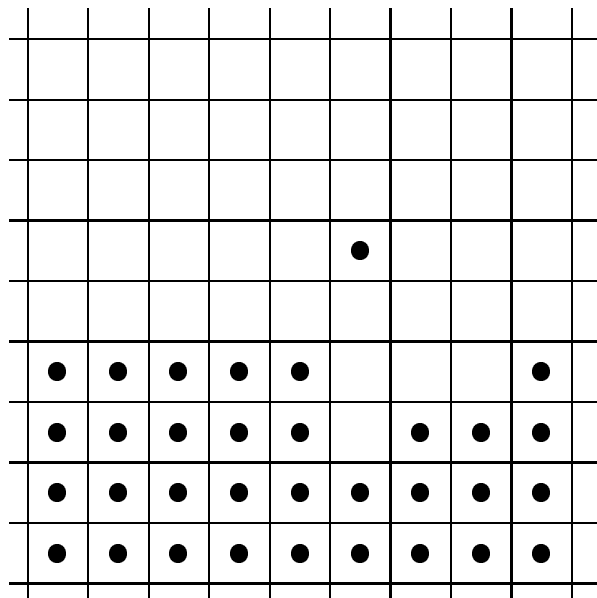


Abbildung 4: Nach drei Zügen

Und das ist Conways Frage:

*Wie hoch über den Horizont kann ein Spielstein gelangen?*

Ohne einiges Experimentieren ist es schwer, das Ergebnis vorherzusagen. Manche werden angesichts des unendlichen Vorrats an Spielsteinen spontan sagen, man käme beliebig weit. Die Abbildungen 5 bis 8 zeigen, wie es weiter gehen könnte. Dabei wird schnell klar, dass es nicht ganz so einfach ist und dass das Problem darin besteht, die Spielsteine auch zur Baustelle zu bekommen:

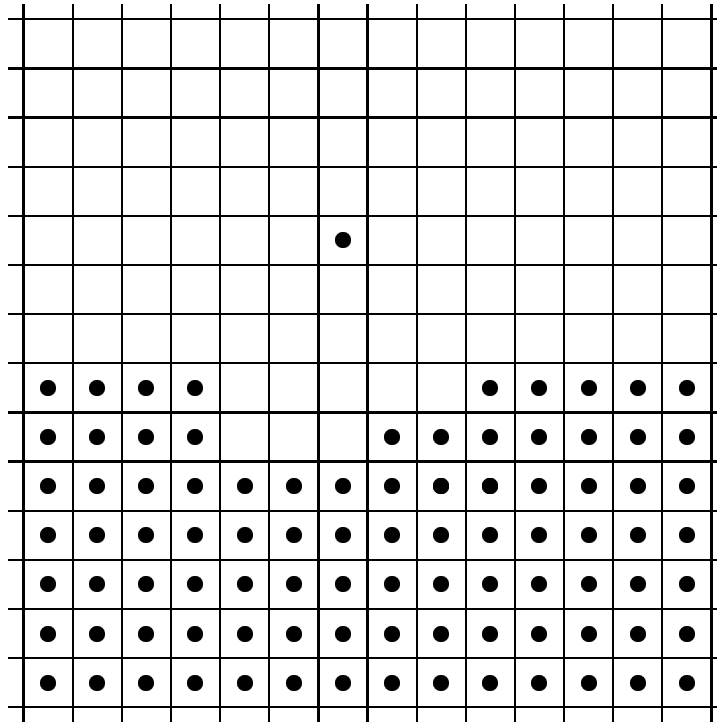


Abbildung 5: Nach 7 Zügen.

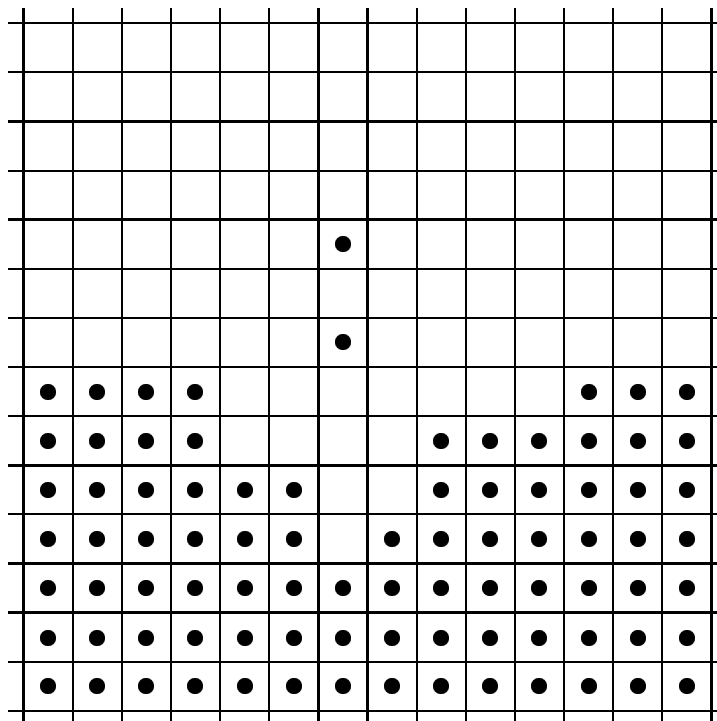


Abbildung 6: Nach 12 Zügen.

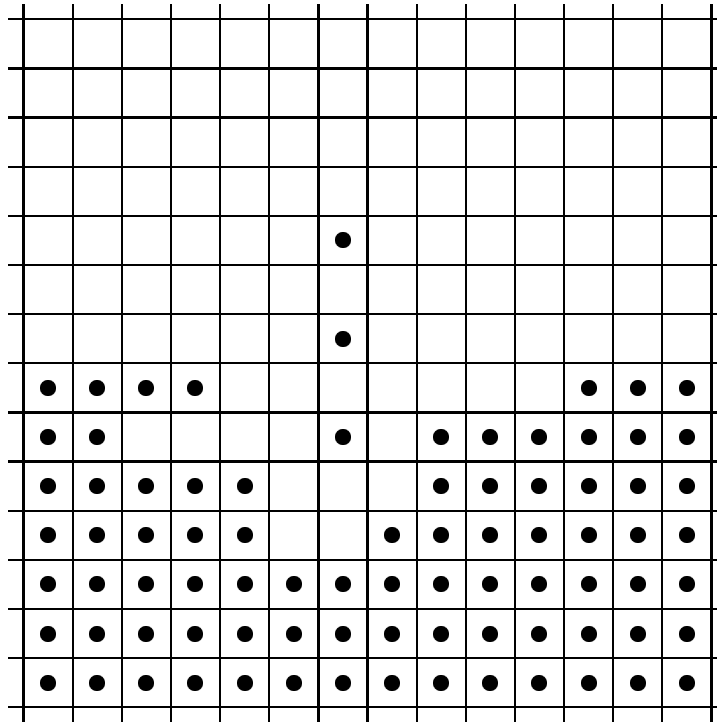


Abbildung 7: Nach 15 Zügen.

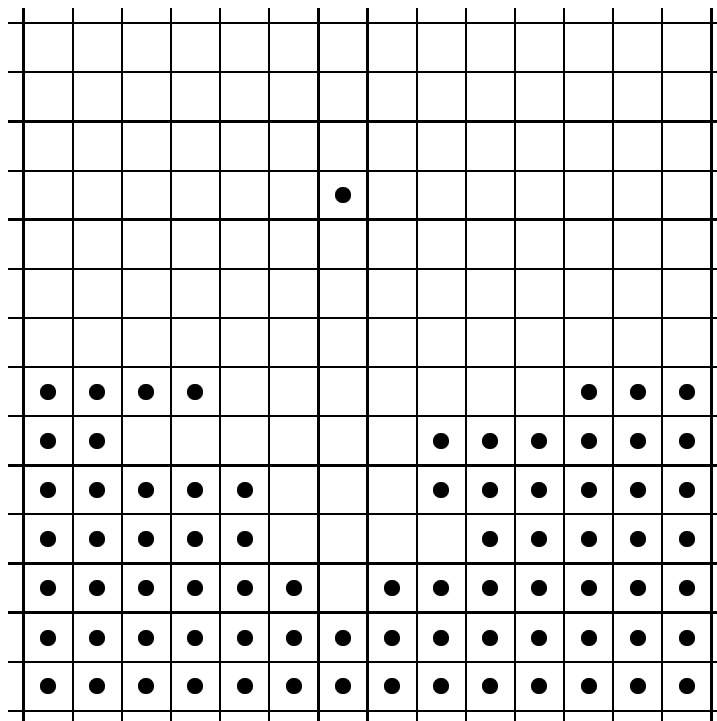


Abbildung 8: Nach 20 Zügen.

In diesem Vortrag möchte ich über ein *heuristisches Prinzip* reden, das bei vielen mathematischen Fragestellungen fruchtbar ist: **Die Suche nach Invarianten**. Ich will das Thema mit Beispielen erläutern und hoffe, dass dabei die allgemeinen Prinzipien deutlich werden. Ich habe versucht, die Beispiele möglichst allgemein verständlich zu wählen, ganz konnte ich auf Rechnungen nicht verzichten.

Sie, meine Damen und Herren, haben jetzt die Wahl, mir entweder weiter zuzuhören oder, wenn der Vortrag an Spannung verliert, sich ganz dem Conwayschen Problem zu widmen.

Da ich über Invarianz als heuristisches Prinzip reden will, kann ich keine mathematische Definition voranstellen, sondern nur eine umgangssprachliche, die zudem recht vage ausfallen muss, wenn sie auf viele Beispiele anwendbar sein soll. Ich will in der Sprache der Brettspiele reden, die Übertragung in gänzlich andere Gebiete fällt nicht schwer, wenn das Prinzip klar ist.

*Ein Spiel bestehe aus einer Ausgangsstellung (von Spielsteinen auf einem Spielbrett) und Spielregeln, die festlegen, welche Veränderungen (Spielzüge) zulässig sind und welche nicht. Eine Invariante einer Stellung ist eine Größe (eine Zahl, ein Vektor, eine Restklasse, ein Polynom etc.), die nur von der jeweiligen Stellung aber nicht vom bisherigen Spielverlauf abhängt und die sich bei zulässigen Zügen nicht ändert.*

Aus dieser Festlegung ergibt sich sofort das Folgende: Ist man von einer Stellung A mit regelrechten Zügen zu einer Stellung B gelangt, so haben alle Invarianten in A und B denselben Wert. Im Umkehrschluss heißt das: Hat man eine Invariante gefunden, die in A und B verschiedene Werte annimmt, so ist es unmöglich, mit zulässigen Zügen von A nach B zu gelangen. Wichtig ist dabei, dass es auf den genauen Spielverlauf von A nach B überhaupt nicht ankommt. Zugleich ist die Warnung angebracht, dass die Gleichheit von Invarianten kein hinreichendes Kriterium sein kann. Dazu gibt es logisch keinen Grund und in der Praxis zahlreiche Gegenbeispiele.

Invarianten sind uns übrigens aus den anderen Naturwissenschaften wohl bekannt. Die Erhaltung der Gesamtmasse bei chemischen Vorgängen, die Erhaltung der Energie bei nichtatomaren Vorgängen, die Impulserhaltung, die Ladungserhaltung etc. sind fundamentale Ergebnisse der Chemie und der Physik. Beachten Sie, dass diese Erhaltungssätze jeweils auch nur bei Einhaltung gewisser Spielregeln gültig sind. Bei der Spaltung eines Atoms sind Masse und Energie für sich genommen keineswegs invariant.

Es ist nützlich, bei der Analyse von Aufgaben und in der Konstruktion von Invarianten auf solche Begriffe zurückzugreifen. Ich werde später den Begriff der Energie gebrauchen, und zwar nicht, weil es einen exakten inhaltlichen Zusammenhang geben wird, sondern weil ich die zahlreichen Assoziationen ausnutzen möchte, die Sie an diesen Begriff knüpfen.

**Beispiel 1.** Wir entfernen aus einem Quadrat von  $8 \times 8$ -Feldern zwei einander gegenüberliegende Ecken. Die Aufgabe lautet nun: Kann man das übriggebliebene Feld mit Dominosteinen der Größe  $1 \times 2$  lückenlos und überlappungsfrei überdecken (Abb. 9)? Dies stellt sich als ziemlich schwierig heraus. Wir können die Aufgabe variieren und allgemeiner Rechtecke der Kantenlängen  $m$  und  $n$

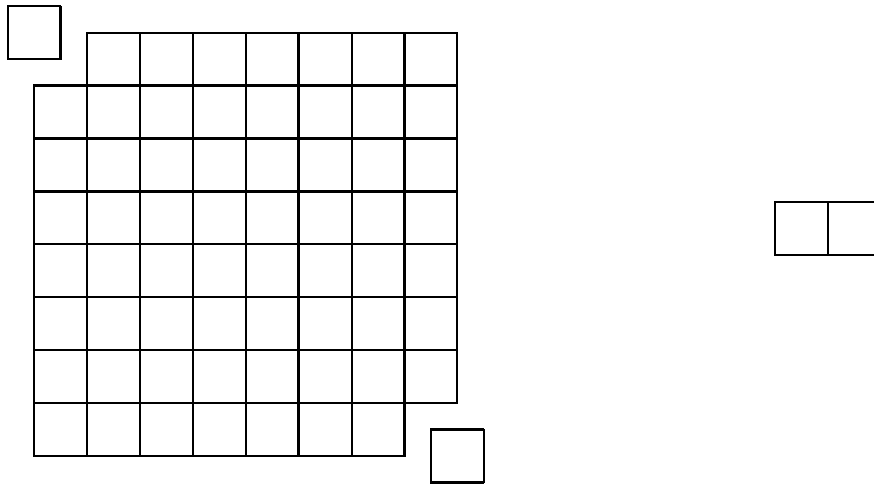


Abbildung 9.

betrachten. Wenn  $m$  und  $n$  beide ungerade sind, so ist die Lösung der Aufgabe offenbar unmöglich, weil die Anzahl  $m \cdot n - 2$  der übriggebliebenen Felder ungerade ist. (Nebenbei sind wir hier über eine ganz einfache Invariante gestolpert: die Parität (gerade/ungerade) der Felderanzahl ändert sich bei der Belegung durch Dominosteine nicht, weil jeder Stein eine gerade Anzahl von Feldern abdeckt.) Falls andererseits  $m$  gerade und  $n$  ungerade ist, so kann man ganz systematisch vorgehen und eine Lösung angeben. Aus dem folgenden Bild für den Fall  $m = 6$  und  $n = 9$  wird der Algorithmus sofort klar:

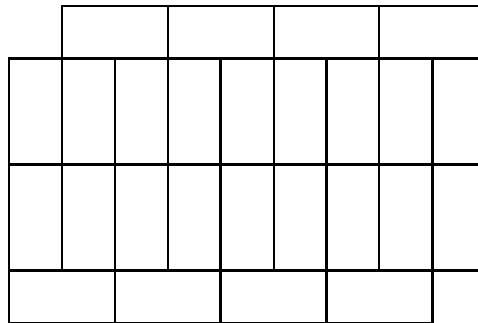


Abbildung 10.

Es bleibt der Fall, dass  $m$  und  $n$  beide gerade sind. Hätte ich die ursprüngliche Aufgabe etwas anders formuliert, so wäre die Lösung vielleicht sofort klar geworden: Ich habe das Wort Schachbrett, das bei einem  $8 \times 8$ -Feld eigentlich nahegelegen hätte, bewußt vermieden. Also noch einmal dieselbe Aufgabe mit einem Schachbrett:

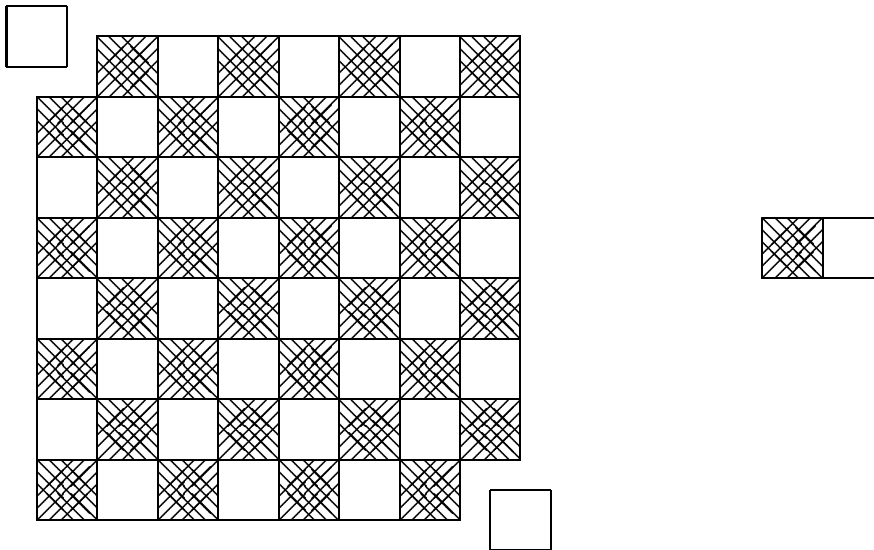


Abbildung 11.

Da wir zwei weiße Ecken entfernt haben, bleiben auf dem Brett 32 schwarze Felder, aber nur 30 weiße Felder übrig: es entsteht ein Überschuss von 2 schwarzen Feldern. Jeder Dominostein wird aber immer genau ein schwarzes und ein weißes Feld abdecken, egal wie wir ihn platzieren, und damit am Überschuss nichts ändern. Eine Überdeckung durch Dominosteine ist also deshalb unmöglich, weil bei vollständiger Überdeckung der Überschuss gleich  $0 - 0 = 0$  sein müsste. Dasselbe Argument funktioniert natürlich auch für den allgemeinen Fall von beliebigen geraden Zahlen  $m$  und  $n$ .

Die Invariante, die hier zur Lösung führt, ist die Differenz

$$\text{Anzahl der schwarzen Steine} - \text{Anzahl der weißen Steine.}$$

Das Verschwinden dieser Invariante ist aber für allgemeinere Flächen als die oben betrachteten ein zwar notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium, wie man sich an einfachen Konstellationen leicht klar macht.

**Beispiel 2.** Mit dem ersten Beispiel verwandt ist die *Eulersche Polyederformel*: Wenn man die Oberfläche einer Kugel mit einem Netz aus Polygonflächen überzieht, oder etwas allgemeiner ein konvexes Polyeder betrachtet, so gilt bekanntlich für die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen die Formel

$$E - K + F = 2.$$

Die alternierende Summe auf der linken Seite bezeichnet man als die Eulercharakteristik der Sphäre. Die Formel lässt sich wie folgt beweisen: Wir projizieren das Netz der Kanten durch Zentralprojektion von einem Punkt aus, der auf keiner Kante liegt, in die Ebene. Die Projektion eines Würfels sieht etwa so aus:

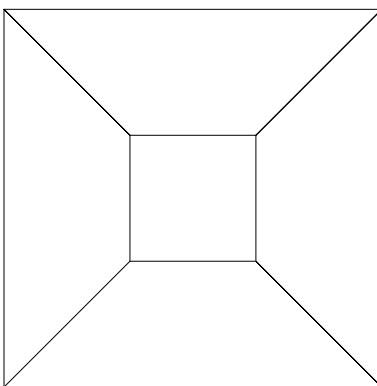


Abbildung 12.

Wir wollen nun die folgenden *Züge* zur Veränderung eines ebenen Graphen zulassen:

1. Die Zusammenziehung einer Kante, die verschiedene Punkte verbindet, zu einem Punkt. Dabei verschwindet eine Kante und ihre beiden Endpunkte verschmelzen zu einem Punkt. Die Bilanz ist somit:  $E' = E - 1, K' = K - 1, F' = F$ .
2. Entfernen einer Kante, deren Endpunkte gleich sind. Dabei verschwindet diese Kante, und die beiden bisher durch die Kante getrennten verschiedenen Gebiete verschmelzen. Es ergeben sich also die folgenden Veränderungen:  $E' = E, K' = K - 1, F' = F - 1$ .

Entscheidend ist, dass sich bei beiden Zügen die Eulercharakteristik  $E - K + F$  nicht ändert, sie ist eine Invariante unter diesen Zügen.

Mit diesen beiden Zügen kann man anfangen, einen gegebenen Graphen zu vereinfachen. Indem man den ersten Zug auf drei der inneren Kanten des Würfelgraphen (Abb. 12) anwendet, erhält man nacheinander die Bilder

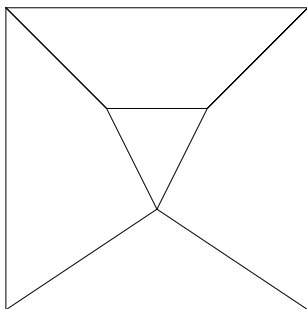


Abbildung 13.

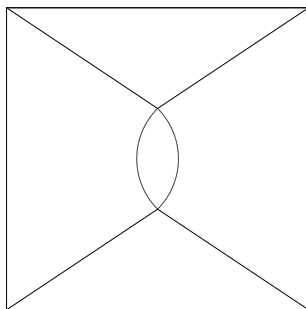


Abbildung 14.

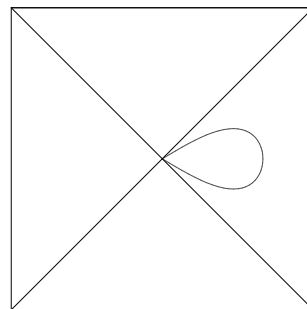


Abbildung 15.

und eine Anwendung des zweiten Zugs auf die geschlossene Kante ergibt



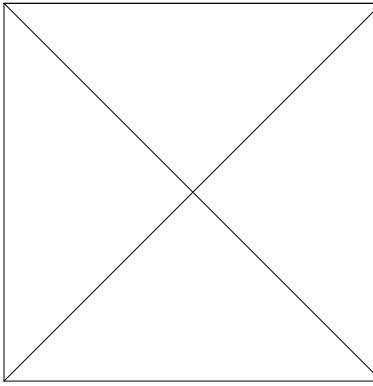


Abbildung 16.

Man kann so weiter machen, bis nur noch ein Punkt übrig bleibt. Offensichtlich kann durch diese Züge jedes zusammenhängende ebene Graphennetz in endlich vielen Zügen auf einen einzelnen, einsamen Punkt reduziert werden. Neben dem Punkt bleibt noch – nicht zu vergessen! – die Ebene darumherum übrig. Die Eulercharakteristik errechnet sich am Ende zu  $1 - 0 + 1 = 2$ , also war sie von Anfang an gleich 2.

**Beispiel 3.** Das folgende Spiel stammt von Maxim Kontsevich. Wir spielen auf einem Quadranten der Ebene, der nach rechts und nach oben unbegrenzt ist, und den wir in lauter Einheitsquadrate zerlegen. Es gibt nur eine Spielregel: Wenn die beiden Plätze rechts und oberhalb eines Steins nicht

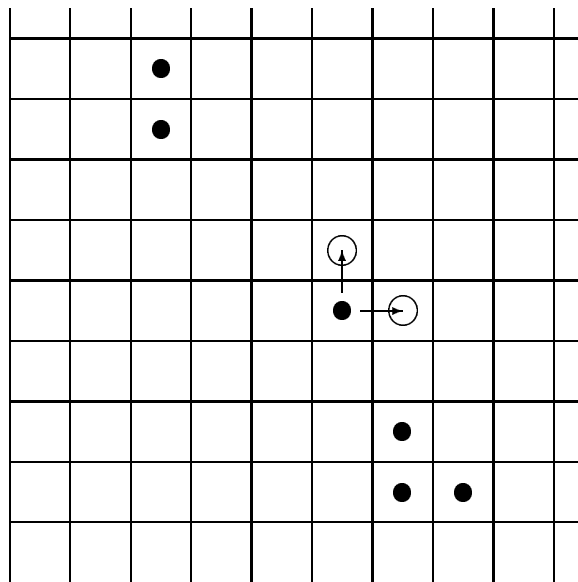


Abbildung 17.

belegt sind, so kann man den Stein entfernen und auf die beiden bisher freien Felder je einen Stein setzen (Abb. 17). Kontsevichs Aufgabe lautet wie folgt:

Gegeben sei die Anfangsstellung, bei nur ein Stein auf dem Brett sitzt, und zwar in der linken unteren Ecke. Ist es möglich, durch geschickte Züge die sechs Felder, die in der Ecke eine Treppe der Breite und Höhe 3 bilden, vollständig von Steinen zu befreien?

Die folgenden Bilder zeigen Zwischenstadien bei einem Versuch dazu:

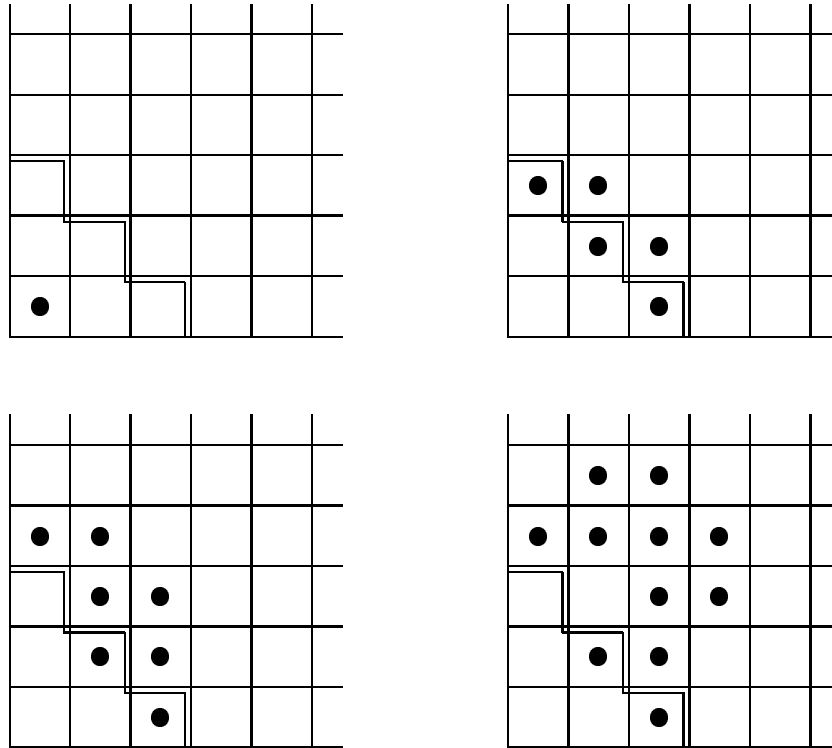


Abbildung 18.

Man ahnt es schon: Kontsevichs Aufgabe lässt sich nicht lösen. Aber wie beweist man das?

Versuchen wir im Sinne dieses Vortrags vorzugehen: Gibt es eine Invariante? Können wir jeder Stellung eine Zahl zuordnen, die sich nicht ändert, wenn man Kontsevichs Regeln folgt? Und jetzt komme ich auf den Begriff der Energie zurück: Können wir jedem Stein eine (potentielle) Energie zuordnen, die von seiner Lage abhängt, und zwar so, dass die Energie der beiden Steine, die bei jedem Zug entstehen, zusammengenommen genauso groß ist wie die Energie des Steins, den wir entfernen? Nun ja, das ginge wohl, wenn die Energie jedes neuen Steins halb so groß ist wie die Energie des gegebenen Steins. Machen wir einen Ansatz und geben dem Feld in der linken unteren Ecke den Wert 1. Dann müssen die beiden Felder auf der Diagonalen daneben jeweils den Wert  $1/2$  bekommen, und die drei Felder auf der nächsten Diagonalen den Wert  $1/4$ . Allgemeiner: Wenn wir den Feldern ganzzahlige Koordinaten  $(x, y)$  geben, und zwar so, dass das Eckfeld die Koordinaten  $(0, 0)$  hat, so bedeutet unser Ansatz, dass ein Stein auf dem Feld  $(x, y)$  die Energie  $1/2^{x+y}$  bekommt. Die Verteilung der Energiewerte sieht demnach so aus:

1/16	1/32	1/64			
1/8	1/16	1/32	1/64		
1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	
1	1/2	1/4	1/8	1/16	

Abbildung 19.

Bei Spielbeginn hat die Ausgangstellung die Gesamtenergie 1. Bei allen Zügen ändert sich die Gesamtenergie nie. In diesem Modell gilt also die Energieerhaltung. Jetzt wollen wir annehmen, Kontsevichs Aufgabe ließe sich lösen. Welche Energie kann eine Stellung maximal haben, wenn die kleine Treppe links unten unbesetzt ist? Nun, im bestmöglichen Falle ist das gesamte übrige Spielfeld mit Steinen besetzt. Nur auf den beiden Randstreifen kann jeweils immer nur ein Stein stehen (warum?), und wenn er maximale Energie haben soll, so muss er auf dem vierten Feld sitzen bleiben (Abb. 20). Diese beiden Randsteine haben jeweils die Energie  $1/8$ , zusammengenommen also  $1/4$ . Das ist genau die Energie des mittleren Steins auf der zweiten Diagonalen. Es rechnet sich also leichter, wenn wir die Gesamtenergie der Konfiguration in Abb. 21 berechnen:

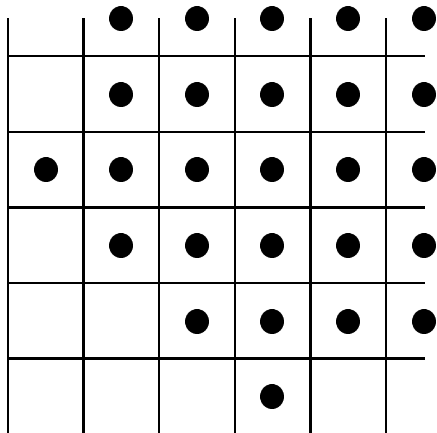


Abbildung 20.

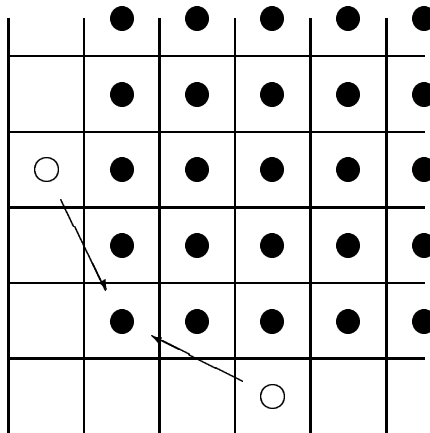


Abbildung 21.

Der Beitrag der ersten Reihe ist

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Für jede weitere Reihe verkleinert sich der Beitrag um den Faktor  $\frac{1}{2}$ . Der Beitrag aller Reihen zur Gesamtenergie ist also

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

Das ist genauso viel wie in der Ausgangsstellung! Allerdings haben wir zur Vereinfachung der Rechnung die Annahme gemacht, dass auf dem Feld unendlich viele Steine liegen. Das ist aber bei einer endlichen Anzahl von Zügen gar nicht wahr. Das heißt, die Energie bei jeder zulässigen Stellung, die Kontsevichs Aufgabe lösen würde, wäre streng kleiner als 1. Das kann nicht sein.

Es gab keinerlei inhaltlichen Grund, den Begriff der Energie ins Spiel zu bringen, ich hätte auch abstrakt von einer Funktion  $F$  sprechen können, die jeder Belegung des Feldes

$$s : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

einen Wert

$$F(s) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{N}_0^2} \frac{s(x,y)}{2^{x+y}}$$

zuordnet. Aber das ist eigentlich eine a posteriori Überlegung. Solange ich noch gar nicht weiß, wie ich argumentieren will, wäre es absurd, so etwas Kompliziertes wie die Funktion  $F$  hinzuschreiben und damit arbeiten zu wollen. Indem ich „Energie“ statt „ $F$ “ sage, wecke ich bei Ihnen und bei mir selbst bestimmte Vorstellungen und Assoziationen, die mit dem Energiebegriff verbunden sind, etwa dass die Energie von der Lage eines Steins abhängt, so wie die potentielle Energie eines hochgehobenen Steins von der Höhe abhängt, oder dass die Gesamtenergie eines Systems sich additiv aus seinen Teilen zusammensetzt. Wohlgedenkt: wenn wir den Beweis erst einmal gefunden haben, ist der Begriff überflüssig, aber solange wir noch nach einer Lösung suchen, kann uns die richtige Assoziation zur Lösung bringen, die falsche in eine Sackgasse.

Wir müssen noch die Aufgabe von Conway lösen. In der Stellung in Abbildung 8 hat es ein Stein geschafft, auf die vierte Reihe über dem Horizont zu gelangen. Dabei ist ein großes Loch in den Steinvorrat gerissen worden. Jeder Versuch weiterzugehen führt zu immer größeren Löchern, die man gar nicht schnell genug auffüllen kann. Nach einer Weile gibt man auf. Es wird dann Zeit, die Hypothese aufzustellen, dass es gar nicht möglich ist, einen Stein auf die fünfte Reihe zu bekommen. Die eigentliche Frage lautet dann: Wie kann man das beweisen?

Unsere Diskussion der Aufgabe von Kontsevich legt es nahe, jedem belegten Feld eine „Energie“ zuzuordnen, die sich bei Sprüngen nicht ändert. Angenommen, es gäbe eine Stellung, in der ein Stein auf der fünften Reihe sitzt. Wir geben den Feldern ganzzahlige Koordinaten  $(x, y)$ , und zwar so, dass der Stein auf der fünften Reihe die Koordinaten  $(0, 5)$  erhält und die Steine auf der Horizontlinie die Koordinaten  $(x, 0)$  haben. Da wir irgendwo einen Anfang machen müssen, geben wir dem Feld  $(0, 0)$  die Energie  $E(0, 0) = 1$ . Ein Sprung nach oben soll die Energie nicht ändern, d.h. wir verlangen

$$E(x, y - 1) + E(x, y) = E(x, y + 1).$$

Damit ist die Funktion  $E$  noch lange nicht festgelegt. Erst wenn wir für  $\alpha := E(0, -1)$  einen beliebigen Wert wählen, liegt die Funktion  $E$  zumindest für alle Felder  $(0, y)$  fest. Wie wir  $\alpha$  zu wählen

haben, ist zunächst nicht klar. Nun kann man sich entweder daran erinnern, dass bei einer Rekursion  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  mit beliebigen positiven Startwerten das Verhältnis  $u_{n+1}/u_n$  gegen den Goldenen Schnitt konvergiert. Oder man verlangt aus Instinkt oder aus ästhetischen Gründen, dass sich bei Verschiebung des gesamten Spielfeldes um eine Reihe nach oben oder nach unten alle Energiewerte nur um denselben ganzzahligen Faktor ändern. Beide Ansätze führen dazu, den Goldenen Schnitt  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618\dots$  zu wählen, der die Relation  $1 + \alpha = \alpha^{-1}$  erfüllt. Das ergibt  $E(0, y) = \alpha^{-y}$ . Wir springen aber auch von rechts nach links. Das führt uns auf den Ansatz  $E(x, y) = \alpha^{x-y}$ . Spätestens jetzt haben wir aber ein Problem: Sprünge nach oben oder nach links erhalten die Energie, aber bei Sprüngen nach unten oder nach rechts sinkt die Energie! Nun, Sprünge nach unten sind, so sagt die Spielerfahrung, sowieso ungünstig. Aber bei Sprüngen zur Seite entscheidet nicht die Richtung, ob sie brauchbar sind oder nicht, sondern die Frage, ob sie zur Mitte hin ausgeführt werden, oder nach außen. Der neue Ansatz  $E(x, y) := \alpha^{|x|-y}$  trägt dem Rechnung. Die Belegung des Feldes mit Energiewerten sieht so aus:

1	$\alpha^{-1}$	$\alpha^{-2}$	$\alpha^{-1}$	1
$\alpha$	1	$\alpha^{-1}$	1	$\alpha$
$\alpha^2$	$\alpha$	1	$\alpha$	$\alpha^2$
$\alpha^3$	$\alpha^2$	$\alpha$	$\alpha^2$	$\alpha^3$
$\alpha^4$	$\alpha^3$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$

Abbildung 22.

Daraus ergibt sich leicht die Gesamtenergie der Ausgangsstellung: Die Energie aller Felder auf der Halbgeraden unterhalb des Ursprungs ist

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2},$$

die Energie aller Felder also

$$\alpha^{-2} \cdot (1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3 + \dots) = 2\alpha^{-4} - \alpha^{-2} = \alpha^{-5}.$$

Das ist gerade die Energie des Feldes (0, 5). Wir argumentieren nun so: Die Energie der Anfangsstellung beträgt  $\alpha^{-5}$ . Bei jedem Zug bleibt die Energie erhalten oder sinkt. Da stets noch unendlich viele Steine mit positiver Energie übrigbleiben, kann kein Stein die gesamte Energie  $\alpha^{-5}$  für sich allein haben. Insbesondere kann niemals ein Stein auf dem Feld (0, 5) sitzen.

In diesem Beispiel waren wir gezwungen, die ursprüngliche Idee der Invarianten aufzugeben: Die von uns definierte Energie blieb bei ungünstigen Zügen nicht erhalten. Eine passendere Metapher wäre, wenn wir bei physikalischen Begriffen bleiben wollten, die Entropie gewesen, und ich hätte eigentlich eher von einer „Subinvarianten“ sprechen müssen als von einer Invarianten. Aber heuristische Prinzipien sind eben nur solange brauchbar, wie sie zum Erfolg führen. Ich fasse zusammen:

Die Suche nach Invarianten, d.h. nach Größen, die bei Spielzügen, bei Symmetrieoperationen oder bei dynamischen Veränderungen unveränderlich bleiben, kann wesentlich zur Analyse eines Problems und zum Auffinden seiner Lösung beitragen. Bei der Konstruktion einer Invarianten kann es hilfreich sein, sich von außermathematischen Begriffen und den damit verbundenen Erfahrungen und Assoziationen leiten zu lassen, wie zum Beispiel den physikalischen Größen Ladung, Energie oder Entropie. Wie bei jeder Heuristik wird eine Idee durch den Erfolg gerechtfertigt; die Zensurschere, die mathematisch ungesicherte Annahmen sofort verbietet, darf erst ganz zum Schluss ansetzen: Zunächst ist alles erlaubt.

Anmerkungen:

1) Während des Vortrages kam die Frage auf, ob es denn gerechtfertigt war, in Conways Beispiel Sprünge von oben nach unten als ungünstig zu verwerfen, schließlich gäbe es ja auch im Schach Züge, die zunächst ungünstig aussähen, aber langfristig zum Sieg führten, etwa Figurenopfer. Dass ich Sprünge nach unten, oder in ähnlicher Weise Sprünge von der Mitte nach außen, als ungünstig beurteilt habe, war zunächst einfach eine Einschätzung, die nicht logisch, sondern nur durch Spielerfahrung begründet war. Indem es mir aber gelang, eine subinvariante Energiefunktion zu definieren, *die uns zur Lösung der Aufgabe führte*, ist diese Einschätzung, nämlich, dass ich solche Züge vernachlässigen darf, im Nachhinein durch den Erfolg gerechtfertigt. Ohne den Erfolg hätte sich diese Auffassung unter Umständen als ein unbegründetes Vorurteil herausstellen können. Siehe letzter Absatz des Textes.

2) Ich bin nach dem Vortrag auf ein Buch aufmerksam gemacht worden, in dem gleich im ersten Kapitel Invarianz als heuristisches Prinzip beim Lösen von mathematischen Aufgaben behandelt wird: Arthur Engel: Problem-Solving Strategies (Problem Books in Mathematics) Springer Verlag 1998, ISBN 0387982191.